Y15 276

北京大学学报

自然科学

1

1958

目　录

論算术級数中之最小素数*

潘　承　洞

（数学力学系函数論教研室）

引　言

設以 $P_{\min}(D,l)$ 表示算术級数 $nD+l, 1\leqslant l\leqslant D-1, (l,D)=1$ 中之最小素数，則在广义黎曼猜測下很易証明当 D 充分大时有

$$P_{\min}(D,l)<D^{2+\varepsilon}$$

其中 ε 可为任意小之正数，在 1944 年 Ю. В. Линник[1][2][3]首先不用任何假設証明了存在一个正的絕对常数 A 使得

$$P_{\min}(D,l)<D^{A},$$

但他的証明長达六十余頁．1954 年 K. A. Родосский[4] 才給了一个較为簡單的証明，但 P. Turán 在他的書[5]未曾提及 Родосский 的方法並未給出 A 的数值的任何消息，並指出如果改用他自己的方法很可能定出 A 来，但尙未見到利用这个提示的任何文章．在文[6]內作者指出了当 D 充分大时有

$$P_{\min}(D,l)<D^{A_1}, \tag{1}$$

其中 $A_1\leqslant 10^4$，並敍述証明的大概步驟．本文的目的在於更进一步的証明了下面的定理．

定理、当 D 充分大时有 $A_1\leqslant 5448$．

定理的証明依賴於下面的兩个基本引理及一个补助引理．

补助引理，設 $L(S,\chi_1), L(S,\chi_2)\cdots L(S,\chi_{\varphi(D)-1})$ 为屬於模 D 的 $\varphi(D)-1$ 个 L-函数（除去主特征），則除去可能有一实的簡單零点 $\widetilde{\beta}$（它屬於一实特征 $\widetilde{\chi}$）外，在下面的区域內恆有 $L(S,\chi)\neq 0, \chi\neq\chi_0$．

$$\sigma>1-C\log^{-1}D(|t|+1),\quad -\infty<t<+\infty.$$

其中 $C>(180)^{-1}$，若 D 充分大．

第一基本引理，設 $U\geqslant 60, \psi\in[0,\log\log D]$，以 $Q(D,\psi)$ 表示所有屬於模 D 的 L-函数在矩形 R 內至少有一个零点的数目

$$1-\psi\log^{-1}D\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t|\leqslant e^{U\psi}(25\log D)^{-1}. \tag{R}$$

則当 D 充分大时有

$$Q(D,\psi)<\begin{cases}5{,}020\,e^{U\psi}, & 0<\psi\leqslant\frac{1}{50}.\\ 10^{14}e^{U\psi}, & \frac{1}{50}<\psi\leqslant\frac{1}{6}.\\ e^{(1{,}500+U)\psi}, & \frac{1}{6}<\psi\leqslant 2,\\ e^{(2{,}230+U)\psi}, & 2<\psi\leqslant\log\log D.\end{cases}$$

* 1957 年 5 月 3 日收到．

第一基本引理中ψ变动所在的区間与 Родосский 所考虑的不同，他討論到$\psi\in[2, 0.1\log D]$的情形，我們改成現在的形式使最后結果有了改进。

第二基本引理．設$L(S,\chi)$，$(\chi\neq\chi_0)$有一零点$\rho_0=1-\alpha_1+i\tau_0\neq\tilde{\beta}$，这里$\alpha_1=\psi\log^{-1}D(|\tau_0|+1)$，則在条件$(1-\tilde{\beta})\log D(|\tau_0|+1)\leqslant(e\cdot10^4)^{-1}$下必有

$$\psi>A_2\log\frac{A_3}{\tilde{\delta}\log D(|\tau_0|+1)},$$

这里$\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$．若$D$充分大，則有$A_2=(2,144)^{-1}$，$A_3=10^{-4}$。

在全文中我們恆假定D充分大並採用下面的記号：

$A_1, A_2\cdots$——正的絕对常数；

$C_1, C_2\cdots$——正的絕对常数，但在不同章中可代表不同的意义；

$\theta_1, \theta_2\cdots$——絕对值不超过1的复数．

χ式$\chi^{(n)}$——屬於模D的特征；χ_0为主特征；

$\tilde{\beta}$——例外零点（定义見附录）；

ε——任意小之正数，但同一ε可有不同的意义；

$S=\sigma+it$——复数；

$\rho=\beta+i\tau$——L-函数的零点；

p, p_i——素数；

$\delta=1-\beta$，$\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$；

$\alpha=\psi\log^{-1}D$，$\gamma=e^{U\psi}\log^{-1}D$，$U\geqslant60$，

$L=|\tau_0|+1$，$\alpha_1=\psi\log^{-1}DL$；

C——补助引理中之常数；

最后作者衷心感謝閔嗣鶴教授的鼓励与帮助。

第一章 第一基本引理

本章的目的在於証明第一基本引理，我們將在下面几节逐步証明它。

§ 1.

引理 1·1. 設$S_0=1+\log^{-1}D+it_0$，$\chi\neq\chi_0$，則在$|S-S_0|\leqslant220\,\alpha$內下面等式成立，这里$\psi\in\left[\frac{1}{6};\log\log D\right]$.

$$\frac{L'}{L}(S,\chi)=\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{S-\rho}+C_1\theta_1\log D(|t_0|+1).\tag{1·1}$$

其中$C_1=2+\varepsilon$。

証．我們有（参考[7]）

$$\frac{L'}{L}(S,\chi)=\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{S-\rho}+\frac{\theta_2}{\left(\frac{1}{2}-r\right)^2}\log\frac{M}{|L(S_0,\chi)|},\quad 在|S-S_0|\leqslant r<\frac{1}{2}內成立．$$

其中$M=\max\limits_{|S-S_0|=1}|L(S,\chi)|$．

由 $|L(S,\chi)|\leqslant(|t|+1)M_\chi^{1-\sigma+\varepsilon}(2\geqslant\sigma>\log^{-1}D,\ \chi\neq\chi_0)$ 这里 $M_\chi=\max\left|\sum_{m=1}^{n}\chi(m)\right|$ 及 Vinogradov-Polya 定理得

$$|L(S,\chi)|\leqslant(|t|+1)D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\quad 对\ \chi\neq\chi_0\quad 2\geqslant\sigma>\log^{-1}D$$

現取 $r=220\,\alpha<\frac{1}{2}$. 卽得

$$\frac{L'}{L}(S,\chi)=\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{S-\rho}+O_1(2+\varepsilon)\log D(|t_0|+1).$$

引理 1·2. 設 $r\in[\log^{-1}D,1]$, $S_1=1+it$, $Q(r,t)$ 表示 $L(S,\chi)(\chi\neq\chi_0)$ 在以 S_1 为中心以 r 为半徑的圓內的零点的个数（包括它們的重数），則有 $Q(r,t)\leqslant C_2r\log D(|t|+1)$，且 $C_2\leqslant 4\,C_1$.

証. 先假定 $r\in\left[\log^{-1}D,\frac{1}{4}\right]$，取 $S=1+\log^{-1}D+it$，我們有

$$\mathscr{R}\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{S-\rho}\leqslant\left|\frac{L'}{L}(S,\chi)\right|+C_1\log D(|t|+1)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}+C_1\log D(|t|+1)\leqslant$$
$$\leqslant 2\log D+C_1\log D(|t|+1).\tag{1·2}$$

但另一方面有

$$\mathscr{R}\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{S-\rho}=\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\tau)^2}=\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{(\sigma-\beta)+\frac{(t-\tau)^2}{\sigma-\beta}}\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{|t-\tau|\leqslant r}\frac{1}{(\sigma-\beta)+\frac{r^2}{\sigma-\beta}}\geqslant\frac{Q(r,t)}{2r}.\tag{1·3}$$

这里我們取 $S_0=1+\log^{-1}D+it$.

由 (1·2) 及 (1·3) 卽得 $Q(r,t)\leqslant 4r\log D+2C_1r\log D(|t|+1)$.

若 $\frac{1}{4}\leqslant r\leqslant 1$，以 $n(r,t)$ 表示 $L(S,\chi)$ 在以 $1+\log^{-1}D+it$ 式为中心以 r 为半徑的圓內的零点的个数（包括重数），显有 $n(r,t)\geqslant Q(r,t)\cdot\log 2$.

由因生(Иенсена)公式得

$$\int_0^{2r}\frac{n(x,t)}{x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|L(1+\log^{-1}D+it+2re^{i\theta},\chi)|\,d\theta-\log|L(1+\log^{-1}D+it,\chi)|$$

因当 $-1\leqslant\sigma\leqslant 3$ 时有 $|L(S,\chi)|\leqslant(D(|t|+1))^2$，故得

$$\int_0^{2r}\frac{n(x,t)}{x}dx\leqslant 2\log D(|t|+1)+2\log\log D\leqslant C_1\log D(|t|+1).\tag{1·4}$$

但

$$\int_0^{2r}\frac{n(x,t)}{x}dx\geqslant\int_r^{2r}\frac{n(x,t)}{x}dx\geqslant n(r,t)\log 2,\tag{1·5}$$

由 (1·4) 及 (1·5) 得 $n(r,t)\leqslant(\log 2)^{-1}C_1\log D(|t|+1)$,

故 $Q(r,t)\leqslant C_1\log D(|t|+1)\leqslant 4C_1 r\log D(|t|+1)$，至此引理得証.

引理 1·3. 設 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 內有連續的微商，M 表在 $[a,b]$ 內的一有限点集，$N(x)$ 表集合 M 內的点在 $[a,x]$ 內的数目，則有

$$\sum_{\chi\in M}\Phi(x)=\Phi(b)N(b)-\int_a^b\Phi'(t)N(t)dt.$$

引理 1·4. 設在矩形 R 內

$$1-\alpha\leqslant\sigma\leqslant 1,\qquad |t|\leqslant\gamma. \tag{R}$$

$L(S,\chi)$ $(\chi\neq\chi_0)$ 有一零点 $\rho_{0\chi}=\beta_{0\chi}+i\tau_{0\chi}$，这里 $\psi\in\left[\frac{1}{6},\log\log D\right]$，則一定可找到另外一个零点 $\rho_{1\chi}=\beta_{1\chi}+i\tau_{1\chi}$（可能 $\rho_{1\chi}=\rho_{0\chi}$），滿足 $\beta_{1\chi}\geqslant\beta_{0\chi}$, $|\tau_{1\chi}-\tau_{0\chi}|\leqslant 5C_3K\psi\gamma$，使在矩形 $R_{1\chi}$ 內

$$\beta_{1\chi}+(K\log D)^{-1}\leqslant\sigma\leqslant 2,\quad |t-\tau_{1\chi}|\leqslant 5C_3\gamma. \tag{$R_{1\chi}$}$$

$L(S,\chi)\neq 0$，这里 $K>4$, $C_3\geqslant 40$.

証. 这定理是 Линник 与 Родосский 所証明的（参考[1],[4]）这里我們將 $|t-\tau_{1\chi}|\leqslant 5\gamma$ 改成了 $|t-\tau_{1\chi}|\leqslant 5C_3\gamma$，使引理 2. 有了改进.

引理 1·5. 設 $\psi\in\left[\frac{1}{6},\log\log D\right]$. $\sigma_{1\chi}=\beta_{1\chi}+2(K\log D)^{-1}$，作矩形 $R_{2\chi}$

$$\sigma_{1\chi}-(2K\log D)^{-1}\leqslant\sigma\leqslant 2,\quad |t-\tau_{1\chi}|\leqslant 4C_2\gamma. \tag{$R_{2\chi}$}$$

則对任一 $S\in R_{2\chi}$ 有

$$\left|\frac{L'}{L}(S,\chi)\right|<C_4K\psi\log D.$$

其中 $C_4\leqslant 70$.

証. 若 $\sigma\geqslant 1+(6\log D)^{-1}$，則 $\left|\frac{L'}{L}(S,\chi)\right|\leqslant 7\log D$，引理已証明了. 現假定 $\sigma<1+(6\log D)^{-1}\leqslant 1+\alpha$. 命 $S_1=1+\alpha+it$, $S_2=1+it$.

由引理 1·1 得

$$\left|\frac{L'}{L}(S,\chi)-\frac{L'}{L}(S_1,\chi)\right|\leqslant\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{S-\rho}-\frac{1}{S_1-\rho}\right|+2C_1\log D(|t|+1). \tag{1·6}$$

而

$$\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{S-\rho}-\frac{1}{S_1-\rho}\right|\leqslant\sum_{|S_2-\rho|\leqslant 2\alpha}\left|\frac{1}{S-\rho}-\frac{1}{S_1-\rho}\right|+\sum_{2\alpha\leqslant|S_2-\rho|\leqslant 1}\left|\frac{1}{S-\rho}-\frac{1}{S_1-\rho}\right| \tag{1·7}$$

但

$$\left|\frac{1}{S-\rho}-\frac{1}{S_1-\rho}\right|=\frac{|S-S_1|}{|S-\rho||S_1-\rho|}\leqslant\frac{\alpha}{\alpha\cdot(2K\log D)^{-1}}=2K\log D$$

故

$$\sum_{|S_2-\rho|\leqslant 2\alpha}\left|\frac{1}{S-\rho}-\frac{1}{S_1-\rho}\right|\leqslant 2K\log D\cdot C_2\cdot 2\alpha\log D\leqslant 16\,C_1K\psi\log D.$$

当 $2\alpha\leqslant|S_2-\rho|\leqslant 1$ 时有 $|S_2-\rho|\leqslant|S_2-S_1|+|S_1-\rho|\leqslant\alpha+|S_1-\rho|\leqslant 2|S_1-\rho|$ 及

$|S-\rho|\leqslant|S_2-\rho|-\alpha\geqslant\frac{1}{2}|S_2-\rho|$,故

$$\sum_{2\alpha\leqslant|S_2-\rho|\leqslant1}\left|\frac{1}{S-\rho}-\frac{1}{S_1-\rho}\right|\leqslant4\alpha\sum_{2\alpha\leqslant|S_2-\rho|\leqslant1}|S_2-\rho|^{-2}\leqslant5C_2\log D. \tag{1·8}$$

(1·8)的估計只要利用引理 1·3 就行. 由(1·6),(1·7)及(1·8)得

$$\left|\frac{L'}{L}(S,\chi)\right|\leqslant7\log D+16\,C_1K\psi\log D+5\,C_2\log D+2\,C_1\log D(|t|+1)\leqslant70\,K\psi\log D$$

引理得証.

§ 2.

令

$$J(S,N,\chi)=-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{L'}{L}(w,\chi)e^{(S-\omega)^2N^2}dw$$

这里 $N=K\log D$,則有(参考[8])

$$J(S,N,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)n^{-S}e^{-\frac{\log^2n}{4N^2}}.$$

作矩形 $R_{3\chi}$

$$\sigma_{1\chi}-(2K\log D)^{-1}\leqslant\sigma\leqslant1+220\,\alpha,\ |t-\tau_{1\chi}|\leqslant C_3\gamma. \tag{$R_{3\chi}$}$$

显有 $R_{1\chi}\supset R_{2\chi}\supset R_{3\chi}$,对每一 $S\in R_{3\chi}$ 作环路 $\Gamma(S)$ 由 $\Gamma_i(i=1,2,3,4,5)$ 組成.

$$\Gamma_1\{1+\gamma+i(t-2C_3\gamma);\ 1+\gamma-i\infty\},$$
$$\Gamma_2\{\sigma+i(t-2C_3\gamma);\ 1+\gamma+i(t-2C_3\gamma)\},$$
$$\Gamma_3\{\sigma+i(t-2C_3\gamma);\ \sigma+i(t+2C_3\gamma)\},$$
$$\Gamma_4\{1+\gamma+i(t+2C_3\gamma);\ \sigma+i(t+2C_3\gamma)\},$$
$$\Gamma_5\{1+\gamma+i\infty;\ 1+\gamma+i(t+2C_3\gamma)\}.$$

將 $\mathscr{R}w=2$ 換成 $P(S)$ 得

$$J(S,N,\chi)=-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_3}\frac{L'}{L}(w,\chi)e^{(S-\omega)^2N^2}dw-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4,\Gamma_5}\frac{L'}{L}(w,\chi)e^{(S-\omega)^2N^2}dw.$$

我們先研究在 Γ_3 上的积分,由引理 1·1 得

$$-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_3}\frac{L'}{L}(w,\chi)e^{(S-\omega)^2N^2}dw=\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{|w_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{e^{-u^2N^2}}{w-\rho}du+\theta_3(C_1+\varepsilon)\log D,$$

其中 $u=\mathscr{T}w-t$, $w_0=1+\log^{-1}D+i\left(\mathscr{T}w+\frac{\theta_4}{\log D}\right)$; 故滿足 $|w-w_0|\leqslant7\alpha$, 令 $\sigma_{0\chi}=\beta_{1\chi}+(K\log D)^{-1}$,及

$$P_\chi(S)=\mathscr{R}\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{\substack{|w_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta\leqslant\sigma_{0\chi}}}\frac{e^{-u^2N^2}}{w-\rho}du,$$

化簡得

$$P_\chi(S)=\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{\substack{|w_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta\leqslant\sigma_{0\chi}}}\frac{(\sigma-\beta)e^{-u^2N^2}}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\tau)^2}du,$$

因此 $J(S,N,\chi)$ 的实部可写成

$$\mathscr{R}J(S,N,\chi)=P_\chi(S)+\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{\substack{|w_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta>\sigma_{0\chi}}}\frac{(\sigma-\beta)e^{-u^2N^2}}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\tau)^2}du+\theta_3(C_1+\varepsilon)\log D+$$

$$+\theta_5\left|\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_1,\Gamma_1,\Gamma_4,\Gamma_5}\frac{L'}{L}(w,\chi)e^{(S-\omega)^2N^2}\,dw\right|=P_\chi(S)+R_\chi(S). \qquad (2\cdot1)$$

其中 $R_\chi(S)$ 記作(2·1)式中右边三項之和。

引理 2·1. 令 $S_{2\chi}=\sigma_{1\chi}+i\tau_{1\chi}$,若 $L(S,\chi)$ $(\chi\neq\chi_0)$ 在R内有一零点,則

$$P_\chi(S_{2\chi})>\frac{K}{3}\log D.$$

証. 由 $P_\chi(S)$ 的表达式知当 $\sigma=\sigma_{1\chi}$ 时它的每項都是正的,而由引理 1·4 知有一零点 $\rho_{1\chi}=\beta_{1\chi}+i\tau_{1\chi}$,故得

$$P_\chi(S_{2\chi})\geqslant\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\frac{(\sigma_{1\chi}-\beta_{1\chi})e^{-u^2N^2}}{(\sigma_{1\chi}-\beta_{1\chi})^2+u^2}du\geqslant\frac{4K\log D}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3K}^{2C_3K}\frac{e^{-t^2}}{4+t^2}dt\geqslant\frac{K}{3}\log D.$$

引理 2·2. 若 $S\in R_{3\chi}$,則 $|R_\chi(S)|<2.02\log D$.

証. 若 $C_3\gamma>\frac{1}{2}$,則

$$\sum_{\substack{|w_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta>\sigma_{0\chi}}}\frac{(\sigma-\beta)e^{-u^2N^2}}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\tau)^2}=0$$

因为这时有 $|\tau-\tau_{1\chi}|\leqslant|\tau-(t+u)|+|t+u-\tau_{1\chi}|\leqslant\frac{1}{2}+3C_3\gamma\leqslant4C_3\gamma$.
由引理 1·4 知这是不可能的,今設 $C_3\gamma\leqslant\frac{1}{2}$,令 $w_1=1+i(t+u)$,則

$$\left|\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{\substack{|w_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta>\sigma_{0\chi}}}\frac{(\sigma-\beta)e^{-u^2N^2}}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\tau)^2}du\right|\leqslant\frac{221N\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{\substack{|w_1-\rho|\leqslant1\\ \beta>\sigma_{0\chi}}}\frac{e^{-u^2N^2}}{|w-\rho|^2}du$$

但当 $|w_1-\rho|\leqslant C_3\gamma$ 时有 $|w-\rho|\geqslant|w_1-\rho|-|w_1-w|\geqslant|w_1-\rho|-7\alpha\geqslant\frac{1}{2}|w_1-\rho|$,故

$$\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{\substack{|w_1-\rho|\leqslant1\\ \beta>\sigma_{0\chi}}}\frac{e^{-u^2N^2}}{|w-\rho|^2}du\leqslant\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{2^\nu C_3\gamma\leqslant|w_1-\rho|\leqslant2^{\nu+1}C_3\gamma}e^{-u^2N^2}\cdot|w-\rho|^{-2}du\leqslant$$

$$4\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{2^\nu C_3\gamma\leqslant|w_1-\rho|\leqslant2^{\nu+1}C_3\gamma}e^{-u^2N^2}|w_1-\rho|^{-2}du,$$

其中 ν_0 为使 $2^\nu C_3\gamma\leqslant1$ 中之最大自然数。

利用引理 1·2 及引理 1·4 得

$$\sum_{2^\nu C_3\gamma\leqslant|w_1-\rho|\leqslant 2^{\nu+1}C_3\gamma}|w_1-\rho|^{-2}\leqslant Q(2^{\nu+1}C_3\gamma,t+u)\cdot 2^{-2\nu-2}C_3^{-2}\gamma^{-2}+2\int_{2^\nu C_3\gamma}^{2^{\nu+1}C_3\gamma}\frac{Q(x,t+u)}{x^3}dx\leqslant$$
$$\leqslant C_2\cdot C_3^{-1}\cdot 2^{-\nu-1}\gamma^{-1}\log D(|t+u|+1)+2C_2\log D(|t+u|+1)\cdot 2^{-\nu-1}C_3^{-1}\gamma^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant 3C_2C_3^{-1}\cdot 2^{-\nu-1}\gamma^{-1}\log D(|t+u|+1).$$

故

$$\left|\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{-2C_3\gamma}^{2C_3\gamma}\sum_{\substack{|w_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta>\sigma_{0\chi}}}\frac{(\sigma-\beta)e^{-u^2N^2}}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\tau)^2}du\right|\leqslant\frac{1{,}920\,C_2\alpha}{C_3}\sum_{\nu=0}^{\nu_0}2^{-\nu}\cdot\gamma^{-1}\log D\leqslant$$
$$\leqslant\frac{3{,}840\,C_2\psi}{C_3e^{U\psi}}\log D\leqslant 0.01\log D,\ (\text{因 } C_3\geqslant 40,\ U\geqslant 60). \tag{2·2}$$

而

$$\left|\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_2,\Gamma_4}\frac{L'}{L}(w,\chi)e^{(S-\omega)^2N^2}dw\right|<\frac{C_4KN\psi\log D}{\sqrt{\pi}}\int_\sigma^{1+\gamma}e^{\{(\sigma-u)^2-4C_3^2\gamma^2\}N^2}du<$$
$$<\frac{C_4KN\psi\log D}{\sqrt{\pi}}\cdot 2\gamma e^{-2C_3^2K^2e^{2U\psi}}<0.001\log D. \tag{2·3}$$

$$\left|\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_1,\Gamma_5}\frac{L'}{L}(w,\chi)e^{(S-\omega)^2N^2}dw\right|<\frac{2N\gamma^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_{2C_3\gamma}^{\infty}e^{\{(\sigma-1-\gamma)^2-u^2\}N^2}du<$$
$$<e^{-2C_3^2K^2e^{2U\psi}}\log D<0.001\log D. \tag{2·4}$$

由 (2·1), (2·2), (2·3) 及 (2·4) 得

$$|R_\chi(S)|<(C_1+\varepsilon+0.002+0.01)\log D<2.02\log D.$$ 引理得証.

引理 2·3. 設 K^* 为以 S^* 为中心，以 $(2K\log D)^{-1}$ 为半徑且全部在 $R_{3\chi}$ 內之圓，則当 $S\in K^*$ 时有 $P_\chi(S)<4P_\chi(S^*)$.

証. 为簡便計令 $x^*=\sigma^*-\beta,\ y^*=t^*+u-\tau,\ x=\sigma-\beta,\ y=t+u-\tau,\ r=(2K\log D)^{-1}$. 則很易看出要証明引理只要証明 $\frac{x}{x^2+y^2}<\frac{4x^*}{x^{*2}+y^{*2}}$ 就成了，分兩种情形来考慮. 1, $x<x^*$, 2, $x\geqslant x^*$.

若 1) 成立則引理很易証明，因为显有 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\sqrt{x^{*2}+y^{*2}}-r\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^{*2}+y^{*2}}$. 故只要考慮 2) $x>x^*$ 就成，但 $x\leqslant x^*+r\leqslant\frac{3}{2}x^*$, 故只要証明 $x^*+y^2\geqslant\frac{3}{8}(x^{*2}+y^{*2})$, 則引理就証明了.

而

$$x^2+y^2\geqslant x^{*2}+y^2\geqslant\frac{3}{8}\left(\frac{8}{3}x^{*2}+\frac{8}{3}y^2\right)\geqslant\frac{3}{8}\left(x^{*2}+\frac{5}{3}x^{*2}+\frac{8}{3}y^2\right). \tag{2·5}$$

若 $|y^*|^2\leqslant\frac{20}{3}r^2$, 則由 $\frac{5}{3}x^{*2}\geqslant\frac{20}{3}r^2$ 推出 $x^2+y^2\geqslant\frac{3}{8}(x^{*2}+y^{*2})$.

另一方面必有 $|y|\geqslant|y^*|-r$, 故

$$\frac{5}{3}x^{*2}+\frac{8}{3}y^2\geqslant\frac{5}{3}x^{*2}+\frac{8}{3}(y^{*2}-2|y^*|r+r^2)\geqslant\frac{5}{3}x^{*2}+y^{*2}+\frac{y^*}{3}(5|y^*|-16r)$$

若 $|y^*|>\frac{16}{5}r$. 則引理亦証明了,故只要考慮 $\sqrt{\frac{20}{3}}r<|y^*|\leqslant\frac{16}{5}r$ 的情形就行了. 由 $(2\cdot5)$ 式得

$$x^2+y^2\geqslant\frac{3}{8}\left[x^{*2}+\frac{20}{3}r^2+\frac{8}{3}\left(\sqrt{\frac{20}{3}}-1\right)^2r^2\right]\geqslant\frac{3}{8}\left(x^{*2}+\frac{256}{25}r^2\right)\geqslant\frac{3}{8}(x^{*2}+y^{*2}),$$

引理得証.

由引理 2·1 及引理 2·2 得

$$\mathscr{R}J(S_{2\chi},N,D)>\left(\frac{K}{3}-2.02\right)\log D. \tag{2·6}$$

§ 3.

在本节中我們限於討論 $\psi\in[2,\log\log D]$ 的情形.

令

$$Z=\exp\left(\frac{\log D\cdot\log\psi}{10\,\psi}\right)$$

則当 $\sigma\geqslant1-\alpha$ 时有

$$\left|\sum_{p\leqslant Z}\frac{\chi(p)\log p}{p^S}e^{-\frac{\log^2p}{4N^2}}\right|+\left|\sum_{\substack{n=p^a\\ a\geqslant2}}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^S}e^{-\frac{\log^2n}{4N^2}}\right|<0.1\log D, \tag{3·1}$$

引入兩新函数

$$f_1(S,\chi)=\sum_{Z<p\leqslant D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^S}e^{-\frac{\log^2p}{4N^2}},$$

$$f_2(S,\chi)=\sum_{p>D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^S}e^{-\frac{\log^2p}{4N^2}},$$

取 $K=15$,由 $(2\cdot6)$ 及 $(3\cdot1)$ 得

$$|f_1(S_{2\chi},\chi)|+|f_2(S_{2\chi},\chi)|>3.13\log D. \tag{3·2}$$

取 $z_{0\chi}=1+100\,\alpha+i\tau_{1\chi}$, $\gamma_{1\chi}=1+100\,\alpha-\sigma_{1\chi}$,作环 $E_\chi\subset R_{3\chi}$,

$$\gamma_{1\chi}-(2K\log D)^{-1}\leqslant|S-z_{0\chi}|\leqslant r_{1\chi}+(2K\log D)^{-1}. \tag{E_χ}$$

則有兩种可能情形:

1) 或者存在点 $S_{3\chi}\in E_\chi$ 使得

$$|f_1(S_{3\chi},\chi)|\geqslant0.1\log D.$$

2) 或者在 E_χ 内处有

$$|f_1(S,\chi)|<0.1\log D.$$

現在我們假定 2) 成立,作圓周 $C_{1\chi}$

$$|S-z_{0\chi}|=\gamma_{1\chi} \tag{$C_{1\chi}$}$$

則 $|f_2(S,\chi)|$ 在某一点 $S_{4\chi}$ 达到其最大値 M_1,由於这圓周通过 $S_{2\chi}$ 故有

$$\max_{C_{1\chi}}|f_2(S,\chi)=M_1>3\log D.$$

令 $\gamma_0=(2K\log D)^{-1}$,作圓 $C_{0\chi}$

$$|S-S_{4\chi}|\leqslant\gamma_0, \qquad (C_{0\chi})$$

則 $C_{0\chi}$ 整个都屬於 E_χ 内，由引理 2·3 得 $P_\chi(S)<4P_\chi(S_{4\chi})$，当 $S\in C_{0\chi}$ 时由於 2) 成立，故当 $S\in E_\chi$ 时有 $|f_1(S,\chi)|<0.1\log D$，再由 $f_2(S,\chi)$ 的定义及 (3·1) 得

$$|\mathscr{R}f_2(S,\chi)|<|\mathscr{R}J(S,N,\chi)|+0.2\log D, \qquad (3\cdot3)$$

由 (2·1) 得

$$|\mathscr{R}J(S,N,\chi)|\leqslant P_\chi(S)+|R_\chi(S)|<P_\chi(S)+2.02\log D, \qquad (3\cdot4)$$

將引理 2·3 用到 $C_{0\chi}$ 上得

$$\begin{aligned}P_\chi(S)&<4P_\chi(S_{4\chi})<4|J(S_{4\chi},N,\chi)|+4|R_\chi(S_{4\chi})|<\\&<4|f_2(S_{4\chi},\chi)|+0.8\log D+8.08\log D<\\&<4M_1+8.88\log D. \end{aligned}\qquad (3\cdot5)$$

由 (3·3), (3·4), (3·5) 得

$$|\mathscr{R}f_2(S,\chi)|<8M_1, \qquad 当\ S\in C_{0\chi} \qquad (3\cdot6)$$

取 $\gamma_0'=(C_5K\log D)^{-1}$，其中 $C_5=(38a+36b)a^{-1}, a>0, b>0$，作圓 $C_{0\chi}'$.

$$|S-S_{4\chi}|\leqslant\gamma_0', \qquad (C_{0\chi}')$$

則由 Borel 定理得当 $S\in C_{0\chi}'$ 时有，

$$|f_2(S,\chi)-f_2(S_{4\chi},\chi)|<\frac{2\gamma_0'}{\gamma_0-\gamma_0'}(8+1)M_1=\frac{a}{a+b}M_1, \qquad (3\cdot7)$$

再作圓周 $C_{2\chi}$

$$|S-z_{0\chi}|=\gamma_{1\chi}-\gamma_0'=\gamma_{2\chi}, \qquad (C_{2\chi})$$

因 $C_{2\chi}$ 与 $C_{0\chi}'$ 相切故有

$$\max_{C_{2\chi}}|f_2(S,\chi)|=M_2\geqslant\frac{b}{a+b}M_1 \qquad (3\cdot8)$$

最后取 $\gamma_3=\begin{cases}100\,\alpha, & 若\ \sigma_{1\chi}<1-0.01\,\alpha,\\ 99\,\alpha, & 若\ \sigma_{1\chi}\geqslant1-0.01\,\alpha.\end{cases}$

作圓周 $C_{3\chi}$

$$|S-z_{0\chi}|=\gamma_3, \qquad (C_{3\chi})$$

以 M_3 記 $|f_2(S,\chi)|$ 在 $C_{3\chi}$ 上之最大値，則由阿达瑪三圓定理得

$$M_3\geqslant M_1^{\log\frac{\gamma_3}{\gamma_{2\chi}}:\log\frac{\gamma_{1\chi}}{\gamma_{2\chi}}}\cdot M_2^{\log\frac{\gamma_{1\chi}}{\gamma_3}:\log\frac{\gamma_{1\chi}}{\gamma_{2\chi}}}, \qquad (3\cdot9)$$

由 (3·8) 及 (3·9) 得

$$M_3\geqslant\exp\left\{-\log\left(1+\frac{a}{b}\right)\log\frac{\gamma_{1\chi}}{\gamma_3}:\log\frac{\gamma_{1\chi}}{\gamma_{2\chi}}\right\}M_1,$$

則不論 $\sigma_{1\chi}$ 之大小皆有

$$M_3\geqslant\exp\{-1.02(38a+36b)b^{-1}K\psi\}\log D,$$

現取 b 充分大，$a=1$，得

$$M_3\geqslant e^{-551\psi}\log D. \qquad (3\cdot10)$$

由以上討論可总結成下面兩种情形：

A) 或者存在点 $S_{3\chi}\in E_\chi$ 使 $|f_1(S_{3\chi},\chi)|\geqslant0.1\log D$.

B) 或者存在点 $S_{5\chi}\in C_{3\chi}$ 使 $|f_2(S_{5\chi},\chi)|\geqslant e^{-551\psi}\log D$.

§ 4.

設有 Q_1 个 L-函数在矩形 R 内有零点，則根据上节的討論知 A, B，兩种情形必有一成立，現分开討論之，我們要用到下面兩个引理：

引理 4·1. 設 $x \geqslant D^2, 2 \leqslant Z \leqslant D^{0.18}$, $(l, D)=1$，这时在算术級数 $nD+l$ 中不超过 x 的区間內且不含有小於Z的素因子的个数不超过 $2x(\varphi(D)\log Z)^{-1}$.

引理 4·2. 設 $x \geqslant Z^{10.8}$, $Z \geqslant 2$，这时在自然数中不超过 x 的区間內只含有大於 Z 的素因子的个数不超过 $2x\log^{-1}Z$.

上面兩引理的証明我們从 A. Selberg 篩法很易得出[9].

引理 4·3. 設有 $Q_2 \geqslant \frac{1}{2}Q_1$ 个 L-函数使 $A)$ 成立，則有 $Q_1 < e^{(U+2,000)\psi}$.

証. 由引理的条件知有 Q_2 个特征使 $|f_1(S_{3\chi}, \chi)| \geqslant 0.1\log D$, $S_{3\chi} \in E_\chi$. 一般說来对不同的 χ, E_χ 亦不同，但显見所有的 E_χ 都包含在下面的矩形 R_4 內

$$1-\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1+201\alpha, \quad |t| \leqslant 6C_3K\psi\gamma. \tag{R_4}$$

在 R_4 內作边長 $\eta=(80e^{2\psi}\log D)^{-1}$ 的正方形網其边平行於坐标軸且將 R_4 填滿. 显見这些正方形的个数不会超过 $7{,}818{,}500\, C_3K\psi^2e^{(4+U)\psi}$ 个，故至少有一个正方形 R_5 它含有 $Q_3 \geqslant Q_2(7{,}818{,}500\, C_3K\psi^2e^{(4+U)\psi})^{-1}$ 个 $S_{3\chi}$，以 S_3 記作 R_5 的中心，則有

$$|f_1(S_{3\chi}, \chi)-f_1(S_3, \chi)| \leqslant \int_{S_3}^{S_{3\chi}} |f_1'(S, \chi)|\,|ds| < \frac{1}{20}\log D. \tag{4·1}$$

由 (4·1) 及引理的条件得有 Q_3 个 L-函数使

$$\Big|\sum_{Z<p\leqslant D^2} \chi(p)\log\cdot p^{-S_3} e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\Big|^2 > \frac{1}{400}\log^2 D. \tag{4·2}$$

分 $[Z, D^2]$ 成下面形狀的区間：

$$\Big[e^{\frac{\log D\cdot\log\psi}{10\psi}}; e^{\frac{2\log D}{2^{\nu-1}}}\Big], \cdots \Big[e^{\frac{2\log D}{2^n}}; e^{\frac{2\log D}{2^{n-1}}}\Big], \cdots \Big[e^{\frac{2\log D}{2^1}}; e^{\frac{2\log D}{2^0}}\Big],$$

其中 ν 滿足 $\frac{2\log D}{2^\nu} \leqslant \frac{\log D\cdot\log\psi}{10\psi} < \frac{2\log D}{2^{\nu-1}}$，故有

$$2^\nu < \frac{40\psi}{\log\psi}, \quad \nu < 10\log\psi. \tag{4·3}$$

由 (4·2) 及 (4·3) 知必有 Q_3 个 χ 有不等式

$$\Big|\sum_{2^{1-n}\log D<\log p\leqslant 2^{2-n}\log D} \chi(p)\log p\cdot p^{-S_3} e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\Big|^2 > \frac{\log^2 D}{4{,}000\log\psi}, \quad n \leqslant \nu. \tag{4·4}$$

將 (4·4) 兩边自乘 2^n 次方得

$$\Big|\sum_{D^2<m\leqslant D^4} \frac{\chi(m)a_m}{m^{S_3}}\Big|^2 > e^{-720\psi}(\log D)^{2^{n+1}}. \tag{4·5}$$

其中

$$a_m < \sum_{m=p_1p_2\cdots p_{2^n}} \log p_1\log p_2\cdots\log p_{2^n} < (4\log D)^{2^n}(2^n)! < e^{480\psi}(\log D)^{2^n}. \tag{4·6}$$

但另一方面我們有

$$\sum_{\chi}\Big|\sum_{D^2<m\leqslant D^4}\frac{\chi(m)a_m}{m^{S_3}}\Big|^2\leqslant e^{968\psi}(\log D)^{2^{n+1}}\varphi(D)\sum_{D^2<u\leqslant D^4}u^{-1}\sum_{\substack{D^2<v\leqslant D^4\\ v\equiv u(modD)}}v^{-1},$$

由引理 4·1 及 4·2 得

$$\sum_{\chi}\Big|\sum_{D^2<m\leqslant D^4}\frac{\chi(m)a_m}{m^{S_3}}\Big|^2\leqslant 6,400\,e^{968\psi}\psi^2\log^{-2}\psi(\log D)^{2^{n+1}},\tag{4·7}$$

由 (4·5) 及 (4·7) 得:

$$Q_3\cdot e^{-720\psi}(\log D)^{2^{n+1}}<6,400\,e^{968\psi}\psi^2\log^{-2}\psi(\log D)^{2^{n+1}}.$$

从而推出

$$Q_1<e^{(U+2,000)\psi},$$

引理得証.

引理 4·4. 設 $\sigma\geqslant1$, 則 $|f_2(S,\chi)|\leqslant4K\log D$.

証. 由引理 1·3 及 Чебышев 定理得

$$\sum_{p<D^2}\log p\, e^{-\frac{\log^2p}{4N^2}-\log p}\leqslant2\int_{D^2}^{\infty}t\Big(\frac{\log t}{2N^2t}+\frac{1}{t}\Big)e^{-\frac{\log^2t}{4N^2}-\log t}dt=$$

$$=2\int_{2\log D}^{\infty}\frac{u}{2N^2}e^{-\frac{u^2}{4N^2}}du+2\int_{2\log D}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{4N^2}}du\leqslant4\int_0^{\infty}te^{-t^2}dt+4N\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt\leqslant4K\log D.$$

引理得証.

引理 4·5. 設 $\sigma\geqslant1$, 則 $|f_2'(S,\chi)|\leqslant8K^2\log^2D$.

証. 方法同上.

引理 4·6. 設有 $Q_2\geqslant\frac{1}{2}Q_1$ 个 L-函数使 $B)$ 成立, 則有 $Q_1<e^{(U+2,230)\psi}$.

証. 由引理的条件知有 Q_2 个 $S_{5\chi}\in C_{3\chi}$, 使 $|f_2(S_{5\chi},\chi)|>e^{-551\psi}\log D$. 显見所有的 $C_{3\chi}$ 都包括在矩形 R_6 内

$$1\leqslant\sigma\leqslant1+200\alpha,\qquad |t|\leqslant6C_3K\psi\gamma.\tag{R_6}$$

作边長 $\eta=(16K^2e^{551\psi}\log D)^{-1}$ 的正方形網將 R_6 盖住, 則这种正方形的个数不会超过 $307,200C_3K^5\psi^2e^{(U+1,102)\psi}$ 个, 故必有一正方形 R_7 它含有 $Q_3\geqslant Q_2(307,200C_3K^5\psi^2e^{(U+1,102)\psi})^{-1}$ 个 $S_{5\chi}$, 以 S_4 記 R_7 的中心, 則由引理 4·5 得

$$|f_2(S_{5\chi},\chi)-f_2(S_4,\chi)|\leqslant\int_{S_{5\chi}}^{S_4}|f_2'(S,\chi)||ds|<\frac{1}{2}e^{-551\psi}\log D.\tag{4·8}$$

故有 Q_3 个 χ 使

$$\Big|\sum_{p<D^2}\chi(p)\log p\cdot p^{-S_4}e^{-\frac{\log^2p}{4N^2}}\Big|^2>\frac{1}{4}e^{-1,102\psi}\log^2D.\tag{4·9}$$

但另一方面由引理 4·4 得

$$\sum_{\chi}\Big|\sum_{p>D^2}\chi(p)\log p\cdot p^{-S_4}e^{-\frac{\log^2p}{4N^2}}\Big|^2<16K^2\log^2D.\tag{4·10}$$

由 (4·9) 及 (4·10) 得

$$Q_3\cdot\frac{1}{4}e^{-1,102\psi}\log^2 D<16K^2\log^2 D,$$

由此推出

$$Q_1<e^{(U+2,230)\psi}.$$

引理得証.

§ 5.

本节要討論$\frac{1}{6}<\psi\leqslant 2$ 的情形:

由(2·6)得 $\mathscr{R}J(S_{2\chi},N,\chi)>\left(\frac{K}{3}-2.02\right)\log D$, 而当 $\sigma\geqslant 1-\alpha$ 时有

$$\left|\sum_{p\leqslant D^{1/4}}\frac{\chi(p)\log p}{p^S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right|+\left|\sum_{\substack{n=p^a\\ a\geqslant 2}}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^S}e^{-\frac{\log^2 n}{4N^2}}\right|<0.5\log D. \tag{5·1}$$

取 $K=12$ 得

$$\left|\sum_{D^{1/4}<p\leqslant D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^{S_{2\chi}}}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right|+\left|\sum_{p>D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^{S_{2\chi}}}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right|>1.3\log D, \tag{5·2}$$

引入新函数

$$f_1(S,\chi)=\sum_{D^{1/4}<p\leqslant D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}},$$

$$f_2(S,\chi)=\sum_{p>D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}.$$

則有兩种可能情形:

A) $|f_1(S_{2\chi},\chi)|\geqslant 0.3\log D$.

B) $|f_2(S_{2\chi},\chi)|\geqslant\log D$.

引理 5·1. 設 $\sigma\geqslant 1-\alpha$, 則 $|f_1(S,\chi)|\leqslant 2e^{2\psi}\log D$.

引理 5·2. 設 $\sigma\geqslant 1-\alpha$, 則 $|f_1'(S,\chi)|\leqslant 4e^{2\psi}\log^2 D$.

上兩引理只要利用引理1·3 卽可証明了.

引理 5·3. 設若有 $Q_2\geqslant\frac{1}{2}Q_1$ 个 L-函数使 A) 成立, 則有 $Q_1<e^{(U+1,500)\psi}$.

証. 显見这 Q_2 个 $S_{2\chi}$ 皆包含有矩形 R_8 內

$$1-\alpha\leqslant\sigma\leqslant 1+\alpha,\qquad |t|\leqslant 6C_3K\psi\gamma. \tag{R_8}$$

在 R_8 內作边長 $\eta=\left(\frac{80}{3}e^{2\psi}\log D\right)^{-1}$ 的正方形網將 R_8 盖住, 这些正方形的个数不会超过 $8{,}536\,C_3K\psi^2e^{(U+4)\psi}$ 个, 故必有一正方形 R_9 它至少含有 $Q_3\geqslant Q_2(8{,}536\,C_3K\psi^2e^{(U+4)\psi})^{-1}$ 个 $S_{2\chi}$, 以 S_5 記它的中心, 則由引理 5·2 得

$$|f_1(S_{2\chi},\chi)-f_1(S_5,\chi)|\leqslant\int_{S_5}^{S_{2\chi}}|f_1'(S,\chi)||ds|<\frac{3}{20}\log D. \tag{5·3}$$

对於这 Q_3 个 χ 有

$$\left|\sum_{D^{1/4}<p\leqslant D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^{S_5}}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right|>\frac{3}{20}\log D. \tag{5·4}$$

故必有一 $n\leqslant 3$ 使

$$\left|\sum_{2^{1-n}\log D<\log p\leqslant 2^{2-n}\log D}\chi(p)\log p\cdot p^{-S_5}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right|>\frac{1}{20}\log D. \tag{5·5}$$

將(5·5)式兩边自乘 2^{n+1} 次方得

$$\left|\sum_{D^2<m\leqslant D^4}\frac{\chi(m)a_m}{m^{S_5}}\right|^2>e^{-64}(\log D)^{2^{n+1}}, \tag{5·6}$$

这里 $a_m<(4\log D)^{2^n}(2^n)!<e^{77}(\log D)^{2^n}$. (5·7)

但另一方面由 5·7 及引理 4·1, 引理 4·2 得

$$\sum_{\chi}\left|\sum_{D^2<m\leqslant D^4}\frac{\chi(m)a_m}{m^{S_5}}\right|^2\leqslant e^{154+8\psi}(\log D)^{2^{n+1}}\varphi(D)\sum_{D^2<u\leqslant D^4}u^{-1}\sum_{\substack{D^2<v\leqslant D^4\\ v\equiv u(\bmod D)}}v^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant 1{,}024e^{154+8\psi}(\log D)^{2^{n+1}}.$$

从而推出

$$Q_1<e^{(U+1,500\psi)},$$

引理得証.

引理 5·4. 設 $\sigma\geqslant 1-\alpha$, 則 $|f_2(S,\chi)|\leqslant 4Ke^{K^2\psi^2}\log D$.

引理 5·5. 設 $\sigma\geqslant 1-\alpha$, 則 $|f_2'(S,\chi)|\leqslant 4K^3e^{K^2\psi^2}\log^2 D$.

上兩引理的証明只要利用引理 1·3 就成了.

引理 5·6. 設有 $Q_2\geqslant\frac{1}{2}Q_1$ 个 L-函数使 B) 成立, 則 $Q_1<e^{(U+1,500)\psi}$.

証. 在 R_8 内作边長 $\eta=(8K^3e^{K^2\psi^2}\log D)^{-1}$ 的正方形將其盖住, 这些正方形个数不超过 $768K^7\psi^2e^{(U+2K^2\psi)\psi}$ 个, 故必有一正方形 R_{10} 它至少含有 $Q_3\geqslant Q_2(768K^7\psi^2e^{(U+2K^2\psi)\psi})^{-1}$ 个 $S_{2\chi}$, 以 S_6 記作 R_{10} 的中心, 由引理 5·5 得

$$|f_2(S_{2\chi},\chi)-f_2(S_6,\chi)|\leqslant\int_{S_6}^{S_{2\chi}}|f_2'(S,\chi)||ds|<\frac{1}{2}\log D. \tag{5·9}$$

故有 Q_3 个特征使

$$\left|\sum_{p>D^2}\chi(p)\log p\cdot p^{-S_6}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right|^2>\frac{1}{4}\log^2 D, \tag{5·10}$$

但另一方面由引理 5·4 得

$$\sum_{\chi}\left|\sum_{p>D^2}\chi(p)\log p\cdot p^{-S_6}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right|^2<64K^2e^{2K^2\psi^2}\log^2 D, \tag{5·11}$$

由(5·10)及(5·11)得

$$Q_3\cdot\frac{1}{4}\log^2 D<64K^2e^{2K^2\psi^2}\log^2 D,$$

从而推出

$$Q_1<e^{(U+1,500)\psi},$$

引理得証.

§ 6.

本节中我們要討論 $0<\psi\leqslant\frac{1}{6}$ 的情形:

引理 6·1. 設 $L(S,\chi),(\chi\neq\chi_0)$ 在矩形 R_{11} 內有一零点 $\rho_\chi=\beta_\chi+i\tau_\chi$,

$$1-\alpha\leqslant\sigma\leqslant1,\qquad |t|\leqslant e^{U\psi}(K\log D)^{-1}. \tag{R_{11}}$$

則有 $\mathcal{R}\frac{L'}{L}(S_\chi,\chi)>(K-2.1)\log D$, 其中 $K=25$, $S_\chi=\beta_\chi+(K\log D)^{-1}+i\tau_\chi$.

証. 由引理 1·1 得

$$\frac{L'}{L}(S,\chi)=\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{S-\rho}+\theta_1C_1\log D(1+1).$$

故有 $\mathcal{R}\frac{L'}{L}(S_\chi,\chi)>(K-2.1)\log D$, 因 $C_1=2+\varepsilon$.

引理 6·2. 令 $f_\chi(S)=\sum_{p>D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^S}$, 則有

$$|f_\chi(S_\chi)|>(K-5)\log D.$$

証. 因

$$\Big|\sum_{\substack{n=p^a\\a=2}}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{S_\chi}}\Big|+\Big|\sum_{p\leqslant D^2}\frac{\chi(p)\log p}{p^{S_\chi}}\Big|\leqslant2.5\log D,$$

故 $|f_\chi(S_\chi)|>(K-4.6)\log D>(K-5)\log D$.

引理 6·3. 設若 $0<\psi\leqslant\frac{1}{2K}$, 則 $|f_\chi(S)|\leqslant2K\log D$. $|f'_\chi(S)|\leqslant4K^2\log^2D$.

証. 因当 $0<\psi\leqslant\frac{1}{2K}$ 时有 $\mathcal{R}S_\chi\geqslant1+\frac{1}{2K\log D}$, 故只要利用引理1·3就可証明了.

引理 6·4. 沒有 Q_1 个 L-函数在 R_{11} 內有零点, 則当 $0<\psi\leqslant\frac{1}{2K}$ 时有 $Q_1<5{,}020e^{U\psi}$.

証. 由引理 6·1 及引理 6·2 知对每一 $f_\chi(S)$ 皆可找到一对应的 S_χ 使 $|f_\chi(S_\chi)|>(K-5)\log D$, 但显見这些 S_χ 皆包含在下面的矩形 R_{12} 內

$$1\leqslant\sigma\leqslant1+(K\log D)^{-1},\quad |t|\leqslant e^{U\psi}(K\log D)^{-1}. \tag{R_{12}}$$

在 R_{12} 內作边長 $\eta=\left(\frac{8K^2}{K-5}\log D\right)^{-1}$ 的正方形將其盖住, 这些正方形的个数不会超过 $\frac{64K^2}{(K-5)^2}e^{U\psi}$ 个, 故必有一正方形 R_{13} 它含有 $Q_2\geqslant Q_1\left(\frac{64K^2}{(K-5)^2}e^{U\psi}\right)^{-1}$ 个 S_χ. 以 S_7 記它的中心, 則有

$$|f_\chi(S_\chi)-f_\chi(S_7)|\leqslant\int_{S_7}^{S_\chi}|f'_\chi(S)||ds|<\frac{(K-5)}{2}\log D,$$

故有 Q_2 个 χ 使

$$\Big|\sum_{p>D^2}\chi(p)\log p\cdot p^{-S_7}\Big|^2>\frac{(K-5)^2}{4}\log^2D. \tag{6·1}$$

但另一方面由引理 6·3 得

$$\sum_\chi\Big|\sum_{p>D^2}\chi(p)\log p\cdot p^{-S_7}\Big|^2<8K^2\log^2D. \tag{6·2}$$

由 (6·1) 及 (6·2) 得

$$Q_1<\frac{32\times 64K^4}{(K-5)^4}e^{U\psi}<5{,}020\,e^{U\psi},$$

引理得証.

引理 6·5. 設有 Q_1 个 L-函数在 R_{11} 内有零点,則当 $\frac{1}{50}\leqslant\psi\leqslant\frac{1}{6}$ 时有 $Q_1<10^{14}e^{U\psi}$.

証. 引理 6·5 的証明与引理 6·4 是差不多的, 只要令 $S_\chi=(5\log D)^{-1}+\beta_\chi+i\tau_\chi$ 就行了.

我們从引理 4·3, 4·6, 5·3, 5·6, 6·4, 6·5, 卽得第一基本引理.

第二章　第二基本引理

本章目的在於証明第二基本引理,有許多引理与第一章基本上是相同的,則全部删去或簡略其証明.

§ 1.

我們考慮函数 $f(S)=L(S,\chi)L(S+\widetilde{\delta},\chi\widetilde{\chi})$. 則当 $\sigma>1$ 时有

$$\frac{f'}{f}(S)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\Lambda(n)}{n^S}.$$

系数 b_{P^a} 由下式定义:

$$b_{P^a}=\chi(p^a)(1+\chi(p^a)p^{-a\widetilde{\delta}}),\quad (a=1,2,\cdots). \tag{1·1}$$

当 $\chi\neq\chi_0$ 时显有❶

$$\frac{f'}{f}(S)=\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{S-\rho}+C_1\theta_1\log D(|t|+1). \tag{1·2}$$

这里 $S_0=1+\log^{-1}D+it_0$, $|S-S_0|\leqslant 0.01$, $C_1=4.05$.

現設 $L(S,\chi)$ 有一零点 $\rho_0=\beta_0+i\tau_0$ (若 $\chi=\widetilde{\chi}$,則假定 $\rho_0\neq\widetilde{\beta}$), 令 $\beta_0=1-\alpha_1$,容易看出要証明第二基本引理只要估計 ψ 的下界就成,故不妨假定 $\alpha_1<0.001$.

与第一章引理 1·4 同样知 $f(S)$ 必有一零点 $\rho_1=\beta_1+i\tau_1$, 滿足 $\beta_1\geqslant\beta_0$, $|\tau_1-\tau_0|\leqslant 5K\psi$,使在矩形 R_{14} 內 $f(S)\neq 0$.

$$\beta_1+(K\log DL)^{-1}\leqslant\sigma\leqslant 2,\quad |t-\tau_1|\leqslant 5. \tag{R_{14}}$$

这里 $K>1$.

§ 2.

对每一点 $S\in R_{14}$ 作环路 $\Gamma(S)$ 由 $\Gamma_i(i=1,2,3,4,5)$ 組成:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1\{2+i(t-2);\quad 2-i\infty\},\\
&\Gamma_2\{\sigma+i(t+2);\quad 2+i(t-2)\},\\
&\Gamma_3\{\sigma+i(t+2);\quad \sigma+i(t-2)\},\\
&\Gamma_4\{2+i(t+2);\quad \sigma+i(t+2)\},\\
&\Gamma_5\{2+i\infty;\quad \sigma+i(t+2)\}.
\end{aligned}$$

❶ 由於当 $\chi=\widetilde{\chi}$ 时 $f(S)$ 是整函数,故只須假定 $\chi\neq\chi_0$ 就行了. 这此与第一章引理 1·1 所不同的只是这时展开式对 $|S-S_0|\leqslant 0.01$ 时成立,故 C_1 变大了,(参考前章引理 1.1).

作矩形 R_{15} 令 $\sigma_1=\beta_1+2(K\log DL)^{-1}$.

$$\sigma_1-(2K\log DL)^{-1}\leqslant\sigma\leqslant 2,\quad |t-\tau_1|\leqslant 2. \tag{R_{15}}$$

令 $N=K\log DL$ 及

$$J(S,N)=-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{f'}{f}(w)e^{(S-w)^2N^2}dw.$$

則 $J(S,N)$ 可表成狄氏級数的形狀:

$$J(S,N)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\Lambda(n)}{n^S}e^{-\frac{\log^2 n}{4N^2}}.$$

設 $S\in R_{15}$. 这时在 $\sigma=2$ 与 $\Gamma(S)$ 之間沒有 $f(S)$ 的零点,故 $J(S,N)$ 可由下面的积分表示之:

$$J(S,N)=-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_3}\frac{f'}{f}(w)e^{(S-w)^2N^2}dw-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4,\Gamma_5}\frac{f'}{f}(w)e^{(S-w)^2N^2}dw.$$

令

$$P(S)=-\mathscr{R}\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_3}\sum_{|w_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{e^{(S-w)^2N^2}}{w-\rho}dw.$$

这里 $w_0=1+\log^{-1}D+i\left(\mathscr{T}w+\frac{\theta_2}{\log D}\right)$,其中 θ_2 为絕对值小於 1 的任意实数.

$$R(S)=-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_3}C_1\theta_1\log D(|u|+3)e^{(S-w)^2N^2}dw-\frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4,\Gamma_5}\frac{f'}{f}(w)e^{(S-w)^2N^2}dw.$$

其中 $u=\mathscr{T}w$.

引理 2·1. 若 $S\in R_{15}$,則有 $|R(S)|<4.06\log DL$.

証. 因在环路 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4,\Gamma_5$ 上有估計

$$|\exp(S-w)^2N^2|<\exp\left(-\frac{1}{4}(t-u)^2N^2\right).$$

而在 Γ_1,Γ_5 上有 $\left|\frac{f'}{f}(w)\right|<8$,在 Γ_2,Γ_4 上有 $\left|\frac{f'}{f}(w)\right|<C_2\log^2DL$.
故

$$|R(S)|<64\,e^{-\frac{N^2}{2}}+\frac{3C_2}{\sqrt{\pi}}Ne^{-N^2}\log^2DL+\frac{C_1N}{\sqrt{\pi}}\int_{-2}^{2}\log D(|u|+3)e^{-u^2N^2}du,$$

引理得証.

引理 2·2. 設 K^* 表示以 $S^*=\sigma^*+it^*$ 为中心,以 $(2K\log DL)^{-1}$ 为半徑的圓且全部包含在 R_{15} 內,若 $S\in K^*$ 則有 $P(S)<4P(S^*)$.

引理 2·3. 令 $S_1=\sigma_1+i\tau_1$, 則有 $P(S_1)>\frac{K}{3}\log DL$.

由引理 2·1 及引理 2·3 卽得

$$\mathscr{R}J(S_1,N)>\left(\frac{K}{3}-4.06\right)\log DL. \tag{2·1}$$

§ 3.

本节只討論 $\psi>2$ 的情形：

令 $Z=\exp\left(\frac{\log DL\cdot\log\psi}{10\,\psi}\right)$，則当 $\mathscr{R}S\geqslant 1-\alpha_1$ 时有

$$\Bigl|\sum_{\substack{n=p^a\\ a\geqslant 2}}\frac{b_n\Lambda(n)}{n^S}e^{-\frac{\log^2 n}{4N^2}}\Bigr|+\Bigl|\sum_{p\leqslant Z}\frac{b_p\log p}{p^S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\Bigr|<0.2\log DL. \tag{3·1}$$

引入新函数。

$$f_1(S)=\sum_{Z<p\leqslant(DL)^3}b_p\log p\cdot p^{-S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}},\quad f_2(S)=\sum_{p>(DL)^3}b_p\log p\cdot p^{-S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}. \tag{3·2}$$

取 $K=23$，則有

$$|f_1(S_1)|+|f_2(S_1)|>3.2\log DL. \tag{3·3}$$

令 $z_0=1+100\,\alpha_1+i\tau_1$，$\gamma_1=1+100\,\alpha-\sigma_1$，作环 $E\subset R_{15}$

$$\gamma_1-(2K\log DL)^{-1}\leqslant|S-z_0|\leqslant\gamma_1+(2K\log DL)^{-1}, \tag{E}$$

則有兩种可能情形：

1) 或者存在点 $S_2\in E$，有 $|f_1(S_2)|\geqslant 0.1\log DL$，

2) 或者在 E 内处：有 $|f_1(S)|<0.1\log DL$。

現在假定 2) 成立，作圓周 C_1

$$|S-z_0|=\gamma_1, \tag{C_1}$$

$|f_2(S)|$ 在点 S_3 达到其最大值 M_1，由於 2) 成立故

$$\max_{C_1}|f_2(S)|=M_1>3.1\log DL. \tag{3·4}$$

取 $\gamma_0=(2K\log DL)^{-1}$，作圓 C_0

$$|S-S_3|\leqslant\gamma_0, \tag{C_0}$$

整个包含在 E 内，若 $S\in C_0$ 則由引理 2·2 得 $P(S)<4P(S_3)$，由於 2) 成立，故若 $S\in E$ 則有 $|f_1(S)|<0.1\log DL$。

由 $f_2(S)$ 的定义及(3·1)得

$$|\mathscr{R}f_2(S)|<|\mathscr{R}J(S,N)|+0.3\log DL, \tag{3·5}$$

但 $|\mathscr{R}J(S,N)|\leqslant P(S)+|R(S)|<P(S)+4.06\log DL$，

而在 C_0 内有 $P(S)<4P(S_3)<4|\mathscr{R}J(S_3,N)|+4|R(S_3)|\leqslant 4M_1+16.24\log DL+1.2\log DL\leqslant 4M_1+17.44\log DL$，　(3·6)

由 (3·4)，(3·5)，(3·6) 得

$$|\mathscr{R}f_2(S)|\leqslant 11M_1,\quad 当\ S\in C_0.$$

取 $\gamma_0'=(C_3K\log DL)^{-1}$，其中 $C_3=C_4^{-1}(49C_4+48C_5)$，作圓 C_0'

$$|S-S_3|\leqslant\gamma_0', \tag{C_0'}$$

則当 $S\in C_0'$ 时有

$$|f_2(S)-f_2(S_3)|<\frac{2\gamma_0'}{\gamma_0-\gamma_0'}(11+1)M_1=\frac{C_4}{C_4+C_5}M_1,$$

再作圓周 C_2

$$|S-z_0|=\gamma_1-\gamma'_0=\gamma_2, \tag{C_2}$$

因 C_2 与 C'_0 相切故有

$$\max_{C_2}|f_2(S)|=M_2\geqslant\frac{C_5}{C_4+C_5}M_1, \tag{3·7}$$

再后取 $\gamma_3=99\alpha_1$，作圓周 C_3

$$|S-z_0|=\gamma_3, \tag{C_3}$$

以 M_3 記作 $|f_2(S)|$ 在 C_3 上的最大値，由阿达瑪三圓定理得：

$$M_3\geqslant M_1^{\log\frac{\gamma_3}{\gamma_2}:\log\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\cdot M_2^{\log\frac{\gamma_1}{\gamma_3}:\log\frac{\gamma_1}{\gamma_2}},$$

由 (3·7) 及 (3·4) 得

$$M_3\geqslant\exp\Big(-2.02C_4^{-1}(49C_4+48C_5)\log\Big(1+\frac{C_4}{C_5}\Big)K\psi\Big)\log DL,$$

取 $C_4=1$，C_5 充分大得

$$M_3\geqslant e^{-2,031\psi}\log DL. \tag{3·8}$$

由以上討論可总結成下面兩种情形：

若 $L(S,\chi)$，$(\chi\neq\chi_0)$ 有一零点 $\rho_0=\beta_0+i\tau_0\neq\widetilde{\beta}$，且 $\psi>2$，則必有

A) 或者存在点 $S_2\in E$ 使 $|f_1(S_2)|\geqslant 0.1\log DL$，

B) 或者存在点 $S_4\in C_3$ 使 $|f_2(S_4)|\geqslant e^{-2,031\psi}\log DL$。

引理 3·1．下列不等式成立，

$$2\sum_{p\geqslant(DL)^{C_6}}\frac{\log p}{p^{1+\alpha_1}}<\frac{1}{4}e^{-2,031\psi}\log DL, \tag{3·9}$$

$$e^{-C_7\psi}\sum_{Z<p\leqslant(DL)^3}\frac{1}{p^{1-\alpha_1}}<\frac{1}{120}, \tag{3·10}$$

$$e^{-C_7\psi}\sum_{(DL)^3<p\leqslant(DL)^{C_6}}\frac{\log p}{p^{1+\alpha_1}}<\frac{1}{4}e^{-2,031\psi}\log DL. \tag{3·11}$$

其中 $C_6=2{,}036$，$C_7=2{,}034$。

証．利用第一章引理 1·3 卽可証明．

引理 3·6．設 $1-p^{-\widetilde{\delta}}\leqslant e^{-C_7\psi}$，当 $p\leqslant(DL)^{C_6}$ 时，$G(x)$ 表示素因子皆大於 x 者的自然数的集合，且对每一素因子 p 有 $\widetilde{\chi}(p)=1$，若 $L(S,\chi)$，$(\chi\neq\chi_0)$ 有一零点 $\rho_0=1-\alpha_1+i\tau_0\neq\widetilde{\beta}$，則一定存在 C_8 使得

$$\sum_{\substack{(DL)^3\leqslant m\leqslant(DL)^{C_6}\\ m\in G(Z)}}m^{-1}>e^{-C_8\psi},$$

其中 $C_8=2{,}035$。

証．我們先討論 A) 成立的情形，卽有

$$\sum_{Z<p\leqslant(DL)^3}\frac{1+\widetilde{\chi}(p)p^{-\widetilde{\delta}}}{p^{1-\alpha_1}}\log p\geqslant 0.1\log DL,$$

由(3·10)得

$$\sum_{\substack{Z<p\leqslant(DL)^3\\ \tilde{\chi}(p)=1}}\frac{1}{p^{1-\alpha_1}}\geqslant\frac{1}{60}-\frac{1}{120}=\frac{1}{120},\tag{3·12}$$

將$[Z,(DL)^3]$分成下列形狀的ν个子区間:

$$S_n=[\exp(3^{-n}\cdot 3\log DL);\ \exp(3^{1-n}\cdot 3\log DL)],\ n=1,2,\cdots\nu.$$

且ν滿足$3^\nu<\frac{90\,\psi}{\log\psi}$,(因$Z<\exp(3^{1-\nu}\cdot 3\log DL)$)。

故必有一n使

$$\sum_{\substack{p\in S_n\\ \tilde{\chi}(p)=1}}\frac{1}{p^{1-\alpha_1}}>\frac{1}{120\,\nu},\tag{3·13}$$

將(3·13)兩边各自乘3^n次方得

$$\sum_{\substack{(DL)^3\leqslant m\leqslant(DL)^9\\ m\in G(Z)}}m^{-1}>((3^n)!\,e^{9\psi})^{-1}e^{-3^n\log 120\,\nu}>e^{-2,000\psi}.\tag{3·14}$$

若 B) 成立,則由(3·9)及(3·11)得

$$2\sum_{\substack{(DL)^3<p\leqslant(DL)^{C_6}\\ \chi(p)=1}}\log p\cdot p^{-1-\alpha_1}>e^{-2,031\psi}\log DL-2\sum_{p\geqslant(DL)^{C_6}}\log p\cdot p^{-1-\alpha_1}$$

$$-e^{-C_7\psi}\sum_{(DL)^3<p\leqslant(DL)^{C_6}}\log p\cdot p^{-1-\alpha_1}>\frac{1}{2}e^{-2,031\psi}\log DL.$$

故有

$$\sum_{\substack{(DL)^3<p\leqslant(DL)^{C_6}\\ \chi(p)=1}}p^{-1}>e^{-2,035\psi}.\tag{3·15}$$

由(3·14)及(3·15)卽得本引理。

§ 4.

本节要討論$\frac{1}{12}<\psi\leqslant 2$的情形。

由(2·1)知$\mathscr{R}J(S_1,N)>\left(\frac{K}{3}-4.05\right)\log DL$,且当$\mathscr{R}S\geqslant 1-\alpha_1$时显有

$$\left|\sum_{\substack{n=p^a\\ a\geqslant 2}}\frac{b_n\Lambda(n)}{n^S}e^{-\frac{\log^2 n}{4N^2}}\right|+\left|\sum_{p\leqslant(DL)^{1/9}}\frac{b_p\log p}{p^S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right|<0.25\log DL.$$

命

$$f_1(S)=\sum_{(DL)^{1/9}<p\leqslant(DL)^3}b_p\log p\cdot p^{-S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\ f_2(S)=\sum_{p>(DL)^3}b_p\log p\cdot p^{-S}e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}},$$

取$K=15$得

$$|f_1(S_2)|+|f_2(S_2)|\geqslant 0.6\log DL.$$

同样有兩种可能情形:

1) $|f_1(S_2)| \geqslant 0.5 \log DL$,

2) $|f_2(S_2)| \geqslant 0.1 \log DL$。

引理 4·1. 設 $\log z \geqslant 4N^2\alpha_1$,則

$$\left|\sum_{p\geqslant z} b_p \log p \cdot p^{-1+\alpha_1} e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right| \leqslant 100\, e^{-\frac{\log^2 z}{4N^2}+\alpha_1 \log z} \cdot \log DL。$$

証. 引理的証明只要利用引理 1·3 及下面的不等式即可証明了,

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2x} e^{-x^2}, \quad x>0。$$

引理 4·2. 設 $1-p^{-\tilde{\delta}} \leqslant e^{C_7\psi}$, 当 $p \leqslant (DL)^{C_8}$, $Z=(DL)^{\frac{1}{9}}$, $L(S,\chi)$, $(\chi \doteqdot \chi_0)$ 有一零点 $\rho_0=\beta_0+i\tau_0 \doteqdot \tilde{\beta}$,則一定存在 C_9 满足下面不等式

$$\sum_{\substack{(DL)^3 \leqslant m \leqslant (DL)^{C_9} \\ m \in G(Z)}} m^{-1} > e^{-C_9\psi},$$

其中 $C_9=2,035$。

証. 若 1) 成立卽有

$$\sum_{(DL)^{\frac{1}{9}}<p\leqslant(DL)^3} \frac{1+\tilde{\chi}(p)}{p^{1-\alpha_1}} \log p \geqslant \frac{1}{2} \log DL,$$

故得

$$\sum_{\substack{(DL)^{\frac{1}{9}}<p\leqslant(DL)^3 \\ \tilde{\chi}(p)=1}} \frac{1}{p^{1-\alpha_1}} \geqslant \frac{1}{12} - \sum_{\substack{(DL)^{\frac{1}{9}}<p\leqslant(DL)^3 \\ \tilde{\chi}(p)=-1}} \frac{1-p^{-\delta}}{p^{1-\alpha_1}} > \frac{1}{24}, \tag{4·1}$$

將(4·1)兩边自乘 27 次方卽得

$$\sum_{\substack{(DL)^3 \leqslant m \leqslant (DL)^{81} \\ m \in G(Z)}} m^{-1} > e^{-1,500\psi}。 \tag{4·2}$$

若 2) 成立,取 $z=D^{4.5K^2\psi}$,則由引理 4·1 得

$$\left|\sum_{p\geqslant z} b_p \log p \cdot p^{-1+\alpha_1} e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\right| \leqslant 0.05 \log DL,$$

故

$$2\sum_{\substack{(DL)^3<p\leqslant z \\ \tilde{\chi}(p)=1}} \frac{\log p}{p^{1-\alpha_1}} \geqslant 0.1 \log DL - 2\sum_{p\geqslant z} \frac{b_p \log p}{p^{1-\alpha_1}} e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}} - 2\sum_{\substack{(DL)^3<p\leqslant z \\ \tilde{\chi}(p)=-1}} \frac{b_p \log p}{p^{1-\alpha_1}} >$$

$$> 0.4 \log DL。 \tag{4·3}$$

由 (4·3) 可得

$$\sum_{\substack{(DL)^3<p\leqslant(DL)^{9k^2} \\ \tilde{\chi}(p)=1}} p^{-1} > e^{-2,035\psi}。 \tag{4·4}$$

由 (4·2) 及 (4·4) 引理得証.

§ 5.

本节要討論 $0<\psi\leqslant\frac{1}{12}$ 的情形:

引理 5·1. 若 $L(S,\chi)$ 有一零点 $\rho_0=\beta_0+i\tau_0$, 則有 $\mathscr{R}\frac{f'}{f}(S_1)>6.95\log DL$, 其中 $S_1=\beta_0+(11\log DL)^{-1}+i\tau_0$.

証. 由

$$\frac{f'}{f}(S)=\sum_{|S_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{S-\rho}+C_1\theta_1\log D(|t|+1).$$

卽可証明了, 因 $C_1\leqslant4.05$.

引理 5·2. 設 $f_1(S)=\sum\limits_{p>(DL)^3}b_p\log p\cdot p^{-S}$, 則有 $|f_1(S_1)|>0.8\log DL$.

証. 因

$$\left|\sum_{\substack{n=p^a\\a\geqslant2}}\frac{b_n\Lambda(n)}{n^{S_1}}\right|+\left|\sum_{p\leqslant(DL)^3}\frac{b_p\log p}{p^{S_1}}\right|\leqslant6.1\log DL.$$

故 $|f_1(S_1)|>(6.95-6.1)\log DL>0.8\log DL$.

引理 5·3. 設 $C_{10}=1,200$, $\eta=(132\log DL)^{-1}$, 則

$$\sum_{p>(DL)^{C_{10}}}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}\leqslant\frac{1}{16}\log DL.$$

証. 利用第一章引理 1·3 卽可証明.

引理 5·4. 設 $1-p^{-\tilde{\delta}}\leqslant(8C_{10})^{-1}$, 当 $p\leqslant(DL)^{C_6}$ 时, 若 $L(S,\chi)$ 有零点 $\rho_0=1-\alpha_1+i\tau_0\doteqdot\tilde{\beta}$, 令 $Z=(DL)^3$ 則有

$$\sum_{\substack{(DL)^3<m\leqslant(DL)^{C_6}\\m\in G(Z)}}m^{-1}>\frac{1}{11C_{10}}.$$

証. 由引理 5·2 及 5·3 得

$$2\sum_{\substack{(DL)^3<p\leqslant(DL)^{C_{10}}\\\tilde{\chi}(p)=1}}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}\geqslant\frac{1}{2}\log DL-2\sum_{p>(DL)^{C_{10}}}\frac{b_p\log p}{p^{1+\eta}}-2\sum_{\substack{(DL)^3<p\leqslant(DL)^{C_{10}}\\\tilde{\chi}(p)=-1}}\frac{b_p\log p}{p^{1+\eta}}>$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\log DL-\frac{1}{16}\log DL-\frac{1}{4}\log DL=\frac{3}{16}\log DL.$$

由此推出

$$\sum_{\substack{(DL)^3<p\leqslant(DL)^{C_{10}}\\\tilde{\chi}(p)=1}}p^{-1}>\frac{1}{11C_{10}},$$

引理得証.

§ 6.

令

$$g(n)=\sum_{d|n}\tilde{\chi}(d),\quad W=\sum_{1\leqslant n\leqslant(DL)^3}\frac{g(n)}{n}.$$

引理 6·1. 設 $L(S,\chi)$, $\chi\neq\chi_0$, 有一零点 $\rho_0=1-\alpha_1+i\tau_0\neq\widetilde{\beta}$, 且有

$$1-p^{-\delta}\leqslant\begin{cases}e^{-C_7\psi}, & \text{当 } p\leqslant(DL)^{C_9}, \quad \psi>\frac{1}{12},\\ (8C_{10})^{-1}, & \text{当 } p\leqslant(DL)^{C_{10}}, \quad 0<\psi\leqslant\frac{1}{12}.\end{cases}$$

則

$$L(1,\widetilde{\chi})>\begin{cases}C_{13}We^{-(C_8+1)\psi}, & \psi>2,\\ C_{13}We^{-C_8\psi}, & \frac{1}{12}<\psi\leqslant 2,\\ C_{13}W, & 0<\psi\leqslant\frac{1}{12},\end{cases}\qquad \text{其中 } C_{13},=(11.1C_{10}C_{11})^{-1}.$$

證. 令 $$Z=\begin{cases}\exp\left(\frac{\log DL\cdot\log\psi}{10\psi}\right), & \psi>2,\\ (DL)^{\frac{1}{9}}, & \frac{1}{12}<\psi\leqslant 2,\\ (DL)^3, & 0<\psi\leqslant\frac{1}{12}.\end{cases}$$

以 $H(Z)$ 表示在 $[1,(DL)^3]$ 内的不含有大於 Z 的自然数集合, 以 $F(Z)$ 表示 1 及其素因子皆在 $[Z,(DL)^3]$ 内的自然数集合, 显有

$$\sum_{n\in H(Z)}\frac{g(n)}{n}\cdot\prod_{p\in[Z,(DL)^3]}(1-p^{-1})^{-2}=\sum_{n\in H(Z)}\frac{g(n)}{n}\sum_{\nu\in F(Z)}\frac{\tau(\nu)}{\nu},$$

因 $(n,\nu)=1$, 故有 $g(n)\tau(\nu)>g(n\nu)$, 因此

$$\sum_{n\in H(Z)}\frac{g(n)}{n}\sum_{\nu\in F(Z)}\frac{\tau(\nu)}{\nu}>\sum_{1\leqslant m\leqslant(DL)^3}\frac{g(m)}{m}, \tag{6·1}$$

另外我們利用一熟知的事实[10]得

$$\prod_{p\in[Z,(DL)^3]}(1-p^{-1})^{-2}<\begin{cases}2{,}000\,\psi^2, & \psi>2,\\ 730, & \frac{1}{12}<\psi\leqslant 2,\\ 1.001, & 0<\psi\leqslant\frac{1}{12}.\end{cases} \tag{6·2}$$

由 (6·1) 及 (6·2) 得

$$\sum_{n\in H(Z)}\frac{g(n)}{n}>\begin{cases}W(2{,}000\psi^2)^{-1}, & \psi>2,\\ W(730)^{-1}, & \frac{1}{12}<\psi\leqslant 2,\\ W(1.001)^{-1}, & 0<\psi\leqslant\frac{1}{12}.\end{cases}$$

但

$$\sum_{n\in H(Z)}\frac{g(n)}{n}\sum_{\substack{(DL)^3<\nu\leqslant(DL)^{C_{11}}\\ \nu\in G(Z)}}\frac{1}{\nu}<\sum_{n\in H(Z)}\frac{g(n)}{n}\sum_{\substack{(DL)^3<\nu\leqslant(DL)^{C_{11}}\\ (\nu,[Z]!)=1}}\frac{g(\nu)}{\nu}<\sum_{(DL)^3<m\leqslant(DL)^{C_{11}+3}}\frac{g(m)}{m},$$

$$\text{其中}\quad C_{11}=\begin{cases}C_6, & \psi>\dfrac{1}{12},\\ C_{10}, & 0<\psi\leqslant\dfrac{1}{12},\end{cases}$$ 故由引理 3·2, 4·2, 5·4 得

$$\sum_{(DL)^3<m\leqslant(DL)^{C_{11}+3}}\frac{g(m)}{m}>\begin{cases}W(2{,}000\psi^2e^{C_8\psi})^{-1}, & \psi>2,\\ W(730e^{C_9\psi})^{-1}, & \dfrac{1}{12}<\psi\leqslant 2,\\ W(11.1C_{10})^{-1}, & 0<\psi\leqslant\dfrac{1}{12}.\end{cases}\tag{6·3}$$

但另一方面显有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{g(n)}{n}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\widetilde{\chi}(n)}{n}\sum_{k\leqslant\frac{x}{n}}\frac{1}{k},$$

將上式左边經过变換得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{g(n)}{n}=(\log x+E)L(1,\widetilde{\chi})+L'(1,\widetilde{\chi})+\frac{\theta_3C_{12}D\log x}{\sqrt{x}}.\tag{6·4}$$

其中 E 为尤拉常数，在 (6·4) 內取 $x=(DL)^3$ 及 $x=(DL)^{C_{11}+3}$，然后相減得

$$L(1,\widetilde{\chi})>C_{11}^{-1}\log^{-1}DL\sum_{(DL)^3<m\leqslant(DL)^{C_{11}+3}}\frac{g(m)}{m},\tag{6·5}$$

由 (6·3) 及 (6·5) 得

$$L(1,\widetilde{\chi})>\begin{cases}C_{13}We^{-(C_8+1)\psi}\log^{-1}DL, & \psi>2,\\ C_{13}We^{-C_9\psi}\log^{-1}DL, & \dfrac{1}{12}<\psi\leqslant 2,\\ C_{13}W\log^{-1}DL, & 0<\psi\leqslant\dfrac{1}{12}.\end{cases}$$

其中 $C_{13}=(11.1C_{10}C_{11})^{-1}$，由此引理得証.

引理 6·2. 設 $\lambda=(DL)^{-\frac{5}{2}}$，則下面估計式成立，

$$\sum_{n>(DL)^3}g(n)n^{-\widetilde{\beta}}e^{-\lambda n}=\theta_4C_{14}(DL)^{-\frac{1}{4}}.$$

証. 引理的証明只要利用第一章引理 1·3 就成了.

有了上面兩个引理后，就可証明第二基本引理了.

第二基本引理. 設 $L(S,\chi)$, $(\chi\neq\chi_0)$ 有一零点 $\rho_0=1-\alpha_1+i\tau_0\neq\widetilde{\beta}$，則在条件 $\delta\log DL\leqslant(e\times10^4)^{-1}$ 下必有

$$\psi>A_2\log\frac{A_3}{\delta\log DL},\qquad\text{其中 } A_2=(2{,}144)^{-1},\ A_3=10^{-4}.$$

証. 首先我們考虑引理 6·1 的条件滿足的情形，显見当 $\sigma>1$ 时有

$$\zeta(S)L(S,\widetilde{\chi})=\sum_{n=1}^{\infty}g(n)n^{-S},$$

故由 Littlewood 定理[11]得

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-\widetilde{\beta}}e^{-\lambda n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\lambda^{\widetilde{\beta}-w}\Gamma(w-\widetilde{\beta})\zeta(w)L(w,\widetilde{\chi})dw。\tag{6·6}$$

其中 $\lambda=(DL)^{-\frac{5}{2}}$，利用 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=\theta_5 C_{15}|t|$，$L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)=\theta_6 C_{16}D|t|$ 的事实得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\lambda^{\widetilde{\beta}-w}\Gamma(w-\widetilde{\beta})\zeta(w)L(w,\widetilde{\chi})dw=\lambda^{-\widetilde{\delta}}\Gamma(\widetilde{\delta})L(1,\widetilde{\chi})+\theta_7 C_7(DL)^{-\frac{1}{4}}。\tag{6·7}$$

其次显有

$$\frac{1}{2}\leqslant\sum_{1<n\leqslant(DL)^3} g(n)\cdot n^{-\widetilde{\beta}}e^{-\lambda n},\qquad (因\ g(1)=1)。$$

且当 $1\leqslant n\leqslant(DL)^3$ 时有 $n^{\widetilde{\delta}}\leqslant\exp(3\widetilde{\delta}\log DL)\leqslant 2$，
故由引理 6·2 得

$$W\geqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant n\leqslant(DL)^3}\frac{g(n)}{n}\cdot n^{\widetilde{\delta}}e^{-\lambda n}\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} g(m)n^{-\widetilde{\beta}}e^{-\lambda n}+\theta_4 C_{14}(DL)^{-\frac{1}{4}}\right)。\tag{6·8}$$

由 (6·6)，(6·7)，(6·8) 得❶

$$W\geqslant\frac{1}{2}\lambda^{-\widetilde{\delta}}\Gamma(\widetilde{\delta})L(1,\widetilde{\chi})+O\left((DL)^{-\frac{1}{5}}\right)>\frac{1}{3}\widetilde{\delta}^{-1}L(1,\widetilde{\chi}),\tag{6·9}$$

由引理 6·1 及 (6·9) 得

$$1>\frac{C_{13}}{3}\widetilde{\delta}^{-1}\log^{-1}DLe^{-C_{18}\psi},\tag{6·10}$$

其中

$$C_{18}=\begin{cases}C_8+1, & \psi>2,\\ C_9, & \frac{1}{12}<\psi\leqslant 2,\\ 0, & 0<\psi\leqslant\frac{1}{12}。\end{cases}\tag{6·11}$$

当 $\psi>\frac{1}{12}$ 时，由 (6·11) 得

$$\psi>C_{19}\log\frac{C_{20}}{\widetilde{\delta}\log DL},\tag{6·12}$$

其中 $C_{19}=(2{,}144)^{-1}$，$C_{20}=10^{-4}$。
而当 $0<\psi\leqslant\frac{1}{12}$ 时得 $\widetilde{\delta}\log DL>\frac{C_{13}}{3}$，利用 $\psi>C\geqslant\frac{1}{180}$，立得 (6·12)。
現考虑引理 6·1 的条件不满足时的情形，卽有

$$1-p^{-\widetilde{\delta}}\geqslant\begin{cases}e^{-C_7\psi}, & p\leqslant(DL)^{C_6}, \quad \psi>2,\\ (8C_{10})^{-1}, & p\leqslant(DL)^{C_{10}}, \quad 0<\psi\leqslant\frac{1}{12}。\end{cases}$$

由上式很易得出当 $\widetilde{\delta}\log DL\leqslant(30{,}000)^{-1}$ 时有

---

❶ 这里我們已用到了 $L(1,\widetilde{\chi})>\frac{1}{D^8}$.[12]

$$\psi > C_{19} \log \frac{C_{20}}{\tilde{\delta} \log DL},$$

最后当 $\psi > 0.001 \log DL$ 时只要利用 $\tilde{\delta} > D^{-\varepsilon}$ 的事实，第二基本引理就可証明了，取 $A_2 = (2{,}144)^{-1}$, $A_3 = 10^{-4}$，第二基本引理全部得証.

第三章　定理的証明

有了上面兩个基本引理后，即可証明定理了.

引理 1. 下面等式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) \sqrt{n}\, e^{-\frac{\log^2 n}{4N^2}} = 2\sqrt{\pi} N e^{\frac{9}{4}N^2} \Big\{ E_0 - \tilde{E} e^{-\tilde{\delta}(3-\tilde{\delta})N^2} -$$

$$- \sum_{\rho_\chi}{}' e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2 - i\tau(3-2\delta)\} N^2} + C_1 \theta_1 \log D.$$

这里 $E_0 = 1$，若 $\chi = \chi_0$，

$$\tilde{E} = \begin{cases} 1, & \chi = \tilde{\chi}, \\ 0, & \chi \neq \tilde{\chi}. \end{cases}$$

$N > 0$，“$'$”表示对 $L(S, \chi)$ 滿足 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ 的零点求和（除去 $\rho = \tilde{\beta}$，若 $\chi = \tilde{\chi}$）.

引理 2. 設 $(l, D) = 1$, $\log z \geqslant \max(4 \log D, (3+\varepsilon) N^2)$，則有

$$\sum_{\substack{n \geqslant z \\ n \equiv l (mod D)}} \Lambda(n) \sqrt{n}\, e^{-\frac{\log^2 z}{4N^2}} < \frac{C_2(\varepsilon)}{\varphi(D)} e^{\frac{3}{2}\log z - \frac{\log^2 z}{4N^2}}.$$

引理 3. 設 $\log z \geqslant 3N^2$，則

$$\sum_{\substack{n \leqslant z \\ n = p^a, a \geqslant 2}} \Lambda(n) \sqrt{n}\, e^{-\frac{\log^2 n}{4N^2}} < C_3 \log z \Big(e^{\frac{7}{4}N^2} + e^{\log z - \frac{\log^2 z}{4N^2}} \Big).$$

上面三个引理的証明可参考[4].

引理 4.[13] 設所有屬於模 D 的 L-函数在矩形 $\Delta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant 4$，內至少有一个零点的数目不超过 $C_2 \log^9 D \cdot D^{\frac{6}{\Delta}(1-\Delta)}$，这里 $\Delta \in (0.9; 1)$.

引理 5.[14] 設 $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leqslant 4$，則 $L(S, \chi_0) \neq 0$.

引理 6. 設以 $N(\psi, D)$ 表示所有屬於模 D 的 L-函数在矩形 R:

$$1 - \psi \log^{-1} D \leqslant \sigma \leqslant 1; \quad |t| \leqslant \min[1, e^{U\psi} \cdot (25 \log D)^{-1}]. \tag{R}$$

內的零点的个数（包括它們的重数），这里 $\psi \in (0, \log D)$，則有

$$N(\psi, D) < \begin{cases} 1{,}000 e^{2U\psi}, & 0 < \psi \leqslant {}^1/_{50}, \\ 10^{14} e^{2U\psi}, & {}^1/_{50} < \psi \leqslant {}^1/_6, \\ e^{1{,}500+2U\psi}, & {}^1/_6 < \psi \leqslant 2, \\ e^{7{,}230+2U\psi}, & 2 < \psi \leqslant B_2^{-1} \log\log D, \\ e^{(7+10U)\psi}, & U^{-1} \log\log D < \psi \leqslant \log D. \end{cases}$$

証．由第一基本引理，第一章引理 $1\cdot 2$，及本章引理 4，引理 5 卽可証明了．

引理 7.[15] 設 $N(T,D)$ 表示 $L(S,\chi)$ 在 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$，$|t|\leqslant T$ 内的零点的数目，則有

$$N(T+1,D)-N(T,D)\leqslant C_4\log DT.$$

引理 8. 令

$$\psi_0=\max\left(\frac{1}{180},\ A_4\log\frac{A_5}{\delta_0\log D}\right).$$

則所有的 L-函数除了 $\rho=\widetilde{\beta}$ 外在下面的矩形 R_1 內沒有零点

$$1-\psi_0\log^{-1}D\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t|\leqslant 1. \tag{R_1}$$

其中 $A_4=(2{,}145)^{-1}$，$A_5=10^{-4}$，

$$\delta_0=\begin{cases}\widetilde{\delta}, & 若\ \widetilde{\delta}\leqslant(3\cdot 10^4\log D)^{-1},\\ (3\cdot 10^4\log D)^{-1}, & 若\ \widetilde{\delta}>(3\cdot 10^4\log D)^{-1}.\end{cases}$$

証．引理 7 的証明只要利用第二基本引理，补助引理及引理 5 就成．

引入記号

$$\Phi(N,D,l)=\varphi(D)\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(mod D)}}^{\infty}\Lambda(n)\sqrt{n}\,e^{-\frac{\log^2 n}{4N^2}},$$

則由引理 1 得

$$\Phi(N,D,l)=2\sqrt{\pi}Ne^{\frac{9}{4}N^2}\Big\{1-\widetilde{\chi}(l)e^{-\widetilde{\delta}(3-\widetilde{\delta})N^2}\widetilde{E}-$$

$$-\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)\sum_{\rho_\chi}{}' e^{-\{\delta(3-\delta+\tau^2-i\tau(3-2\delta)\}N^2}\Big\}+C_1\theta_2\varphi(D)\log D. \tag{1}$$

令 $N^2=x\log D$，$x\geqslant x_0>0$，$h>0$，$B\geqslant 2$，將(1)式兩边除以 $2\sqrt{\pi}h^BNe^{\frac{9}{4}N^2}$ 再用下法对 x 积分 B 次得

$$\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h}\cdots\int_{x_1}^{x_1+h}\Phi(N,D,l)\left(2\sqrt{\pi}h^BNe^{\frac{9}{4}N^2}\right)^{-1}dxdx_1\cdots dx_{B-1}=$$

$$=1-h^{-B}\bar{\chi}(l)\widetilde{E}\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h}\cdots\int_{x_1}^{x_1+h}e^{-\widetilde{\delta}(3-\widetilde{\delta})x\log D}dxdx_1\cdots dx_{B-1}-$$

$$-h^{-B}\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)\sum_{\rho_\chi}{}'\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h}\cdots\int_{x_1}^{x_1+h}e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2-i\tau(3-2\delta)\}\log D\cdot x}dxdx_1\cdots dx_{B-1}+$$

$$+C_1\theta_3\sqrt{\log D}\cdot(4\pi x_0)^{-\frac{1}{2}}h^{-B}\cdot D^{1-\frac{9}{4}x_0}. \tag{2}$$

現在主要的目的是要估計(2)式右边的第三項，为此我要帶形区域 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$，分成下面形狀的子区域(可以相交)．

$$G_1^{(n)}\left\{n+\frac{1}{30}\leqslant|t|\leqslant n+\frac{31}{30};\quad 0\leqslant\sigma\leqslant 1\right\}\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$G_2^{(n)}\left\{\frac{2^n\psi_0}{\log D}\leqslant 1-\sigma\leqslant\frac{2^{n+1}\psi_0}{\log D};\quad |t|\leqslant e^{U2^{n+1}}\psi_0(25\log D)^{-1}\right\},$$

$$G_3^{(n)}\left\{\frac{\psi_0}{\log D}\leqslant 1-\sigma\leqslant\frac{2^{n+1}\psi_0}{\log D};\ \frac{e^{U2^n}\psi_0}{25\log D}\leqslant|t|\leqslant\frac{e^{U2^{n+1}}\psi_0}{25\log D}\right\},$$

其中 $n=0,1,\cdots n_0$, n_0为满足$2^{n_0+1}\psi_0\leqslant\frac{1}{6}$的最大自然数.

$$G_4^{(n,m)}\left\{\frac{\psi_0+n+\frac{m}{2{,}400}}{\log D}\leqslant 1-\sigma\leqslant\frac{\psi_0+n+\frac{m+1}{2{,}400}}{\log D};\quad |t|\leqslant\frac{e^{U\left(\psi_0+n+\frac{m+1}{2{,}400}\right)}}{25\log D}\right\},$$

$$G_5^{(n,m)}\left\{\frac{\psi_0}{\log D}\leqslant 1-\sigma\leqslant\frac{\psi_0+n+\frac{m+1}{2{,}400}}{\log D};\ \frac{e^{U\left(\psi_0+n+\frac{m}{2{,}400}\right)}}{25\log D}\leqslant|t|\leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant\frac{e^{U\left(\psi_0+n+\frac{m+1}{2{,}400}\right)}}{25\log D}\right\}.$$

其中 $m=m_1, m_1+1,\cdots 2{,}399$, m_1 为使 $\psi_0+\frac{m}{2{,}400}\geqslant\frac{1}{7}$的最小自然数, $n=0,1,\cdots n_1$, n_1 为满足 $\psi_0+n+1\leqslant U^{-1}\log\log D$ 的最大自然数.

$$G_6^{(n)}\left\{\frac{\psi_0+n}{\log D}\leqslant 1-\sigma\leqslant\frac{\psi_0+n+1}{\log D};\quad |t|\leqslant 1\right\},$$

这里 $n=n_1, n_1+1,\cdots n_2<\log D$.

以 $N_i^{(n)}(i=1,2,3,6)$, $N_k^{(n,m)}(k=4,5)$ 証作在 $G_i^{(n)}(i=1,2,3,6)$ $G_k^{(n,m)}(k=4.5)$ 内所有 $L(S,\chi)$ 的零点的数目,則由引理 6,及引理 7 得

$$N_1^{(n)}<C_5 D\log nD, \tag{3}$$

$$N_2^{(n)}, N_3^{(n)}<\begin{cases}1{,}000\,e^{2^{n+2}U\psi_0}, & 2^{n+1}\psi_0\leqslant\frac{1}{50}, \quad (4)\\ 10^{14}e^{2^{n+2}U\psi_0}, & \frac{1}{50}<2^{n+1}\psi_0\leqslant\frac{1}{6}, \quad (5)\end{cases}$$

$$N_4^{(n,m)}N_5^{(n,m)}<\begin{cases}e^{(15{,}00+2U)\left(\psi_0+n+\frac{m+1}{2{,}400}\right)}, & \frac{1}{6}<\psi_0+n+\frac{m+1}{2{,}400}\leqslant 2, \quad (6)\\ e^{(2{,}230+2U)\left(\psi_0+n+\frac{m+1}{2{,}400}\right)}, & 2<\psi_0+n+\frac{m+1}{2{,}400}\leqslant U^{-1}\log\log D, \quad (7)\end{cases}$$

$$N_6^{(n)}<e^{(10U+7)(\psi_0+n+1)},\quad U^{-1}\log\log D<\psi_0+n+1\leqslant\log D. \tag{8}$$

分成上面的区域后我們就可以来估計(2)式右边第三項了.

$$h^{-B}\left|\sum_{\chi}\widetilde{\chi}(l)\sum_{\rho_\chi}\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h}\cdots\int_{x_1}^{x_1+h}e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2+i\tau(3-2\delta)\}\log D\cdot x}dxdx_1\cdots dx_{B-1}\right|<$$

$$<\left(\frac{2}{h\log D}\right)^B\sum_{\rho\in G'}{}'\frac{e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2\}\log D\cdot x_0}}{|\delta(3-\delta)+\tau^2+i(3-2\delta)\tau|^B}+\sum_{\chi}\sum_{\rho\in G_2^{(n)}}e^{-(3-\varepsilon)\delta\log D\cdot x},\tag{9}$$

这里 G' 表示將 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 除去 $G_2^{(n)}\,(n=0,1,\cdots n_0)$ 所余的区域.

取 $x_0=1{,}649,\ h=\frac{50}{3},\ B=10,\ U=280$, 由 (3) 式及 Siegel 定理得

$$\left(\frac{2}{h\log D}\right)^B\sum_{n=0}^{n_0}\sum_{\rho\in G_1^{(n)}}\frac{e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2\}\log D\cdot x_0}}{|\delta(3-\delta)+\tau^2+i(3-2\delta)\tau|^B}=o(\delta_0\log D),\tag{10}$$

由 (4), (5) 得

$$\sum_{n=0}^{n_0}\sum_{\rho\in G_2^{(n)}}e^{-(3-\varepsilon)\delta\log D\cdot x_0}<\frac{1}{20}e^{-A_4^{-1}\psi_0},\tag{11}$$

$$\left(\frac{2}{h\log D}\right)^B\sum_{n=0}^{n_0}\sum_{\rho\in G_3^{(n)}}\frac{e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2\}\log D\cdot x_0}}{|\delta(3-\delta)+\tau^2+i(3-2\delta)\tau|^B}<\frac{1}{20}e^{-A_4^{-1}\psi_0},\tag{12}$$

由 (6), (7), (8) 得

$$\left(\frac{2}{h\log D}\right)^B\sum_{n=0}^{n_1}\sum_{m=m_1}^{2399}\sum_{\rho\in G_k^{(n,m)}}\frac{e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2\}\log D\cdot x_0}}{|\delta(3-\delta)+\tau^2+i(3-2\delta)\tau|^B}<0.01\,e^{-A_4^{-1}\psi_0},\quad(k=4,5)\tag{13}$$

$$\left(\frac{2}{h\log D}\right)^B\sum_{n=n_1}^{n_2}\sum_{\rho\in G_6^{(n)}}\frac{e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2\}\log D\cdot x_0}}{|\delta(3-\delta)+\tau^2+i(3-2\delta)\tau|^B}<0.01\,e^{-A_4^{-1}\psi_0},\tag{14}$$

由 (9), (10), (11), (12), (13), (14) 得

$$h^{-B}\left|\sum_{\chi}\bar\chi(l)\sum_{\rho_\chi}\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h}\cdots\int_{x_1}^{x_0+h}e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2+i\tau(3-2\delta)\}\log D\cdot x}\,dxdx_1\cdots dx_{B-1}\right|$$
$$<0.103\,e^{-A_4^{-1}\psi_0}+o(\delta_0\log D).\tag{15}$$

又显有 $C_1\sqrt{\log D}\,(2\sqrt{\pi x_0}D^{\frac{9}{4}x_0-1})^{-1}=o(\delta_0\log D)$, 故由 (2) 式及 (15) 式得

$$\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h}\cdots\int_{x_1}^{x_1+h}\Phi(N,D,l)\,(2\sqrt{\pi}h^BNe^{\frac{9}{4}N^2})^{-1}dxdx_1\cdots dx_{B-1}>1-e^{-4{,}500\,\delta_0\log D}-$$
$$-0.103\,e^{-A_4^{-1}\psi_0}+o(\delta_0\log D)>2{,}000\,\delta_0\log D-1{,}500\,\delta_0\log D\geqslant 500\,\delta_0\log D.\tag{16}$$

最后取 $\log z=(3+10^{-5})N^2$, 由引理 2 及引理 3 得

$$\varphi(D)\sum_{\substack{p\leqslant z\\ p\equiv(\mathrm{mod}\,D)}}\log p\cdot\sqrt{p}\,e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}\geqslant\Phi(N,D,l)-C_6N^2e^{\left(\frac{9}{4}-10^{-11}\right)N^2},\tag{17}$$

將 (17) 式兩边除以 $2\sqrt{\pi}h^BNe^{\frac{9}{4}N^2}$ 再对 x 积分 B 次得

$$\varphi(D)\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h}\cdots\int_{x_1}^{x_1+h}\sum_{\substack{p\leqslant z\\ l\equiv(\mathrm{mod}\,D)}}\log p\cdot\sqrt{p}\,e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}(2\sqrt{\pi}h^BNe^{\frac{9}{4}N^2})^{-1}dxdx_1\cdots dx_{B-1}$$
$$>500\,\delta_0\log D-C_7\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h}\cdots\int_{x_1}^{x_1+h}e^{-10^{-12}x\log D}dxdx_1\cdots dx_{B-1}>$$
$$>500\,\delta_0\log D-D^{-10^{-12}}>400\,\delta_0\log D.\tag{18}$$

上式的成立是由於 $\delta_0 > D^{-\varepsilon}$.

現取 $A_1 = (3+10^{-5})(x_0+hB) \leqslant 5{,}448$, 則由 (18) 式得

$$\sum_{\substack{p\leqslant D^{A_1}\\ p\equiv l\,(mod D)}} \log p\cdot\sqrt{p}\, e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}} > 0,$$

卽

$$P_{\min}(D,l) < D^{A_1}.$$

至此定理証畢.

附　录

我們主要証明下面的輔助引理

輔助引理. 設 $L(S,\chi_1), L(S,\widetilde{\chi}_2), \cdots L(S,\chi_{\varphi(D)-1})$ 为屬於模 D 的 $\varphi(D)-1$ 个 L-函数(除去主特征), 則除去可能有一实的簡單零点 $\widetilde{\beta}$ (它屬於一实特征 $\widetilde{\chi}$), 在下面的区域 R 内恆有 $L(S,\chi) \neq 0\ (\chi \neq \chi_0)$:

$$\sigma > 1 - \frac{C}{\log D(|t|+1)}, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{R}$$

其中 $C > \dfrac{1}{180}$.

为了証明定理我們需要下面的几个引理.

引理 1. 設 $\chi \neq \chi_0$, $S_0 = 1 + C_1 \log^{-1} D + it_0$, 則有

$$-\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_0,\chi) \leqslant -\sum_{|\rho-S_0|\leqslant\frac{1}{2}} \mathscr{R}\frac{1}{S-\rho} + (2+\varepsilon)\log D(|t_0|+1).$$

証. 上引理的証明可參考第一章引理 1·1.

引理 2. 設 χ 为非实特征, 則 $L(S,\chi)$ 在下面的区域 R_1 内不等於零:

$$\sigma > 1 - \frac{C_2}{\log D(|t|+1)}, \tag{R_1}$$

其中 $C_2 = \dfrac{1}{150}$.

証. 若 $\rho = \beta + it_0$ 为 $L(S,\chi)$ 的零点 $\left(\dfrac{1}{2} < \beta < 1\right)$, 令 $S_0 = 1 + \eta + it_0$, 这里 $\eta = C_3^{-1}\log^{-1} D(|t|+1)$, $\sigma_0 = 1+\eta$. 則由引理 1. 得

$$-\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_0,\chi) \leqslant \frac{1}{\beta-\sigma_0} + (2+\varepsilon)\log D(|t|+1). \tag{1}$$

$$-\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_1,\chi) \leqslant (2+\varepsilon)\log D(|t|+1). \tag{2}$$

其中 $S_1 = 1+\eta+2it_0$, 又显有

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) < \eta^{-1} + C_4. \tag{3}$$

由 (1), (2), (3) 得

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)-4\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_0,\chi)-\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_1,\chi)\leqslant 3\eta^{-1}+(10+\varepsilon)\log D(|t|+1)+\frac{4}{\beta-\sigma_0}, \tag{4}$$

而 $-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)-4\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_0,\chi)-\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_1,\chi)\geqslant 0$,故由(4)得

$$3\eta^{-1}+\frac{4}{\beta-\sigma_0}+(10+\varepsilon)\log D(|t|+1)\geqslant 0. \tag{5}$$

由(5)可得

$$\beta\leqslant 1+\eta-\frac{4}{3\eta^{-1}+(10+\varepsilon)\log D(|t|+1)}\leqslant 1-\left(\frac{4-\varepsilon}{3C_3+10}-\frac{1}{C_3}\right)\log^{-1}D(|t_0|+1)$$

$$\leqslant 1-\frac{C_3-10-\varepsilon}{C_3(3C_3+10)}\log^{-1}D(|t_0|+1)\leqslant 1-\frac{1}{150\log D(|t_0|+1)}, \tag{6}$$

取 $C_3=20$ 就得到(6)了,引理証畢.

引理 3. 設 χ 为实特征,则 $L(S,\chi)$ 在区域 (R_2) 内不为零:

$$\sigma>1-\frac{C_4}{\log D(|t|+1)}, \qquad t\neq 0 \tag{R_2}$$

其中 $C_4>\frac{1}{180}$.

証. 設 $\rho=\beta+it_0$ 为 $L(S,\chi)$ 的零点$\left(\frac{1}{2}<\beta<1\right)$, 令 $\eta=C_5^{-1}\log^{-1}D(|t|+1)$, $\sigma_0=1+\eta$, $S_0=\sigma_0+it_0$, $S_1=\sigma_0+2it$, 由於 χ 为实特征,故不妨假定 $t_0>0$,同样有

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)-4\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_0,\chi)-\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_1,\chi_0)\geqslant 0. \tag{7}$$

由 $L(S_1,\chi_0)=\zeta(S_1)\prod_{p|D}\left(1-\frac{1}{p^{S_1}}\right)$,得

$$\frac{L'}{L}(S_1,\chi_0)=\frac{\zeta'}{\zeta}(S_1)+\sum_{p|D}\frac{\log p}{p^{S_1}-1};$$

故

$$\left|\frac{L'}{L}(S_1,\chi_0)+\frac{1}{S_1-1}\right|\leqslant\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(S_1)+\frac{1}{S_1-1}\right|+\left|\sum_{p|D}\frac{\log p}{p^{S_1}-1}\right|\leqslant C_6+$$

$$+\sum_{p|D}\frac{\log p}{p-1}\leqslant C_7\log\log D.$$

推出

$$-\mathscr{R}\frac{L'}{L}(S_1,\chi_0)<\mathscr{R}\frac{1}{S_1-1}+C_7\log\log D. \tag{8}$$

由引理1.及(7),(8)得

$$3\eta^{-1}+(8+\varepsilon)\log D(|t_0|+1)-4\sum_{|\rho-S_0|\leqslant\frac{1}{2}}\mathscr{R}\frac{1}{S_0-\rho}+\mathscr{R}\frac{1}{S_1-1}\geqslant 0. \tag{9}$$

現在分兩种情形来考慮:

1) $$0<t_0\leqslant\frac{4}{5}\eta.$$

2)
$$\frac{4}{5}\eta<t_0<+\infty.$$

若 1) 成立．則 $\bar{\rho}=\beta-it_0$ 亦滿足 $|\bar{\rho}-S_0|\leqslant\frac{1}{2}$,故由 (9) 式得

$$3\eta^{-1}+(8+\varepsilon)\log D(|t_0|+1)+\frac{4}{\beta-\sigma_0}+\frac{4(\beta-\sigma_0)}{(\sigma_0-\beta)^2+4t^2}+\frac{\eta}{\eta^2+4t^2}\geqslant 0.$$

但

$$(\sigma_0-\beta)^2+4t^2\leqslant(\sigma_0-\beta)^2+\frac{64}{25}(\sigma_0-\beta)^2=\frac{89}{25}(\sigma_0-\beta)^2,$$

故

$$4\eta^{-1}+\frac{4\left(1+\frac{25}{89}\right)}{\beta-\sigma_0}+(8+\varepsilon)\log D(|t_0|+1)\geqslant 0. \tag{10}$$

由 (10) 可得

$$\beta\leqslant 1+\eta-\frac{1+\frac{25}{89}}{\eta^{-1}+(2+\varepsilon)\log D(|t_0|+1)}\leqslant 1-\left(\frac{114-\varepsilon}{89(C_5+2)}-\frac{1}{C_5}\right)\log^{-1}D(|t_0|+1),$$

取 $C_5=30$ 得

$$\beta\leqslant 1-\frac{1}{180\log D(|t_0|+1)}.$$

若 2) 成立,則由 (9) 式得

$$3\eta^{-1}+\frac{4}{\beta-\sigma_0}+\frac{4}{29}\eta^{-1}+(8+\varepsilon)\log D(|t_0|+1)\geqslant 0. \tag{11}$$

卽

$$\beta\leqslant 1+\eta-\frac{4}{\frac{91}{29}\eta^{-1}+(8+\varepsilon)\log D(|t_0|+1)}\leqslant 1-\left(\frac{4-\varepsilon}{\frac{91}{29}C_5+8}-\frac{1}{C_5}\right)\log^{-1}D(|t_0|+1)$$

取 $C_5=29$,得

$$\beta\leqslant 1-\frac{1}{180\log D(|t_0|+1)}.$$

引理得証．

引理 4. 設 χ 为实特征,β 为 $L(S,\chi)$ 的最大实零点且为重根,則有

$$1-\beta\geqslant\frac{C_6}{\log D},$$

其中 $C_6\geqslant\frac{1}{50}$.

其次对 $L(S,\chi)$ 的任意实零点 $\beta'\neq\beta$. 恆有

$$1-\beta'\geqslant\frac{C_6}{\log D}.$$

証．令

$$\beta'=\begin{cases}\beta, & \text{若 } \beta \text{ 为重根},\\ L(S,\chi) \text{ 的所有小於 } \beta \text{ 的实零点中之最大者}, & \text{若 } \beta \text{ 为簡單实零点}.\end{cases}$$

命 $\sigma_0=1+C_7^{-1}\log^{-1}D$, 由引理1·1得

$$-\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi)\leqslant\frac{1}{\beta-\sigma_0}+\frac{1}{\beta'-\sigma_0}+(2+\varepsilon)\log D.$$

另外显有 $-\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi)<C_8+\eta^{-1}$, 故有

$$\frac{1}{\beta-\sigma_0}+\frac{1}{\beta'-\sigma_0}\geqslant-\eta^{-1}-(2+\varepsilon)\log D,$$

因 $\beta'\leqslant\beta$, (不論在何种情况), 故化簡上式得

$$\frac{2}{\sigma_0-\beta'}\leqslant(2+\varepsilon)\log D+\eta^{-1},$$

亦即

$$\beta'\leqslant1+\eta-\frac{2}{\eta^{-1}+(2+\varepsilon)\log D)}\leqslant1-\frac{C_7-2-\varepsilon}{C_7(C_7+2)\log D}\leqslant1-\frac{1}{50\log D}.$$

引理得証.

引理 5. 設 χ_1,χ_2 为兩个实特征, β_1,β_2 分别为 $L(S,\chi_1)$, $L(S,\chi_2)$ 的最大实零点, 且 $\beta_1\geqslant\beta_2$, 則必有

$$1-\beta_2\geqslant\frac{C_9}{\log D}.\quad C_9\geqslant\frac{1}{60}.$$

証. 命 $\sigma_0=1+\eta,\ \eta=C_{10}^{-1}\log^{-1}D$,

显見 $\chi_1(n),\chi_2(n)$ 亦为屬於模 D 的实特征, (因 $\chi_1\doteqdot\chi_2$, 故 $\chi_1\chi_2\chi\doteqdot\chi_0$), 由引理1得

$$-\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi_1)>\frac{1}{\beta_1-\sigma_0}+(2+\varepsilon)\log D,$$

$$-\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi_2)<\frac{1}{\beta_2-\sigma_0}+(2+\varepsilon)\log D,$$

$$-\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi_1\chi_2)<(2+\varepsilon)\log D.$$

而

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)-\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi_1)-\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi_2)-\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi_1\chi_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}}(1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n))\geqslant0$$

故

$$\frac{1}{\beta_1-\sigma_0}+\frac{1}{\beta_2-\sigma_0}+(6+\varepsilon)\log D+\eta^{-1}\geqslant0$$

又因 $\sigma_0-\beta_2\geqslant\sigma_0-\beta_1$, 故从上式得

$$\frac{2}{\sigma_0-\beta_2}\leqslant(6+\varepsilon)\log D+\eta^{-1},$$

卽

$$\beta_2\leqslant1+\eta-\frac{2}{\eta^{-1}+(6+\varepsilon)\log D}<1-\frac{1}{60\log D},$$

只要取 $C_{10}=10$ 就成, 引理得証.

有了上面四个引理后, 只要取 $C=\min(C_2,C_4,C_6,C_9)$ 就成, 若 $L(S,\widetilde{\chi})$ 有一个簡單实

零点$\widetilde{\beta}$满足$1-\widetilde{\beta}<C\log^{-1}D$，则$\widetilde{\chi}$称作例外特征（对模$D$），$\widetilde{\beta}$称作例外零点（对模$D$）。

参 考 文 献

[1] Линник, Ю. В., *Матем. СБ.* 15:57, 1—11, 1944.

[2] Линник, Ю. В., *Матем. СБ.* 15: 57, 139—178, 1944.

[3] Линник, Ю. В., *Матем. СБ.* 15: 57, 347—368, 1944.

[4] Родосский. К. А., *Матем. СБ.* 34 (76): 2, 331—356, 1954.

[5] Paul. Turán. *Eine neue methode in der analysis und deren anwcendun gen.*

[6] 潘承洞，科学記录，1:5, 283-285, 1957.

[7] Чудаков., *Введениев Теорию L-Функций дирихле.*

[8] Родосский. К. А. *Изв. ЛНСССР. Серия Матем.* 13:4, 315—328, 1949.

[9] Selberg. A., Norske Vid Trondhjem. 19:18, 64—97, 1947.

[10] Виноградов, И. М. *Основы теории Чисел.*

[11] Titchmarsh. E. C., *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* 151.

[12] 同 [7]. 145—167.

[13] Родосский. К. А., *Матем. СБ*, 36 78:2, 341—348, 1955.

[14] Landau. E., *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.*

[15] 可参考 [14].

ON THE LEAST PRIME IN AN ARITHMETICAL PROGRESSION

Pan Cheng-tung

(Department of Mathematics and Mechanics)

Abstract

Let $P_{\min}(D,l)$ denote the least prime in an arithmetical progression $nD+l$, with $1\leqslant l\leqslant D-1$ and $(l,D)=1$, then on the grand Riemann hypothesis for sufficiently large D, we may prove very easily that

$$P_{\min}(D,l)<D^{2+\varepsilon}, \tag{1}$$

where ε is any positive number. In 1944, Ю. В. Линник[1][2][3] proved without any hypothesis the existence of a positive absolute constant A, such that

$$P_{\min}(D,l)<D^{A}. \tag{2}$$

But his proof covered more than sixty pages. In 1954, К. А. Родосский gave a simpler proof of (2), but P. Turán remarked at the end of his book that Родосский's proof gives no information of the definite value of A and suggested to determine the constant by his own method. We have not, however, seen any paper written according to this suggestion. In this paper, we shall give a proof of the following theorem.

Theorem. For sufficiently large D, we have

$$P_{\min}(D,l)<D^{A_1}, \tag{3}$$

where $A_1\leqslant 5{,}448$.

The proof of the theorem is based on the following auxiliary lemma and two fundamental lemmata.

Auxiliary lemma (Page). There exists a constant $C>0$, such that in the region $1-C\log^{-1}D(|t|+1)\leqslant\sigma\leqslant 1$, $-\infty<t<+\infty$ there are no zeros of any $L(S,\chi)$, $(\chi\neq\chi_0)$ with character χ (mod D) except, possibly, one simple real zero of a function $L(S,\widetilde{\chi})$ belonging to an exclusive real character (mod D). We can prove that $C>\frac{1}{180}$ for sufficiently large D.

First fundamental lemma. Let $L(S,\chi_0)$, $L(S,\chi_1)\cdots L(S,\chi_{\varphi(D)-1})$ be all the L-functions belonging to a modulus D, let $Q(D,\psi)$ denote the number of L-functions each having at least one zero in the rectangle R

$$1-\psi\log^{-1}D\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t|\leqslant e^{U\psi}(25\log D)^{-1}, \tag{R}$$

where $\psi\in[0,\log\log D]$, $U>0$, then

$$Q(D,\psi)<\begin{cases} 5{,}020\,e^{U\psi}, & 0<\psi\leqslant\frac{1}{50},\\ 10^{14}\,e^{U\psi}, & \frac{1}{50}<\psi\leqslant\frac{1}{6},\\ e^{(1{,}500+U)\psi}, & \frac{1}{6}<\psi\leqslant 2,\\ e^{(2{,}230+U)\psi}, & 2<\psi\leqslant\log\log D. \end{cases}$$

Second fundamental lemma. Suppose that there exists an exclusive zero $\widetilde{\beta}$ belonging to modulus D and let $\rho_0=\beta_0+i\tau_0$ be any zero of $L(S,\chi)$, $(\chi\neq\chi_0)$, then under the condition $1-\widetilde{\beta}\leqslant A_3\log^{-1}D(|\tau_0|+1)$, we have

$$\beta_0\leqslant 1-\frac{A_2}{\log D(|\tau_0|+1)}\log\frac{A_4}{\widetilde{\delta}\log D(|\tau_0|+1)}, \tag{5}$$

Where $\widetilde{\delta}=1-\widetilde{\beta}$, A_3, A_4 are suitable constants, and when D is large enough, we have $A_2=\frac{1}{2{,}144}$.

$$\sum_{\substack{p\leqslant D^{A_1}\\ p\equiv l(\mathrm{mod}D)}}\log p\cdot\sqrt{p}\,e^{-\frac{\log^2 p}{4N^2}}>0,$$

the result required.

The result of the theorem may be improved, but it seems very difficult to reach the best result.

Here I should like to express my thanks to Professor Min Szu-hoa for his help and encouragement.

关於一組关於正数的公理*

冷 生 明

（数学力学系分析教研室）

我們曾經提出正数的下列这些性質作为确定正数的一組公理以成为实数分析的一个基础.[1]❶

I 若 p 与 q 都是正数，則下列三个关系中必有一个而且只有一个成立：

$$p<q, \qquad q<p, \qquad p=q.$$

II 若 p, q, r 都是正数，$p<q$ 而 $q<r$，則 $p<r$.

III 若 p, q, r 都是正数，$p<q$ 而 $q=r$，則 $p<r$.

IV 若一类正数包含小於某一个正数的所有正数，而且只要它包含小於一个正数 q 的所有的正数，它也就包含小於某一个正数 r 的所有正数，其中 r 为一正数使 $q<r$，則这一类正数包含全部正数.

V. 有一个正数叫作 1，具有性質 $\frac{1}{1}=1$.

VI. 若 p 是一个正数，則 $p+1$ 是一个正数.

VII. 若 p 是一个正数，則 $\frac{1}{p}$ 是一个正数.

VIII. 若 p 与 q 都是正数而 $p<q$，又若一类正数包含 1，而且只要包含 r 也就包含 $r+1$ 与 $\frac{1}{r}$，則这一类正数当中有一个 r 使 $p<r$ 而 $r<q$.

IX 若 p 与 q 都是正数，則若要 $p+1<q+1$ 必需而只需 $p<q$.

X 若 p 与 q 都是正数，則若要 $\frac{1}{p}<\frac{1}{q}$ 必需而只需 $q<p$

XI 若 p 是一个正数，則 $\frac{1}{p+1}<p+1$.

XII 若 p 是一个正数，則 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{p+1}}=p+1$

我們現在要提出同这組公理等价的兩組公理，它們都是由这組公理經过一些細小的改变而成的.

1. 我們先考虑把公理 V 和 XI 改变如下.

V'. 1 是一个正数.

XI'. 若 p 是一个正数，則 $\frac{1}{p+1}<1$ 而 $1<p+1$.

我們来証明

定理 A. 若把公理 I—XII 中的 V 和 XI 換成 V' 和 XI'，則所得的一組公理同原来的一組是邏輯地等价的.

---

* 1957 年 8 月 9 日收到.

❶ 那里的公理 V 应对於正数 1 附加这一条件：具有性質 $\frac{1}{1}=1$.

莫紹揆同志曾为作者指出前文[1]的定理 3 的証明中有兩处失於疏略；作者特此致謝，並將在本文另外兩个脚註中試作修改或补充.

我們先証公理 I—XII 隐含 V′ 和 XI′.❷ 显然 V 隐含 V′. 其次，按照 V 我們有

$$\frac{1}{1}=1. \tag{Va}$$

运用 I—III，我們由 X—XII 推知，假如是 $1\leqslant\frac{1}{p+1}$ 則

$$\frac{1}{1}\geqslant p+1>\frac{1}{p+1}\geqslant 1;$$

而假如是 $1\geqslant p+1$ 則

$$\frac{1}{1}\leqslant\frac{1}{p+1}<p+1\leqslant 1.$$

由此推得

$$\frac{1}{p+1}<1<p+1. \tag{XI′}$$

現在我們当不引用 V 或 XI 而根据 I—XII 中其它公理从 V′ 与 XI′ 推出 V 与 XI. 但由 II 而显然 XI′ 隐含 XI，所以我們只需推証(Va). 我們記作

$$1^{-1}=\frac{1}{1},\qquad 1^{-(n+1)}=\frac{1}{1^{-n}},$$

並注意，XI′ 結合到 X 与 XII 时产生不等式

$$\frac{1}{p+1}<1^{-n}<p+1\qquad(n=1,2,3,\cdots),$$

其中 p 为任意的正数. 我們用 $Q(1)$ 表示公理 VIII 中所考慮的那种正数类的公共部分，並注意 $Q(1)$ 也是那种正数类之一，因而可見，若要一类正数包含 $Q(1)$，必需而只需它旣包含 1 而且只要包含 r 也就包含 $r+1$ 与 $\frac{1}{r}$ (这我們称为正有理数的归納法[1]). 於是容易推証，首先，在 $Q(1)$ 中的正数都不外乎形式

$$1,\quad 1^{-n},\quad q+1,\quad \frac{1}{q+1},$$

其中 n 为一自然数而 q 为一正数；其次，假如是 $1^{-1}<1$ (因而 $1^{-1}<1^{-2}$)，那末在 $1^{-1}<1\leqslant 1^{-2}$ 这一情形 $Q(1)$ 里的正数都不在 1^{-1} 到 1 之間，而在 $1^{-1}<1^{-2}<1$ 这一情形 $Q(1)$ 里的正数都不在 1^{-2} 到 1 之間. 引用公理 VIII 推知不可能是 $1^{-1}<1$；而相似地不可能是 $1<1^{-1}$. 按照 I，卽得 $1^{-1}=1$.

2. 我們曾經指出[1] 公理 I—XII 的敍述中正数 1 是可以避免不用的；只需把公理

---

❷ 事实上我們已經証明过这一点[1](定理 3 的一部分). 不过在那里我們引进了兩个正数类及其上下界的概念而先有 $\gamma=\beta$，其中 β 为形如 $p+1$ 这样的一类正数 B 的下界而 γ 为形如 $\frac{1}{q+1}$ 这样的一类正数 C 的上界. 由此引用公理 X-XII 与 V 卽可推得 (XI′). [参看[1](第 432 頁，10 到 13 行).]因为关系式 $c\leqslant\beta\leqslant b$ 由於公理 X 而隐含 $\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{\beta}\leqslant\frac{1}{c}$；所以，按照公理 XII，我們有 $\gamma\leqslant\frac{1}{\beta}\leqslant\beta$，因而有 $\frac{1}{\beta}=\beta$. 但是按照公理 V 与 X (結合 I-III)，我們有

$$p<1\quad\text{等价於}\quad 1<\frac{1}{p}. \tag{1}$$

由此可見旣不可能 $\beta<1$ 也不可能 $1<\beta$；因而，按照公理 I，可見 $\beta=1$. 於是有

$$\gamma=\beta=1.$$

引用公理 XI-XII 和 I-III 卽知 1 旣不屬於 B 也不屬於 C. 这样我們就得到(XI′).

V—XII 改写如下.

V*. 至少有一个正数 p 使 $p^- = p$.

VI*. 若 p 是一个正数,则 p^+ 是一个正数.

VII*. 若 p 是一个正数,则 p^- 是一个正数.

VIII*. 若 p 与 q 都是正数而 $p<q$, 又若一类正数至少包含一个正数, 而且只要包含 r 也就包含 r^+ 与 r^-,则这一类正数当中有一个 r 使 $p<r$ 而 $r<q$.

IX*. 若 p 与 q 都是正数,则若要 $p^+<q^+$ 必需而只需 $p<q$.

X*. 若 p 与 q 都是正数,则若要 $p^-<q^-$ 必需而只需 $q<p$.

XI*. 若 p 是一个正数,则 $p^{+-}<p^+$.

XII*. 若 p 是一个正数,则 $p^{+--}=p^+$.

我們現在要証明 V* 可以換成

V″. 至少有一个正数存在.

定理B. 若把公理 I—XII 中的 V 和 VI—XII 換成 V″和 VI*—XII*,則所得的一組公理同原来的一組是邏輯地等价的.

我們把 p^+ 看成 $p+1$, 把 p^- 看成$\dfrac{1}{p}$.

於是我們当由公理 I—XII 推出 VIII*. 我們曾在上面用到正有理数的集合 $Q(1)$ 及其归納法. 今对任一正数 l 用 $Q(l)$ 表示在 VIII* 里所考慮的那种正数类当中共同含有 l 的那些类的公共部分. 今試假設有正数 l 使 $Q(l)$ 不包含在某一个正数 k 附近的正数,意思也就是在小於 k 的一个(适当的)正数到大於 k 的一个(适当的)正数之間的那些正数.

我們可以根据公理 VIII 假定 k 是一个正有理数. 我們注意正有理数归納法直接表明所有正有理数都不外乎形式③

$$1,\quad q+1,\quad \frac{1}{q+1},$$

而且

$$\frac{1}{\dfrac{1}{q}}=q,$$

其中 q 为一正有理数. 由此,注意到公理 IX—XII, 立即可見 $k+1$ 附近的正有理数具有形式 $q+1$ 而$\dfrac{1}{k}$附近的正有理数具有形式$\dfrac{1}{q}$,其中 q 为 k 附近的正有理数. 於是, 注意到

---

③ 若引用正数归納法(公理IV),即可推知一切正数也都不外乎这三个形式(自然 q 在这时就表示一个正数). [参看[1](第432頁, 14到19行).]因为若 a 为一正数而 $a<1$,則按照公理VIII 与公式(XI′)有正有理数 r 与 s 使

$$a<r<1,\qquad 1<s<\frac{1}{\dfrac{1}{a}}+1.$$

結合到(XI′)与上列正有理数的三个形式,我們有正有理数 r' 与 s' 使

$$r=\frac{1}{r'+1},\qquad s=s'+1.$$

按照上列正有理数的三个形式我們还有

$$\frac{1}{\dfrac{1}{s'}}=s'<\frac{1}{\dfrac{1}{a}},$$

公理 VIII—X，容易对 k 施用正有理数归納法推知，假如 $Q(l)$ 含有任意鄰近於 1 的正数，它也就会要含有任意鄰近於 k 的正数。可見存在一个正有理数 $b>1$ 使 1 到 b 之間沒有正数屬於 $Q(l)$。考慮到(XI′)，我們有正有理数 h 使 $b=h+1$，因之也就使

$$p\overline{\in}Q(l) \quad 当 \quad p<h.$$

这就是說，$Q(l)$ 中的全部正数都不小於 h 这一个固定的正有理数。这显然是不可能的；因为，用正有理数归納法与(XI′)，显而易見每一个正有理数都介於兩个屬於 $Q(l)$ 的正数之間；那豈不是要有 $h<h$。这矛盾表明前面所假設的那样的正数 l 不存在；而这正是 VIII* 的內容。

我們还当以 I—IV 和 VI*—XII* 为根据，把 V″ 加强成 V*。

按照 XI*，当 $p=q$ 时

$$p^{+-}<q^{+}.$$

但是这無論在 $p<q$ 时或 $q<p$ 时都容易运用 IX*—XI* 与 II 推証其成立。結合 V″ 与 VI*—X*，由 XI* 与 XII* 可見能够至少小於一个形如 p^{+-} 这样的正数的一切正数形成一类正数，它适合公理 IV 的兩个假設中的第一个而不适合其結論；因之第二个假設不可能适合而有一正数 l 存在，使对於每一正数 p 都有

$$p^{+-}\leqslant l\leqslant p^{+}.$$

結合到 X* 与 XII* 我們有

$$p^{+-}\leqslant l^{-n}\leqslant p^{+} \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

其中 p 为任意的正数，而

$$l^{-1}=l^{-}, \qquad l^{-(n+1)}=(l^{-n})^{-}.$$

把定理 A 的証明的末尾关於 $Q(1)$ 中 $1^{-1}=1$ 的論証法結合 VIII* 施用於 $Q(l)$，卽得 $l^{-}=l$。这就是所要証明的。

因而

$$s'<a<1, \qquad s'=\frac{1}{r''+1}.$$

於是

$$\frac{1}{r''+1}<a<\frac{1}{r'+1}.$$

可見所有能使 $a<\dfrac{1}{q+1}$ 这样的正数 q 形成一类正数，适合公理 IV 的兩个假設中的第一个而不适合其結論；因之第二个假設不可能适合而有一正数 α 存在，使 $q<\alpha$ 时 $a<\dfrac{1}{q+1}$ 而 $\alpha<q$ 时 $\dfrac{1}{q+1}<a$，因而，由於公理 VIII，也就使 $a=\dfrac{1}{\alpha+1}$。至若 b 为一正数使 $1<b$，则 $\dfrac{1}{b}<1$，因之 $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\beta+1}$ 而 $b=\beta+1$。所以一切正数都不外乎形式

$$1, \quad q+1, \quad \frac{1}{q+1},$$

其中 q 为一正数。

利用正数的这三个構造形式，XII 可以立卽推广成

(XII′)
$$\frac{1}{\dfrac{1}{p}}=p.$$

以上这些事实使我們可以逐步推証，公理 I-XII 足以完全确定通常实数分析中所說的正数[1]。

参 考 文 献

[1] 冷生明,北京大学学报(自然科学),2,429—442,1956.

ON A SYSTEM OF AXIOMS FOR THE POSITIVE NUMBERS

Leng Sen-ming

(Department of Mathematics and Mechanics)

Abstract

We have proposed a system of axioms (I—XII) for the positive numbers. [This journal, **2**, 441—442 (1956). Axiom V there should be supplemented by the additional condition imposed on the positive number 1: such that $\frac{1}{1}=1$.] Here we establish the logical equivalence among this system and two others. The first is obtained from I—XII by modifying V and XI as follows.

V′. 1 is a positive number.

XI′. If p is a positive number, then $\frac{1}{p+1}<1$ and $1<p+1$.

The second system is obtained from I—XII by writing p^+ and p^- for $p+1$ and $\frac{1}{p}$, and by modifying V and VIII as follows (so that the individual positive number 1 is dispensed with in the statements of the axioms).

V″. There exists at least one positive number.

VIII*. If p and q are positive numbers such that $p<q$, and if a set of positive numbers contains at least one positive number and contains r^+ and r^- for each of its elements r, then the set contains a positive number r such that $p<r$ and $r<q$.

关於 $Z_{n,k}(s)$ 的均值公式*

閔嗣鶴　尹文霖

（数学力学系函数論教研室）

1. 引論．作者之一曾建立 $Z_{n,k}(s)$ 的均值公式[1]❶，但由於引用了一个錯誤的定理（文[1]中引理 2·4，亦卽[2]內定理 74）所得均值公式（文[1]中定理 3·1 与 4·1）是需要修改的．本文的主要目的是改正[1]內的錯誤，給出正确的 $Z_{n,k}(s)$ 的均值公式，其次是敍述並討論关於 $Z_{n,k}(s)$ 的几个猜測．在全文中用 n 表正偶数，用 ν 表 $\frac{1}{n}$．

当然，在[1]內不牽涉其中引理 2·4 的部分依然是正确的．为簡便計，本文要加以引用，不再証明．

2. $Z_{n,k}(s)$ 的均值公式．在建立这个公式以前，我們需要一系列的引理：

引理 1.　設 $0<a<k\nu$，則当 $\delta\to+0$ 时，

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty t^{2a+1}(1+o(1))|Z_{n,k}(a+it)|^2e^{-2\delta t}dt$$

$$=\int_0^\infty u^{2a-1}|\Psi^k-1-(A_\delta u^{-\nu})^k|^2du$$

$$=\int_0^1+\int_1^\infty=I_1+I_2,$$

式中

$$\Psi=\sum_{x=-\infty}^{\infty}e^{-iux^ne^{-i\delta}},\qquad A_\delta=\frac{2\Gamma(1+\nu)}{(ie^{-i\delta})^\nu}.$$

这就是[1]內引理 3·1．

引理 2.　当 $a<k\nu$ 时，

$$I_2\ll\delta^{-2k\nu}\qquad(\delta\to+0).$$

証． 由 $(x+1)^n\geqslant x^n+1(x\geqslant0)$ 及

$$\Psi\ll\int_1^\infty e^{-x^nu\sin\delta}dx+1\ll(u\delta)^{-\nu}+1$$

可以得到

$$\left|\left(\sum_{x=-\infty}^{\infty}e^{-x^niue^{-i\delta}}\right)^k-1\right|=|\Psi-1|\sum_{\iota=0}^{k-1}|\Psi|^\nu\leqslant e^{-u\sin\delta}|\Psi|\sum_{\iota=0}^{k-1}|\Psi|^\nu\ll e^{-u\sin\delta}\{(u\delta)^{-k\nu}+1\}.$$

---

* 1957 年 8 月 16 日收到．

❶ 方括号內的数字指篇末文献．

从此容易推出本引理.

显然,当 $a>0$ 时,

$$I_1=\int_0^1 u^{2a-1}|\Psi^k-(A_\delta u^{-\nu})^k|^2du-2R\left[\int_0^1 u^{2a-1}\{\Psi^k-(A_\delta u^{-\nu})^k\}du\right]+\int_0^1 u^{2a-1}du$$

$$=I_3+O(I_3^{\frac{1}{2}})+O(1).$$

其中 $R[X]$ 表 X 的实部,而

$$I_3=\int_0^1 u^{2a-1}\left|\sum_{m=0}^{k-1}(A_\delta u^{-\nu})^m\Psi^{k-1-m}\right|^2\cdot|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du.$$

引理 3. 当 $a<k\nu-\nu$ 时,

$$I_{1\cdot k-1}=(2\Gamma(1+\nu))^{2k-2}\int_0^\infty u^{-2(k\nu-\nu-a)-1}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du$$

$$=(1+o(1))c_0\delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)-1}\qquad(\delta\to+0).$$

証明見[1]内定理 3·1 証明中之 4),而 c_0 的值見[1]内公式(3·13).

引理 4. 設 $\varepsilon>0$,則

$$I(\alpha)=\int_0^1 u^{-2\alpha-1}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du$$

$$\ll\begin{cases}\delta^{-2(n-1)\alpha-1} & \alpha>0,\\ \delta^{-1-\varepsilon} & \alpha\leqslant 0.\end{cases}\qquad(\delta\to+0)$$

实际上,当 $\alpha>0$ 时

$$I(\alpha)=(1+o(1))c_0(2\Gamma(1+\nu))^{2-2k}\delta^{-2(n-1)\alpha-1}.$$

証. 当 $\alpha>0$ 时,

$$\int_1^\infty u^{-2\alpha-1}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du\ll\int_1^\infty u^{-2\alpha-1}(u\delta)^{-2\nu}du+\int_1^\infty u^{-2\alpha-1}du\ll\delta^{-2\nu},$$

故由引理 3,

$$I(\alpha)=\int_0^\infty u^{-2\alpha-1}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du+O(\delta^{-2\nu})$$

$$=(1+o(1))c_0(2\Gamma(1+\nu))^{2-2k}\delta^{-2(n-1)\alpha-1}.$$

又当 $\alpha\leqslant 0$ 时,显然 $I(\alpha)\leqslant I\left(\dfrac{\varepsilon}{2(n-1)}\right)\ll\delta^{-1-\varepsilon}$. 引理証畢.

將来我們会看到:証明本文主要定理的关鍵,在於估計下列形式的积分:

$$\int_0^1 u^{2\sigma-1}\Psi^{2h}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du.$$

我們首先要估計

$$\Psi=\sum_{x=-\infty}^{\infty}e^{-ix^nue^{i\delta}}$$

$$=2\sum_{0\leqslant x\leqslant A_1 u^{-\frac{1}{n-1}}}+2\sum_{x>A_1 u^{-\frac{1}{n-1}}}-1.$$
$$=2\Psi_1+2\Psi_2-1,$$

其中 A_1 是适当小的正数。

引理 5. 設 $f(x)$ 为在 (a,b) 上具有連續的單調下降的一級导数的实函数，$f'(b)=\alpha$, $f'(a)=\beta$. 又設 $g(x)>0$ 及單調下降，$g'(x)$ 連續，且 $|g'(x)|$ 單調下降，則

$$\sum_{a<n\leqslant b} g(n)e^{2\pi i f(n)}=\sum_{\alpha-\eta<\nu<\beta+\eta}\int_a^b g(x)e^{2\pi i\{f(x)-\nu x\}}dx+$$
$$+O\{g(a)\log(\beta-\alpha+2)\}+O\{|g'(a)|\},$$

式中 η 为小於 1 的任意正常数. 这个引理見於[3]内第 4·10 节.

引理 6. 設 $F(x)$ 为在 (a,b) 上二次可微的实函数，$F''(x)\geqslant r>0$, $g(x)/F'(x)$ 單調及 $|g(x)|\leqslant M$, 則

$$\left|\int_a^b g(x)e^{iF(x)}dx\right|\leqslant\frac{8M}{\sqrt{r}}.$$

这个引理見於[3]内第 4·5 节.

引理 7. 当 A_1 适当小时，

$$\Psi_1=\frac{\Gamma(1+\nu)}{(iue^{-i\delta})^{\nu}}+O\left(u^{\frac{1}{2(n-1)}}\right)\qquad(\delta\to+0).$$

証. 取

$$g(x)=e^{-x^n u\sin\delta},$$
$$f(x)=-\frac{1}{2\pi}x^n u\cos\delta=\frac{F}{2\pi},$$
$$f'(x)=-\frac{n}{2\pi}x^{n-1}u\cos\delta,$$
$$f''(x)=-\frac{n(n-1)}{2\pi}x^{n-2}u\cos\delta.$$

取 A_1 适当小使当 $0\leqslant x\leqslant A_1 u^{-\frac{1}{n-1}}$ 时，$|f'(x)|<\frac{1}{2}$. 显然 $|g(x)|\leqslant 1$, 而

$$g'(x)=-nx^{n-1}u\sin\delta\, e^{-x^n u\sin\delta},$$
$$g''(x)=e^{-x^n u\sin\delta}(n^2x^{2n-2}u^2\sin^2\delta-n(n-1)x^{n-2}u\sin\delta)$$
$$=e^{-x^n u\sin\delta}\, nx^{n-2}u\sin\delta\,(nx^n u\sin\delta-n+1)$$

故 $g'(x)$ 至多有 n 个極值. 又当 $|f'(x)|<\frac{1}{2}$ 时，

$$|g'(x)|=O(\delta).$$

在引 5 中取 $\eta=\frac{1}{2}$, 卽得

$$\Psi_1=\int_0^{A_1 u^{-\frac{1}{n-1}}} e^{-x^n u(\sin\delta+i\cos\delta)}dx+O(1).$$

又当 $u^{-\frac{1}{n-1}}=O(x)$ 时，

$$F''(x)\geqslant Au^{\frac{1}{n-1}}>0 \qquad (A>0 \text{ 为一常数}).$$

故由引理 6，

$$\int_{A_1 u^{-\frac{1}{n-1}}}^{\infty} e^{-iux^n e^{-i\delta}}dx=O\left(u^{-\frac{1}{2(n-1)}}\right).$$

因此，

$$\Psi_1=\int_0^{\infty} e^{-iux^n e^{-i\delta}}dx+O\left(u^{-\frac{1}{2(n-1)}}\right)=\frac{\Gamma(1+\nu)}{(iue^{-i\delta})^{\nu}}+O\left(u^{-\frac{1}{2(n-1)}}\right).$$

引理 8. 設 $h\geqslant 1, r-q\geqslant 1, f(x)$ 是在 (q,r) 上二次可微分的实函数，且满足

$$\lambda\leqslant -f''(x)\leqslant h\lambda.$$

又設 $g(x)$ 在 (q,r) 上單調下降及 $0<g(x)\leqslant M$，則

$$\sum_{q<x\leqslant r} g(x)\,e^{2\pi i f(x)}=O\left\{hM(r-q)\lambda^{\frac{1}{2}}\right\}+O\left(M\lambda^{-\frac{1}{2}}\right).$$

證. 若 $g(x)\equiv 1$ 則引理卽[3]內定理 5·9 的一部分. 由 Abel 引理得一般情形.

引理 9.

$$\Psi_2=O\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\Psi=A_\delta u^{-\nu}+O\left(u^{-\frac{1}{2(n-1)}}\right)+O\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right).$$

證. 設 $g(x)=e^{-x^n u\sin\delta}$, $f(x)=-\frac{1}{2\pi}x^n u\sin\delta$，我們要估計

$$\sum\nolimits_a=\sum_{a<x\leqslant 2a} g(x)\,e^{2\pi i f(x)}.$$

在引理 8 中取

$$\lambda=\frac{n(n-1)}{2\pi}a^{n-2}u\cos\delta, \quad h=2^{n-2}, \quad M=e^{-a^n u\sin\delta}$$

則

$$\lambda\leqslant -f''(x)\leqslant h\lambda, \quad 0\leqslant g(x)\leqslant M.$$

因此，当 $a\geqslant\frac{1}{2}A_1 u^{-\frac{1}{n-1}}$ 时，

$$\sum\nolimits_a=O\left(e^{-a^n u\sin\delta}a^{\frac{n}{2}}u^{\frac{1}{2}}\right)+O\left(e^{-a^n u\sin\delta}a^{-\frac{n-2}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=O\left(e^{-a^n u\sin\delta}a^{\frac{n}{2}}u^{\frac{1}{2}}\right)=O\left(e^{-\frac{2}{\pi}a^n u\delta}\sqrt{a^n u\delta}\;\delta^{-\frac{1}{2}}\right).$$

設 $a_0=(u\delta)^{-\nu}$，則 $\sum_{a_0}=O\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right)$，而

$$\Psi_2 < \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}^{*} \sum\nolimits_{2^n a_0},$$

其中 * 表示 m 満足 $2^m a_0 \geqslant \frac{1}{2} A_1 u^{-\frac{1}{n-1}}$. 故

$$\Psi_2 \ll \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi} 2^{mn}} 2^{\frac{mn}{2}} \delta^{-\frac{1}{2}} \ll \delta^{-\frac{1}{2}}.$$

引理前半已証明,結合引理 7,后半卽証明.

引理 10. 当 $a < k\nu - \nu$ 及 $\varepsilon > 0$ 时

$$I_3 \begin{cases} \ll \delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)^{-1}} + \delta^{-k+na-2a-\varepsilon} & (n \geqslant 2). \\ = \{k^2 c_0 \delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)^{-1}} + O(\delta^{-k+na-2a-\varepsilon})\}\{1+o(1)\} & (n > 2). \end{cases}$$

証.

$$I_3 = \int_0^1 u^{2a-1} \left| \sum_{m=0}^{k-1} (A_\delta u^{-\nu})^m \Psi^{k-1-m} \right|^2 |\Psi - A_\delta u^{-\nu}|^2 du$$

$$= \sum_{m_1=0}^{k-1} \sum_{m_2=0}^{k-1} J(m_1, m_2), \tag{1}$$

其中

$$J(m_1, m_2) = \int_0^1 u^{2a-1-(m_1+m_2)\nu} A_\delta^{m_1} \overline{A}_\delta^{m_2} \Psi^{k-1-m_1} \overline{\Psi}^{k-1-m_2} |\Psi - A_\delta u^{-\nu}|^2 du.$$

显然

$$J(k-1, k-1) = \{2\Gamma(1+\nu)\}^{2k-2} I(k\nu - \nu - a). \tag{2}$$

从引理 2 的証明可以知道,当 $u\delta < 1$ 时, $\Psi \ll (u\delta)^{-\nu}$. 因此,当 $a < k\nu - \nu$ 时,由引理 4,

$$\int_{\delta^{\frac{n}{2}-1}}^1 u^{2a-1-(m_1+m_2)\nu} |\overline{\Psi}^{2k-2-m_1-m_2}| \cdot |\Psi - A_\delta u^{-\nu}|^2 du$$

$$\ll \delta^{-2(k-1)\nu} \int_{\delta^{\frac{n}{2}-1}}^1 u^{-2(k\nu-\nu-a)-1} |\Psi - A_\delta u^{-\nu}|^2 du$$

$$\ll \delta^{-2(k-1)\nu - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cdot 2(k\nu-\nu-a)} I(0) \ll \delta^{-k+na-2a-\varepsilon} \tag{3}$$

根据引理 9 內对於 Ψ 的估計並(最后)用到 Hölder 不等式,卽得

$$\int_0^{\delta^{\frac{n}{2}-1}} u^{2a-1-(m_1+m_2)\nu} A_\delta^{m_1} \overline{A}_\delta^{m_2} \Psi^{k-1-m_1} \overline{\Psi}^{k-1-m_2} |\Psi - A_\delta u^{-\nu}|^2 dv$$

$$= \{2\Gamma(1+\nu)\}^{2k-2} \int_0^{\delta^{\frac{n}{2}-1}} u^{2a-1-2(k-1)\nu} \left(1 + O\left(u^{\nu - \frac{1}{2(n-1)}}\right) + O\left(u^\nu \delta^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^{k-1-m_1} \times$$

$$\times \left(1 + O\left(u^{\nu - \frac{1}{2(n-1)}}\right)\right) + O\left(u^\nu \delta^{-\frac{1}{2}}\right)^{k-1-m_2} |\Psi - A_\delta u^{-\nu}|^2 du$$

$$=\{2\Gamma(1+\nu)\}^{2k-2}\int_0^{\delta^{\frac{n}{2}-1}} u^{2a-1-2(k-1)\nu}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du+$$

$$+O\Big\{\int_0^{\delta^{\frac{n}{2}-1}} u^{2a-1-2(k-1)\nu}\Big(u^{\nu-\frac{1}{2(n-1)}}+u^\nu\delta^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+u^{(2k-2-m_1-m_2)\left(\nu-\frac{1}{2(n-1)}\right)}+\left(u^\nu\delta^{-\frac{1}{2}}\right)^{2k-2-m_1-m_2}\Big)\times|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du\Big\}$$

$$=\{2\Gamma(1+\nu)\}^{2k-2}\int_0^{\delta^{\frac{n}{2}-1}} u^{2a-1-2(k-1)\nu}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du+$$

$$+O(J_1)+O(J_2)+O\left(J_1^{\frac{1}{2k-2}}J^{\frac{2k-3}{2k-2}}\right)+O\left(J_2^{\frac{1}{2k-2}}J^{\frac{2k-3}{2k-2}}\right) \tag{4}$$

式中 $J=J(k-1,k-1)$ 而

$$J_1=\int_0^{\delta^{\frac{n}{2}-1}} u^{2a-1-(m_1+m_2)\nu-\frac{1}{2(n-1)}(2k-2-m_1-m_2)}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du,$$

$$J_2=\int_0^{\delta^{\frac{n}{2}-1}} u^{2a-1-(m_1+m_2)\nu}\delta^{-k+1+\frac{1}{2}(m_1+m_2)}|\Psi-A_\delta u^{-\nu}|^2du.$$

由引理4,

$$J_2\ll\delta^{-k+1+\frac{1}{2}(m_1+m_2)+\triangle(m_1+m_2)-1}$$

其中

$$\Delta(m_1+m_2)=\begin{cases}\left(\frac{n}{2}-1\right)[2a-(m_1+m_2)\nu]-\varepsilon & (2a-(m_1+m_2)\nu\geqslant 0),\\ (n-1)[2a-(m_1+m_2)\nu] & (2a-(m_1+m_2)\nu<0).\end{cases}$$

若 $2a-(m_1+m_2)\nu\geqslant 0$, 则

$$J_2\ll\delta^{-k+\frac{m_1+m_2}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)[2a-(m_1+m_2)\nu]-\varepsilon}=\delta^{-k+na-2a+(m_1+m_2)\nu-\varepsilon}$$

$$\ll\delta^{-k+na-2a-\varepsilon} \tag{5}$$

若 $2a-(m_1+m_2)\nu<0$ 则

$$J_2\ll\delta^{-k+\frac{1}{2}(m_1+m_2)+(n-1)[2a-(m_1+m_2)\nu]}$$

$$=\delta^{-k-\frac{1}{2}(m_1+m_2)+(m_1+m_2)\nu+2(n-1)a}.$$

由此, 当 $m_1+m_2\leqslant 2k-3$ 时,

$$J_2\ll\delta^{-2k+\frac{3}{2}+2k\nu-3\nu+2(n-1)a}=\delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu)+2(n-1)a-\frac{1}{2}-\nu}$$

$$=\begin{cases}O\{I(k\nu-\nu-a)\} & (n=2),\\ o\{I(k\nu-\nu-a)\} & (n>2).\end{cases} \tag{6}$$

另一方面，当 $m_1+m_2\leqslant 2k-3$ 时，

$$(m_1+m_2)\nu+\frac{1}{2(n-1)}(2k-2-m_1-m_2)\begin{cases}=2(k\nu-\nu) & (n=2),\\ <2(k\nu-\nu) & (n>2).\end{cases}$$

故

$$J_1=\begin{cases}O\{I(k\nu-\nu-a)\} & (n=2),\\ o\{I(k\nu-\nu-a)\} & (n>2).\end{cases}\tag{7}$$

由 (2) 至 (7) 知道当 $a<k\nu-\nu$ 时，

$$J(m_1,m_2)\begin{cases}\ll J(k-1,k-1)+O(\delta^{-k+na-2a-\varepsilon}) & (n=2),\\ =\{J(k-1,k-1)+O(\delta^{-k+na-2a-\varepsilon})\}\{1+o(1)\} & (n>2).\end{cases}$$

代入 (1) 后，由 (2) 及引理 4 可得本引理中的結論.

定理 1. 設 $0<a<k\nu-\nu$ 則当 $\delta\to 0^+$ 时

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty t^{2a-1}|Z_{n\cdot k}(a+it)|^2e^{-2\delta t}dt\ll$$
$$\ll\delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)-1}+\delta^{-n(k\nu-a)-2a-\varepsilon}.$$

又当 $n>2$ 及 $a<k\nu-2k\nu^2-\nu+2\nu^2$ 时，

$$I=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}c_1\delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)-1}(1+o(1))$$

式中 $c_1=(2\pi)^{\frac{1}{2}}k^2c_0$.

証. 由引理 1，引理 2 及引理 10 可知当 $0<a<k\nu-\nu$ 时

$$I\ll\delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)-1}+\delta^{-n(k\nu-a)-2a-\varepsilon}+\delta^{-2k\nu}.$$

上面右边第三項比第二項小，可以略去. 又当 $n>2$ 时，我們根据同样的三个引理可以得到比較精密的結果

$$I=\{k^2c_0\delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)-1}+O(\delta^{-k+na-2a-\varepsilon})\}\{1+o(1)\},$$

式中 ε 可以任意小. 定理随之成立.

定理 2. 設 $0<a<k\nu$ 則

$$\int_0^T|Z_{n\cdot k}(a+it)|^2dt\ll T^{2(n-1)(k\nu-\nu-a)-2a+2}+T^{n(k\nu-a)+1+\varepsilon}\qquad(\varepsilon<0).$$

又当 $n>2$ 及 $a<k\nu-2k\nu^2-\nu+2\nu^2$ 时，

$$\int_0^T|Z_{n\cdot k}(a+it)|^2dt\sim c_3T^{2(n-1)(k\nu-\nu-a)-2a+2}$$

式中 c_3 是与 k,n 及 a 有关的常数，其明确的表达式見[1]內定理 4·1.

这定理的証明与[1]內定理 4·1 的証明相似.

§ 3. 几个猜想. 設用 $\mu(\sigma)=\mu_z(\sigma)$ 表示能使

$$Z_{n\cdot k}(\sigma+it)=O(|t|^{\xi})$$

成立的 ξ 的下确界. 又用 $\nu(\sigma)=\nu_z(\sigma)$ 表示能使

$$\frac{1}{T}\int_1^T|Z_{n\cdot k}(\sigma+it)|^2dt=O(T^{\xi})$$

成立的 ξ 的下确界. 由已知的定理, $\mu(\sigma)$ 与 $\nu(\sigma)$ 都是向下凸的,連續的,非負的及單調下降的(参考[8]内 9·41 节及[4]引理 2).

当 $\sigma\geqslant k\nu$ 时,我們知道 $\mu(\sigma)=\nu(\sigma)=0$. 又当 $\sigma\leqslant k\nu-2k\nu^2-2\nu+2\nu^2$ 及 $n>2$ 时由上节定理 2 知道 $\nu(\sigma)=2(k-1)(1-\nu)-2na+1$. 这說明当 $n>2$ 时 $\nu(\sigma)$ 的圖象起碼包含兩个半線.

仿照 Lindelöff 对於 $\zeta(s)$ 的猜想,我們可以作以下的猜測,卽 $\mu(\sigma)$ 与 $\nu(\sigma)$ 的圖象都是由兩个半線組成的. 更确切的說,就是

$$\mu(\sigma)=\frac{1}{2}\nu(\sigma)=\begin{cases}0 & \sigma\geqslant k\nu-k\nu^2-\dfrac{\nu}{2}+\nu^2,\\ (n-1)(k\nu-\nu-\sigma)-\sigma+\dfrac{1}{2} & \text{其他}.\end{cases}$$

为方便計,我們称以上的猜想为(对於 $Z_{n,k}(s)$ 的)狹义 Lindelöff 猜想. 但是根据 Richert 的一个結果([4]内 Satz 8),

$$\nu(\sigma)\geqslant 2(k\nu-\sigma)-1.$$

取 $\sigma=k\nu-k\nu^2-\dfrac{\nu}{2}+\nu^2$ 则在狹义 Lindelöff 猜想下,由上面不等式得

$$k\leqslant\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1.$$

这是狹义 Lindelöff 猜想成立的一个必要条件.

当 $n=2$ 及 k 是偶数时,汪成义在他的畢業論文[5]中曾証明

$$\nu(\sigma)=\begin{cases}0 & \sigma>\dfrac{k-1}{2},\\ k-2\sigma-1 & \dfrac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant\dfrac{k-1}{2},\\ k-4\sigma & \sigma<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

为了避免狹义 Lindelöff 猜想的局限性,参考了上面的特殊結果,我們还可以作以下的猜想,卽

$$\mu(\sigma)=\frac{1}{2}\nu(\sigma)=\max\left\{0,\ k\nu-\sigma-\frac{1}{2},\ (n-1)(k\nu-\nu-\sigma)-\sigma+\frac{1}{2}\right\}.$$

还可以称为广义 Lindelöff 猜想.

关於 $Z_{n,k}(s)$ 的零点分佈,我們所知甚少. 当 σ 充分大时,显然 $Z_{n,k}(s)\neq 0$. 是否当 $\sigma>k\nu$ 时 $Z_{n,k}(s)\neq 0$ 还是未解决的問題. 从 $Z_{n,k}(s)$ 的积分表达式[看[6]内公式(3·8)]容易看出 $Z_{n,k}(s)$ 有簡單零点 $s=-1,-2,\cdots$. 是否当 $\sigma<0$ 时只有这些零点,也是問題. 这样說来,我們对於零点分佈如果作任何推測,似乎都是为时过早的. 但由本节以上的討論,相当於 $\zeta(s)$ 的临界線 $\sigma=\dfrac{1}{2}$ 的,看来不是 $\sigma=\dfrac{k\nu}{2}$ 而是 $\sigma=k\nu-k\nu^2-\dfrac{\nu}{2}+\nu^2$. Kober[7] 曾証明当 $k=n=2$ 时, $Z_{n,k}(s)$ 在 $\sigma=\dfrac{1}{2}$ 上有無穷多的零点. 是否在一般情形下, $Z_{n,k}(s)$ 在 $\sigma=k\nu-k\nu^2-\dfrac{\nu}{2}+\nu^2$ 上都有無穷多零点. 这是一个很有趣的問題.

参 考 文 献

[1] 閔嗣鶴,数学学报，6:3 1956.

[2] Titchmarsh, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University press 1937.

[3] Titchmarsh, E. C., *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, 1951.

[4] Richert, H. E., *Beiträge Zur Summierbarkeit Dirichletschen Reihen mit Anwendungen auf die Zahlentheorie*. Nachrichten Jahrgang, Nr.5, 1956.

[5] 汪成义，*Epstein* ζ 函数的中值公式(未發表)，1957.

[6] 閔嗣鶴,数学学报，5:3, 1955.

[7] Kober, H., *Proc. Lon. Soc. Math.* 42, 1936—7.

[8] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, Oxford University Press, 1944.

ON THE MEAN-VALUE THEOREMS OF $Z_{n,k}(s)$

Min Szu hoa and Yin Wen lin

(Department of Mathematics and Mechanics)

Abstract

One of the authors stated and proved some mean-value theorems for $Z_{n,k}(s)$.[1] Since he quoted a "theorem" (theorem 74 of[2]) which is erroneous, both the proofs and the theorems have to be modified. The main object of the present paper is to prove the following mean value theorems:

Theorem 1. If n is an even integer $n\geqslant 2$, $\nu=\frac{1}{n}$ and $0<a<k\nu-\nu$, then

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty t^{2a-1}|Z_{n,k}(a+it)|^2 e^{-2\delta t}dt=$$

$$=O(\delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)-1})+O(\delta^{-n(k\nu-a)-2a+\varepsilon}),\quad(\varepsilon>0)$$

If further we have $n>2$ and $a<k\nu-2k\nu^2-\nu+2\nu^2$, then

$$I=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}c_1\delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)-1}(1+o(1))$$

where c_1 is a constant, depending only on k, n and a.

Theorem 2. If n is an even integer, $n\geqslant 2$, $\nu=\frac{1}{n}$ and $0<a<h\nu$ then

$$\int_0^T|Z_{n,k}(a+it)|^2dt=O(T^{2(n-1)(k\nu-\nu-a)-2a+2})+O(T^{n(k\nu-a)+1+\varepsilon})\quad(\varepsilon>0)$$

If further we have $n>2$ and $a<k\nu-2k\nu^2-\nu+2\nu^2$, then

$$\int_0^T|Z_{n,k}(a+it)|^2dt\sim c_3T^{2(n-1)(k\nu-\nu-a)-2a+2}$$

where c_3 is a constant depending only on k, n and a.

Moreover, let $\mu(\sigma)=\mu_2(\sigma)$ and $\nu(\sigma)=\nu_2(\sigma)$ be respectively the greatest lower bound of ξ and that of ξ' for which

$$Z_{n,k}(\sigma+it)=O(|t|^{\xi})$$

and

$$\frac{1}{T}\int_0^T|Z_{n,k}(\sigma+it)|^2dt=O(|t|^{\xi'}).$$

Then, the following conjecture may be of interest:

$$\mu(\sigma)=\frac{1}{2}\nu(\sigma)=\max\left\{0,\ k\nu-\sigma-\frac{1}{2},\ (n-1)(k\nu-\nu-\sigma)-\sigma+\frac{1}{2}\right\}.$$

关於正項級数的收斂性*

冷 生 明

（数学力学系分析教研室）

我們將建立一些关於一个任意的正項級数 $\sum a_n(a_n\geqslant 0)$ 是否收斂的判断法．在我們的討論中，θ 將是一个定数，$0<\theta<1$,❶ 而 $\sum C_n$ 則是一个收斂的正項級数．

1．首先我們考慮要 $\sum a_n$ 为收斂的一个必要条件，即 $a_n\to 0$．通常是用收斂到 0 的定义去判断是否 $a_n\to 0$．今求証

定理 1. 設有兩列非負的实数 a_n 与 o_n，已知 $o_n\to 0$．那末要 $a_n\to 0$ 的一个必要充分条件是，每一个充分大的自然数 n 都要能够联系到一个自然数 n'，小於 n 而随 n 趨向∞，使

$$a_n\leqslant\theta(a_{n'})+o_n. \tag{1}$$

因若記作 $\nu^1(n)=n'$ 而 $\nu^{i+1}(n)=\nu^i(n')$，則条件(1)包含

$$a_{\nu^i(n)}\leqslant o_{\nu^i(n)}+\theta a_{\nu^{i+1}(n)},$$

所以

$$\begin{aligned}a_n&\leqslant o_n+\theta o_{\nu(n)}+\theta^2 o_{\nu^2(n)}+\cdots+\theta^{h-1}o_{\nu^{h-1}(n)}+\theta^h a_{\nu^h(n)}\\&\leqslant(1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^{h-1})R+\theta^h a_{\nu^h(n)},\end{aligned}$$

其中 R 为 o_i 对於 $\nu^{h-1}(n)\leqslant i\leqslant n$ 而言的最大值，因而当 $\nu^{h-1}(n)\to\infty$ 时 $R\to 0$．若注意

$$1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^{h-1}=\frac{1-\theta^h}{1-\theta}<\frac{1}{1-\theta},$$

即可見級数 $\sum\theta^n$ 收斂因而 $h\to\infty$ 时 $\theta^h\to 0$．給定 $\varepsilon>0$，我們可以先取定一个自然数 N 使 $\nu^{h-1}(n)\geqslant N$ 时 $R<\frac{1}{2}(1-\theta)\varepsilon$，而后再取 $h=h(n)$ 使 $\nu^{h-1}(n)\geqslant N>\nu^h(n)$．由於 $\nu(n)$ 小於 n 並且随着 n 趨向 ∞，当 $n\to\infty$ 时 h 趨向無穷，因之 $\theta^h a_{\nu^h(n)}\to 0$．可見当 n 充分大时 $a_n<\varepsilon$．因此 $a_n\to 0$．

反之，若 $a_n\to 0$，我們可以选取一串自然数 $n_1<n_2<n_3<\cdots$ 使

$$n\geqslant n_{k+1}\quad\text{时}\quad a_n\leqslant\theta a_{n_k}.$$

对於 $n_{k+1}\leqslant n<n_{k+2}$ 取 $n'=n_k$，即有不等式(1)．

利用 n' 这样的指数，通常的比較判断法可以推广如下．

定理 2. 設每一个充分大的自然数 n 都联系到一个自然数 n'，小於 n 而随 n 趨向 ∞．那末若要一正項級数 $\sum a_n$ 收斂，就只需有一个收斂的正項級数 $\sum c_n$ 使 n 充分大时

$$\frac{a_n}{a_{n'}}\leqslant\frac{c_n}{c_{n'}}(1+C_n); \tag{2C}$$

---

* 1957 年 8 月 19 日收到．

❶ 在以下的討論中，我們也可以把 $\theta(s_n)$ 理解为一个不特意規定的序列，只要它具有这个形式

$$\theta(s_n)=\theta_n\cdot s_n,\quad\varlimsup_{n\to\infty}|\theta_n|<1.$$

若要一正項級数 $\sum a_n$ 發散，就只需有一个發散的正項級数 $\sum d_n$ 使 n 充分大时

$$\frac{a_n}{a_{n'}} \geqslant \frac{d_n}{d_{n'}}(1-C_n). \tag{2D}$$

因若不等式 (2C) 对於 $n \geqslant N$ 成立，我們可以記作 $\nu^0(n)=n, \nu^1(n)=n', \nu^{m+1}(n)=\nu^m(n')$，因之

$$a_n \leqslant \frac{c_n}{c_{\nu(n)}} \cdot a_{\nu(n)} \cdot (1+C_n) \leqslant c_n \frac{a_{\nu^h(n)}}{c_{\nu^h(n)}} \prod_{i=0}^{h-1}(1+C_{\nu^i(n)}),$$

其中 $h=h(n)$ 为一自然数使 $\nu^{h-1}(n) \geqslant N > \nu^h(n)$. 我們可以假定 N 原来就取得充分大使

$$\sum_{m=N}^{\infty} C_m < \frac{1}{2}.$$

同样由 (2D) 推得

$$a_n \geqslant d_n \frac{a_{\nu^h(n)}}{d_{\nu^h(n)}} \prod_{i=0}^{h-1}(1-C_{\nu^i(n)}).$$

於是我們只需証明

$$0 < \prod_{i=N}^{\infty}(1-C_i) \leqslant \prod_{i=N}^{\infty}(1+C_i) < +\infty;$$

因而定理的証明將因下面这个引理而完成.

引理 1. 若实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有相同的正負号而且 $|x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}| \leqslant 1$，則

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = 1+(x_1+\cdots+x_n)+\Theta(x_1+\cdots+x_n)^2,$$
$$0 \leqslant \Theta < 1.$$

这对於 $n=1$ 显然成立. 若对於 n 成立則对於 $n+1$ 也成立；因为这时

$$(1+x_1)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) = [1+(x_1+\cdots+x_n)+\Theta(x_1+\cdots+x_n)^2](1+x_{n+1}) =$$
$$=1+(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})+\Theta'(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})^2,$$

其中

$$\Theta' = \frac{\Theta(x_1+\cdots+x_n)^2+[1+\Theta(x_1+\cdots+x_n)](x_1+\cdots+x_n)x_{n+1}}{(x_1+\cdots+x_n)^2+2(x_1+\cdots+x_n)x_{n+1}+(x_{n+1})^2};$$

而由於假設 $0 \leqslant \Theta < 1$ 显然有 $0 \leqslant \Theta' < 1$.

因此，按照完全归納法，引理对於每一个自然数 n 都成立.

2. 我們現在来推广比較判断法和比值判断法，使其成为必要充分条件. 在这些条件中，判断一正項級数是收斂还是發散时，用来跟它进行比較的級数將是它自己的項經过适当分組后而成的級数❶.

定理 3. 若要一正項級数 $\sum a_n$ 收斂，必需而只需每一个充分大的自然数 n 都能联系到一个自然数 n'，小於 n 而随 n 趋向 ∞，使

❶ A. Pringsheim[1] 曾以單調上升序列为出發点去确定收斂的正項級数与發散的正項級数的構造，並因之以建立若干判断法. 我們这里取作收斂(或發散)的正項級数 $\sum a_n$ 的特征性質的是"收斂(或發散)的單調序列 $s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$ 只要有無穷个項不相等就含有收斂(或發散)較快的子序列"这一基本性質.

$$\sum_{m'=n} a_m \leqslant \theta(a_n) + C_n; \tag{3C$'$}$$

也必需而只需每一个充分大的自然数 n 都能联系到一个自然数 n''，大於 n 且随 n 增大，使

$$\sum_{n''\leqslant m<(n+1)''} a_m \leqslant \theta(a_n) + C_n. \tag{3C$''$}$$

若要正項級数 $\sum a_n$ 發散，必需而只需每一个充分大的自然数 n 都能联系到一个自然数 n'，小於 n 而随 n 趋向 ∞，使

$$\sum_{m'=n} a_m > (1-C_n)a_n; \tag{3D$'$}$$

也必需而只需每一个充分大的自然数 n 都能联系到一个自然数 n''，大於 n 且随 n 增大，使

$$\sum_{n''\leqslant m<(n+1)''} a_m > (1-C_n)a_n. \tag{3D$''$}$$

我們注意，若已知 $n<n''\leqslant(n+1)''$, $n=1,2,3,\cdots$，而令 $m'=n$ 当 $n''\leqslant m<(n+1)''$，則条件(3C$''$)与(3D$''$)各化为(3C$'$)与(3D$'$)；所以我們只需証明条件(3C$''$)与(3D$''$)的必要性和(3C$'$)与(3D$'$)的充分性.

假定 $\sum a_n$ 收斂. 若只有有穷个 $a_n>0$，我們可取 $n''=n+1$ 使不等式 (3C$''$) 对於充分大的 n 成立. 若有無穷个 $a_n>0$，我們就能够选擇一串自然数 $k_1<k_2<k_3<\cdots$ 使

$$\sum_{m=k_n}^{\infty} a_m < \theta a_n \quad 当 \quad a_n>0.$$

取 $n''=k_n$ 当 $a_n>0$，並补充 $n''=(n+1)''$ 当 $a_n=0$，即見不等式(3C$''$)对於所有的 n 都成立.

假定 $\sum a_n$ 發散. 則可取一串自然数 $k_1<k_2<k_3<\cdots$ 使

$$\sum_{k_n\leqslant m<k_{n+1}} a_m > a_n.$$

这样 $n''=k_n$ 就适合条件(3D$''$).

今假定条件(3C$'$)适合. 則可取定一个充分大的自然数 N 使 $n\geqslant N$ 时

$$\sum_{m=N}^{n} a_m = \sum_{h=1}^{n} \sum_{\substack{m'=h \\ (N\leqslant m\leqslant n)}} a_m \leqslant \theta\sum_{h=1}^{n} a_h + \sum_{h=1}^{n} C_h,$$

因此

$$(1-\theta)\sum_{m=1}^{n} a_m \leqslant \sum_{m=1}^{N-1} a_m + \sum_{m=1}^{\infty} C_m.$$

於是推知 $\sum_{m=1}^{n} a_m = O(1)$ 而 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ 收斂.

最后假定不等式 (3D$'$) 对於 $n\geqslant N$ 成立. 我們記作 $\nu^0(n)=n, \nu^1(n)=n', \nu^{m+1}(n)=$

$\nu^m(n')$. 假如 $\sum a_n$ 收斂,我們可以把 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} C_n$ 的項按照条件

$$(m,n):\qquad \nu^m(n) \geqslant N > \nu^{m+1}(n)$$

分組而对於 $m=0,1,2,3,\cdots$ 作和数

$$b_m = \sum_{(m,n)} a_n, \qquad c_m = \sum_{(m,n)} C_n;$$

因之 $\sum b_m$ 与 $\sum c_m$ 也是收斂的. 但是

$$b_m = \sum_{(m-1,n)} \sum_{h'=n} a_h > \sum_{(m-1,n)} (1-C_n)\,a_n \geqslant (1-c_{m-1})\,b_{m-1}$$

$$\geqslant (1-c_{m-1})(1-c_{m-2})\cdots(1-c_M)\,b_M \geqslant b_M \prod_{n=M}^{\infty}(1-c_n).$$

可見 m 充分大时 $b_m>0$. 而若取 M 使 $b_M>0$ 且使

$$\sum_{n=M}^{\infty} c_n < \frac{1}{2},$$

則按照引理1有

$$\sum_{n=M}^{\infty}(1-c_n) \geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

这表明 $m \geqslant M$ 时 $b_m \geqslant \frac{1}{4} b_M > 0$, 因而 $\sum b_m$ 不会是收斂的;而因此 $\sum a_n$ 是發散的.

3. 我們来考虑一类特殊的正項級数. 設正項級数 $\sum a_n$ 具有这样一个性質:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4a}$$

設有一列自然数 n_k (例如 $n_k=2^k$) 具有这个性質:❶

$$1 < \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} < +\infty. \tag{4b}$$

我們取一自然数 h 使对於充分大的 n 都有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1+\frac{h}{n}.$$

我們用 h' 与 h'' 表示(4b)中的下極限与上極限. 於是当 $n_k \leqslant m < n \leqslant n_{k+1}$ 而 k 充分大时

$$a_n \leqslant \left(1+\frac{h}{n-1}\right)\left(1+\frac{h}{n-2}\right)\cdots\left(1+\frac{h}{m}\right)a_m \leqslant \left(1+\frac{h}{n_k}\right)^{n_{k+1}-n_k} a_m \leqslant \left(1+\frac{h}{n_k}\right)^{h''n_k} a_m;$$

因而按照引理1有

$$a_n \leqslant \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{hh''n_k} a_m \leqslant 3^{hh''} a_m.$$

由此推知当 k 充分大时

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n \leqslant 3^{hh''}(n_{k+1}-n_k)\,a_{n_k} \leqslant 3^{hh''} h'' \cdot n_k a_{n_k}; \tag{4c}$$

❶ 易見条件(4b)对於定理4与6的普遍成立是必要的. 比較[2](頁123),[3].

$$\sum_{m=n_k}^{n_{k+1}-1} a_m \geqslant 3^{-kh''}(n_{k+1}-n_k)a_{n_{k+1}} \geqslant 3^{-kh''}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{h'}\right)\cdot n_{k+1}a_{n_{k+1}}; \tag{4d}$$

且在 $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ 时

$$a_n \leqslant 3^{kh''}\frac{n_{k+1}}{n}a_{n_k} \leqslant \frac{3^{kh''}2h''}{n}\cdot n_k a_{n_k}. \tag{4e}$$

我們从这些关系式推得

定理 4. 若正項級数 $\sum a_n$ 适合条件(4a)而自然数列$\{n_k\}$适合条件(4b)，則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 与 \quad \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_{n_k} \tag{4}$$

同时收斂或者同时發散.

定理 5. 若正項級数 $\sum a_n$ 适合条件(4a)而又收斂，則

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

这样一来，关於逐項下降的正項級数的歌西凝聚判断法与亞貝耳發散判断法就都推广到了我們所考慮的一类正項級数.

我們若把(4c)与(4d)結合到定理 3 卽得

定理 6. 設正項級数 $\sum a_n$ 适合条件(4a)而自然数列$\{n_k\}$适合条件(4b). 則若

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k a_{n_k}}{a_k} = 0, \tag{6C}$$

$\sum a_n$ 就收斂；而若

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k a_{n_k}}{a_k} = \infty, \tag{6D}$$

$\sum a_n$ 就發散.

因若在定理 3 中取 $k''=n_k$，則由於(4c)与(4d)的緣故，(6C)隐含(3C″)而(6D)隐含(3D″).

如果我們引用定理 6 到級数

$$\sum\frac{1}{n^p} \quad 与 \quad \sum\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{k-1}n\,(\log^k n)^p} \quad (k=1,2,3,\cdots), \tag{6a}$$

就可以直接看出来，这些級数在 $p>1$ 时收斂，在 $p\leqslant 1$ 时發散. 因为这时

$$\frac{2^n a_{2^n}}{a_n} = \frac{n^p}{2^{n(p-1)}} \quad 或 \quad \frac{(\log^k n)^p}{(\log^{k-1}n)^{p-1}}[1+o(1)],$$

都在 $p>1$ 时趋向 0，在 $p\leqslant 1$ 时趋向 ∞.

4. 我們現在来考慮定理 3 中的自然数列 $n'=\nu(n)$ 的一种特殊的选擇. 我們从定理 6 的推証中可以看見，当正項級数 $\sum a_n$ 适合条件 (4a) 时，若取 $n_k=[e^k]=e^k$ 的整数部分 $(k=1,2,3,\cdots)$，並記 $n'=[\log n]=\log n$ 的整数部分，則在 n 經过 n_k 这些值趋向 ∞ 时，若比值

$$\frac{a_n}{a_{n'}} : \frac{1}{n}$$

的上極限充分小，$\sum a_n$ 就收斂；若这比值的下極限充分大，$\sum a_n$ 就發散．我們現在要来証明

定理 7. 設 n' 为一自然数，随 n 而定且具有这个形式

$$n' = \log n + O(1). \tag{7}$$

則正項級数 $\sum a_n$ 若适合条件

$$a_n \leqslant \theta\left(\frac{1}{n}\right)a_{n'} + C_n, \tag{7C}$$

它就收斂；若适合条件

$$a_n > \left(\frac{1}{n} - C_n\right)a_{n'}, \tag{7D}$$

它就發散．

我們先考慮这个簡單的情形：$n' = [\log n] = \log n$ 的整数部分．令

$$\zeta_n = \sum_{m'=n} \frac{1}{m}, \qquad c_n = \sum_{m'=n} C_m,$$

即見 $(7C)$ 隐含

$$\sum_{m'=n} a_m \leqslant \theta(\zeta_n a_n) + c_n$$

而 (7D) 隐含

$$\sum_{m'=n} a_m > (\zeta_n - c_n)a_n.$$

於是，按照定理 3，我們只需証明

$$\zeta_n = 1 + O(C'_n),$$

而 $\sum C'_n$ 为一收斂的正項級数．

今令

$$n'' = [e^n], \qquad h = 1 + \frac{1}{n^2},$$

並注意

$$h^{n^2} < e < h^{n^2+1},$$

因而

$$h^{n^2} \cdot n'' < e^{n+1},$$

$$h^{n^2+1} \cdot n'' > e(e^n - 1) = e^{n+1} - e,$$

即可見

$$\zeta_n = \sum_{n'' < m \leqslant (n+1)''} \frac{1}{m} = \sum_{i=0}^{n^2} \sum_{h^i n'' < m \leqslant h^{i+1} n''} \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{n''}\right).$$

这里內層和数的每一項具有形式

$$\frac{1}{h^i n''[1 + \Theta(n^{-2})]}, \qquad |\Theta| \leqslant 1,$$

而它的項数为

$$h^{i+1}n''-h^{i}n''+\quad(1),\quad|\Theta(1)|\leqslant 1,$$

所以它的值为

$$\frac{1}{n^{2}}+O\Big(\frac{1}{n^{4}}\Big);$$

因之

$$\zeta_{n}=1+O\Big(\frac{1}{n^{2}}\Big).$$

普遍情形可以化成剛才討論过的情形．因为如果我們用 Θ 表示一个不定的数，其値可以随它每一次的出現而不同，唯一的条件是

$$|\Theta|\leqslant 1,$$

則可取一个不随 n 而变的自然数 r 把(7)写成

$$n'=[\log n]+\Theta(r),$$

因之，当 n 充分大时

$$[n+\Theta(2r)]'=\Big[\log n+\log\Big(1+\Theta\Big(\frac{2r}{n}\Big)\Big)\Big]+\quad(r)=[\log n]+\Theta(2r).$$

这样一来，若 a'_{n} 与 a''_{n} 为 a_{m} 对於 $n-2r\leqslant m\leqslant n+2r$ 的最小値与最大値並且 $n_{1}=[\log n]$，則(7C)与(7D)分別隐含

$$a''_{n}\leqslant\theta\Big(\frac{1}{n}+O(n^{-2})\Big)a''_{n_{1}}+C''_{n},$$

$$a'_{n}>\Big(\frac{1}{n}-O(n^{-2})-C''_{n}\Big)a'_{n_{1}},$$

其中 C''_{n} 为 C_{m} 对於 $n-2r\leqslant m\leqslant n+2r$ 的最大値，因而 $\sum C''_{n}\leqslant(4r+1)\sum C_{n}<+\infty$．於是根据剛才証明过的，(7C)隐含 $\sum a''_{n}$ 的，因而 $\sum a_{n}$ 的收斂性；而(7D)隐含 $\sum a'_{n}$ 的，因而 $\sum a_{n}$ 的發散性．

可注意的是，定理 7 所給出的判断法对应於級数族

$$\sum\frac{q^{l(n)}}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n},\tag{7a}$$

其中 $q>0$ 为一参数，而 $l(n)$ 为一整数使

$$1\leqslant\log^{l(n)}n<e.$$[1]

这級数在 $q<1$ 时收斂，在 $q\geqslant 1$ 时發散．因为在 $q<1$ 时它适合条件(7C)，而有 $n'=[\log n]$ 与 $\theta=q$；在 $q\geqslant 1$ 时它适合条件(7D)，而有 $n'=[\log n]+1$．容易証明，若一正項級数 $\sum a_{n}$ 适合条件(7C)，而有 $C_{n}=0$，則 $a_{n}=O(l_{n}(\theta))$，其中 $l_{n}(\theta)$ 为級数(7a)在 $q=\theta$ 时的第 n 項；又若一正項級数 $\sum a_{n}$ 适合条件(7D)，而有 $C_{n}=0$，則 $a_{n}>cl_{n}(1)$，其中 $c>0$ 为一常数．

若注意 $l(n)=h$ 时 $n=\exp^{h}t,1\leqslant t<e$，並写成

$$\sum_{l(n)=h}f(n)=\sum_{\exp^{h-1}1\leqslant m<\exp^{h}1}\ \sum_{m\leqslant\log n<m+1}f(n),$$

---

[1] 显然 $l(n)\to\infty$；但是，引用定理 1 而取 $n'=[\log n]$，卽可立刻看出对於每一自然数 k 都有

$$\frac{l(n)}{\log^{k}n}\to 0,\qquad\frac{(\log^{k}n)^{l(n)}}{\log^{k-1}n}\to 0.$$

則易用定理7的証明中所作 ζ_n 的估計推得❶

$$\sum_{l(n)=h}\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}=1+O\left(\frac{1}{h^2}\right). \tag{7a'}$$

可見級数(7a)按照条件 $l(n)=h$ $(h=0,1,2,3,\cdots)$ 把項归併后就近似於一个几何級数:

$$\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{l(n)=h}l_n(q)=\sum_{h=0}^{\infty}[1+o(1)]q^h.$$

同时級数

$$\sum\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n\cdot[l(n)]^p} \tag{7b}$$

变成近於一个調和級数 $\sum\frac{1}{h^p}$; 它在 $p>1$ 时收斂, 在 $p\leqslant 1$ 时發散.❷

若已知級数(7a)或(7b)何时收斂何时發散, 用它們代替定理2中的 $\sum c_n$ 或 $\sum d_n$, 也可得定理7. 我們自然可以对 n' 作别的选擇而相应地(按照定理2)改变条件(7C)与(7D)中的比值 $\frac{1}{n}$.

5. 我們来考慮 $n'=n-1$ 这一情形. 我們取級数(7b), 把它們記作 $\sum A_n$ 而考慮比值

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}=\prod_{i=0}^{l(n)}\frac{\log^i(n-1)}{\log^i n}\cdot\frac{1}{[\log^{l(n)}(n-1)]^{l(n)-l(n-1)}}\cdot\left[\frac{l(n-1)}{l(n)}\right]^p.$$

为了要使最后这个因子随 n 而变时較为規則, 我們利用(7a')把 $l(n)$ 換成❸

$$l^*(n)=\sum_{m=1}^{n}l_m(1)=\sum_{h=0}^{l(n)}\sum_{\substack{l(m)=h\\(1\leqslant m\leqslant n)}}l_m(1)=l(n)+O(1);$$

因而 $\sum A_n$ 就变成一个正項級数 $\sum A_n^*$, 它与 $\sum A_n$ 同收斂同發散, 而 $\left[\frac{l(n-1)}{l(n)}\right]^p$ 則換成

$$\left[\frac{l^*(n-1)}{l^*(n)}\right]^p=\left[1-\frac{l_n(1)}{l^*(n)}\right]^p=1-\frac{pl_n(1)}{l^*(n)}+\frac{O(1)}{n^2(\log n)^2}=$$

$$=1-\frac{p}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n\cdot l(n)}+O(c_n'),$$

其中

$$c_n'=pl_n(1)\left[\frac{1}{l^*(n)}-\frac{1}{l(n)}\right]+\frac{1}{n^2(\log n)^2}=$$

---

❶ 也易用歌西积分判断法的方法推知和数(7a')为

$$1+\Theta\left(\frac{1}{\exp^h 1}\right).$$

❷ 若利用函数 $l=l(n)$ 的重叠(iteration)而以 $l_1(n)$ 表示最小整数使

$$l^{l_1(n)}(n)=1,$$

並簡写

$$Ln=n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n,$$

我們还可以作类似的級数

$$\sum\frac{1}{Ln\,Ll(n)\,Ll^2(n)\cdots Ll^{l_1(n)}(n)\cdot[l_1(n)]^p}, \tag{7c}$$

並繼續使用同样的方法作出类似的新級数. 用定理7的証明中所用的方法或歌西积分判断法可以証明, 所作的級数都在 $p>1$ 时收斂, 在 $p\leqslant 1$ 时發散.

❸ 这里可参看 N. H. Abel 与 A. Pringsheim 关於級数族的普遍定理[2](頁299), [1](頁329).

$$=\frac{O(1)}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n\cdot[l(n)]^2}+\frac{1}{n^2(\log n)^2},$$

按照(7b)这是一个收斂的正項級数的第 n 項.

其次,我們写成

$$\frac{\log^i(n-1)}{\log^i n}=1+\log\frac{\log^{i-1}(n-1)}{\log^{i-1}n}\cdot\frac{1}{\log^i n},$$

並注意 $x\geqslant 2$ 时

$$\log\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}-\Theta\left(\frac{2}{x^2}\right),$$

則由对於 i 的归納法可見

$$\frac{\log^i(n-1)}{\log^i n}=1-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^i n}-\Theta\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

最后,我們注意对於每一正整数 h,由 $\exp^h 1$ 到 $\exp^{h+1}1$ 之間只有一个正整数 n 使 $l(n)\neq l(n-1)$. 这时 $l(n)=l(n-1)+1$ 而

$$0\leqslant\log^{l(n)}(n-1)<1\leqslant\log^{l(n)}n,$$

因而

$$0\leqslant 1-\log^{l(n)}(n-1)<\log^{l(n)}n-\log^{l(n)}(n-1);$$

而这右端則为

$$-\log\frac{\log^{l(n-1)}(n-1)}{\log^{l(n-1)}n}=\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n-1)}n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

所以

$$\frac{1}{[\log^{l(n)}(n-1)]^{l(n)-l(n-1)}}=1+O(c_n''),$$

其中 c_n'' 为一收斂的正項級数的第 n 項.

於是,引用引理 1,我們得到

$$\frac{A_n^*}{A_{n-1}^*}=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}-$$
$$-\frac{p}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n\cdot l(n)}+O\left(c_n'+c_n''+\frac{l(n)}{n^2}\right).$$

把 $\sum A_n^*$ 取作定理 2 中的 $\sum c_n$ 或 $\sum d_n$,我們看見,要一正項級数 $\sum a_n$ 收斂的一个充分条件是

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}-$$
$$-\frac{p}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n\cdot l(n)}+O(C_n),\tag{8C'}$$

其中 $p>1$ 不依賴於 n; 要这級数發散的一个充分条件是

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}-$$
$$-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n\cdot l(n)}-O(C_n).\tag{8D'}$$

我們試看 $l(n)$ 在这里是否可以换成任一自然数 $h=h(n)\leqslant l(n)$.

为此我們把上面所得 $\frac{A_n^*}{A_{n-1}^*}$ 的表达式減去末尾一項之后記作 $R^p(l(n))$，而考虑 $R^p(h)$ 对於 $h=1,2,\cdots,l(n)$ 的最大值与最小值. 当 $p\leqslant 0$ 时 $R^p(h)\geqslant R^1(l(n))$，因而相应的級数 $\sum A_n^*$ 發散. 我們假定 $p>0$. 因 $l(n)\geqslant 1$ 时

$$R^p(h+1)>R^p(h)$$

等价於

$$\log^{h+1}n>\frac{h}{p}+\frac{h}{h+1},$$

有自然数 $H=l'(n)$ 使 $R^p(h)$ 在 $h<H$ 时随 h 增大而增大，在 $h\geqslant H$ 时随 h 增大而減小; H 由条件

$$\log^H n>\frac{H-1}{p}+\frac{H-1}{H}$$

与

$$\log^{H+1}n\leqslant\frac{H}{p}+\frac{H}{H+1}$$

来确定. 可見 $n\geqslant 3$ 时，$R^p(h)$ 在 $h=l'(n)$ 取得最大值，而在 $h=l(n)$ 取得最小值.

因此在判断法 (8D′) 中 $l(n)$ 可以换成任一自然数 $h=h(n)\leqslant l(n)$；而剩下只需考虑 $R^p(H)$，$p>1$.

我們先注意，在 $p\geqslant 1$ 时自然数 $H=l'(n)$ 可以改由条件

$$\log^{l'(n)}n\geqslant l'(n)>\log^{l'(n)+1}n-1$$

来确定. 因为与前面确定 H 的兩个不等式相比較卽有 $l'(n)\geqslant H$ 与 $H+1\geqslant l'(n)+1$.

其次，我們注意 $l'(n)=k$ 时 $n=\exp^k t$, $k\leqslant t<e^{k+1}$，再把这些 n 按照条件 $[\log^{k+1}n]=h$ $([\log k]\leqslant h<k+1)$ 分組而利用(7a′)，卽可見

$$\sum_{l'(n)=k}\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l'(n)}n}=k-\log k+O(1).$$

我們於是有

引理 2. 級数

$$\sum\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l'(n)}n\cdot[l'(n)]^p}\tag{8a}$$

在 $p>2$ 时收斂而在 $p\leqslant 2$ 时發散.

今注意对於每一正整数 k，由 $\exp^k k$ 到 $\exp^{k+1}(k+1)$ 之間只有一个正整数 n 使 $l'(n)\neq l'(n-1)$，且这时 $l'(n)=l'(n-1)+1$ 而

$$0<l'(n)-\log^{l'(n)}(n-1)\leqslant\log^{l'(n)}n-\log^{l'(n)}(n-1)=\log\frac{\log^{l'(n-1)}n}{\log^{l'(n-1)}(n-1)}=$$

$$=\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l'(n-1)}n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因此

$$\prod_{l'(m)=k}[\log^{l'(m)}(m-1)]^{l'(m)-l'(m-1)}=k-O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

同时我們把級数 (8a) 記作 $\sum l'_n(p)$ 而注意引理 2 前面的估計式結合到引理 1 时給出

$$\prod_{l'(m)=k}[1-l'_m(1)]=\frac{\log k+O(1)}{k}.$$

於是可見級数

$$\sum A'^*_n=\sum\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l'(n)}n}\prod_{m=3}^{n}[\log^{l'(m)}(m-1)]^{l'(m)-l'(m-1)}[1-l'_m(1)]^p$$

在 $p>1$ 时收斂而在 $p\leqslant 1$ 时發散．这里我們有

$$\frac{A'^*_n}{A'^*_{n-1}}=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l'(n)-1}n}-$$
$$-\frac{1+p/l'(n)}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l'(n)}n}+O(c'''_n),$$

其中 c'''_n 为一收斂的正項級数的第 n 項．

可見在判断法(8C′)中 $l(n)$ 也可以換成任一自然数 $h=h(n)\leqslant l(n)$．

我們至此証得

定理 8. 設实数 $p>1$ 不依賴於 n 而整数 $h=h(n)$ 适合条件 $1\leqslant\log^h n\leqslant n$．則若要一正項級数 $\sum a_n$ 收斂，只需

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{h-1}n}-$$
$$-\frac{1+p/h}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}+O(C_n);\tag{8C}$$

若要一正項級数 $\sum a_n$ 發散，只需

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{h-1}n}-$$
$$-\frac{1+1/h}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}-O(C_n).\tag{8D}$$

特例❶，若要 $\sum a_n$ 收斂，只需

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{h-1}n}-$$
$$-\frac{p}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}+O(C_n);\tag{8C$_1$}$$

若要它發散，只需

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{h-1}n}-$$
$$-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}-O(C_n).\tag{8D$_1$}$$

---

❶ 比較[2](頁 293)；这里是一个推广。若 $\log^h n\to+\infty$，則判断法 $(8C_1)$—$(8D_1)$ 可以直接从 $(8C')$—$(8D')$ 看出來．

这些判断法当 h 不依赖於 n 时随 h 增大而加强。但这些不等式右边的項数也随 h 而增加。至於不等式 (8C′) 与 (8D′)，它們右边的項数則一直随 n 而趋向 ∞。今試記 $n'=[\log n]$ 而作表达式

$$\frac{A_n^*}{A_{n-1}^*}-\frac{1}{n}\frac{A_{n'}^*}{A_{n'-1}^*}=1-\frac{2}{n}-\frac{[l(n)-l(n')-1]}{n\log n\log^2 n\cdots\log^{l(n)-1}n}\left(\frac{1}{\log^{l(n)}n}+\frac{p}{\log^{l(n)}n\cdot l(n)}-\right.$$
$$\left.-\frac{p}{l(n')}\right)+O\left(\frac{l(n)}{n(\log n)^2}+\frac{p}{n\log n\log^2 n\cdots\log^{l(n)}n\cdot[l(n)]^2}\right)+$$
$$+O\left(c_n'+c_n''+\frac{l(n)}{n^2}\right)-O\left(\frac{1}{n}\right)\left(c_{n'}'+c_{n'}''+\frac{l(n')}{n'^2}\right).$$

这里項数总不超过六。我們自然而然要考虑左边这表达式是否給出一个收斂或發散的判断法。我們来証明

定理 9. 設 δ 为一正数。設 n' 为一自然数，随 n 而定且具有形式

$$n'=\log n+O(1).$$

則要一正項級数 $\sum a_n$ 收斂，只需 n 充分大时

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}-\frac{1}{n}\frac{a_{n'}}{a_{n'-1}}\leqslant 1-\frac{2}{n}-\frac{\delta}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}+C_n-\frac{1}{n}C_{n'};\tag{9C}$$

而要一正項級数 $\sum a_n$ 發散，就只需 n 充分大时

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}-\frac{1}{n}\frac{a_{n'}}{a_{n'-1}}\geqslant 1-\frac{2}{n}+\frac{\delta}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}-C_n+\frac{1}{n}C_{n'}.\tag{9D}$$

我們写成 $n'=\nu(n)$ 並且取整数 $h=h(n)$ 使 $1\leqslant i\leqslant h$ 时 $\nu^i(n)>\nu^{i+1}(n)$ 而 $\nu^h(n)=O(1)$。於是，簡写

$$Ln=n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n,$$

即見条件 (9C) 隐含

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{a_{\nu(n)}}{a_{\nu(n)-1}}-1\right)-\frac{\delta}{Ln}+C_n-\frac{1}{n}C_{\nu(n)}$$
$$\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\nu(n)}-\frac{1}{n\nu(n)\nu^2(n)}-\cdots-\frac{1}{n\nu(n)\nu^2(n)\cdots\nu^h(n)}-$$
$$-\delta\left(\frac{1}{Ln}+\frac{1}{nL\nu(n)}+\frac{1}{n\nu(n)L\nu^2(n)}+\cdots+\frac{1}{n\nu(n)\nu^2(n)\cdots\nu^{h-1}(n)L\nu^h(n)}\right)+$$
$$+\frac{1}{n\nu(n)\nu^2(n)\cdots\nu^h(n)}\left(\frac{a_{\nu^{h+1}(n)}}{a_{\nu^{h+1}(n)-1}}-1\right)+C_n$$
$$\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}+$$
$$+\frac{o(h)-\delta h+O(1)}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}+C_n.$$

当条件 (9D) 适合时这些不等号就都取相反的方向，而 δ 与 C_n 則取相反的符号。这样定理的結論就立即由定理 8 得出来。[11]

---

[11] 若注意 $|x|\geqslant 2$ 时 $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\Theta\left(\frac{2}{x^2}\right)$，即可見 $h=l(n)+C(1)$，因而定理 9 也可以从判断法 $(8C')$—$(8D')$ 直接推出来。

6. 最后，我們要提出另外一种比較判断法.

引理 3. 設有兩列实数 s_n 与 t_n，当 n 經过一部分自然数以趋向 ∞ 时

$$s_n \leqslant t_n + o(1), \tag{10}$$

而且对於所有的 n 都有

$$s_{n+1} - s_n \geqslant t_{n+1} - t_n; \tag{10a}$$

则对於所有的 n 都有

$$s_n \leqslant t_n.$$

若 t_n 有大於零的下界，(10a) 可以换成

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \geqslant \frac{t_{n+1}}{t_n}. \tag{10b}$$

因条件 (10a) 隐含

$$s_n - t_n \leqslant s_m - t_m \quad 只要 \quad n < m.$$

令 $m \to \infty$ 而用 (10) 即得

$$s_n \leqslant t_n.$$

又若 t_n 有大於零的下界则条件 (10b) 隐含 s_n 都是正数或者都是負数. 在第二种情形自然有 $s_n \leqslant t_n$；而在第一种情形我們有

$$\frac{s_n}{t_n} \leqslant \frac{s_m}{t_m} \quad 只要 \quad n < m.$$

令 $m \to \infty$ 而用 (10)，並注意 t_m 有大於零的下界，即得

$$s_n \leqslant t_n.$$

可以注意，只要有一个 $s_h = t_h$ 则在引理的結論中就有 $s_n = t_n$ 当 $n \geqslant h$.

今取推証判断法 (8C′) 时所用的級数 $\sum A_n^*$ 而利用比值 $\dfrac{A_n^*}{A_{n-1}^*} = 1 + o(1)$. 因

$$\frac{\log^i (n-1)}{\log^i n} = 1 + \log \frac{\log^{i-1}(n-1)}{\log^{i-1} n} \cdot \frac{1}{\log^i n},$$

而当 $x \geqslant 2$ 时

$$\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \Theta\left(\frac{3}{x^3}\right),$$

可見对於 $1 \leqslant i \leqslant l(n)$ 以及充分大的 n 一致地有

$$\frac{\log^i (n-1)}{\log^i n} = 1 - \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^i n} - \frac{1}{2n^2 \log n \log\log n \cdots \log^i n} - \\ - \Theta\left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log^2 n} + \cdots + \frac{1}{\log^i n}\right) \frac{1}{n^2 (\log n)^2};$$

因此，引用引理 1，可見当 n 充分大时

$$n^2\left(\frac{A_{n+1}^*}{A_n^*} - \frac{A_n^*}{A_{n-1}^*}\right) = 1 + \frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log n \log\log n} + \cdots + \frac{1}{\log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n} + \\ + \frac{p}{\log n \log^2 n \cdots \log^{l(n)} n \cdot l(n)} + \Theta(n^2)(C_n' - C_{n+1}'),$$

其中

$$C'_n=\frac{1}{n(1+\log n)^{\frac{3}{2}}}+\sum_{m=n}^{\infty}\frac{l(m+1)-l(m)}{m\log m\log^2 m\cdots\log^{l(m)} m},$$

因而 $\sum C'_n<+\infty$ 且

$$C'_n-C'_{n+1}=\frac{1+o(1)}{n^2(1+\log n)^{\frac{3}{2}}}+\frac{l(n+1)-l(n)}{n\log n\log^2 n\cdots\log^{l(n)} n}.$$

在引理 3 中取

$$s_n=\frac{a_n}{a_{n-1}},\quad t_n=\frac{A_n^*}{A_{n-1}^*}+C'_n+C_n=\frac{A_n^*}{A_{n-1}^*}(1+C''_n),$$

或取

$$t_n=\frac{a_n}{a_{n-1}},\quad s_n=\frac{A_n^*}{A_{n-1}^*}-C'_n-C_n=\frac{A_n^*}{A_{n-1}^*}(1-C''_n),$$

並把結論結合到判断法 (8C′)－(8D′)，即得下述定理在 $h=l(n)$ 的情形.

定理 10. 設实数 $p>1$ 不依賴於 n 而整数 $h=h(n)$ 适合条件 $1\leqslant\log^h n\leqslant n$. 若 $\sum a_n$ 为一正項級数而有

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1, \tag{10c}$$

則要 $\sum a_n$ 收斂就只需对於充分大的 n 都有

$$n^2\Big(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\Big)\geqslant 1+\frac{1}{\log n}+\frac{1}{\log n\log\log n}+\cdots+\frac{1}{\log n\log\log n\cdots\log^{h-1} n}+$$
$$+\frac{1+p/h}{\log n\log\log n\cdots\log^h n}-n^2(C_n-C_{n+1}); \tag{10C}$$

若 $\sum a_n$ 为一正項級数而有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant 1, \tag{10d}$$

則要 $\sum a_n$ 發散就只需对於充分大的 n 都有

$$n^2\Big(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\Big)\leqslant 1+\frac{1}{\log n}+\frac{1}{\log n\log\log n}+\cdots+\frac{1}{\log n\log\log n\cdots\log^{h-1} n}+$$
$$+\frac{1+1/h}{\log n\log\log n\cdots\log^h n}+n^2(C_n-C_{n+1}). \tag{10D}$$

引用定理 8 的推証中关於 $R^p(h)$ 所作的討論，我們看見，就 $1\leqslant h\leqslant l(n)$ 而言，不等式 (10D) 右边的和数在 $h=l(n)$ 取得最大値，而不等式 (10C) 右边的和数在 $h=l'(n)$ 取得最小値. 因此判断法 (10D) 包含在剛才討論过的情形 $h=l(n)$ 中，而判断法 (10C) 則可取 $\sum A_n'^*$ 作为比較級数而用引理 3 与定理 8 得到. 这就証明了定理 10.

結合到推証定理 9 的方法，即見定理 10 中的条件 (10C) 与 (10D) 可以分别換成

$$n^2\Big(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\Big)-\frac{1}{\log n}n'^2\Big(\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}}-\frac{a_{n'}}{a_{n'-1}}\Big)\geqslant 1+\frac{\delta}{\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)} n}-$$
$$-n^2(C_n-C_{n+1})+\frac{1}{\log n}n'^2(C_{n'}-C_{n'+1}), \tag{10C′}$$

$$n^2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)-\frac{1}{\log n}n'^2\left(\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}}-\frac{a_{n'}}{a_{n'-1}}\right)\leqslant 1-\frac{\delta}{\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}+$$
$$+n^2(C_n-C_{n+1})-\frac{1}{\log n}n'^2(C_{n'}-C_{n'+1}). \tag{10D'}$$

如果运用引理 3 的第二部分，則以上的判断法还各有相应的由表达式

$$n^2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}:\frac{a_n}{a_{n-1}}-1\right)$$

所給出的判断法。

参 考 文 献

[1] Pringsheim, A., *Math. Ann.* 35, 297—394, 1890.

[2] Knopp, K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 3 Aufl., Berlin 1931.

[3] Alexiewicz, A., *Studia Math.* 16, 80—85, 1957.

ON THE CONVERGENCE OF SERIES OF POSITIVE TERMS

Leng Sen-ming

(Department of Mathematics and Mechanics)

Abstract

We establish some tests for convergence and divergence of an arbitrary series of positive terms $\sum a_n (a_n \geqslant 0)$. For convenience we take a fixed number θ, $0<\theta<1$, and a fixed convergent series of positive terms $\sum C_n$.

1. As regards a necessary condition for the convergence of $\sum a_n$, viz. $a_n \to 0$, we have

Theorem 1. *Let a_n and o_n be two sequences of non-negative real numbers, where $o_n \to 0$. Then a necessary and sufficient condition for $a_n \to 0$ is that it should be possible to associate every sufficiently large natural number n with a natural number n', less han n and tending to ∞ with n, such that*

$$a_n \leqslant \theta(a_{n'}) + o_n. \tag{1}$$

Making use of such an index n' we have also

Theorem 2. *Let every sufficiently large natural number n be associated with a natural number n', less than n and tending to ∞ with n. Then in order that a series of positive terms $\sum a_n$ should be convergent, it is sufficient that there should be a convergent series of positive terms $\sum c_n$ such that, for large n,*

$$\frac{a_n}{a_{n'}} \leqslant \frac{c_n}{c_{n'}}(1+C_n). \tag{2C}$$

In order that the series of positive terms $\sum a_n$ should be divergent, it is sufficient that there should be a divergent series of positive terms $\sum d_n$ such that, for large n,

$$\frac{a_n}{a_{n'}} \geqslant \frac{d_n}{d_{n'}}(1-C_n). \tag{2D}$$

In the proofs of Theorem 2 and some other theorems in what follows we make use of

Lemma 1. *If* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *are real numbers of one and the same sign and* $|x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}| \leqslant 1$, *then*

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = 1+(x_1+\cdots+x_n)+\Theta(x_1+\cdots+x_n)^2, \quad 0 \leqslant \Theta < 1$$

2. We extend the comparison test and the ratio test as follows.

Theorem 3. *In order that a series of positive terms* $\sum a_n$ *should be convergent, it is necessary and sufficient that it should be possible to associate every sufficiently large natural number* n *with a natural number* n', *less than* n *and tending to* ∞ *with* n, *such that*

$$\sum_{m'=n} a_m \leqslant \theta(a_n) + C_n; \tag{3C'}$$

it is also necessary and sufficient that it should be possible to associate every sufficiently large natural number n *with a natural number* n'', *greater than* n *and increasing with* n, *such that*

$$\sum_{n'' \leqslant m < (n+1)''} a_m \leqslant \theta(a_n) + C_n. \tag{3C''}$$

In order that the series of positive terms $\sum a_n$ *should be divergent, it is necessary and sufficient that it should be possible to associate every sufficiently large natural number* n *with a natural number* n', *less than* n *and tending to* ∞ *with* n, *such that*

$$\sum_{m'=n} a_m > (1-C_n)a_n; \tag{3D'}$$

it is also necessary and sufficient that it should be possible to associate every sufficiently large natural number n *with a natural number* n'', *greater than* n *and increasing with* n, *such that*

$$\sum_{n'' \leqslant m < (n+1)''} a_m > (1-C_n)a_n. \tag{3D''}$$

3. We consider a class of series of positive terms $\sum a_n$ characterized by the condition that

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4a}$$

Suppose that n_k is a sequence of natural numbers such that

$$1 < \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} < +\infty. \tag{4b}$$

Then, for $n_k \leqslant m < n \leqslant n_{k+1}$, we have

$$a_n \leqslant \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{hh''n_k} a_m \leqslant 3^{hh''} a_m,$$

where h and h'' are independent of n. From this we deduce (Theorem 4) that *the series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_{n_k} \tag{4}$$

are both convergent or both divergent, and (Theorem 5) that *if* $\sum a_n$ *satisfies condition* (4a) *and is convergent then*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Also, making use of Theorem 3, we obtain

Theorem 6. *Let* $\sum a_n$ *be a series of positive terms satisfying condition* (4a), *and let* n_k *be a sequence of natural numbers satisfying condition* (4b). *Then* $\sum a_n$ *is convergent if*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k a_{n_k}}{a_k} = 0; \tag{6C}$$

and divergent if

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k a_{n_k}}{a_k} = \infty. \tag{6D}$$

If we apply this theorem to the series

$$\sum \frac{1}{n^p} \quad \text{and} \quad \sum \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^{k-1} n\,(\log^k n)^p} \qquad (k=1,2,3,\cdots) \tag{6a}$$

we see at once that these series are convergent for $p>1$ and divergent for $p\leqslant 1$.

4. We consider a kind of particular choice of the n' in Theorem 3.

Theorem 7. *Let* n' *be a natural number which depends on* n *and has the form*

$$n' = \log n + O(1). \tag{7}$$

Then a series of positive terms $\sum a_n$ *is convergent if*

$$a_n \leqslant \theta\left(\frac{1}{n}\right) a_{n'} + C_n; \tag{7C}$$

and divergent if

$$a_n > \left(\frac{1}{n} - C_n\right) a_{n'}. \tag{7D}$$

This test corresponds to the family of series

$$\sum \frac{q^{l(n)}}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n}, \tag{7a}$$

where $q>0$ is a parameter and $l(n)$ is the integer such that

$$1 \leqslant \log^{l(n)} n < e.$$

If we collect the terms according to the equations $l(n)=h$ $(h=0, 1, 2, 3, \cdots)$, series (7a) takes a form like a geometric series, i.e.

$$\sum_{h=0}^{\infty} [1+o(1)]\cdot q^h.$$

In this connexion the analogue of the harmonic series $\sum \frac{1}{n^p}$ is

$$\sum \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n \cdot [l(n)]^p}, \tag{7b}$$

which is also convergent for $p>1$ and divergent for $p\leqslant 1$.

We may of course make other choice of the n' in Theorem 7, and make (according to Theorem 2) the corresponding change of the ratio $\frac{1}{n}$ in (7C) and (7D). We may also use (7b) instead of (7a).

5. By changing the $l(n)$ in the last factor of the denominator of the n-th term of series (7b) into the sum of the first n terms of the series for $p=0$, and by expanding the ratio of each pair of consecutive terms of the resulted series, we find that a series of positive terms $\sum a_n$ is convergent if

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\log n} - \frac{1}{n\log n \log\log n} - \cdots - \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n} -$$

$$- \frac{p}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n \cdot l(n)} + O(C_n), \tag{8C'}$$

where $p>1$ is independent of n; and it is divergent if

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\log n} - \frac{1}{n\log n \log\log n} - \cdots - \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n} -$$

$$- \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n \cdot l(n)} - O(C_n). \tag{8D'}$$

We write $R^p(l(n))$ for the right member of inequality (8C′) and consider the extreme values of $R^p(h)$ for $h=1,2,\cdots, l(n)$; and find that $R^1(h)$ attains the minimum at $h=l(n)$ and $R^p(h)$, when $p>1$, attains the maximum at $h=l'(n)$, where $l'(n)$ is the integer such that

$$\log^{l'(n)} n \geqslant l'(n) > \log^{l'(n)+1} n - 1.$$

We have

Lemma 2. *The series*

$$\sum l'_n(p) = \sum \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l'(n)} n \cdot [l'(n)]^p} \tag{8a}$$

is convergent for $p>2$ and divergent for $p\leqslant 2$.

Comparing with series (8a) we find that the series

$$\sum A'^*_n = \sum \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l'(n)} n} \prod_{m=3}^{n} [\log^{l'(m)}(m-1)]^{l'(m)-l'(m-1)} [1 - l'_m(1)]^p$$

is convergent for $p>1$ and divergent for $p\leqslant 1$. For this series we have

$$\frac{A'^*_n}{A'^*_{n-1}} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\log n} - \frac{1}{n\log n \log\log n} - \cdots - \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots \log^{l'(n)-1} n} -$$

$$-\frac{1+p/l'(n)}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l'(n)}n}+c_n, \qquad \sum|c_n|<+\infty.$$

We thus arrive at

Theorem 8. *Let the real number $p>1$ be independent of n and the integer $h=h(n)$ be such that $1\leqslant\log^h n\leqslant n$. Then a series of positive terms $\sum a_n$ is convergent if*

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{h-1}n}-$$
$$-\frac{1+p/h}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}+O(C_n); \tag{8C}$$

and divergent if

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{h-1}n}-$$
$$-\frac{1+1/h}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}-O(C_n). \tag{8D}$$

In particular, $\sum a_n$ is convergent if

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{h-1}n}-$$
$$-\frac{p}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}+O(C_n); \tag{8C$_1$}$$

and divergent if

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n\log n\log\log n}-\cdots-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^{h-1}n}-$$
$$-\frac{1}{n\log n\log\log n\cdots\log^h n}-O(C_n). \tag{8D$_1$}$$

From this we deduce

Theorem 9. *Let δ be a positive number. Let n' be a natural number which depends on n and has the form*

$$n'=\log n+O(1).$$

Then a series of positive terms $\sum a_n$ is convergent if, for large n,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}-\frac{1}{n}\frac{a_{n'}}{a_{n'-1}}\leqslant 1-\frac{2}{n}-\frac{\delta}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}+C_n-\frac{1}{n}C_{n'}; \tag{9C}$$

and divergent if, for large n,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}-\frac{1}{n}\frac{a_{n'}}{a_{n'-1}}\geqslant 1-\frac{2}{n}+\frac{\delta}{n\log n\log\log n\cdots\log^{l(n)}n}-C_n+\frac{1}{n}C_{n'}. \tag{9D}$$

6. The following lemma gives tests of another character.

Lemma 3. *Let s_n and t_n be two sequences of real numbers such that*

$$s_n\leqslant t_n+o(1) \tag{10}$$

when n tends to ∞ through an infinite set of natural numbers, and such that

$$s_{n+1}-s_n\geqslant t_{n+1}-t_n \tag{10a}$$

for all n. Then

$$s_n \leqslant t_n$$

for all n.

If the t_n have a positive lower bound, (10a) *can be replaced by*

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \geqslant \frac{t_{n+1}}{t_n}. \tag{10b}$$

Applying Lemma 3 and Theorem 2, and applying the argument used in the deduction of Theorem 8, we obtain

Theorem 10. *Let the real number $p>1$ be independent of n and the integer $h=h(n)$ be such that $1 \leqslant \log^h n \leqslant n$. If $\sum a_n$ is a series of positive terms such that*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant 1, \tag{10c}$$

then a sufficient condition for the convergence of $\sum a_n$ is that, for n sufficiently large,

$$n^2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \geqslant 1 + \frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log n \log\log n} + \cdots + \frac{1}{\log n \log\log n \cdots \log^{h-1} n} + \\ + \frac{1+p/h}{\log n \log\log n \cdots \log^h n} - n^2(C_n - C_{n+1}). \tag{10C}$$

If $\sum a_n$ is a series of positive terms such that

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \geqslant 1, \tag{10d}$$

then a sufficient condition for the divergence of $\sum a_n$ is that, for n sufficiently large,

$$n^2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log n \log\log n} + \cdots + \frac{1}{\log n \log\log n \cdots \log^{h-1} n} + \\ + \frac{1+1/h}{\log n \log\log n \cdots \log^h n} + n^2(C_n - C_{n+1}). \tag{10D}$$

The statements remain true if $n' = \log n + O(1)$ and (10C) *and* (10D) *are replaced by*

$$n^2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) - \frac{1}{\log n} n'^2\left(\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} - \frac{a_{n'}}{a_{n'-1}}\right) \geqslant 1 + \frac{\delta}{\log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n} - \\ - n^2(C_n - C_{n+1}) + \frac{1}{\log n} n'^2 (C_{n'} - C_{n'+1}), \tag{10C''}$$

$$n^2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) - \frac{1}{\log n} n'^2\left(\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} - \frac{a_{n'}}{a_{n'-1}}\right) \leqslant 1 - \frac{\delta}{\log n \log\log n \cdots \log^{l(n)} n} + \\ + n^2(C_n - C_{n+1}) - \frac{1}{\log n} n'^2 (C_{n'} - C_{n'+1}). \tag{10D''}$$

If we make use of the second part of Lemma 3, we find that there are analogues of these tests for the expression

$$n^2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} : \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right).$$

具有一巡迴冪零微分的李代数*

丁 石 孙

(数学力学系代数教研室)

从一李代数的自同構或者微分的性質我們常常可以推知李代数本身的一些性質．本文所要討論的就是从这样一个角度提出的問題，也就是討論具有一巡迴冪零微分的李代数的結構．从下面所得的結果来看，“具有一巡迴冪零微分”这个条件在某种意义上是相当强的．

設 K 是一特征为零的域，L是域 K 上一 n 維李代数，L 的微分 D 称为巡迴冪零的，如果 D 作为一線性变換是巡迴冪零的，这就是說，有

$$D^{n-1}\neq 0, \qquad D^n=0.$$

为了方便起見，以下我們称具有一巡迴冪零微分的李代数为 z-代数，在本文前一部分(§§ 1-3)，关於 z-代数，我們得到的主要結果是：

維数大於 3 的 z-代数必可解．z-代数是冪零的充要条件为它有異於零的中核．

在本文后一部分 (§§ 4-5)，我們进一步完全决定了非冪零 z-代数的四类結構．对於固定的 n，在代数封閉域上它們只有有限多种．

§1 符号与基本公式

設 L 是域 K 上的一 n 維 z-代数，D 是 L 的一个巡迴冪零微分，以下我們总是假定 $n>3$ (除非特別声明)．

我們知道，D 有一組巡迴基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，这就是說，

$$e_1D=0, \qquad e_iD=e_{i-1}, \qquad i=2,\cdots,n.$$

D 在这組基下的矩陣为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

以下我們仍用 D 来代表这个距陣．

令 $a_{ik}^{(j)}$ 是 L 在这組基下的結構常数，即

$$[e_i, e_j]=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(j)} e_k.$$

考虑 L 在这組基下的正則表示，我們有

---

* 1957 年 9 月 12 日收到．

$$e_j \longrightarrow A^{(j)} = (a_{ik}^{(j)}),$$

显然,我們有下面的关系,

$$a_{ik}^{(j)} = -a_{jk}^{(i)} \tag{1}$$

与

$$[A^{(i)}, A^{(j)}] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(j)} A^{(k)}. \tag{2}$$

为了簡便起見,我們令

$$a_{ik} = a_{ik}^{(n)}, \qquad A = A^{(n)}.$$

由微分的条件

$$[e_i, e_j]D = [e_i D, e_j] + [e_i, e_j D],$$

立即得出

$$a_{ik}^{(j-1)} = a_{i,k+1}^{(j)} - a_{i-1,k}^{(j)}, \tag{3}$$

其中 $i, j, k = 1,2,\cdots,n$, 当 $a_{pq}^{(l)}$ 的指标 l, p, q 不适合不等式

$$1 \leqslant l, p, q \leqslant n$$

时,假定为 0, 以下也如此.

应用归納法,由(3)即將

$$\begin{aligned} a_{ik}^{(j)} = {} & a_{i,k+n-j} - C_1^{n-j} a_{i-1,k+n-j-1} + \cdots \\ & + (-1)^l C_l^{n-j} a_{i-l,k+n-j-l} + \cdots + (-1)^{n-j} a_{i-n+j,k} \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $i, j, k = 1,2,\cdots,n$, C_l^{n-j} 为二項式系数.

將(4)代入(1),即得

$$a_{i,k+n-j} - C_1^{n-j} a_{i-1,k+n-j-1} + \cdots = -(a_{j,k+n-i} - C_1^{n-i} a_{j-1,k+n-i-1} + \cdots). \tag{5}$$

由(4)可見, L 的結構完全被系数 a_{ik}, $i, k = 1,2,\cdots,n$, 所决定, 因之, 以下的討論主要是利用矩陣 $A = (a_{ik})$.

下面这个引理是討論中常要用到的.

引理 1. 設 V 是域 K 上一 n 維線性空間, C 是 V 的一巡迴冪零線性变換, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是一組巡迴基, $V_i = \{e_1, \cdots, e_i\}$, $i = 1,2,\cdots,n$, 則 V_i 是 C 的全部不变子空間.

这是線性代数中一个熟知的事实,証明不在这里重复了.

§2 可解 z-代数

在証明 z-代数是可解之前,我們先来看一下可解 z-代数的情况. 对可解 z-代数来証明

定理 1. 一切符号同前,如果 L 是一可解 z-代数,則 $L_i = \{e_1, \cdots, e_i\}$, $i = 1,2,\cdots,n$, 全是理想子代数,其中 $n > 1$.

当 $n = 2$ 时,在(5)中取 $i = j = k = 1$,得

$$a_{12} = -a_{12}$$

$$\therefore \quad a_{12} = 0.$$

因之 L_1 是一理想子代数,这就是定理 1 所肯定的.

不难看出,为了証明定理 1 我們只需要証明矩陣 A 是下三角形就行了,即証明

$$a_{ij} = 0 \text{ 当 } i < j.$$

事实上，在这个情况下，利用(3)，即得

$$a_{ij}^{(l)}=0 \text{ 当 } i<j+n-l,$$

由此定理 1 的結果立卽推出。

現在就来証明矩陣 A 是下三角形的，証明是对 n 作归納法。作为准备，我們先証

引理 2. 方程組

$$\begin{cases} x_1(x_2-2x_1)=0 \\ x_2(x_3-2x_2+x_1)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i(x_{i+1}-2x_i+x_{i-1})=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \\ x_{p-1}(x\ -2x_{p-1}+x_{p-2})=0 \\ x_p(-2x_p+x_{p-1})=0 \end{cases}$$

只有全零解。

証明：設所給的方程組有一非全零解，令 i 是这組解中最大的一个指标使 $x_i\neq 0$，由第 i 个方程得

$$x_{i-1}=2x_i.$$

代入第 $i-1$ 个方程，由 $x_{i-1}=2x_i\neq 0$，得

$$x_{i-2}=2x_{i-1}-x_i=3x_i.$$

如此代上去，不难看出，

$$x_{i-q}=(q+1)x_i, \qquad q=0,\cdots,i-1.$$

最后代入第 1 个方程，得

$$i[(i-1)-2i]x_i^2=0,$$

$$\therefore \quad x_i=0$$

与假設矛盾，这就証明了引理。

現在来証明定理。

因 L 可解，且 $[L,L]$ 为一特征理想子代数，根据引理 1 必有

$$[L,L]\subset L_{n-1}=\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}.$$

於是在 A 中

$$a_{i,n}=0, \qquad i=1,2,\cdots,n-1.$$

根据归納法假定，定理对維数低於 n 的代数已成立，L_{n-1} 是一 $n-1$ 維的可解 z-代数，因之在 $A^{(n-1)}$ 中有

$$a_{i,j}^{(n-1)}=0 \text{ 当 } i<j,\ i,j=1,\cdots,n-1.$$

由(3)，卽

$$a_{i,j+1}-a_{i-1,j}=0, \qquad i<j,\ i,j=1,\cdots,n-1$$

由此得出

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i<j-1,\ i,j=1,\cdots,n-1.$$

下面再来証明

$$a_{i,i+1}=0 \qquad i=1,\cdots,n-1.$$

考察矩陣

$$[A^{(n-1)}, A]$$

中 $(i, i+1)$ 位元素，一方面，因

$$[A^{(n-1)}, A] \in \{A^{(1)}, \cdots, A^{(n-1)}\},$$

而 $A^{(1)}, \cdots, A^{(n-1)}$ 中 $(i, i+1)$ 位元素全为 0，当 $i<n$，所以 $[A^{(n-1)}, A]$ 中 $(i, i+1)$ 位元素，$i<n$，为 0，另一方面，从直接計算得，$[A^{(n-1)}, A]$ 中

$$(1,2) \text{ 位元素为 } a_{12}(2a_{12}-a_{23})$$

以及一般地

$$(i, i+1) \text{ 位元素为 } a_{i,i+1}(-a_{i-1,i}+2a_{i,i+1}-a_{i+1,i+2})$$
$$i=2, \cdots, n-1,$$

其中 $a_{n-1,n}=0$，解这个方程組，由引理 2 即得

$$a_{i,i+1}=0, \qquad i=1, \cdots, n-1.$$

綜合所得的結果，即

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i<j,$$

这就完成了定理的証明．

§ 3 一般 z-代数

对於一般 z-代数，我們首先証明

定理 2. 当 $n>3$ 时，z-代数不半單．

証明：我們知道，半單代数的微分全是內微分，因之，为了証明 z-代数不半單，我們只需証明微分 D 不可能是內微分就行了．

在 (5) 中，取 $i=j=k=1$，得

$$a_{1,n}=0.$$

在 (5) 中，取 $i=j=k=2$，得

$$a_{2,n}-(n-2)a_{1,n-1}=0$$

取 $i=3$，$k=2$，$j=1$，得

$$-(n-)a_{2,n}+\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right]a_{1,n-1}=0.$$

联立这兩个方程，容易算出，方程組的行列式为

$$1-\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

当 $n>3$ 时，行列式不为 0，因之

$$a_{2,n}=a_{1,n-1}=0.$$

由此根据 (3) 即得

$$a_{i,j}^{(1)}=0 \text{ 当 } i-j\leqslant 1.$$

另一方面，如果 D 是一內微分，則在 L 中存在一元素 x 使

$$e_iD=[e_i, x].$$

D 只有一个線性無关的特征向量，因之必有

$$x=ae_1,$$

換句話說，

$$D=aA^{(1)}.$$

这是不可能的．因为在 D 中，$(i,i-1)$ 位元素，$i=2,\cdots,n$，全等於 1，而在 $A^{(1)}$ 中相应位置的元素为 0，这就証明了定理．

从定理的証明，我們有下面的

推論．L 是域 K 上一 n 維李代数，$x\in L$，若 adx 冪零，則有

$$(adx)^{n-1}=0.$$

特别地，若 L 是一 n 維冪零李代数，則对於所有的 $x\in L$，有

$$(adx)^{n-1}=0.$$

下面来証明这一节的主要結果．

定理 3　当 $n>3$ 时，z-代数必可解．

証明：为此，我們来証明，在矩陣 A 中有

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i<j.$$

假定 L 不可解，由定理 2，L 不半單，卽 L 有一異於零的根集 R．我們知道，根集 R 是一特征理想子代数[1]，由引理 1，

$$R=L_p=\{e_1,\cdots,e_p\},$$

对某一个 p，因为 L/R 仍为一 z-代数，所以 L/R 必为一三維代数，由此得知，在矩陣 A 中有

$$a_{i,j}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n-3,\quad n-2\leqslant j\leqslant n.$$

因 R 为一可解 z-代数，且

$$R=\{e_1,\cdots,e_{n-3}\},$$

所以对矩陣 $A^{(n-3)}$ 中左上角的 $n-3$ 級的子矩陣应用定理 1，知

$$a_{i,j}^{(n-3)}=0 \text{ 当 } i<j,\ i,\ j=1,\cdots,n-3.$$

利用(3)，立卽得出

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i<j-3,\ i,\ j=1,\cdots,n-3.$$

由於 R 是一理想子代数，所以

$$[A^{(n-3)},A^{(n-2)}]\in\{A^{(1)},\cdots,A^{(n-3)}\}.$$

根据这个条件，和定理 1 的証明一样，利用引理 2 可証

$$a_{i,i+1}^{(n-2)}=0 \qquad i=1,\cdots,n-3.$$

由此利用(3)卽得

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i<j-2,\ i,\ j=1,\cdots,n-3,$$

在(5)中，取 $i=n-2$，$j=k=n$，得

$$a_{n-2,n}=0,$$

因之

$$a_{n-2,j}^{(n-1)}=0,\qquad j=n-1,n.$$

这就是說

$$[A^{(n-2)},A^{(n-1)}]\in\{A^{(1)},\cdots,A^{(n-2)}\}.$$

再仿造定理 1 的証明，可証

$$a_{i,i+1}^{(n-1)}=0, \qquad i=1,\cdots,n-4$$

由此利用(3)即得

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i<j-1,\ i,j=1,\cdots,n-3$$

在这里应該指出，在 $n=4$ 时，以上的証明是不必要的 (除去証明 $a_{n-2,n}=0$ 一点而外)。

現在剩下的就是要証明

$$a_{i,i+1}=0, \qquad i=1,2,\cdots,n-1.$$

其中已經知道的是

$$a_{n-3,n-2}=0.$$

首先，在(5)中，取 $i=n-2,\ k=n-1,\ j=n$，得

$$a_{n-1,n}=a_{n-2,n-1}.$$

如果 $a_{n-1,n}=0$ 那么就有

$$[A^{(n-1)},A]\in\{A^{(1)},\cdots,A^{(n-1)}\},$$

於是和上面一样，可以証明

$$a_{i,i+1}=0 \qquad i=1,\cdots,n-1.$$

因之下面假定 $a_{n-1,n}\neq 0$。

先解决 $n=4$ 的情形，在(5)中取 $i=j=2,\ k=1$，得

$$a_{2,3}-2a_{1,2}=0,$$

因 $a_{1,2}=0$，所以，

$$a_{2,3}=0,$$

从而

$$a_{3,4}=0.$$

这就完成了証明，下面假定 $n>4$。

在(5)中，取 $i=n-4,\ j=n,\ k=n-3$，得

$$a_{n-4,n-3}=-4a_{n-1,n}+6a_{n-2,n-1}-4a_{n-3,n-2}+a_{n-4,n-3},$$

因

$$a_{n-3,n-2}=0, \qquad a_{n-1,n}=a_{n-2,n-1},$$

所以

$$a_{n-4,n-3}=-a_{n-1,n}\neq 0.$$

在数列 $a_{n-4,n-3},\cdots,a_{i-1,i}\cdots$ 中令 $a_{i-1,i}$ 是第一个为零的。我們来考察

$$[A^{(n-1)},A]$$

中 $(i,i-1),\cdots(n-4,n-3)$ 位系数 (如上面的数列全不为零，則 $i=2$)，由直接計算不难看出它們分别是

$$a_{i,i+1}(2a_{i,i+1}-a_{i+1,i+2})$$

$$a_{i+1,i+2}(-a_{i,i+1}+2a_{i+1,i+2}-a_{i+2,i+3})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-4,n-3}(-a_{n-5,n-4}+2a_{n-4,n-3}).$$

在另一方面，根据(2)，它們又分别等於

$$a_{n-1,n}a_{i,i+1}, \qquad a_{n-1,n}a_{i+1,i+2},\cdots, \qquad a_{n-1,n}a_{n-4,n-3},$$

令它們相等，即得

$$a_{i,i+1}(2a_{i,i+1}-a_{i+1,i+2}-a_{n-1,n})=0$$

$$a_{i+1,i+2}(-a_{i,i+1}+2a_{i+1,i+2}-a_{i+2,i+3}-a_{n-i,n})=0$$

……………………………………

$$a_{n-4,n-3}(-a_{n-5,n-4}+2a_{n-4,n-3}-a_{n-1,n})=0.$$

解这組方程，不难看出，有

$$a_{n-4-q,n-3-q}=c_q a_{n-4,n-3}-d_q a_{n-1,n},$$

其中 $q=0,1,\cdots$, $c_0=1$, $d_0=0$, $c_1=2$, $d_1=1$, 且

$$c_q=2c_{q-1}-c_{q-2},\quad d_q=2d_{q-1}-d_{q-2}+1.$$

由此卽得

$$c_q=q+1,\quad d_q=\frac{q(q+1)}{2},$$

將 $a_{i,i+1}$, 与 $a_{i+1,i+2}$ 的表达式代入第一个方程，得

$$(2c_{n-4-i}-c_{n-5-i})a_{n-4,n-3}=(2d_{n-4-i}-d_{n-5-i}+1)a_{n-1,n}.$$

这个等式显然与

$$a_{n-4,n-3}=-a_{n-1,n}$$

矛盾，这就証明了

$$a_{n-1,n}=0,$$

从而

$$a_{i,i+1}=0,\qquad i=1,2,\cdots,n-1.$$

定理証畢.

从上面的証明中，我們知道，矩陣 A 是下三角形的，卽

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i<j.$$

現在我們再进一步考察一下矩陣 A 的情況，

引理 3. 矩陣 A 只可能有四种情形:

(1) $a_{i,i}=a_{n-1,n-1}$, $i=1,2,\cdots,n-2$

(2) $a_{i,i}=(n-i-1)a_{n-1,n-1}$, $i=1,2,\cdots,n-2$

(3) $a_{i,i}=a_{n-1,n-1}$, $i=2,\cdots,n-2$

$a_{1,1}=2a_{n-1,n-1}$

(4) $a_{i,i}=(n-i-1)a_{n-1,n-1}$, $i=2,\cdots,n-2$

$a_{1,1}=(n-3)a_{n-1,n-1}$

其中情形 (3) 与 (4) 只有在 n 为偶数时才可能發生，並且在这兩种情形总可以假定 $n>4$, 因为当 $n=4$ 时，情形 (3) 就归結为 (2)，情形 (4) 就归結为 (1).

証明: 我們来考察矩陣

$$[A^{(n-1)}, A]$$

中的 $(i+1,i)$ 位元素, $i=1,\cdots,n-2$, 一方面，由直接計算，它們等於

$$-(a_{i+1,i+1}-a_{i,i})^2;$$

另一方面，根据 (2)，它們等於

$$a_{n-1,n-1}(a_{i+1,i+1}-a_{i,i}),$$

令它們相等，我們就得到

$$(a_{i+1,i+1}-a_{i,i})(a_{i+1,i+1}-a_{i,i}+a_{n-1,n-1})=0,\quad i=1,\cdots,n-2. \tag{6}$$

由(6)不难看出，如果

$$a_{n-1,n-1}=0,$$

那么就有

$$a_{i,i}=0, \qquad i=1,2,\cdots,n-1.$$

这个情形显然符合引理的結論，因之以下假定

$$a_{n-1,n-1}\neq 0.$$

显然，

$$a_{i,i}=a_{n-1,n-1}, \qquad i=1,2,\cdots n-2$$

适合方程組(6)，这就是情形(1)，如果不是这样，一定有一个最小的正整数 p 使

$$a_{n-p,n-p}\neq a_{n-1,n-1}.$$

在(5)中，取 $i=n-2$, $j=n$, $k=n-2$, 得

$$a_{n-2,n-2}=a_{n-1,n-1},$$

由此可見，

$$p>2,$$

現在来証明，

$$p=3 \text{ 或 } p=n-1 \text{ 且 } n \text{ 为偶数},$$

而后者就是情形(3).

先証 p 不可能是偶数，如果不然，在(5)中，取 $i=k=n-p$, $j=n$, 得

$$-a_{n-p,n-p}=-pa_{n-1,n-1}+\cdots-pa_{n-p+1,n-+1}+a_{n-p,n-p},$$

这里沒有第一項，因为显然有 $a_{n,n}=0$.

用 $a_{i,i}=a_{n-1,n-1}$, $i=n-p+1,\cdots,n-2$, 代入上式，立卽得出

$$a_{n-p,n-p}=a_{n-1,n-1},$$

这与假設矛盾，因之 p 必为奇数，如果 $p=n-1$, 那么就是情形(3)，下面来看

$$3\leqslant p<n-1, p \text{ 为奇数}$$

的情形.

在(5)中，取 $i=k=n-p-1$, $j=n$, 得

$$-a_{n-p-1,n-p-1}=-(p+1)a_{n-1,n-1}+\cdots-(p+1)a_{n-p,n-p}+a_{n-p-1,n-p-1}.$$

由(6)不难看出，

$$a_{n-p,n-p}=2a_{n-1,n-1},$$

用 $a_{i,i}=a_{n-1,n-1}$, $i=n-p+1,\cdots,n-2$, $a_{n-p,n-p}=2a_{n-1,n-1}$, 代入，得

$$a_{n-p-1,n-p-1}=\frac{p+3}{2}a_{n-1,n-1}.$$

由(6)，$a_{n-p-1,n-p-1}$ 只有兩种可能，

$$a_{n-p-1,n-p-1}=a_{n-p,n-p}=2a_{n-1,n-1}$$

或

$$a_{n-p-1,n-p-1}=a_{n-p,n-p}+a_{n-1,n-1}=3a_{n-1,n-1},$$

於是

$$p=1 \text{ 或 } p=3,$$

但 $p=1$ 不可能，所以

$$p=3.$$

到这里为止，我們証明了，当 $a_{n-3 \cdot n-3}=a_{n-1 \cdot n-1}$ 时，必然出現情形 (1) 或 (3)，現在来証，在

$$a_{n-3 \cdot n-3}=2a_{n-1 \cdot n-1}$$

的假定下，只可能有情形(2)或(4)．

設关系

$$a_{n-i\, n-i}=(i-1)a_{n-1 \cdot n-1}$$

在 $2 \leqslant i \leqslant p<n-1$ 时已經成立，我們来看 $i=p+1$ 的情形．

先看 $p+1$ 为偶数的情形．在(5)中，取 $i=k=n-p-1$, $j=n$，得

$$-a_{n-p-1 \cdot n-p-1}=-(p+1)a_{n-1, n-1}+\cdots-(p+1)a_{n-p\, n-p}+a_{n-p-1, n-p-1},$$

以 $a_{n-i, n-i}=(i-1)a_{n-1 \cdot n-1}$, $i=2, \cdots, p$，代入上式，卽得

$$a_{n-p-1 \cdot n-p-1}=pa_{n-1 \cdot n-1}.$$

这就是說，上面的关系式在 $i=p+1$ 时也成立．

再看 $p+1$ 为奇数的情形，如果 $p+1=n-1$，那么由(6)中第一个方程得知

$$a_{1,1}=(n-2)a_{n-1 \cdot n-1}$$

或
$$a_{1,1}=(n-3)a_{n-1 \cdot n-1}.$$

前者就是情形(2)，而后者就是情形(4)，下面設 $p+1<n-1$，在(5)中，取 $i=k=n-p-2$ $j=n$，得

$$-a_{n-p-2, n-p-2}=-(p+2)a_{n-1 \cdot n-1}+\cdots-(p+2)a_{n-p-1, n-p-1}+a_{n-p-2 ; n-p-2}.$$

用相应的値代入，卽得

$$(p+2)a_{n-p-1, n-p-1}-2a_{n-p-2, n-p-2}=(p^2-2)a_{n-1, n-1}$$

由(6)知，

$$a_{n-p-1, n-p-1}=pa_{n-1, n-1} \quad \text{或} \quad a_{n-p-1 \cdot n-p-1}=(p-1)a_{n-1, n-1}$$

前者正是我們要証明的，如果用后者代入上式，卽得

$$a_{n-p-2, n-p-2}=\frac{p}{2}a_{n-1 \cdot n-1}$$

把上式代入(6)，不難算出

$$p=0 \text{ 或 } p=2,$$

这与 $p \geqslant 3$ 矛盾，这就証明了，或者是情形(2)或者是情形(4)．

引理証畢．

由引理 3 得出，矩陣 A 的对角線上的元素

$$a_{i, i}, \qquad i=1,2, \cdots, n-1$$

或者全为零，或者全不为零，这說明了

定理 4. 一 z-代数$(n>3)$是冪零的充分必要条件为它有異於零的中核．

証明．定理的一方面是显然的．另一方面，如果有異於零的中核，因中核是特征理想子代数，所以根据引理 1，e_1 必屬於中核，那么 $a_{11}=0$，从而

$$a_{i, i}=0, \qquad i=1,2, \cdots, n-1,$$

这就是說，它是一冪零代数，証畢．

§4 非冪零 z-代数的結構

我們已經証明了，z-代数必可解，在这一节我們要来决定非冪零 z-代数的結構，也就是說，对於 z-代数 L，以下我們假定在它的矩陣 A 中有

$$a_{n-1,n-1}=a\neq 0。$$

进一步确定矩陣 A 的結構，我們有

引理 4. 对於情形(1)与(2)，矩陣 A 都有下面的关系：

$$a_{i+1,1}=a_{i+2,2}=\cdots=a_{i+j,j}=\cdots=a_{n-1,n-1-i}\qquad i=1,2,\cdots,n-2.$$

証明：先看情形(1)，考察矩陣

$$[A^{(n-1)},A]$$

中 $(i,i-2)$ 位元素，$i=3,\cdots,n-1$。由直接計算，它們等於零。按公式(2)，它們等於

$$a(a_{i,i-1}-a_{i-1,i-2}),\quad i=3,\cdots,n-1,$$

因 $a\neq 0$，由此卽得

$$a_{i,i-1}=a_{i-1,i-2},\qquad i=3,\cdots,n-1.$$

用归納法，不难得出引理中的結果。

再看情形(2)，仍然考察矩陣

$$[A^{(n-1)},A]$$

中 $(i,i-2)$ 位元素，$i=3,\cdots,n-2$。一方面，由直接計算，它們等於

$$3a(a_{i,i-1}-a_{i-1,i-2}),\qquad i=3,\cdots,n-2$$

另一方面，根据公式(2)，它們等於

$$a(a_{i,i-1}-a_{i-1,i-2}),\qquad i=3,\cdots,n-2$$

因之有

$$2a(a_{i,i-1},-a_{i-1,i-2})=0,\qquad i=3,\cdots,n-2$$

由 $a\neq 0$，得

$$a_{i,i-1}=a_{i-1,i-2},\qquad i=3,\cdots,n-2.$$

再在(5)中，取 $i=n-2$, $k=n-3$, $i=n$，得

$$a_{n-1,n-2}=a_{n-2,n-3},$$

所以有

$$a_{i,i-1}=a_{i-1,i-2},\qquad i=3,\cdots,n-1.$$

用同样的方法，按归納法，卽得引理中的結果。

引理証畢.

以下我們称具有情形(i)的 z-代数为 S_i-代数.

由引理 4，我們已經可以直接写出 S_1 与 S_2 代数的乘法关系.

S_1-代数的乘法关系为：

$$[e_i,e_n]=ae_i+a_1e_{i-1}+\cdots+a_{i-1}e_1$$
$$a\neq 0,\qquad i=1,2,\cdots,n-1,$$
$$[e_i,e_j]=0\ \text{当}\ i,j\leqslant n-1.$$

不难驗証，这个乘法关系确实滿足 Jacobi 等式．事实上，設 e_i, e_j, e_k 为出現在 Jacobi 等式中的三个元素，如果 i, j, k 中有兩个小於 n，那么三項为零；如果 i, j, k 中有兩个是

n, 那么 Jacobi 等式就归結为乘法的反对称性了.

由乘法关系容易看出, S_1-代数可以看作是在一 $n-1$ 維線性空間 $\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$ 上加了一个線性变换得出的, 因之有

定理 5. 在适当选擇的基下, S_1-代数 L 的乘法关系为:

$$[e_i, e_n]=e_i, \qquad i=1\cdots,p$$

$$[e_i, e_n]=e_i+e_{i-p}, \qquad i=p+1,\cdots,n-1$$

$$[e_i, e_j]=0 \text{ 当 } i, j\leqslant n-1.$$

其中 $p=1,\cdots,n-1$. S_1-代数共有 $n-1$ 个互不同構的, 它們都有

$$L'=\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}, \qquad L''=\{0\}.$$

再看 S_2-代数的乘法关系:

$$[e_{n-1}, e_n]=ae_{n-1}+a_1e_{n-2}+\cdots+a_{n-2}e_1$$

$$[e_i, e_n]=(n-i-1)ae_i+a_1e_{i-1}+\cdots+a_{i-1}e_1$$

$$i=1,2,\cdots,n-2,$$

$$[e_i, e_{n-1}]=-ae_{i-1}, \qquad i=2,\cdots,n-2$$

$$[e_1, e_{n-1}]=0, \ [e_i, e_j]=0 \text{ 当 } i,j\leqslant n-2.$$

現在来驗証 Jacobi 等式, 設 e_i, e_j, e_k 是三个出現在 Jacobi 等式中的元素, 当 i, j, k 中有兩个小於 $n-1$, 或者有兩个等於 $n-1$, 或者有兩个是 n, Jacobi 等式显然成立. 剩下的只要看 e_i, e_{n-1}, e_n 的情形, 当 $i=1$, 三項全为零, 也成立. 設 $1<i<n-1$,

$$[e_i,[e_{n-1}, e_n]]=-a^2e_{i-1},$$

$$[e_{n-1},[e_n, e_i]]=-a[(n-i-1)ae_{i-1}+a_1e_{i-2}+\cdots],$$

$$[e_n,[e_i, e_{n-1}]]=a[(n-i)ae_{i-1}+a_1e_{i-2}+\cdots],$$

三項相加为零, 这就說明了, 所給出的乘法关系确实滿足 Jacobi 等式.

对於 S_2-代数我們有

定理 6. S_2-代数只有兩种, 在适当的基下它們的乘法关系分别是:

1° $$[e_i, e_n]=(n-i-1)e_i, \qquad i=1,\cdots,n-2$$

$$[e_{n-1}, e_n]=e_{n-1}$$

$$[e_i, e_{n-1}]=-e_{i-1}, \qquad i=2,\cdots,n-2,$$

$$[e_1, e_{n-1}]=0, \ [e_i\, e_j]=0 \text{ 当 } i,j\leqslant n-2.$$

2° $$[e_i, e_n]=(n-i-1)e_i, \qquad i=1,\cdots,n-2$$

$$[e_{n-1}, e_n]=e_{n-1}+e_{n-2}$$

$$[e_i, e_{n-1}]=-e_{i-1}, \qquad i=2,\cdots,n-2$$

$$[e_1, e_{n-1}]=0, \ [e_i, e_j]=0 \text{ 当 } i,j\leqslant n-2$$

这兩个代数都有

$$L'=\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}, \quad L''=\{e_1,\cdots,e_{n-3}\}, \quad L'''=\{0\},$$

因而它們不与 S_1 代数同構.

証明: 首先我們指出, 在上面所給的乘法关系中, 可以假定

$$a_2=\cdots=a_{n-2}=0,$$

換句話說, 我們可以找到一組巡迴基, 在这組基下有 $a_2=\cdots=a_{n-2}=0$, 这組巡迴基可用归

納法定义如下：

$$e_1'=e_1,\ e_2'=e_2,\ e_i'=e_i-\frac{a_2}{2}e_{i-2}\ i=3,\cdots,n$$

$$e_i^{[k]}=e_i^{[k-1]},\ i=1,\cdots,k+1,\ e_i^{[k]}=e_i^{[k-1]}-\frac{a_{k+1}}{k+1}e_{i-k-1}$$

$$i=k+2,\cdots,n.$$

$$a_2=\cdots=a_{k+1}=0.$$

不难算出，在巡迴基 $e_1^{[k]},\cdots,e_n^{[k]}$ 下，我們有

因之，巡迴基

$$e_1^{[n-3]},\cdots,e_n^{[n-3]}$$

就是我們所要的。

然后我們区别兩种情形：

1° $$a_1=0.$$

在这种情形下，命

$$e_i'=\frac{1}{a}e_i,\qquad i=1,\cdots,n$$

就得到定理中的第一种。

2° $$a_1\neq 0$$

先命

$$e_i'=\frac{1}{a}e_i,\qquad i=1,\cdots,n.$$

再作

$$e_i''=\frac{a_1}{a}e_i',\quad i=1,\cdots,n-2,\quad e_{k-1}''=e_{n-1}'$$

$$e_n''=e_n'+\frac{a_1}{a}e_{n-1}',$$

於是在基 $e_1'',\cdots,e_n''$ 下，乘法关系就如 2° 所給出的。

这兩种代数不同構，因为在 L' 以外任取一个元素，在这兩种代数中，这个元素在 L' 上所引起的微分，作为線性变換看有不同的初等因子，定理的其余部分是显然的，証畢.

下面来看 S_3-代数. 首先，由於

$$L/\{e_1\}$$

是一 S_1-代数，所以根据引理 4，在矩陣 A 中有

$$a_{i+2,2}=\cdots=a_{n-1,n-1-i},\qquad i=1,\cdots,n-3, \tag{7}$$

在(5)中，取 $i=n-1,\ j=2p+1,\ k=1$ 其中 $p=1,\cdots,\frac{n}{2}-1$，可証

$$a_{2p,1}=a_{2p+1,2},\ p=1,\cdots,\frac{n}{2}-1.$$

其次，我們無妨設 $a=1$，以及

$$a_{2p+1,1}=0,\quad p=1,\cdots\frac{n-2}{2},$$

对於前者，我們只要用 $\frac{1}{a}e_i$ 来代替 e_i 就行了。为了証明后一点，我們指出下面的基变換.

令

$$e_1'=e_1,\ e_2'=e_2,\ e_i'=e_i-\frac{a_{31}}{2}e_{i-2},\ i=3,\cdots,n.$$

在这組基下,不难算出,有

$$a_{31}=0.$$

一般地,可用归納法定义

$$e_i^{[k]}=e_i^{[k-1]},\ i=1,\cdots,2k,\ e_i^{[k]}=e_i^{[k-1]}-\frac{a_{2k+1}}{2}e_{i-2k},\ i=2k+1,\cdots,n.$$

在这組基下,就有

$$a_{3,1}=\cdots=a_{2k+1,1}=0.$$

取 $k=\frac{n-2}{2}$,就得到所要的基.

最后,我們来証明,

$$a_{2i,2}=0,\qquad i=2,\cdots\frac{n-2}{2}.$$

考察矩陣

$$[A^{(n-1)},A]$$

中的 $(2i,1)$ 位的元素,$i=2,\cdots,\frac{n-2}{2}$,即得

$$a_{2i,2}=-a_{n-1,n-2,+1},$$

与(7)比較,即得

$$a_{2i,2}=0,\qquad i=2,\cdots,\frac{n-2}{2}.$$

綜合所得結果,矩陣 A 中元素的关系如下:

$$a_{2i,1}=a_{2i+1,2}=\cdots=a_{n-1\cdot n-2i},\qquad i=1,\cdots,\frac{n-2}{2}$$

$$a_{2i+1,1}=a_{2i+2,2}=\cdots=a_{n-1,n-2i-1}=0,\quad i=1,\cdots,\frac{n-2}{2}$$

由此可以写出 S_3-代数的乘法关系:

$$[e_1,e_n]=2e_1$$

$$[e_i,e_n]=e_i+\sum_{k=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]}a_ke_{i-2k+1}$$

$$[e_i,e_{n+1-i}]=(-1)^{i-1}e_1,\qquad i=,\cdots,n-1$$

而其余的元素相乘为零.

不难驗算上述乘法关系适合 Jacobi 等式,設在 Jacobi 等式中出現的三个元素为 e_i,e_j,e_k. 当 i,j,k 全小於 n,三項全为零,当 i,j,k 中有兩个是 n,則归結为乘法的反对称性. 因之只要考察 i,j,n 的情形,当 $i+j<n+1$,三項也为零,当 $i+j=n+1$,則$[[e_i,e_j],e_n]$恰为后兩項之和的反号,故相加为零,如果 $i+j>n+1$,則 $[[e_i,e_j,],e_n]=0$,而后兩項反号,相加亦为零.

下面来看 S_3-代数的分类,我們有

定理 7. 在代数封閉域上，n 維 $(n\geqq 6)$ 的 S_3-代数有 $\frac{n}{2}$ 种.

証明：显然，$L'=\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$，而 L' 的中核是 $\{e_1\}$，考虑線性空間

$$V=L'/\{e_1\},$$

我們在 V 上定义一双線性函数如下，設 $\bar{x},\bar{y}$ 是 V 中的兩个元素，x,y 分別是 $\bar{x},\bar{y}$ 在 L' 中完全反像中的任意元素，我們有

$$[x,y]=f(x,y)e_1,$$

由於 $\{e_1\}$ 是 L' 的中核，所以 $f(x,y)$ 完全被 $\bar{x},\bar{y}$ 決定，我們定义

$$f(\bar{x},\bar{y})=f(x,y).$$

由乘法表看出，$f(\bar{x},\bar{y})$ 是 V 上的一个滿秩的反对称双線性函数.

再令 B 为 ade_n 在 V 上所引起的線性变換，由上面的討論可以看出，L 的結構是完全被線性空間 V 的双線性函数

$$f(\bar{x},\bar{y})$$

与線性变換

$$B$$

所決定，由 Jacobi 等式不难証明，線性变換

$$C=B-E$$

对 $f(\bar{x},\bar{y})$ 是反对称的，其中 E 是單位变換. 由於滿秩的反对称双線性函数全等价，所以 S_3-代数的分类就归結为一反对称变換的耦对分类的問題了. 我們知道在代数封閉域上，在具有一反对称双線性函数的空間中，兩个反对称变換耦对相似的充分必要条件为它們有相同的初等因子，而線性变換 C 的初等因子完全被上列乘法关系中的系数 $a_1,a_2\cdots$ 中第一个異於零的系数的指标所決定，因之共有 $\frac{n}{2}$ 种，这就証明了定理.

最后，我們来看 S_4-代数.

由於

$$L/\{e_1\}$$

是一 S_2-代数，从定理 6 的証明中我們知道，对於 S_2-代数存在一組巡迴基使矩陣 A 有，

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i-j\geqslant 2,$$

所以对 S_4-代数我們首先可以假定，在矩陣 A 中有

$$a_{i,j}=0 \text{ 当 } i-j\geqslant 2,\quad j\geqslant 2.$$

且

$$a=1.$$

令

$$a_{3,2}=a_{4,3}=\cdots=a_{n-1,n-2}=b.$$

在 (5) 中取 $i=n-1,\ j=2p+1,\ k=1$，其中 $p=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1$，可証

$$a_{2,1}=b,\quad a_{2p,1}=0,\quad p=2,\cdots,\frac{n}{2}-1.$$

逐个考察矩陣

$$[A^{(n-1)},A]$$

中 $(2p,1)$ 位元素，$p=2,\cdots,\frac{n}{2}$，利用 (2) 可証

$$a_{2p+1,1}=0,\quad p=1,\cdots,\frac{n}{2}-1.$$

由此，S_4-代数的乘法关系为:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_n]=(n-3)e_1\\
&[e_i, e_n]=(n-i-1)e_i+be_{i-1}, \quad i=2,\cdots,n-2,\\
&[e_{n-1}, e_n]=e_{n-1}+be_{n-2},\\
&[e_i, e_{n-1}]=-e_{i-1}, \qquad i=3,\cdots,n-2\\
&[e_i, e_{n+1-i}]=(-1)^i e_1, \quad i=3,\cdots,n-2
\end{aligned}
$$

其余的乘积为零.

我們来験算 Jacobi 等式，設出現的三个元素为 e_i, e_j, e_k，当 i, j, k 三者全小於 $n-1$ 或其中有兩个相等，等式显然成立，剩下只要看 $i, j, n-1$; i, j, n; $i, n-1, n$ 这三种情形，其中 $i,j<n-1$. 直接代入，不难看出上列乘法关系是满足 Jacobi 等式的.

对於 S_4-代数，我們有

定理 8. S_4-代数只有兩种，在适当的基下，它們的乘法关系是:

1°
$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_n]=(n-3)e_1,\\
&[e_i, e_n]=(n-i-1)e_i, \quad i=2,\cdots,n-2\\
&[e_{n-1}, e_n]=e_{n-1}\\
&[e_i, e_{n-1}]=-e_{i-1}, \qquad i=3,\cdots,n-2\\
&[e_i, e_{n+1-i}]=(-1)^i e_1, \quad i=3,\cdots,n-2
\end{aligned}
$$

其余为零.

2°
$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_n]=(n-3)e_1, \quad [e_2, e_n]=(n-3)e_2+e_1,\\
&[e_i, e_n]=(n-i-1)e_i, \qquad i=3,\cdots,n-2,\\
&[e_{n-1}, e_n]=e_{n-1}+e_{n-2},\\
&[e_i, e_{n-1}]=-e_{i-1}, \qquad i=3,\cdots,n-2\\
&[e_i, e_{n+1-i}]=(-1)^i e_1, \quad i=3,\cdots,n-2
\end{aligned}
$$

其余为零，它們互不同構，其中 $n\geqslant 6$，

証明: 在上列的乘法关系中，如果 $b=0$，即得 1°. 如果 $b\neq 0$，我們作如下的基变换. 首先，令

$$
\begin{aligned}
&e_i'=e_i, \qquad i=1,\cdots,n-1,\\
&e_n'=e_n+be_{n-1},
\end{aligned}
$$

再令，

$$
\begin{aligned}
&e_1''=b^2e_1', \quad e_i''=be_i', \quad i=2,\cdots,n-2,\\
&e_{n-1}''=e_{n-1}', \qquad e_n''=e_n'
\end{aligned}
$$

在这組基下，就有 2° 中所給的乘法关系，

与定理 6 一样，可証它們不同構.

到現在为止，我們就完全决定了非冪零 z-代数的結構，它們一共有四类. 在代数封閉域上，对固定的維数，每一类只有有限多种，S_1-代数与 S_2-代数不同構已証，其余的不同構的問題也都能从它們各别的导代数的維数得出肯定的回答. 事实上，$L, L', L'', L''', L^{(4)}$ 的維数对 S_1-, S_2-, S_3-S_4-代数分别是:

S_1-代数:　$n, n-1, 0$

S_2-代数：　$n, n-1, n-3, 0$

S_3-代数：　$n, n-1, \ 1, \ 0$

S_4-代数：　$n, n-1, n-3, 1, 0$

§5 几点說明

最后我們作几点說明。

1. 对於定理 2, 3, $n>3$ 的假定是必要的，因为 3 維單代数就具有一巡迴冪零的內微分。

2. 在一般域上，S_3-代数的个数可以有無限多个（对同一个 n）。例如在有理数域上，令 $n=8$, $a_1=a_3=0$, 在 $L'/\{e_1\}$ 中取基

$$\bar{x}_1=-\overline{e_4},\ \bar{x}_2=\overline{e_3},\ \bar{x}_3=-\overline{e_2},\ \bar{x}_4=\overline{e_5},\ \bar{x}_5=\overline{e_6},\ \bar{x}_6=\overline{e_7}.$$

在这組基下，$f(\bar{x}, \bar{y})$ 的矩陣为，

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \text{其中 } E \text{ 为 3 級單位矩陣,}$$

線性变換 C 的矩陣为，

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$C_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & a_2 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

不难証明，如果兩个形式如 C 的矩陣是耦对相似，那么相应的矩陣 C_1 必合同，而我們知道，在有理数域上，对称矩陣的合同类是有無限多个的。

3. 在定理 5—8 中，我們都沒有証明 S_i-代数确为 z-代数，即确实具有一巡迴冪零微分。这一点是不难直接驗証的。

参　考　文　献

[1] Chevalley C., *Théorie des groupes de Lie*, Tome III, 109.

ON LIE ALGEBRAS WITH A CYCLIC NILPOTENT DERIVATION

Ting Shih-sun

(Department of Mathematics and Mechanics)

ABSTRACT

A derivation of a Lie algebra is said to be cyclic nilpotent, if, as a linear transformation, it is cyclic nilpotent, i. e, its index of nilpotency is equal to the dimension of the algebra. A Lie algebra with such a derivation is called a z-algebra. In this paper, the structure of z-algebras over an arbitrary field of characteristic zero is investigated.

This paper can be divided into two parts. In the first part, the following two main theorems are proved.

Theorem 3. A z-algebra of dimension greater than 3 is necessarily solvable.

Theorem 4. A z-algebra of dimension greater than 3 is nilpotent if and only if it has a non-trivial centre.

In this part, as a corollary, we also get the following result. If L is a Lie algebra of dimension n, $n>3$, $x\in L$ and adx is nilpotent, then $(adx)^{n-1}=0$.

In the second part, the structures of all non-nilpotent z-algebras are completely determined. It is proved that, all non-nilpotent z-algebras fall into four classes, they are mutually non-isomorphic. For each fixed dimension greater than 3, all the four classes except one contain only a finite number of algebras and their numbers are $n-1$, 2, 2 respectively. Over an algebraically closed field, the exceptional class also contains a finite number of algebras and its number is $\frac{n}{2}$ in this case, n must be even. Examples are given to show that the restriction to algebraically closed fields for this class is essential for the finiteness of number.

鈾的容量分析——氯化亞錫还原法*

高小霞 刘家树 吳万先 李安模

（化学系分析化学教研室）

測定鈾最常用的容量法是將六价鈾溶液經过 Jones 还原器还原为四价鈾，然后用氧化剂滴定[1]。但在例常分析中希望用直接加入还原剂的方法使操作手續簡捷. Kern[2] 曾用氯化亞錫为还原剂在酸溶液中長时間煮沸不能使鈾得到定量的还原. Main[3] 則加鉄为催化剂得到 97.8% 还原，要得到定量还原还必須加入磷酸；並且指出如果仅有磷酸而無鉄催化剂反应也不完全. 本文研究这一还原反应中鉄与磷酸的催化作用，得到与 Main 並不相同的結果. 即当溶液中鹽酸濃度在 4—6 N 之間，磷酸濃度在 0.5M 以上时可以得到定量的还原，並不需要再加鉄催化剂，因而可以避免校正空白的麻煩. 为了探討磷酸催化作用的本質，我們用極譜法研究了磷酸濃度对於六价鈾的还原的影响，結果証明磷酸与四价鈾离子所形成的絡离子比与六价鈾所生成的絡离子稳定得多，因此增加了鈾的氧化电势使还原趋向於完全. 这一还原法适用於分析含鈾量較高的試样.

实驗及結果

实驗：标准鈾溶液用 0.03 N 或 0.02 N 的醋酸鈾酰，此溶液由 Mallinckrodt 出品的分析純 $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ 配制，其正确濃度經 Jones 还原器容量法和重量法校正[1]. 实驗时取此溶液 10 毫升加水及鹽酸使成 4 N 或 6 N，再加 0.02N 的鉄溶液（由純鉄粉溶於鹽酸制成），1:1 的磷酸溶液和 5% 的氯化亞錫 2 毫升，在微沸下（100° 左右）加热15分鐘以还原之. 冷却后加入飽和氯化汞 10—20 毫升，0.05N 的 $Fe(NH_4)(SO_4)_2$ 溶液 25 毫升和硫酸磷酸（1:3）混合溶液 5 毫升，用二苯胺磺酸为指示剂在二氧化碳气流下以 0.02 N 或 0.01N 重鉻酸鉀标准溶液滴定. 以上試剂均系分析純，含鉄量極微. 結果列於下表.

表 1 鉄催化剂和磷酸对於还原程度的影响

溶液总体积 35 毫升，鹽酸濃度 4N. 还原完全时应消耗 18.70 毫升 0.02N $K_2Cr_2O_7$.

鉄催化剂 (0.02N) 毫升	磷酸 (1:1) 毫升	$K_2Cr_2O_7$(0.02N)消耗量，毫升						
		I	II	III	IV	V	VI	平均
1.0	0	18.03	18.05	18.06	18.03	—	—	18.04
1.0	1.0	18.68	18.68	—	18.67	18.68	18.68	18.68
1.0	2.0	18.68	18.70	18.65	18.69	18.69	18.69	18.68
1.0	3.0	18.68	18.69	18.69	18.68	18.66	18.68	18.68
1.0	4.0	18.70	18.68	18.71	18.70	18.71	18.72	18.70
0	3.0	18.70	18.70	18.72	18.70	18.71	18.69	18.70
0.5	3.0	18.60	18.59	18.65	18.69	18.70	18.69	18.65
1.0	3.0	18.68	18.69	18.68	18.69	18.66	18.66	18.68
1.5	3.0	18.66	18.68	18.69	18.68	18.66	18.69	18.68
2.0	3.0	18.71	18.69	18.70	18.70	18.71	18.70	18.70
0	0	5.96	5.04	6.48	7.56	6.68	4.88	—

* 1957 年 10 月 12 日收到.

由表1. 第一系列实驗，卽有鉄催化剂存在而改变磷酸用量时可以看出如果無磷酸存在則反应不完全；此点与 Main 的結論符合。磷酸在 2 毫升（相当於 0.42 M）以上則还原完全。表 1 第二系列实驗卽有磷酸而改变鉄催化剂用量中可見在 3.0 毫升磷酸存在下卽使不加鉄催化剂反应也已完全。加入 0.5, 1.0, 1.5, 或 2.0 毫升的鉄催化剂沒有什么影响。此点与Main 的結論不一致，他用約 0.4 M 的磷酸反应只达38%。因鉄催化剂是氯化鉄溶液能被氯化亞錫还原，所以在滴定値中要加以校正。今不必用鉄催化剂只要加入适量的磷酸，可以免去校正的手續且使分析結果更为精确。表中末行是不加鉄催化剂又不加磷酸时的情况，反应只达 30—40%且結果不重复。为了肯定磷酸的适宜濃度，在 4 N 和 6 N 鹽酸濃度中分别加入 0.5, 1, 2, 3, 4 毫升的磷酸，結果在 2, 3, 4 毫升磷酸时反应完全，滴定値与标准値符合。但在只含有 0.5 或 1 毫升磷酸时反应只达 80—90%，且数据时高时低重現性極差。因此不用鉄催化剂时必須加入 2—3 毫升（相当於0.4—0.6M）的磷酸使濃度約在 0.5M 則可使六价鈾定量还原到四价。

为了更好的了解鉄和磷酸在鈾还原反应中的作用又做了下列一些实驗。

鉄的催化作用——鉄粉溶於鹽酸制成的溶液有 Fe^{++} 和 Fe^{+++}，用过氧化氫氧化得 Fe^{+++} 的溶液，用氯化亞錫还原得 Fe^{++} 的溶液，分别加入鈾的溶液中来观察鉄的催化作用。考慮到其他陽离子也可能有催化作用，因此試驗了 Cu^{++}, Co^{++}, Ni^{++} 和 ICl 的作用，結果列於於表 2。

表2　不同催化剂对鈾还原程度的影响

溶液体积 35 毫升，还原完全时应消耗 18.13 毫升 0.01N $K_2Cr_2O_7$.

鹽酸 M	磷酸 M	催化剂	催化剂量（毫克当量）	$K_2Cr_2O_7$ 消耗量（毫升）	
1.5	1.0	—	—	3.40	3.55
1.5	1.0	Fe^{+++}	0.04	11.22	12.30
1.5	1.0	Fe^{++}	0.04	10.55	10.35
1.5	1.0	Cu^{++}	0.05	4.97	7.54
1.5	1.0	ICl	0.05	5.40	6.75
1.5	1.0	Co^{++}	0.05	6.95	5.55
1.5	1.0	Ni^{++}	0.05	5.75	5.45
6.0	—	—	—	7.35	6.80
6.0	—	Fe^{+++}	0.04	17.56	17.63
6.0	—	Fe^{++}	0.04	17.10	17.10
6.0	—	Cu^{++}	0.05	17.44	17.50
6.0	—	Co^{++}	0.05	14.85	12.77
6.0	—	Ni^{++}	0.05	11.26	11.08
6.0	—	$Fe^{+++}+Cu^{++}$	0.04+0.05	17.20	17.30
6.0	—	$Fe^{+++}+Co^{++}$	0.04+0.05	17.74	17.86
6.0	—	$Cu^{++}+Co^{++}$	0.05+0.05	17.92	18.02
6.0	—	$Cu^{++}+Co^{++}+Ni^{++}$	0.05+0.05+0.05	17.47	17.12

表 2 中第一系列实驗是在鹽酸 1.5M 和磷酸 1M 存在下进行的，因为还原必須在 4—6N 鹽酸濃度下才能完全，这里用 1.5M鹽酸是为了便於观察各种催化剂的作用。各催化剂均先作过和鉄催化剂相似的空白校正，因为它們与鉄不同，空白極小，因此比較表中列

出的重鉻酸鉀毫升数就可以看出它們催化作用的强弱．表中第五項数据是兩次平行实驗的結果，因反应不完全，重現性極差．但从这些数据中还是可以看出 Cu^{++}, Co^{++}, Ni^{++} 和 ICl 均有催化作用，但都不及鉄好．Fe^{+++} 和 Fe^{++} 的作用几乎一样，事实上 Fe^{+++} 溶液一加到有氯化亞錫的溶液中立即被还原为 Fe^{++}．由所得結果沒有区别，我們可以得到这样的結論：鈾还原反应的迅速进行的原因並不是由於 Fe^{+++} 还原到 Fe^{++} 这个反应的誘导作用的結果．

表 2 第二系列的实驗是在 6.0M 鹽酸中进行的，同样为了观察催化剂的作用我們沒有加入磷酸，实驗結果表明虽然催化作用由於酸度的增高也大为增加，但是無論那一种催化剂即使是混合催化剂也不能使反应 100% 的达到完全．关於鉄的催化作用的机構似不能用一般的电子交换来解釋，但是可以肯定它与磷酸存在的作用机構是不一样的，有待深入研究．

磷酸的絡合作用——磷酸可以和鈾酰离子形成絡离子[4]．六价鈾酰离子在高氯酸溶液中还原时，五价离子有歧化作用[5]，而在磷酸中由於形成絡离子可使歧化速度加快，因此在極譜分析[6]中可以得到一个与鈾离子濃度成正比的还原波．我們用極譜分析得到表 3 的結果．

表 3　鈾在磷酸中的極譜

六价鈾酰离子濃度 1.2×10^{-3}M (用醋酸鈾酰)动物膠濃度 0.011%

磷　酸　M	i_d	(μA)	$E_{1/2}$(v.)	(对 S.C.E.)
0.030	1.391	0.347	−0.255	−0.361
0.060	1.020	0.309	−0.253	−0.364
0.120	1.071	0.296	−0.249	−0.366
0.240	1.122	0.255	−0.241	−0.366
0.360	1.241	0.136	−0.230	−0.364
0.452	1.496		−0.225	
0.603	1.615		−0.219	
0.703	1.649		−0.208	
0.903	1.683		−0.204	
1.205	1.683		−0.198	
2.623	1.690		−0 170	
4.521	1.428		−0.132	
6.028	1.207		−0.095	
7.535	0.955		−0.072	
9.042	0.615		−0.041	

由表 3 中可見磷酸濃度在 0.36M 以前 UO_2^{++} 还原时均产生兩个波，即鈾由六价还原到五价，五价还原到四价．表中列出它們相应的扩散电流 i_d 和半波电势 $E_{\frac{1}{2}}$．此时因磷酸濃度較稀，歧化不完全且歧化速度亦較慢，U (VI) 还原到 U (V) 后有一部分 U(V) 产生歧化为 U(VI) 和 U(IV)，还有一部分 U(V) 簡單的还原成 U(IV)．当磷酸濃度增加到 0.45M以上时只产生一个波，即 U(VI) 还原到 U(IV)，此时歧化反应的速度已極快趋於完全，鈾可以定量的还原．但是当磷酸濃度增加到大於 3 M 时由於溶液的粘度及形成絡离

子对扩散系数的影响而使波高显著降低。由表 3 可見因磷酸濃度由 0.45M 增至 9.04M 而使鈾还原波半波电势由 −0.225v. 变到 −0.041v.，这个随磷酸濃度的增加而使半波电势逐漸变正的結果可以充分說明六价鈾与磷酸所形成的絡合物不及四价鈾与磷酸所形成的絡合物来得稳定。半波电势与文献[6]稍有出入，想系实验条件不同所致。由極譜分析中我們观察到的結果与上述实驗中用氯化亞錫还原时要求 0.5M 磷酸存在的結論是符合的。因此我們認为由於磷酸与四价鈾較强的絡合作用增加了鈾的氧化电势使反应趋於完全。

此外我們还用焦磷酸鹽，硼酸来代替磷酸。焦磷酸鹽可以代替磷酸但效果差些。硼酸在强鹽酸溶液中溶解度小，效果不大。

以上实驗主要用醋酸鈾酰溶液，但恐怕醋酸根有絡合或催化作用，也用硫酸鈾酰和高氯酸鈾酰作过平行試驗，証实醋酸根的影响可以忽略。

总結以上实驗我們認为在分析大批含鈾量較高的試样时可以用氯化亞錫还原法，在含鈾的溶液中調整酸度 4—6 N，加入 0.5 M 的磷酸便可按上述方法还原和滴定。在这反应中鉄催化剂是不必要的，其他少量的銅、鈷、鎳等离子有較弱的催化作用，但他們的存在不干扰分析。我們初步分析过鈾矿石，可得重复的結果。

摘 要

1. 用氯化亞錫来还原 U(VI) 至 U(IV) 时 Main[3]認为要有鉄催化剂和磷酸同时存在反应才能完全。我們的实驗証实只要有 0.5M 以上的磷酸存在便能快速而定量的还原，鉄催化剂是不必要的。

2. Fe^{+++}, Fe^{++}, Cu^{++}, Co^{++}, Ni^{++} 等均有催化作用，但若沒有磷酸存在都不能使还原达於完全。

3. 用極譜法研究了磷酸的催化作用，知道由於絡合作用磷酸能使四价鈾稳定，因此可使六价鈾定量的还原到四价而不生成五价鈾。

参 考 文 献

[1] Rodden, C. J., "*Analytical Chemistry of the Manhalten Project*". 54, 17, 1950.

[2] Kern, E. F., *J. Am. Chem. Soc.* 23, 717, 1901.

[3] Main, A. R., *Anal. Chem.* 26, 1507. 1954.

[4] Schreyer, J. M., and C. F. Baes, *Jr.*, *Anal. Chem.* 25, 644, 1953.

[5] Kern D. M. H., and E. F. Orlemann, *J. Am. Chem. Soc.* 71, 2102, 1949.

[6] 漆德瑤，化学学报 23, 79, 1957.

VOLUMETRIC DETERMINATION OF URANIUM BY REDUCTION WITH STANNOUS CHLORIDE

Kao Sheau-shya, Liu Chia-shu, Wu Wan-hsien and Lee An-mo
(Department of Chemistry)

ABSTRACT

The catalytic effect of iron salts and phosphoric acid on the reduction of U(VI) to U(IV) with stannous chloride has been investigated. It is found that U(VI) may be quantitatively reduced to U(IV) in 4—6M hydrochloric acid solution containing not less than 0.5M phosphoric acid. In contrast to the observations made by Main[3], we found that the addition of iron catalyst is not necessary, thus avoiding the correction for the volume of dichromate solution consumed by the catalyst.

The catalytic nature of phosphoric acid has been studied polarographically. It is found that phosphoric acid stabilizes U(IV) with respect to U(V) due to complex formation, so that in a solution containing more than 0.5M phosphoric acid, U(VI) can be reduced to U(IV) quantitatively.

The method can be adopted for the routine determination of uranium in materials rick in this element.

青蛙 *Rana nigromaculata* 早期胚胎發育*

王 应 天

（生物学系脊椎动物学教研室）

雨棲类的胚胎發育方式可以視作动物界个体發育的典型，它的整个过程是外露进行的，很便於观察和实驗，所以一向是胚胎学教学的基本課題，也是生物学研究工作的优良对象。这类动物在我国分佈最广数量最多的当推青蛙 *Rana nigromaculata* Howell[1,2]。为了进行胚胎学实驗，採集田野的青蛙卵子或以青蛙做人工催青产卵，都是容易实現的。由於青蛙卵子的色素不太重，它的胚胎的許多發育性狀表現得清楚，作为实驗材料，比蟾蜍，林蛙等要合适些，所以大家都乐於採用。青蛙是一个普通的蛙种，它的發育情形很近似於別的国家教科書上常用的蛙种，例如关於欧洲的棕蛙 Rana fusca、美洲的豹蛙 Rana pipiens、綠蛙 *Rana sylvatica* 等研究的結果，大体上皆适用於青蛙。有人認为青蛙是綠水蛙 *Rana esculenta* 的一个衍生种[2]，那么这兩种蛙类当然更为接近了（綠水蛙是分佈在欧洲的一种蛙）。正因如此，人們只注意它們相同的地方，而忽視青蛙是否有特異的地方。或謂相同，也缺少报导指出究竟相同至何等程度。为了胚胎学教学和今后深入研究工作的便利，作者在本文中將以正常發育阶段分期工作为中心，記述青蛙的早期胚胎發育的主要外部和內部形态上的以及生理上的演变情形，並同时把这些和別的蛙种作一些比較，希能作为对於青蛙胚胎学研究工作的基础資料之一。

各种蛙类的發育生态环境是不相同的，产卵的季节有的在早春，有的在炎夏；蝌蚪生活的場所有的在山澗清流，有的在池塘淤水。但它們終因血緣相近，在各別的要求范圍中可以找到相同的一段，彼此皆能适应。早期發育的营养，仰賴於自备的卵黄，暫可不予考慮。培养液的化学性質完全可以控制，光照除了热效应外，沒有其他影响[3]。所以只要把温度控制在一个共同合适范圍內的一定水平，就可达到实驗室中一致化的發育环境。採用这样一致化的条件，可以确切比較这些蛙种發育上的異同；或者施用於同一蛙种，也可分析出某一因素的改变对於發育的影响。基於这种概念，Pollister 和 Moore 选擇了 18°C 温度，以外部和內部形态和生理的特征的演变为基础，1937 發表了綠蛙的正常發育时程表[4]。如此，不但給胚胎学工作者对於蛙胚發育年龄有共同的术語，还創立了一个可堪比較的共同标准。以后，採用相同方式的有 Shumway 1940, 1942 关於豹蛙的工作[5,6]，並有 Rugh 1941 所作的补充[7]。有 Weisz 1945 关於南非爪蟾 *Xanopus laevis* 的工作[8]。有 Eakin 1946 关於美洲雨蛙 *Hyla regilla* 的工作[9 見於 7]。有 Conte 和 Sirlin 1952 关於南美蟾蜍 *Bufo arenarum* 的工作[10]。在这許多种無尾兩棲类中，上述各工作似乎表現出它們的阶段分期标准具有共同的傾向；如 Conte 等对於一种蟾蜍的分期基本上与 Shumway 对於豹蛙的分期符合，二者皆划分为 25 个阶段，並且各相对阶段的特征也几乎相同。現

* 1957 年 8 月 8 日收到.

在本文对於青蛙的工作也是在18°C温度下进行的,操作与分期标准等也大多沿用已通行的规范。

关於我国青蛙正常發育情形的記述,有1930刘承釗从生态角度就生活史观察的报导[11]。有1950朱宁生和刘建康的正常發育时程表的初步报导[12]。有1957朱治平和施履吉的正常發育表[13]。这兩篇發育时程表工作,由於蛙种地区性的差異、控制温度的不同(朱和施的工作是在20°C下进行的)或其它原因,与本工作所得的結果有許多的不同,將要在本文內进行比較和討論。

本文初稿写成后,承我們教研室的崔之蘭教授和李汝祺教授予以評閱和指正,作者謹此一並誌謝。

方 法

观察記录是在1956年2月—5月及同年11月—1957年4月进行的。蛙卵主要的是以人工催青方法而获得的。冬季的亲蛙是由頤和园南水稻产区掘得的。在水田环繞的菜园高地上,青蛙在冻土層的紧下方(离地面約50—70厘米)蹲穴冬眠。採集时先以鉄楔崩开冻土塊,再用鋤头掀翻軟土卽可找到。根据作者野外採集时的估計,在这样适宜地形区域內,每平方米內可採得青蛙十只左右。掌握了这样冬季供蛙基地后,就像把蛙藏在冰箱里一样可靠,現用时現去挖取。催青大体上依照 Rugh 所介紹的方法[14],一般用大雌蛙(体長65毫米以上)的腦垂体5个或雄蛙(60毫米以上)的10个,生理鹽水1毫升,在碾磨管中磨成糊液,以注射器注入另一大雌蛙的腹腔內。然后將被注射的蛙放在缸內,加水少許,放置在22°C—25°C温箱內,24小时后就可挤出能够正常發育的蛙卵(往往注射后12小时就可挤出200粒或更多的蛙卵,亦可正常發育)。这样处理比前人的記述得卵提早見效24—48小时。試挤見卵后,卽制备精巢悬浮液,然后把培养皿放在恆温槽內进行人工受精。每只雌蛙可排卵3,000—5,000粒,但只採用50—60粒作为一批,供观察記录。培养液是十分之一濃度的荷氏(Holtfreter)溶液,系以全玻璃重蒸水配制的。每一玻璃皿中約培养50粒卵子,玻璃皿(常用的是結晶皿)的尺度是:11厘米×6.5厘米,表面积95平方厘米,盛培养液約500毫升,水深約5.2厘米,日久蒸發,另加重蒸水补充。受精后半小时内以培养液洗滌一次,蝌蚪孵出后更換培养液一次或兩次,每次換水不全更新,尙留陈液 $^1/_2$—$^1/_4$。操作时預先把新液浸入恆温槽內,待达到18°C才能使用,以免温度波动。作者發現:蝌蚪孵出膠膜之后,溶解的膠膜,仍然为保証蝌蚪正常發育所必需的,若是突然除去膠膜,蝌蚪往往出現畸形。然而如事先在皿底舖垫一層1%琼粉冻,可以补救这个危險。記录中有約半数的培养皿是舖垫琼粉冻的。結晶皿一直浸浴在恆温水槽里,沒水的深度不低5.2厘米。恆温水槽系由流水冷却蛇管,电热棒、水銀温度調节器及攪拌器所組成。控制温度18±0.1°C,每天校正一次。槽頂半盖玻璃,以免水分过量蒸發。

記录中有15批系以人工催青採卵的;另外有5批是由池塘採集的材料,用木炭和沙过濾的池水作培养液,从在实驗室新开始的阶段起記录时間,这类情况所得結果与实驗室产卵的結果無显著差别,故一併計算在內。

此外作者不时由池塘採回蝌蚪,作为形体比例的标准,来衡量实驗室培养的蝌蚪是否正常,如發現有畸形或不合格的卽予淘汰。

阶段的开始和結束时間是这样記录的:同一皿內总数的 $^{1}/_{3}$ 左右的个体显示出某阶段的特征的时刻作为某一阶段之开始,也就是前一阶段的結束.对於漸变性的特征,由於不易截然分划,实际开始时間一般要偏早一些.

長度是在生活时測量的,尾芽期以前的胚体用目鏡微量尺間接測定;尾芽期以后的蝌蚪用毫米方格紙測量.以吸管把蝌蚪連水移放於压在方格紙上的載玻片上,載玻片可自由移轉,便於調整蝌蚪的長軸与方格的方向一致,在放大鏡下讀数,如果蝌蚪跳动剧烈,則滴入少許5%三氯丁原醇使之痲醉.每次測量典型的三、四个体,平均計算.

攝影記录也是在生活时进行的,系用小型相机,30 厘米引伸筒,焦距 3.5 厘米及 5 厘米的鏡头等装备,攝影时蝌蚪已經痲醉,但仍有纖毛动作的滑行,所以曝光时間必須短於 $^{1}/_{10}$ 秒,才能得到清楚的記录.

外形的繪圖是以攝影記录为藍本,並参照生活的或固定的标本加以补充.切片的繪圖是以显微鏡投影方式描繪輪廓制成.

切片标本是經过 Smith 氏液固定,石臘切片.受精卵的切片用苏木精、蕃紅、亮綠及苦味酸染色;一般切片用苏木精、伊紅染色制成.

观 察 結 果

个体發育是一串的連續演变过程,根据形态上或生理上变迁中显著的新的特征的出現,可以进行阶段分期.这里所指的早期胚胎發育,是指由一个細胞的蛙卵开始,發育成为一个自由生活的蝌蚪,它的卵黃尙未耗尽,还沒有完全仰賴从外界攝取食物来营养的时期为止的一系列的發育.除去少数的特点外,青蛙早期的胚胎發育情形,相当近似於 Pollister 和 Moore 关於綠蛙的記載,而更接近於 Shumway 关於豹蛙的記載.这样,本文沿用他們拟訂的並已相当通行的方式来处理青蛙發育的分期,表 1 是 18±0.1°C 的發育时程表,整个过程划分为 25 个阶段,各阶段的特征記述如下:

阶段 1 —未受精卵期　注射腦垂体后一天或二天的雌蛙,許多成熟的卵子聚集在子宮內,在腹部稍加压力,就可挤出卵子.生殖季节也常遇到这样的雌蛙.青蛙卵子的动物性半球有黑色的色素冠,一般佔卵表面积的一半略小(圖版V,1.2),有些色素冠較小,不及总面积的 $^{1}/_{3}$(圖版 V, 1.1).卵子的植物性半球是白色的或灰白色的.卵子的直徑約为 1.7 毫米.剛挤出的蛙卵,具有最高的受精率,遇水后,膠膜逐漸吸水而膨脹,卵的受精能力也随之降低.未受精的卵,虽然吸水,但不能形成足大的卵黃周隙,所以卵子本身在卵黃膜內不能自由轉正它的軸位,因此未受精的卵子羣在浸水半小时之后,仍有半数的卵子的植物性極朝上而显露白色.如把成熟的蛙卵保留在母体子宮之內,可以延長受精的能力 1—2 天;若把这样的蛙收藏在冰箱內(4—8°C),更可延長受精能力 4—7 天.失效或过分成熟的卵子,在色素冠上泛起白色的暈斑,这样的卵子不能供作实驗.和一般脊椎动物的卵子一样,未受精的青蛙卵子处於第二次成熟分裂的中期(圖版IV,圖 2),吸水 20 分鐘后未受精卵像受精卵一样也能显露出極体.

阶段 2 —受精卵期　受精后 20—30 分鐘,卵子的动物性極旋轉朝上,卵軸正位,这是受精的第一个明显的象征.第一極体虽早已形成,但須在卵黃周隙相当扩大后才能显露出来(受精后 20 分鐘,圖版 V, 2.1).精子在 25 分鐘时侵入到卵子的細胞質內,仍保持原

来的桿形，其头部周圍缺少卵黄顆粒(圖版IV，圖3)。这时卵子的核进入第二次成熟分裂的晚期(圖版IV，圖4)。一个卵子的連續切片中，只能看到一个精子，所以青蛙是單精入卵的。40分鐘分裂出第二極体，同时卵子的原核形成(圖版IV，圖5及圖6)。80分鐘見雌雄二原核癒合(圖版IV，圖7)。色素冠在受精后半小时有所下降，下降不是平均的，而是偏重於卵子的后下部，卽未来胚体的腹部(同朱和施的观察[13])。一般青蛙的卵子上看不到灰色新月的区域[12,13]，但个别的雌蛙所产的全数卵子，在受精后1.1小时均出現灰色新月，这些卵子原来的色素冠較小，不及总面积的$^1/_3$(圖版V，1.1，2.2)。

表1　青蛙發育时程表(18±0.1°C)

發育階段		开始时齡*(由受精起)	測定次数	阶段內时間
阶段 1	未受精卵期			
阶段 2	受精卵期	0		2.9小时
阶段 3	二細胞期	2.9±0.005小时	17	1.2小时
阶段 4	四細胞期	4.1±0.01小时	16	0.8小时
阶段 5	八細胞期	4.9±0.007小时	15	0.9小时
阶段 6	十六細胞期	5.8±0.11小时	7	0.8小时
阶段 7	三十二細胞期	6.6±0.22小时	7	8.0小时
阶段 8	粗囊胚期	14.6±0.17小时	5	4.7小时
阶段 9	細囊胚期	19.3±1.05小时	4	4.3小时
阶段 10	原腸胚早期	23.6±0.22小时	20	6.5小时
阶段 11	原腸胚中期	30.1±0.33小时	9	6.7小时
阶段 12	原腸胚晚期	36.1±0.42小时	11	9.8小时
阶段 13	神經板期	46.6±0.40小时	16	7.4小时
阶段 14	神經褶期	54.0±1.41小时	5	6.3小时
阶段 15	纖毛动作期	60.3±1.29小时	6	6.4小时
阶段 16	神經管期	66.7±0.79小时	14	8.1小时
阶段 17	尾芽期	74.8±0.55小时	16	24.6小时
阶段 18	肌肉反应期	99.4±2.22小时	14	20.8小时
阶段 19	心跳期	120.2±2.87小时	16	18.3小时
阶段 20	鰓血循环期	138.5±2.24小时	17	25.7小时
阶段 21	开口期	164.2±2.32小时	16	28.7小时
阶段 22	尾血循环期	192.9±2.51小时	11	46.1小时
阶段 23	鰓蓋褶期	239.0±1.57小时	6	26.5小时
阶段 24	鰓蓋右側閉合期	265.5±2.87小时	6	41.8小时
阶段 25	鰓蓋完成期	307.3±5.95小时	8	

* 开始时齡指受精后發育至某阶段开始时所需的小时数.

** 后附数是平均数誤差 $SEm=\sqrt{\Sigma(x)^2/n^2-n}$.

阶段3—2-細胞期　第一次分裂，縱裂。卵的頂面在受精后2.9小时出現分裂溝和許多張力線(圖版V，3.1)。絕大多数卵的分裂溝在通过卵的左右对称面(因色素冠分佈显出前后不同)，其下割速度前側快於后側。(同(13)所提)。3.9小时分裂溝到达底部。

阶段4—4-細胞期　第二次分裂，縱裂。

阶段5—8-細胞期　第三次分裂，水平裂，分裂溝在赤道上45°。

阶段6—16-細胞期　第四次分裂，縱裂。分裂往往不是同时进行，細胞的排列也往

往不規則．动物性半球的 8 个小分裂球有的是長列的兩排，有的是輻射狀排列．

阶段 7—32-細胞期 第五次分裂，分裂的順序和分裂球的排列都不如以前各期整齐．

阶段 8—粗囊胚期 胚体表面高低不平，細胞界限明显，有如桑椹狀，动物性半球頂面約 150 余細胞（球面的一个象限——90° 角度內約为 40 細胞）．

阶段 9—細囊胚期 胚体表面光滑，小分裂球分得很細致．

阶段 10—原腸胚早期（背唇期） 原口的背唇最初出現的位置在赤道下 40°—45°．

阶段 11—原腸胚中期（側唇期） 原口內卷的背唇和側唇呈半圓弧形．

阶段 12—原腸胚晚期（腹唇期） 原口的腹唇开始內卷，最初原口环的直徑約为胚体直徑的一半，后来被很小的卵黃栓所阻塞．

阶段 13—神經板期 原口（胚孔）呈裂縫狀，胚体的前后軸伸長，背部初略显平坦，后来分化为輪廓淸楚的神經板．

阶段 14—神經褶期 神經板边緣高升为褶，中央凹陷为神經溝，头部分化出感覺板．胚体長約 2 毫米．

阶段 15—纖毛动作期 胚体中腰部的左右二神經褶靠近．体表面有纖毛流的出現，但力量很微弱，只能使卵黃周隙中殘落的卵黃細胞碎屑流动，而不足使胚体本身在卵黃膜內旋轉．此期胚体長約 2.4 毫米．

阶段 16—神經管期 神經褶完全癒合为管，吸盤和鰓板已分化出来，头部与胸部之間在腹側有凹陷，体長約 2.8 毫米．

阶段 17—尾芽期 后背部有显著的尾芽翹出，体長約 3 毫米，尾長約为全長的 $^1/_{10}$．

阶段 18—肌肉效应期 胚体可因受外来的机械刺激而作半环狀的收縮紐曲．体長約 4 毫米，尾長为全長的 $^1/_5$．

阶段 19—心跳期 大多数蝌蚪在此期孵化，脫出卵黃膜及膠膜（有的在 20 阶段才孵化）．蝌蚪的咽区腹側部可見微弱的喘息狀的心臟搏动．外鰓原基（鰓芽）已很显著．体長約 5 毫米多，尾長为全長的 $^1/_3$．

阶段 20—鰓血循环期 蝌蚪以吸盤附着於皿壁或膠膜塊而悬掛水中，常因扰动或刺激而作短期游泳，然后側臥皿底，而不能立即恢复平衡姿态．兩对鰓芽上岔分出短指，其中可見血球作間息性的脈冲流动，体長約 6 毫米，尾長約全体的 $^2/_5$．

阶段 21—开口期 兩对外鰓上的短指伸長为鰓絲，口窩內的口板膜穿通，眼的角膜稍显透明而显露出黑色的眼球．身体表皮也透明化而現出“人”字形的体节．体長約 7 毫米，尾長約为全長的一半．

阶段 22—尾血循环期 尾鰭的后部可見有血球川流的小血管，口部有唇及角質喙（尚未硬化）的分化．腹部縮短而加寬，卵黃塊在左腰部出現折痕（圖版 IV，下）．吸盤开始萎縮，由腹面可見在二外鰓掩护之內，又有一些鰓絲露头，体長約 8 毫米，尾長大於軀長．

阶段 23—鰓盖褶期 具备典型的蝌蚪体形，軀体圓而扁，尾鰭寬而長（約为全長的 $^3/_5$）．头部及眼的虹彩上有反光的斑点，唇上出現乳突，角質喙上發生鋸形齿緣．鰓盖褶压外鰓的基部．腸管發生弯曲（圖版 IV，下）．能自發游泳和維持平衡．蝌蚪体長約 9 毫米．

阶段 24 —鰓盖右側閉合期　右側的鰓盖褶已將鰓絲包圍，其边緣並与腹壁表皮癒合．左側的鰓絲仍然大部分外露，口后有下唇齿兩排．腸管有 2—3 圈的盤迴，体長約 10 毫米弱．

阶段 25 —鰓盖完成期　右側的鰓盖褶也將鰓絲包圍，而在身体的左中腰部留下一个出水孔通於体外．吸盤退化为疤痕狀．腸管有4—5圈的盤迴（圖版IV，下），体長約11毫米．

蝌蚪發育至此程度，正式开始攝取食物．

各阶段的开始时間及阶段內經历时間，列於表 1 中．

內部的解剖　对於經过固定和制成切片的蛙胚材料，利用內部解剖的特征来作分期鑑定的标准，是很有应用价值的．在神經管閉合（阶段16）以前，外部形态的特征直接和內部解剖的特征相联系，並且各期皆有显著的差别，划分阶段是比較容易的．在阶段 16 以后，蛙胚具备了蝌蚪的形式，随着發育的进展，身体各部当然皆有分化，但能够作为鑑定阶段的标誌而容易被掌握的，並不太多．Pollister 和 Moore 及 Shumway 曾採用眼、內耳及吸盤等結構对綠蛙和豹蛙的蝌蚪来鑑定阶段，据作者就切片的观察，当然这个方法也适用於青蛙．青蛙蝌蚪的眼的分化程度，恰介乎上述二种蛙之間的情形．其內耳則有超过綠蛙一个阶段的形势．現將此数阶段青蛙蝌蚪的眼及耳解剖分述如下（参看圖 1）

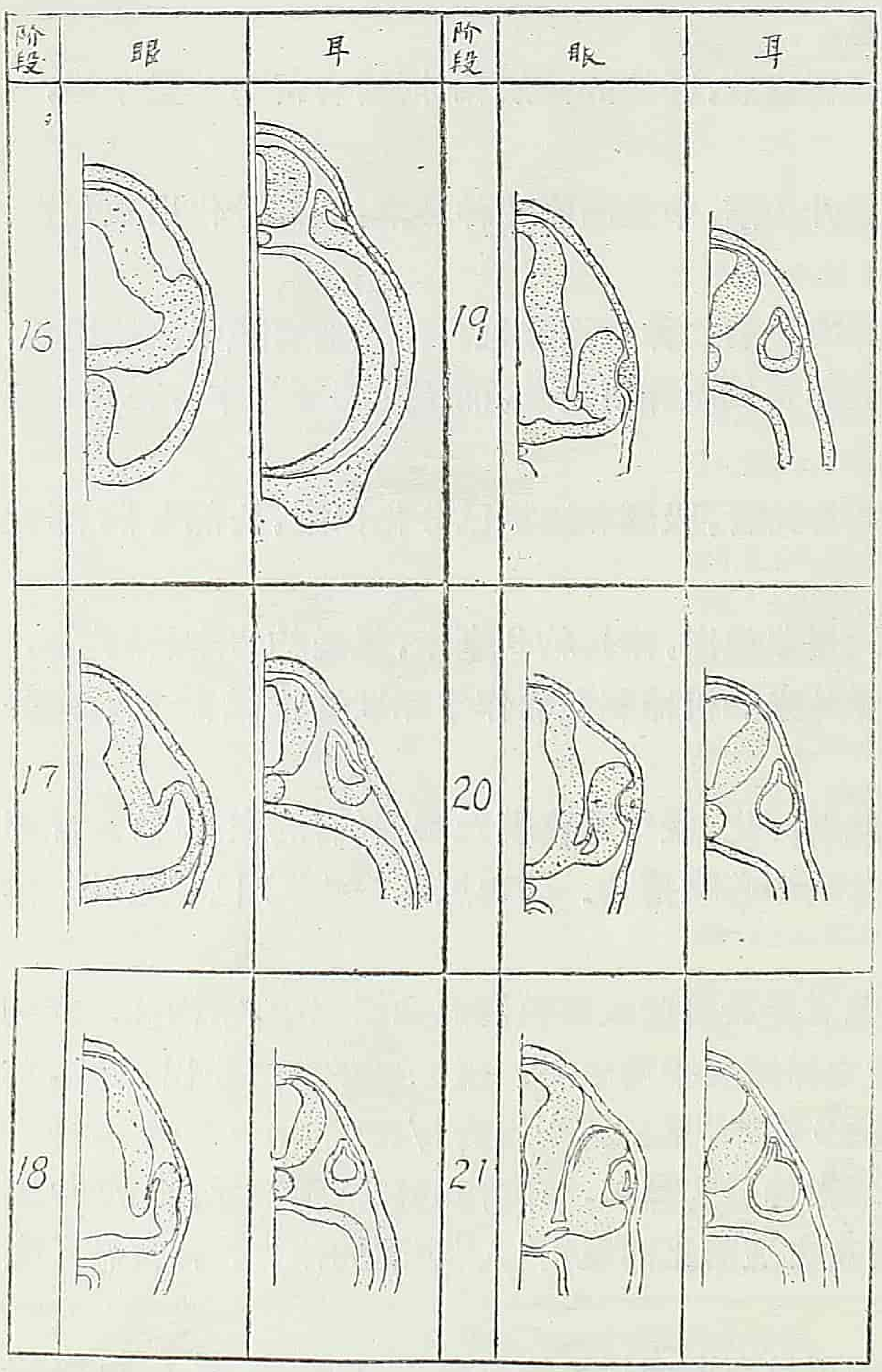


圖 1

阶段16，神經管期——視囊突出，視囊的空腔尙未形成．前腦与視囊的壁皆很厚．內耳是听窩的形式．体节数 5—6．

阶段 17，尾芽期——視囊的背壁薄化，有腔．內耳呈囊狀（听囊），三角形，体节数 9—10．

阶段 18，肌肉反应期——視囊的側壁微向內凹陷而成为視杯，水晶体的原基出現．內耳呈瓶狀，向上有淋巴管的突起，体节数 14—15．

阶段 19，心跳期——視柄形成，水晶体已相当显著，体节数 19—20．

阶段 20，鰓血循环期——水晶体很显著，但尙未与外胚層完全分离．內耳扩大，內淋巴管伸長，体节数 25—26．

阶段 21，开口期——水晶体独立呈囊狀，它的內、外壁有分化，內壁是長形的纖維細

胞．內耳的內淋巴管移偏於內側，且显弯曲．口膜板穿破．消化管在肝区有弯折，而腹部是整塊的卵黄(圖版 IV，下)．体节数 29—30．

阶段 22，尾鳍血循环期——蝌蚪的头部横切片上近於圓形，眼很大，水晶体腔消失．在二对高度發展的外鰓掩护的內側的基部，又發生三对幼稚的鰓芽絲．口部有唇及角質喙的分化．食道下出現气管及肺芽，具卵黄的消化管呈"Z"字形弯曲(圖版 IV，下)，切片上在消化管的背側有短的腸系膜．

阶段 23，鰓盖褶期——角質喙上出現黑色齿峯．头部可看到原始軟骨．端腦上分化出二个嗅叶，中腦發生二疊体．腸管出現迴曲(圖版IV，下)．外鰓的外基部出現鰓盖褶．

阶段 24，鰓盖右側閉合期——右側的外鰓絲被包圍在鰓盖腔內．腹部腸管有多次盤曲，横切片上可見腸管断面 8 次，腸腔中偶尔可見少量食物，說明少数蝌蚪此时已开始攝食．口部上、下唇的內壁發生唇齿．頜突具备一般軟骨性質．

阶段 25，鰓盖完成期——左側的外鰓絲也不裸露在体外．腹部可見腸管的横断面 10 次或更多，腸壁变薄，其上皮細胞中仍然充滿許多卵黄顆粒，腸腔中有食物或無之．

討　論

朱和刘[12]在黑斑蛙(卽青蛙)演發程序的初步报导中提出青蛙發育的一項特点：在受精之后 20 分鐘，卵上發生第一極体．这是和一般脊椎动物不相同的，絕大多数的脊椎动物在受精时卵子已經經过第一次成熟分裂，排出了第一極体，而处於第二次成熟分裂的中期，关於許多蛙类前人的报导也是如此[6,15, Lebrum 見於 16,17]．此次作者在进行青蛙的人工受精时注意到确是在这个时刻——受精后 20 分鐘，卵子的动物性極的頂面有極体显露出来．这是第一極体还是第二極体呢？抑或青蛙眞的像鴿子一样在受精后才开始第一次成熟分裂呢？这是一个値得澄清的問題．为此目的，作者进行了切片檢查．結果在切片上很明显的看到青蛙的未受精卵是处於第二次成熟分裂的中期，第一極体早已排出卵外(圖版 IV，圖 2)．同时注意到未受精的或已受精的卵子在浸水的最初几分鐘(如 5 分鐘)內，第一極体是埋陷在卵子外質的凹坑之中；浸水稍久(如 20 分鐘)，卵黄周隙扩大，卵子的細胞膜趋圓，凹坑不复存在，第一極体高升出卵子細胞膜的表面．大概就是这个緣故，解剖鏡下所見好像是第一極体於此时發生，实际是不正确的．此外，作者也观察到未受精的卵子在浸水 20 分鐘之后，也有这样的第一極体升显在卵子的頂面上．如此可知其显現，受精不是一个前題，而和卵黄周隙的扩大却有密切的关系．

朱和刘以及朱和施[12,13]的記述中都說到在青蛙的受精卵上看不到灰色新月，一般所見也是如此，但是作者在几十次人工受精的操作中，却遇見兩次的蛙卵發生明显的灰色新月，卽先后有兩只雌蛙所有的卵子在受精后一小时余皆出現灰色新月．这兩次的卵子的色素冠都比一般的范圍要小一些(圖版 V，2.2)，而这二只亲蛙的外形与顏色並不与一般青蛙有何差别．这里的新月区是比較狭而長，而界限和灰色的色調都很明显．灰色新月本来是蛙卵在受精与發育上很好的标誌，胚胎学上頗受重視，以往很多人說青蛙卵上無之，但亦有人說确曾見过，这次可謂澄清了这个問題：可以說大多数的青蛙卵子無灰色新月，而个别个体的卵子可能發生．灰色新月的出現，大概与卵子本来色素冠范圍小的特点

有联帶关系，若原来的色素冠大，縱然發生也很难看出来。青蛙的卵子不是絕对沒有灰色新月的，这样把青蛙和那些卵上具有灰色新月的蛙种，增进了一点联系。

大体說来，青蛙的早期發育，确是与教科書上常提的那些蛙种近似。就所知的資料較多的几种蛙来比較，青蛙和豹蛙最为接近，而和棕蛙、綠蛙的相似程度較差些，和本地区所产的另二种蛙——林蛙 Rana asiaticus、金線蛙 R. plaucyi 也是有許多不同。林蛙在产卵習性，發育速度快，很早出現后肢芽等表現得与綠蛙相近。金線蛙虽然是与青蛙血緣紧近，可以相互杂交，並可反交[17]，但反映在胚胎上却有許多差異，它的卵子小，色素少，卵的顏色是褐色与乳黃色而不是黑色与白色，發育速度慢等，値得深入的比較研究。圖 2 是青蛙等發育阶段与时間的关系曲線。在同一溫度（18°C），相似的培养条件下，青蛙和豹蛙的曲線比較靠近，甚至部分重叠。綠蛙發育較快，棕蛙的資料[19]因为不是恆温培养的数据，而是採用的日数。温度乘积 Tagesgrad 單位，速度上不便比較。若是根据这个單位的概念推理，应可用 18° 除之，再乘 24 小时来換算，比較結果当知棕蛙發育要快些。圖 2 曲線的横坐标是时間——受精后的小时数（即时龄），縱坐标是分期的阶段序数。这里有相当的人为性的，如 16-細胞期到 32-細胞期显然的不相称於 32-細胞期到粗囊胚期，不过作为共同比較的規格还是可以的。[20] 發育的最初几个阶段（2—6），本文所採用的是分裂开始时刻，而 Pollister, Shumway 等的記录是分裂完成时刻；如青蛙的第一次分裂开始於受精后 2.9 小时，应加上分裂进行到底所需的 1 小时（共 3.9 小时），才相当於他們所指的阶段 3 的时龄（在豹蛙为 3.5 小时）。他們那样記录，有把某次分裂进行所需的时間划列在上一阶段內的嫌疑是不恰当的。由於起初的几个阶段的数据有些参差，故未列入圖中来比較。以后各阶段的定时标准是一致的。阶段 8—17，青蛙和豹蛙的曲線近於平行，后者偏慢数小时，阶段 18—22 二者几乎一致，但最后三阶段 23—25 豹蛙超越於左至偏快 20 小时。

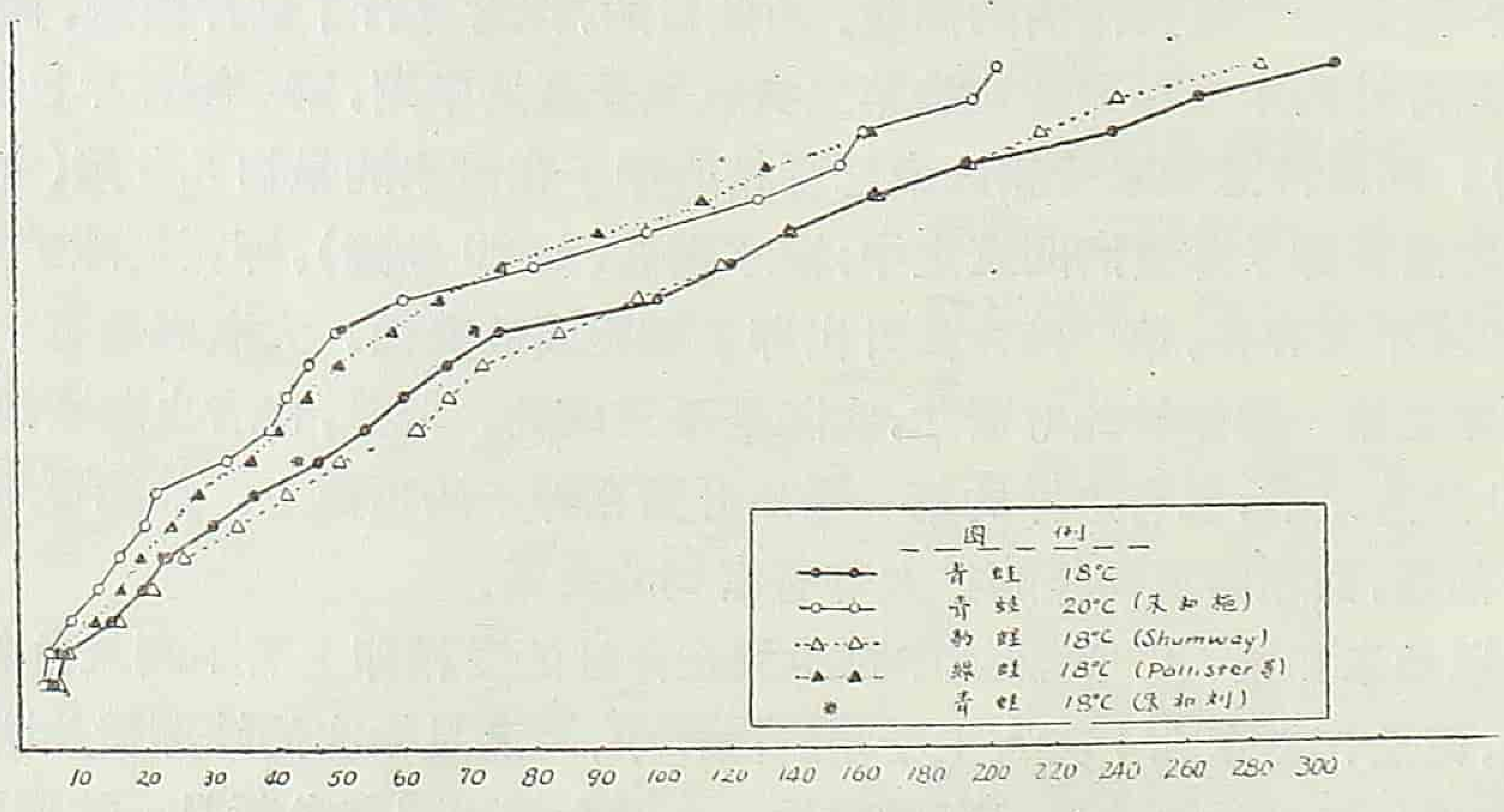


圖 2

綠蛙的曲線偏快几十小时，而和 20°C 青蛙的曲線（根据朱和施[13]的数据加以調整）相接近。实际在大自然中綠蛙發育要求較低的温度条件（10°C）[19]，若是把它放在和本来就要求較高的蛙种（豹蛙，青蛙）於同一温度（18°C）中發育，当然發育的速度要快些。本地的几种蛙产卵季节不同，林蛙在 3 月、青蛙在 4—5 月（少数可延至 6—7 月），金線蛙在

5—6 月[11],这就是說明發育的适应温度有低有高，那么是同样的温度下，表現的速度有快有慢．虽然如此，圖 2 上所画的几条曲線，在坡度的变化上，除去少数阶段例外，仍然表現出共同的趋势，这說明它們有內在相似的性質．

圖中另附有朱和刘关於青蛙18°C 正常發育的数据 3 点(还有一点——第一次分裂，2.66 小时未列入)，他們是在上海工作的．这几点和本文的数据比較都偏快一些，是由於蛙种地区性的差異或别的原因，尙不明了．

上述是發育速度上的問題，現在比較这几种蛙發育形态上的異同：(一)，卵子的体积，青蛙的直徑是 1.6—1.8 毫米[11]同於豹蛙(Wright, 1941 見[5])而小於綠蛙 1.8—2.4 毫米[4]．(二)，第三次分裂的水平面的位置在青蛙和豹蛙是赤道上 45°，而在綠蛙和棕蛙是赤道上 30°，所以青蛙卵的小分裂球無論按比例或按实际要比后二种蛙的小得多．(三)，阶段 10 时，背唇出現的位置在前兩种蛙是赤道下 40—45°，而在后兩种蛙是赤道下 30°．(四)，阶段 21—22，就外鰓發展的程度而言，前兩种蛙的不如后兩种蛙的高．(五)，另外还有一点很大的不同，在阶段 23，后兩种蛙的蝌蚪的臀部發生后肢芽，而前兩种須在阶段 25 以后好几天才出現后肢芽．

青蛙的發育很多地方可和豹蛙比拟，但也有一些和它不同．如灰色新月在青蛙不是普通發生的，纖毛动作的强度較差，不足以使胚体在膜內旋轉，心跳开始得較晚，而孵化却發生在較早的阶段．

朱和施在青蛙的發育阶段划分上，特立了一个孵化阶段[13]，作者認为是不太恰当的．如刘承釗的記載在体長 3 毫米时(阶段17)就已孵化[11]．根据作者的观察，有的孵化得很早(阶段 18)，有的却延迟到阶段 20 甚至阶段 21 才孵化，那些蝌蚪都是很健康的．並且同一批發育卵子的孵化时龄不一致，剛孵出蝌蚪的發育程度(阶段)也不一致，孵化大概与蛙卵培养时所遭受的扰动有密切关系．由於这个原因，作者只把这項事附記在出現頻率最高的阶段 20 之中，而沒有特別單独成立一个阶段．

阶段 17—25，蝌蚪的体長，在一定条件下，仍然可以当作一項很方便的衡量發育的指标，一定的体長，就具有一定的分化程度．尤其在18°C 下，体長 3 毫米、4 毫米…… 8 毫米，相当协調於阶段17、阶段18……阶段22，恰巧也正是受精后 3 天，4 天…… 8 天，这里几乎是逐日增長 1 毫米，發育一阶段，很便於記忆．当然这不是很严格的，如心跳不是在体長 5 毫米而是在 5.5 毫米时开始．阶段 23—25 三期体長的增加稍为緩慢，此三期外鰓与鰓盖的关系受外界环境的影响很大．如培养密度較大，氧气不足，温度較高等均是导致外鰓不易被包圍的原因，所以外鰓被包圍的程度，不能作为不同条件培养的蝌蚪的阶段划分的标准．这种情况下，蝌蚪的体長的差異幅度也是很大，作者認为这是只有腸管的盤旋程度是一个較好的标誌．朱和施的工作中关於蝌蚪体長的数据，和本文所提出的都不相近，一般偏短，这可能由於固定測量与生活时測量的差異．根据一般經驗，經过常用的固定剂(福馬林，包因液等)固定的材料在長度上要比生活的材料縮短 $^1/_{10}$—$^1/_5$．本文的長度是在生活时測量的，这几个阶段它的長度和豹蛙蝌蚪的相似，这一点上也反映出它們之間的相近．

最后的兩个阶段还有攝取食物的問題．在內部解剖的一段中曾提到腸腔中可能看到食物，这当然不是指的控制培养的蝌蚪，因为本实驗中在阶段 25 以前是不喂任何食物的．

腸腔中有食物，当然可肯定蝌蚪已开始攝食，这与口部已分化有角質齿、唇齿等是符合的。但是也可肯定說在此时期攝食对於發育不是必須的条件。这时腸壁上皮細胞內仍含有大量卵黄顆粒，可以供給發育的需要。同时作者有这样的經驗，卽有时把阶段25以后的蝌蚪連續飢餓一週或兩週，未致死亡。阶段24—25的分化，不依賴外来的食物营养，吞食的食物对發育的影响不大，但究竟起多少作用，尙待研究。

为了使用的便利，总結性圖解形式的时程表(圖版I,II及III)中的長度和时齡数，是經过适当的調整的。

总 結

青蛙的早期胚胎發育在18°C恆温下由受精开始至鰓盖完成为止，共須307小时，可划分为25阶段。受精时卵子处於第二次成熟分裂的中期，少数个体的蛙卵受精后可能出現灰色新月，一般受精后三小时开始第一次分裂，一天后出現背唇，二天后出現神經板，三天后蝌蚪体長3毫米，四天后4毫米、……逐日發育一阶段，体長增加一毫米，至八天后体長8毫米，处於阶段22。最后三个阶段發育較慢，外鰓被完全包圍須要四天半的时間。就發育的形态特征和生理特征以及發育的速度而言，青蛙与豹蛙的情形是很相近似的。

参 考 文 献

[1] Boring, A. M., C. C. Liu (刘承釗) 和 S. C. Chou (周淑純). *Peking Nat. Hist. Bull.* 7, 1—64, 1932.

[2] Pope, C. H. 和 A. M. Boring, *Peking Nat. Hist. Bull.* 15:1, 13—86, 1940.

[3] Rugh, R., *Physiol. Zool.* 8:2, 186—195, 1935.

[4] Pollister, A. W. 和 J. A. Moore., *Anat. Rec.* 68, 489—496, 1937.

[5] Shumway, W., *Anat. Rec.* 78, 139—147, 1940.

[6] ——— *Anat. Rec.* 83, 309—315, 1942.

[7] Rugh, R.,*Experimental Embryology*, Burgess Co. 1948.

[8] Weisz, P., *Anat. Rec.* 93, 161—170, 1945.

[9] Eakin, R. M., Univ. Calif. *Pub. Zool.* 51, 245, 1947.

[10] Conte, E. D. 和 J. L. Sirlin, *Anat. Rec.* 112, 125—135, 1952.

[11] Liu, C. C. (刘承釗), *Peking Nat. Hist. Bull.* 5:2, 53—58, 1930.

[12] 朱宁生和刘建康，科学，32, 90, 1950.

[13] 朱治平和施履吉，解剖学报 2:1, 59—64, 1957.

[14] Rugh, R., *Biol. Bull.* 66, 22—29, 1934.

[15] Dorter, K. R., *Biol. Bull.* 77, 233—257, 1939.

[16] Kellicoct, W. E., *Chordate developmeut.* Henry Holt. New York. 1—471, 1903.

[17] Rugh, R. and C. Railey, *J. Exptl. Zool.* 108, 471—483, 1948.

[18] Ting, H. P. (丁汉波), *Lingnan Sci. Jour.*, 22, 115—119, 1948.

[19] Kopsch, F., *Die Entwicklung des braunen grasfrosches Rana fusca Roesel.* Georg Thieme Verlag. Stuttgart, 1—69, 1952.

[20] Moor, J. A., *Ecology* 20, 459—478, 1939.

THE EARLY DEVELOPMENT OF THE COMMON FROG, *Rana nigromaculata*.

Wang Ying-tien

(Department of Biology)

ABSTRACT

This paper deals with the study of the early development of *Rana nigromaculata*, the most common species of frogs in this country. It includes a description of the external forms, internal anatomy, a normal developmental time table at 18°C of the embryos and a comparism with those of other species of Rana. In addition, a series of photographical records of the developing embryos was taken as a suppliment. Beginning with the artificial fertilization of the completion of the operculum of the tadpole 307 hours are needed. On the basis of the morphological and the physiological characteristics of the embryos, the whole course of development is devided into 25 stages, and in certain aspects, the development of this frog closely resembles to that of *Rana pipiens*.

圖版 I、II 及 III 的說明

这連續的三張圖表是在 18°C 恆溫下青蛙的正常胚胎發育时程圖表，也就是綜合青蛙的發育特征与时間联系的总結圖解. 詳細說明見文中对於各發育阶段的描述，此处不贅. 圖表上所用"时龄"是指以小时为單位的發育年龄，亦卽是由受精开始到某一發育阶段所需的小时数目.

圖版 IV 的說明

圖 1—7 是青蛙受精过程切片攝影，一般放大 1,000 X，圖 3 放大 300 X.

圖 1. 腹腔卵，催青后 1 天半从腹腔中取出固定，正处於第一次成熟分裂的中期，它的紡綞体不是垂直於細胞表面而是平行的(另外的腹腔卵的紡綞体有的是垂直的，有的是斜的). *a*.——四集体.

圖 2. 未受精卵，催青后一天半，由子宮挤出后浸水約 10 分鐘，正处於第二次成熟分裂的中期. *b*.——第一極体. *c*.——第二次成熟分裂赤道板上的染色体羣.

圖 3. 受精后 25 分鐘，精子进入到卵的細胞質中. 精子仍保持原形. 它的头部的周圍集聚了一团缺少卵黃粒的，比較清明的細胞質.

圖 4. 受精后 25 分鐘，在卵的核物質方面，第二次成熟分裂进入末期. *e*.——第二極体的染色体羣，已被推至卵的表面. *f*.——卵細胞原核的染色体羣.

圖 5. 受精后 40 分鐘，*g*.——第二極体，在色素層中，尙未推出卵外，*h*.——卵的染色体羣等已完全改組成囊狀的原核.

圖 6. 也是受精后 40 分鐘，但比上圖所示更为發展些. *i*.——第二極体，处於正由卵的色素層中冒出去. *j*.——卵原核.

圖 7. 受精 80 分鐘，*k*,*l* 示雌雄兩原核癒合.

圖版 IV 下，青蛙蝌蚪腹部解剖說明：蝌蚪的腹壁被剝除，显露出卵黃塊到迴曲的腸管剧烈的演变，由於生活时腹壁的透明或切片上腸管橫段面的数目，足以指示蝌蚪的發育阶段. 放大約 15X. 阶段 20 —— 完整的卵黃塊，阶段 21 ——卵黃塊的左前部及右后部出現微弱的折痕. 阶段 22 ——卵黃塊的折痕加深，腸管呈"Z"字形. 阶段 23 ——腸管發生显着的折曲迂迴，但尙未現成圈的盤旋. 阶段 24——腸管有二圈以上的盤旋. 阶段 25——腸管有三圈以上的盤旋.

圖版 V—X 的說明

青蛙早期胚胎發育攝影記录. 照片下数碼之整数卽为阶段序数.

1.1——未受精卵，側面观，色素冠小者. 1.2——未受精卵，側面观，色素冠大者.

2.1——受精卵，斜頂面观，示極体显着的出現.

2.2——受精卵，側面观，示色素冠下移，中腰部有灰色新月区.

3.3——第一次分裂开始不久受精后約 3 小时，頂面观，示張力皺紋，分裂溝中央可見極体. 卵的色素冠分佈前后不等，前为未来之背部，此側分裂进行較快.

3.2——第一次分裂，頂面观，約 3.5 小时，分裂溝加深，張力皺紋不复显明.

3.3——第一次分裂，側面观，約 3.9 小时，分裂溝到达底部.

4.1——第二次分裂，頂面观，約 4.5 小时. 此圖可見 4 个分裂球不是等大的，在二分裂溝交叉处見極体.

4.2——第二次分裂，斜頂面观，示色素冠下降的不等.

4.3——第二次分裂，側面观，約 4.8 小时，分裂溝达下部.

5.1——第三次分裂，頂面观，約 5.8 小时，注意到上四小分裂与下四大分裂球有紐轉的情形.

5.2——第三次分裂，側面观.

6.1——第四次分裂，頂面观. 上層上 6 小分裂球，說明此次分裂往往是不同时的.

6.2 ——第四次分裂，頂面观.

6.3——第四次分裂，頂面观.

6.4——第四次分裂，側面观.

7.1,7.2,7.3——第五次分裂(32細胞). 側面观，示分裂式样不一致.

8.1——粗囊胚的最早期，尚不及64——細胞. 頂面观.

8.2,8.3——粗囊胚早期，頂面观及側面观.

8.4,8.5——粗囊胚，側面观及斜側面观.

9.1,9.2,9.3及9.4——細囊胚，側面观.

10.1——背唇剛出現不久，正前面观.(原腸胚时把原口的方位定为前)

10.2——背唇期的腹面观.

10.3及10.4——背唇期的前面观.

11.1——側唇开始，前斜面观(仰).

11.2,11.3——原口的背側唇呈半圓弧，前斜面观(仰).

12.1——腹唇开始內卷，斜腹面观.

12.2,12.3,12.4及12.5——卵黃栓逐部縮小，前斜面观.

13.1——原口呈裂縫狀. 后斜面观，背面稍显平坦.(神經胚以后前后顛倒，符合蝌蚪及蛙的方向).

13.2——神經板平坦化，但輪廓不清楚.

13.3——神經板具备显着的輪廓，前一頂面观. 13.4——同，頂面观，胚体略伸長. 13.5——同，側面观.

13.6——神經板呈明显的屏扇狀，前寬后狹，中部稍收縮.

14.1——神經板的边緣有突起的神經褶，頂面观.

14.2——同上，斜側面观，前腹側显出感覺板的分化.

14.3,14.4,14.5至14.6——典型神經溝，同一胚体的頂面，前面，后面及側面观，順次表示神經褶的前寬后狹，明显的感覺板，原口裂縫的卽將成为神經原腸管的一部分及胚体的再度伸長.

15.1,15.2,15.3及15.4——神經褶趋併攏，前二为斜側面观，头腹間無凹陷，后二为頂面观，显出头及軀体的分化，並見鰓板的原基.

16.1,16.2及16.3——神經管形成，吸盤已显，胚体伸長，头和軀体有明显的区划.

17.1,17.2,17.3及17.4——尾芽期的側面观、背面观、腹面观及斜腹面观，可見視囊凸起，鰓板分化出鰓阜及鰓溝、体节的影跡，显著的吸盤，及肛窩等，以上皆放大16X.

18.1,18.2及18.3——肌肉效应期的側面观，背面观及斜腹面观尾向上翹、嗅窩显著. 放大16X.

19.1,19 2及19.3——心跳期的側面观，背面观及斜腹面观，有兩对鰓芽，尾平伸. 放大13X.

20.1,20.2及20.3——鰓血循环期的側面观，背面观及腹面观，鰓芽分岔为短指狀，吸盤前有明显的口窩. 放大13X.

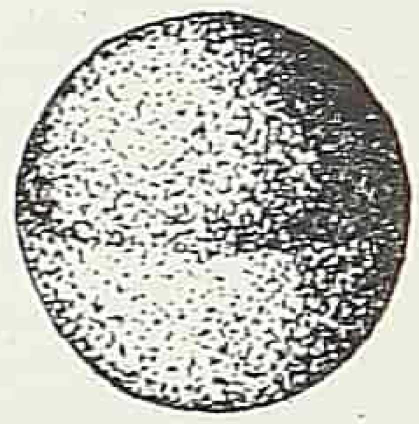
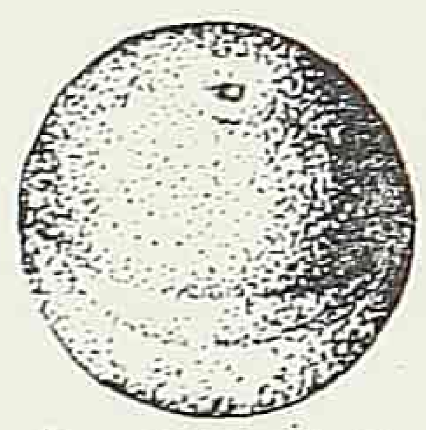
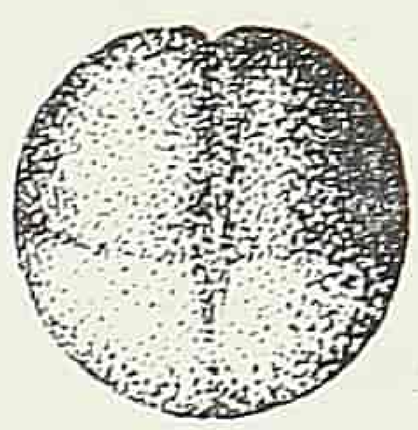
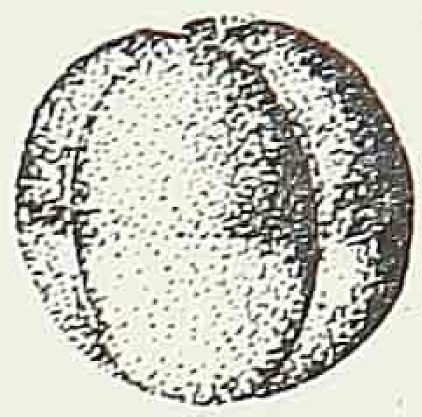
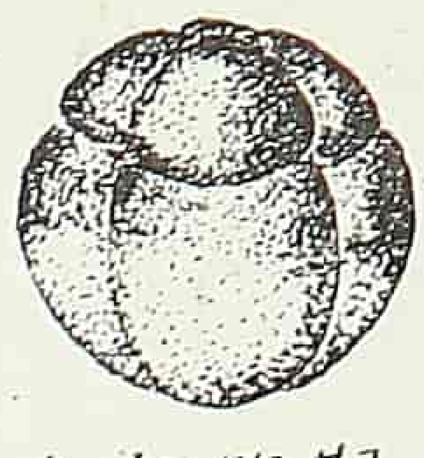
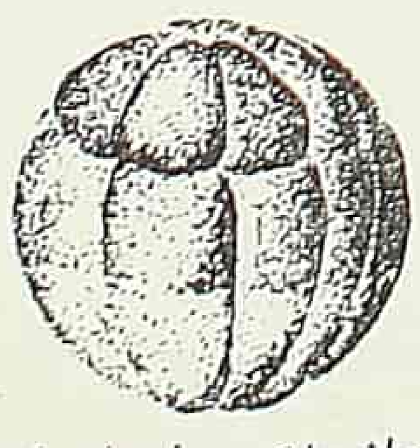
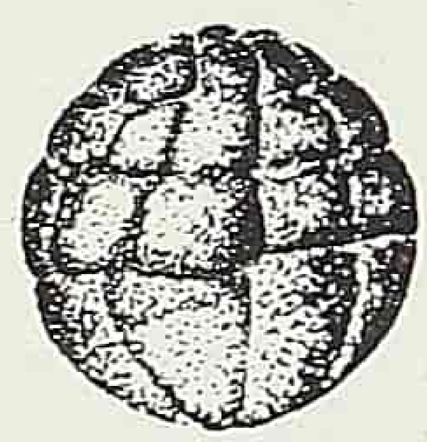
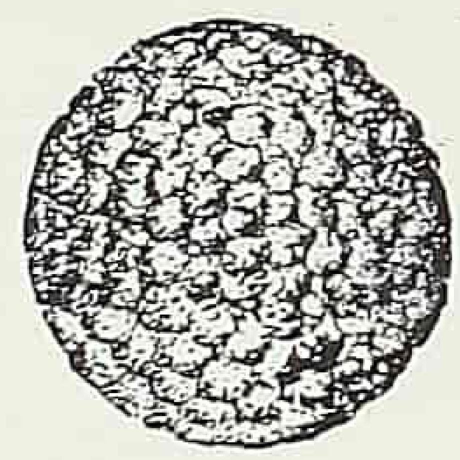
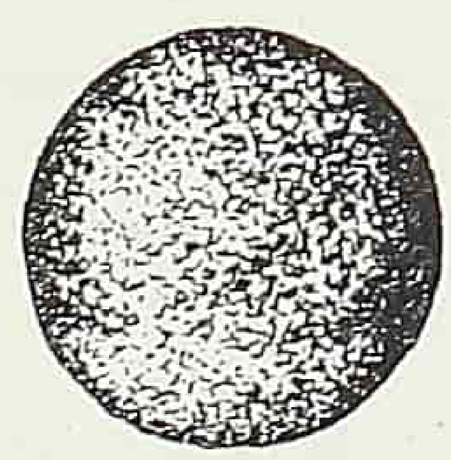
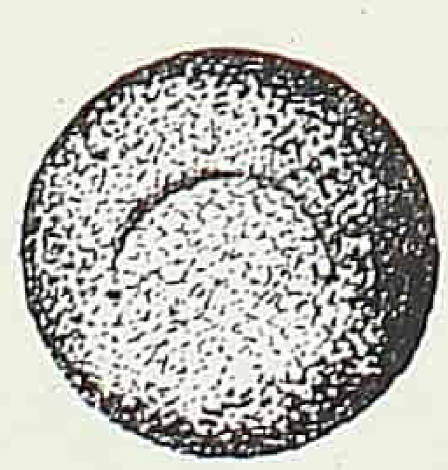
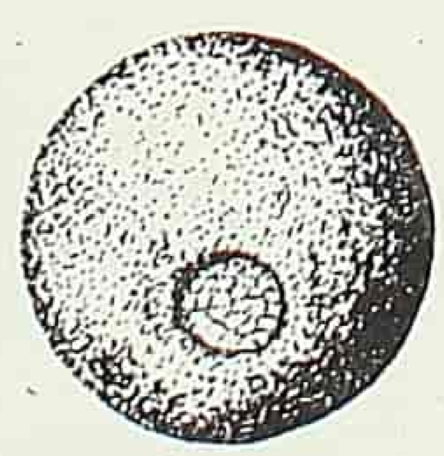
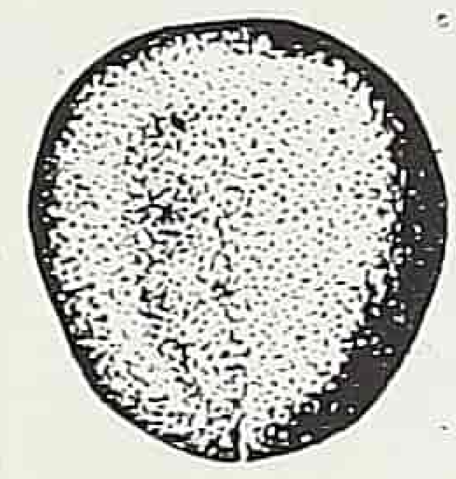
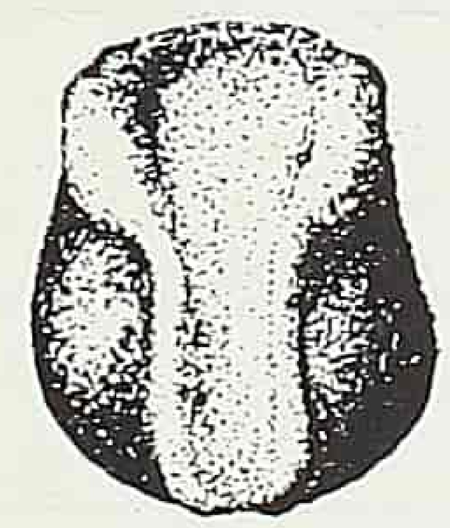
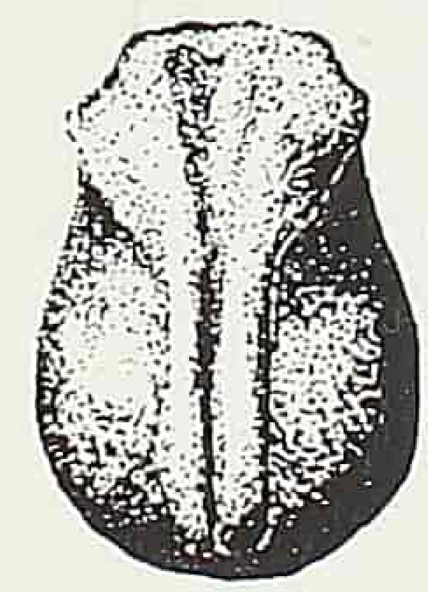
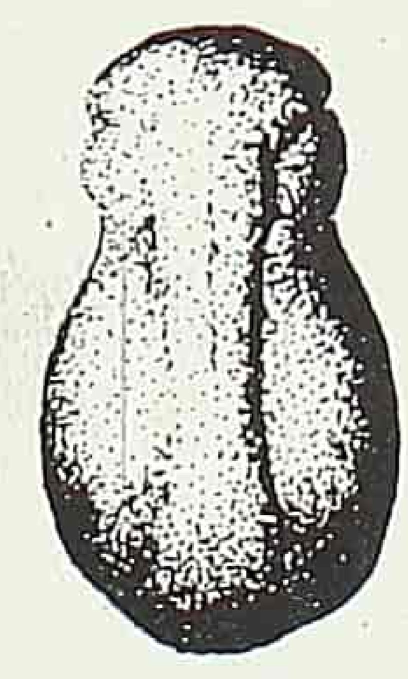
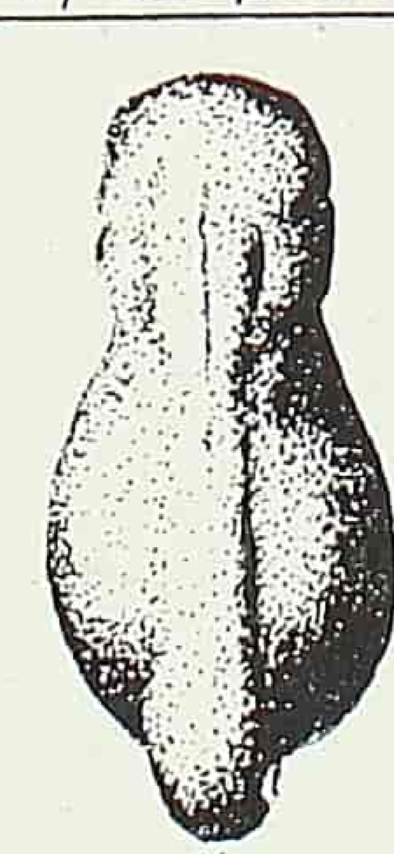
21.1,21.2及21.3——开口期的側面观，背面观及腹面观，因为角膜及身体表皮的透明化而显示出黑的視环和"人"字形的体节. 放大約13X.

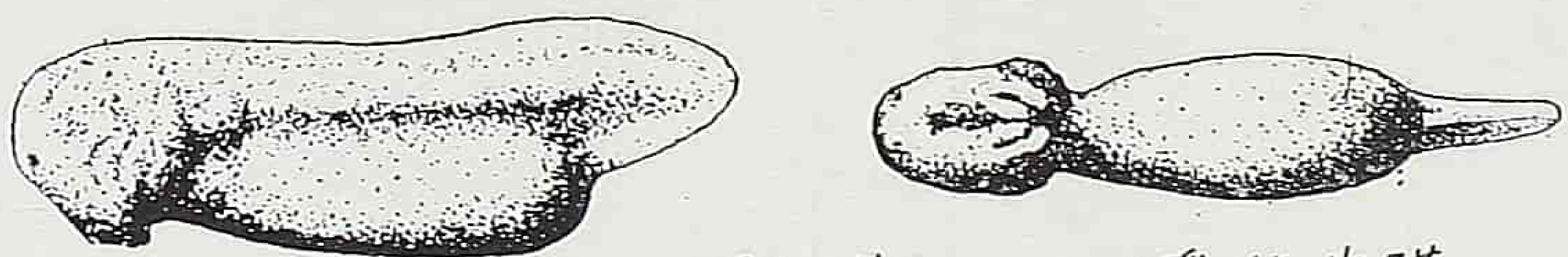
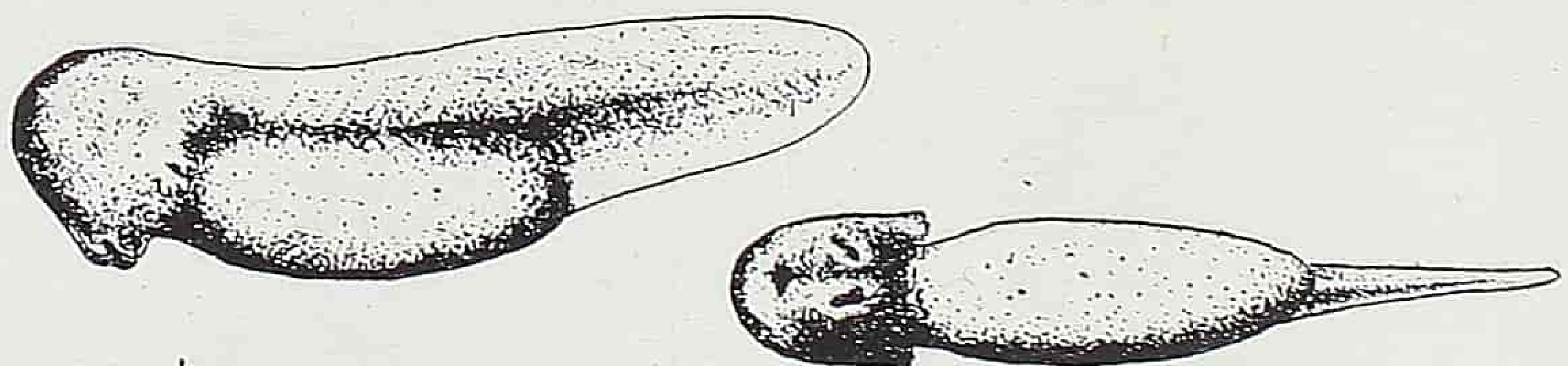
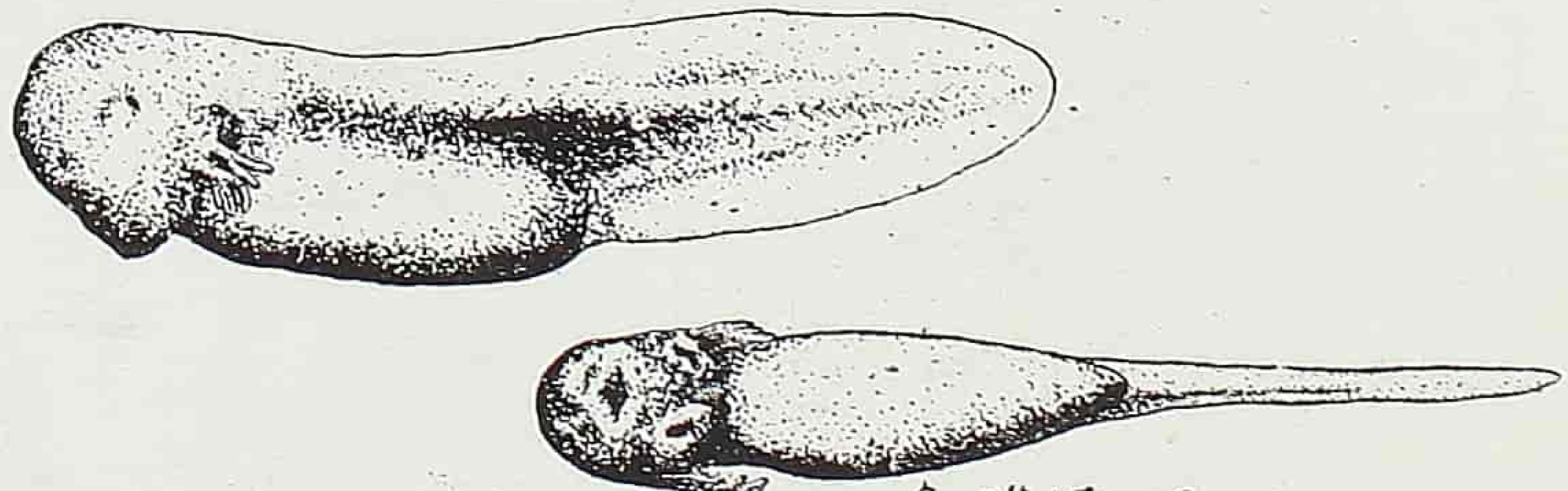
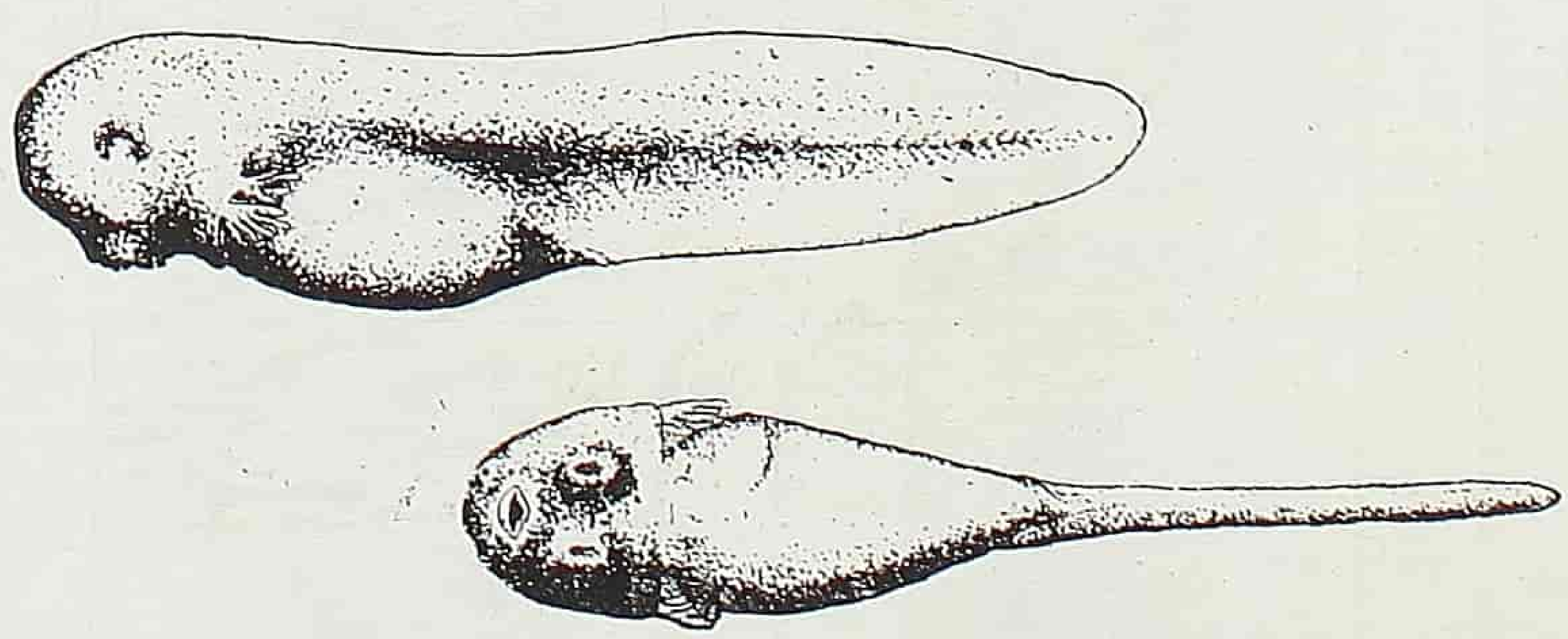
22.1,22.2及22.3——尾血循环期的側面观，腹面观及背面观外鰓發达的高峯. 放大約13X.

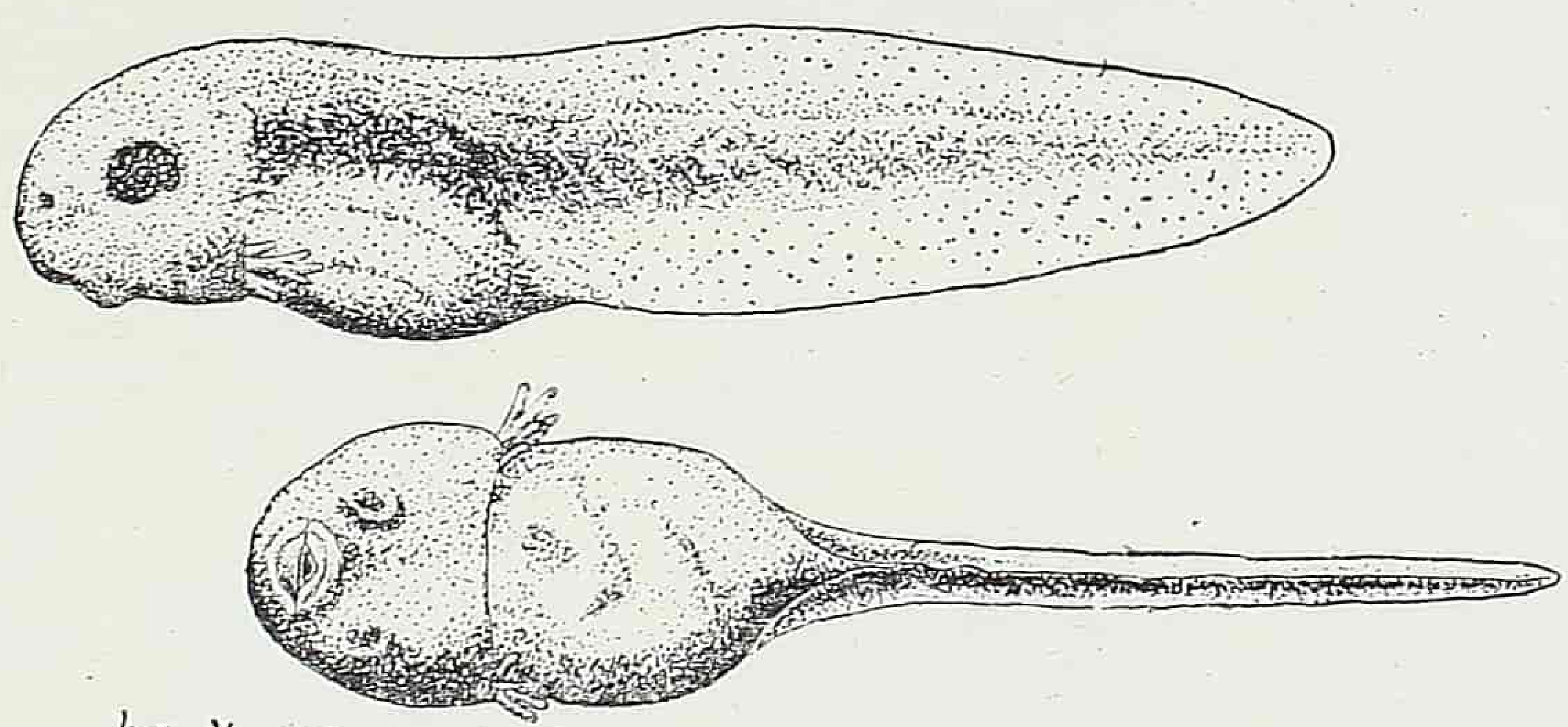
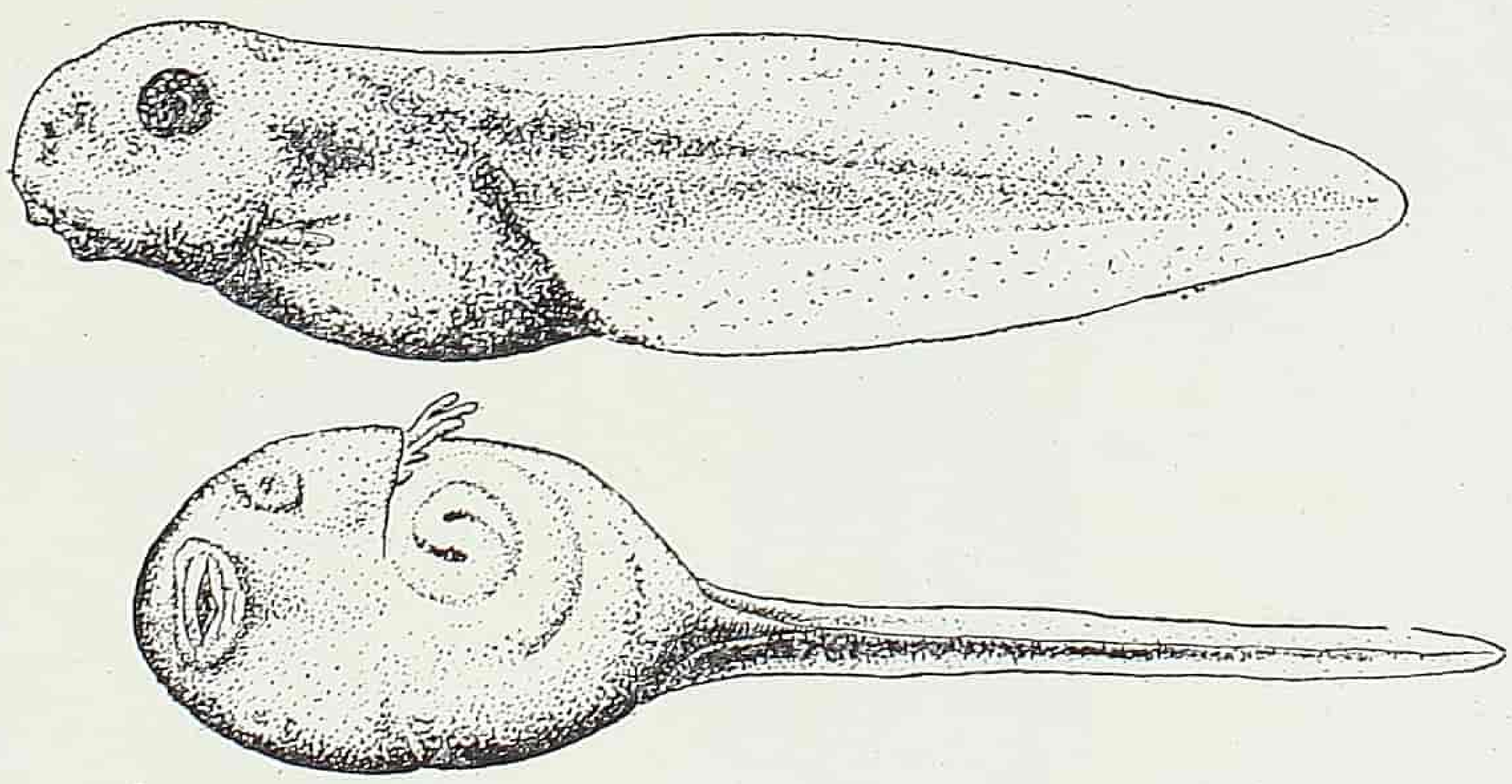
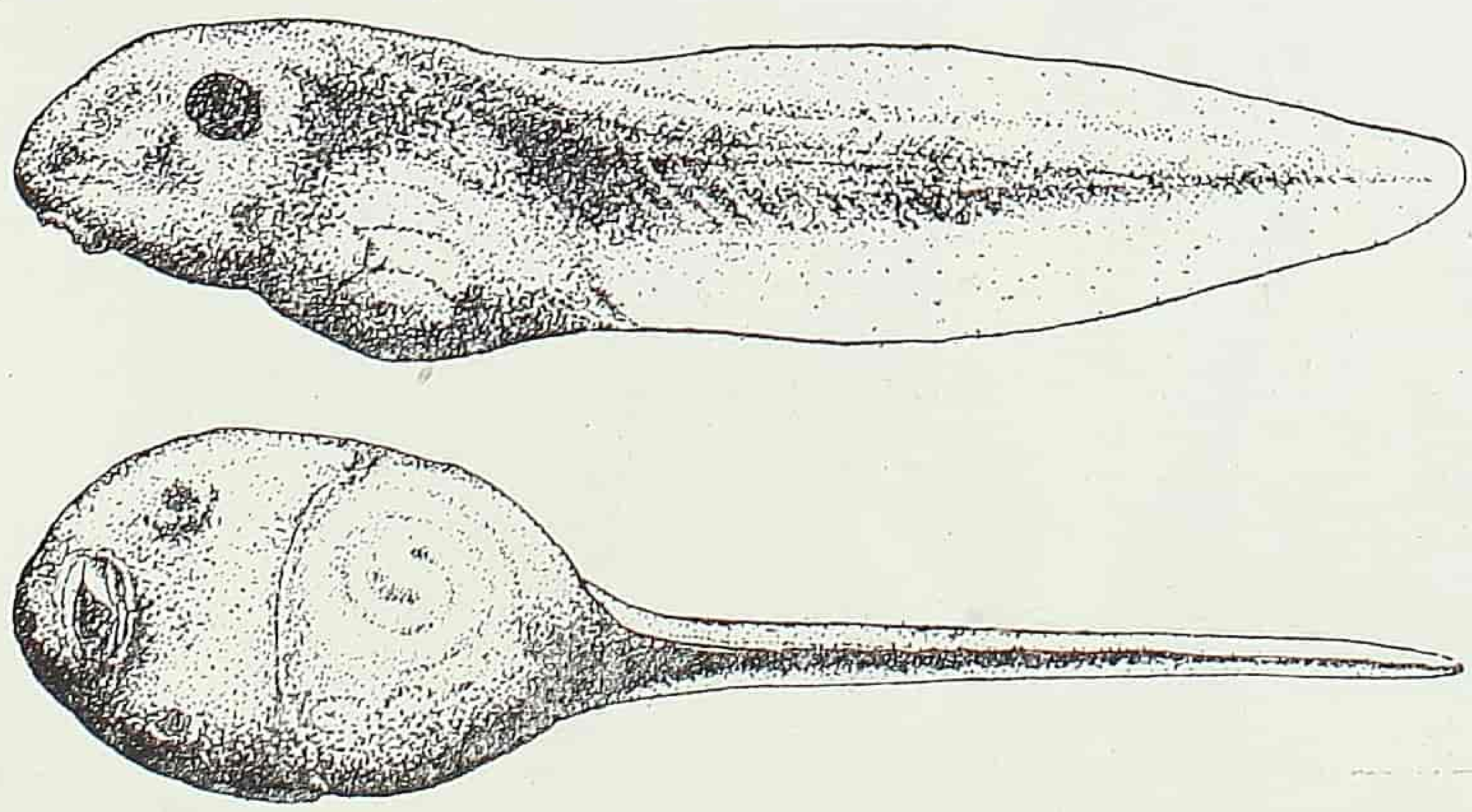
23.1,23.2及23.3——鰓盖褶期的側面观，背面观及腹面观，具备典型的蝌蚪型式，眼虹彩上有反光斑，吸盤退化，腹壁透明，可見腸管的变曲，口部有唇及乳突. 放大約13X.

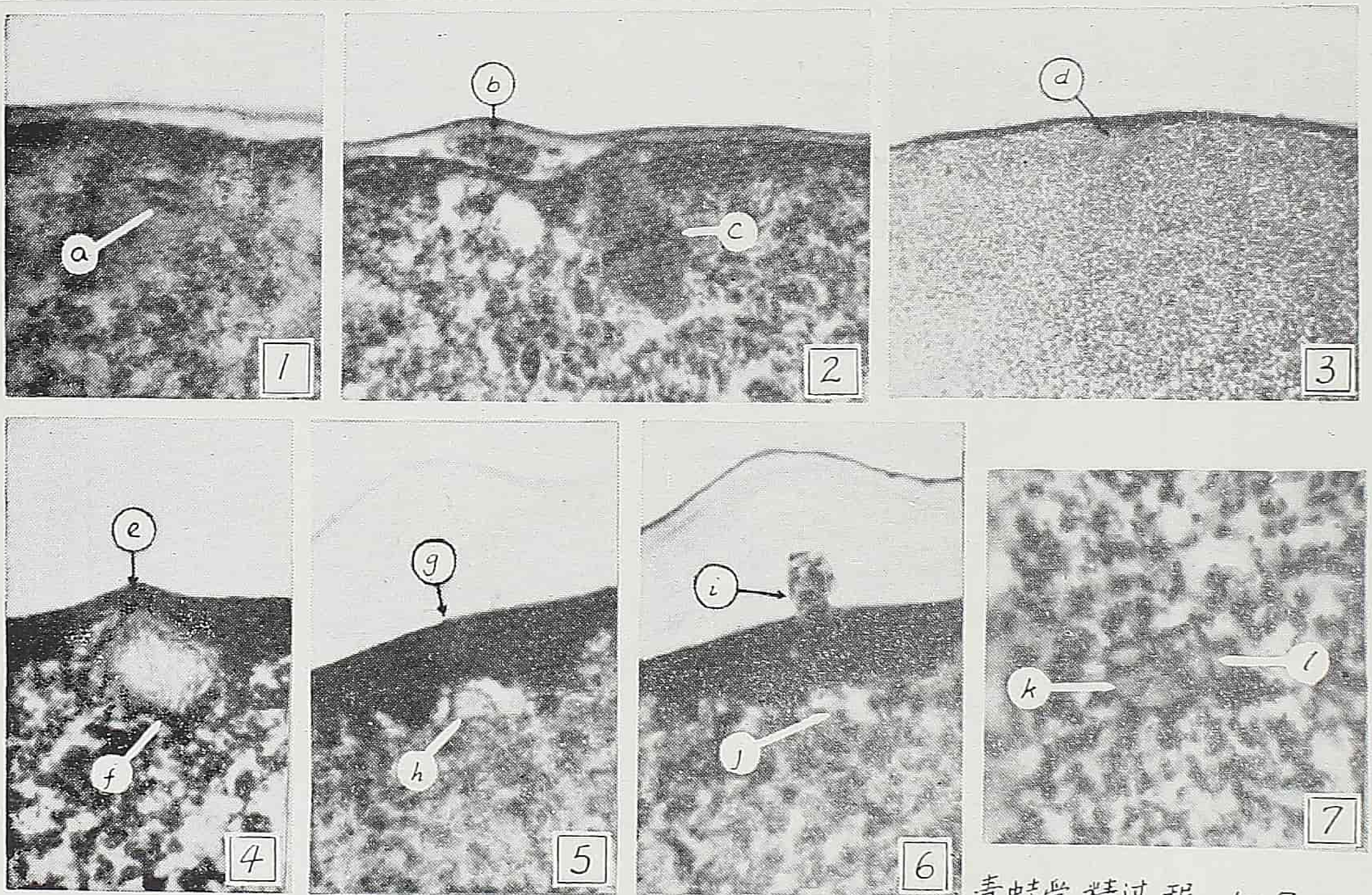
24.1,24.2及24.3——鰓盖右側閉合期的側面观，背面观及腹面观，腸管有2—3圈的盤迴. 放大約12X.

25.1,25.2及25.3——鰓盖完成期的側面观，背面观及腹面观，身体左側腰部有出水孔，放大約12X.

阶段序数	时龄 18°C	
1		 未受精卵
2	0	 受精卵 卵軸正位.3小时 ·灰色新月 1小时
3	3	 二细胞期
4	4	 四细胞期
5	5	 八细胞期
6	6	 十六细胞期
7	6.5	 卅二细胞期
8	15	 粗束胚期
9	19	 细束胚期
10	24	 原腸胚早期
11	30	 原腸胚中期
12	37	 原腸胚晚期
13	47	 神經板期
14	54	 神經褶期
15	60	 纤毛动作期
16	67	 神經管期
17	75	 尾芽期

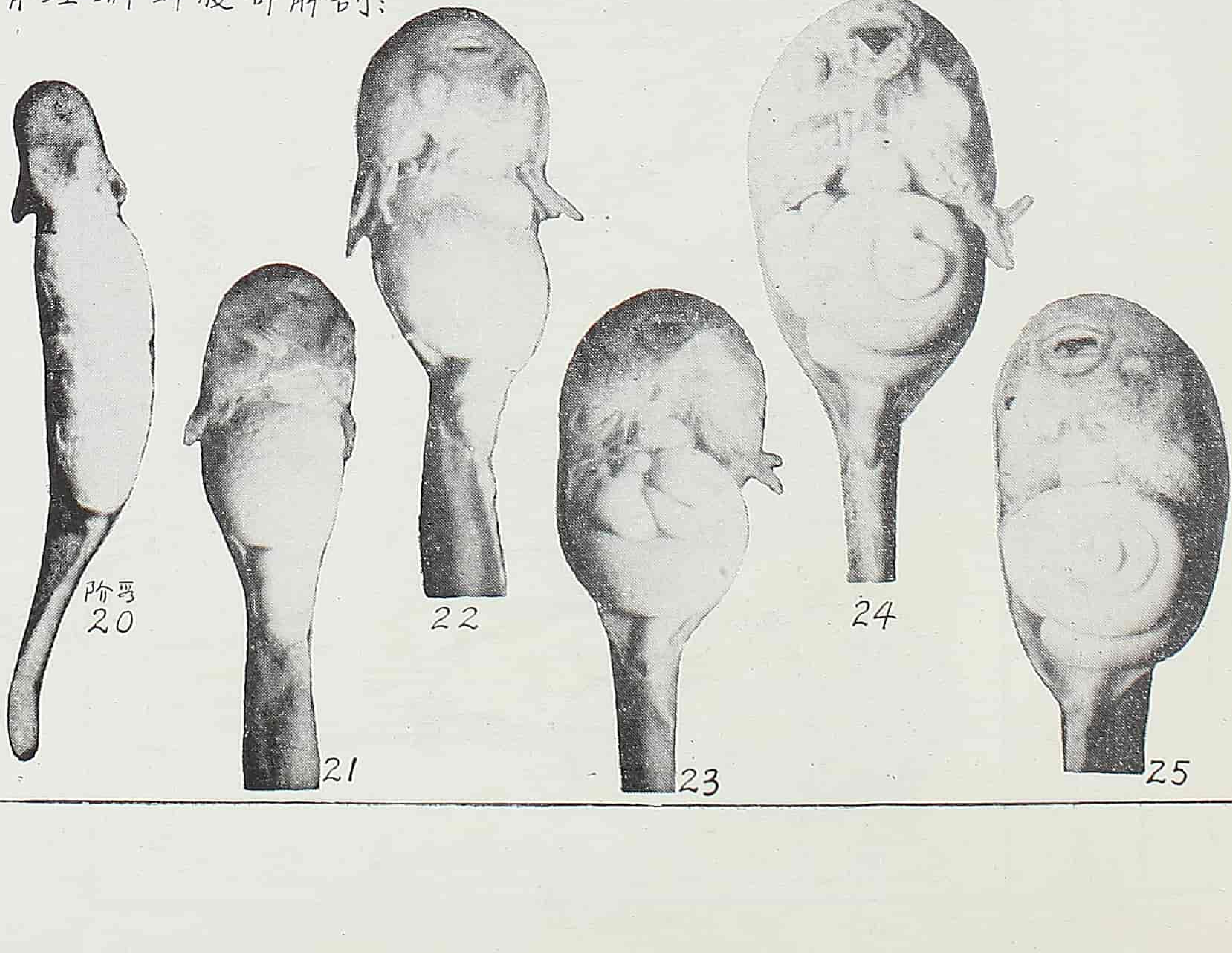
阶段序数	时龄, 18°C	体長（毫米）	
18	99	4	 肌肉效应期
19	120	5+	 心跳期　孵化出膜
20	139	6	 鰓血循环期
21	164	7	 开口期　角膜透明
22	193	8+	 尾血循环期

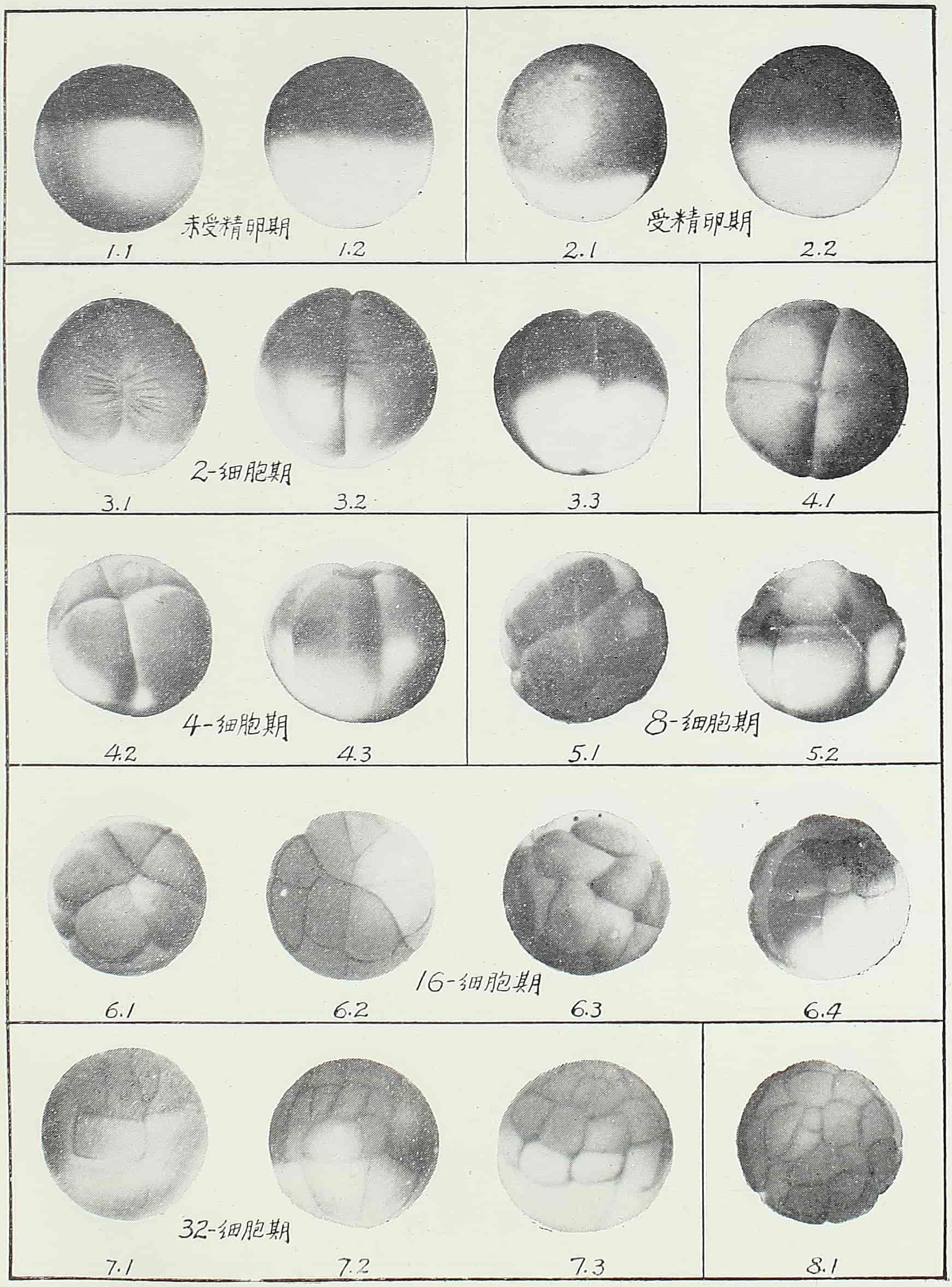
阶段序数	时龄 18°C	体長（毫米）	
23	239	9	 鳃盖褶期
24	265	10	 鳃盖右侧闭合期
25	307	105	 鳃盖完成期

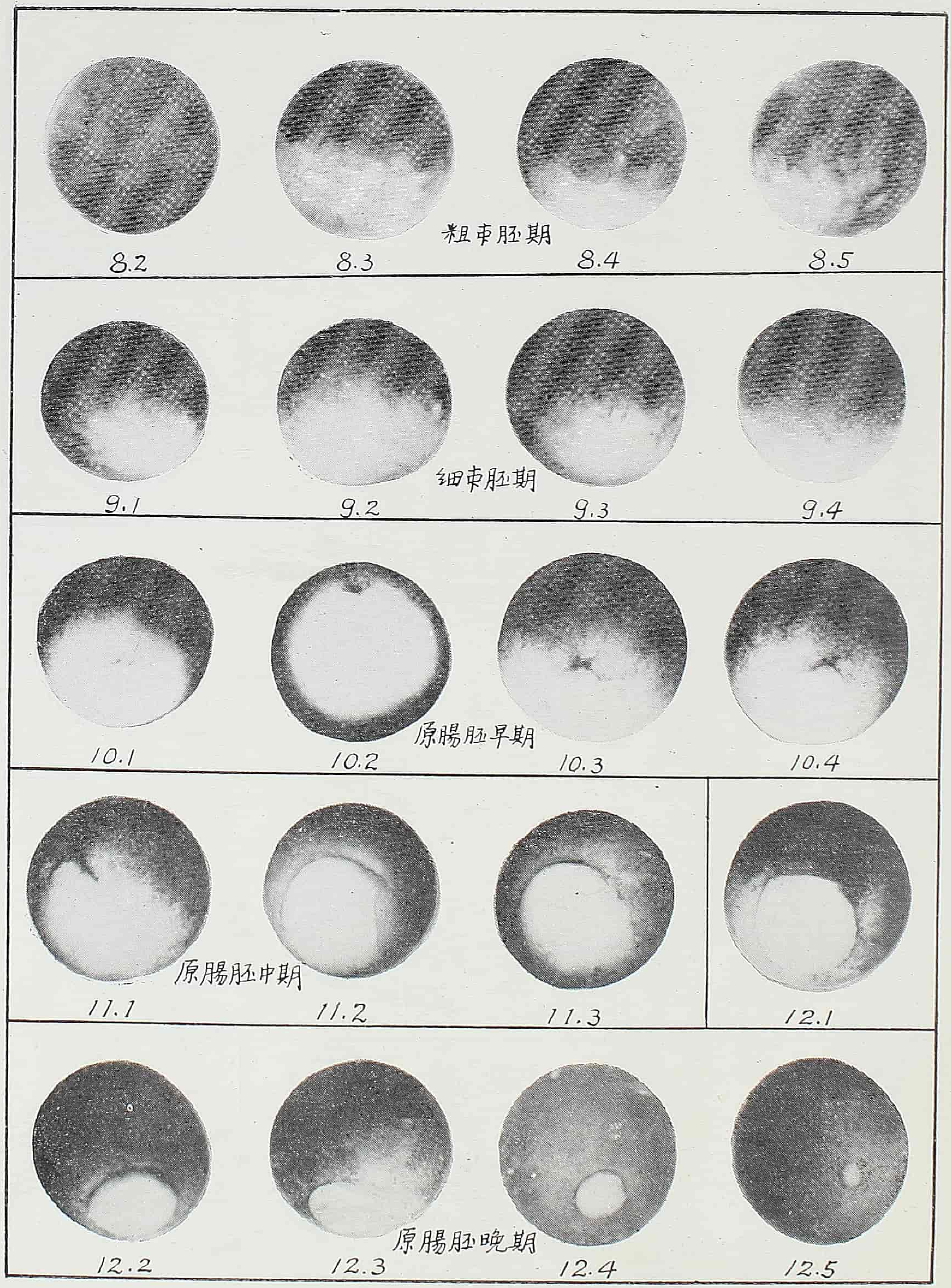


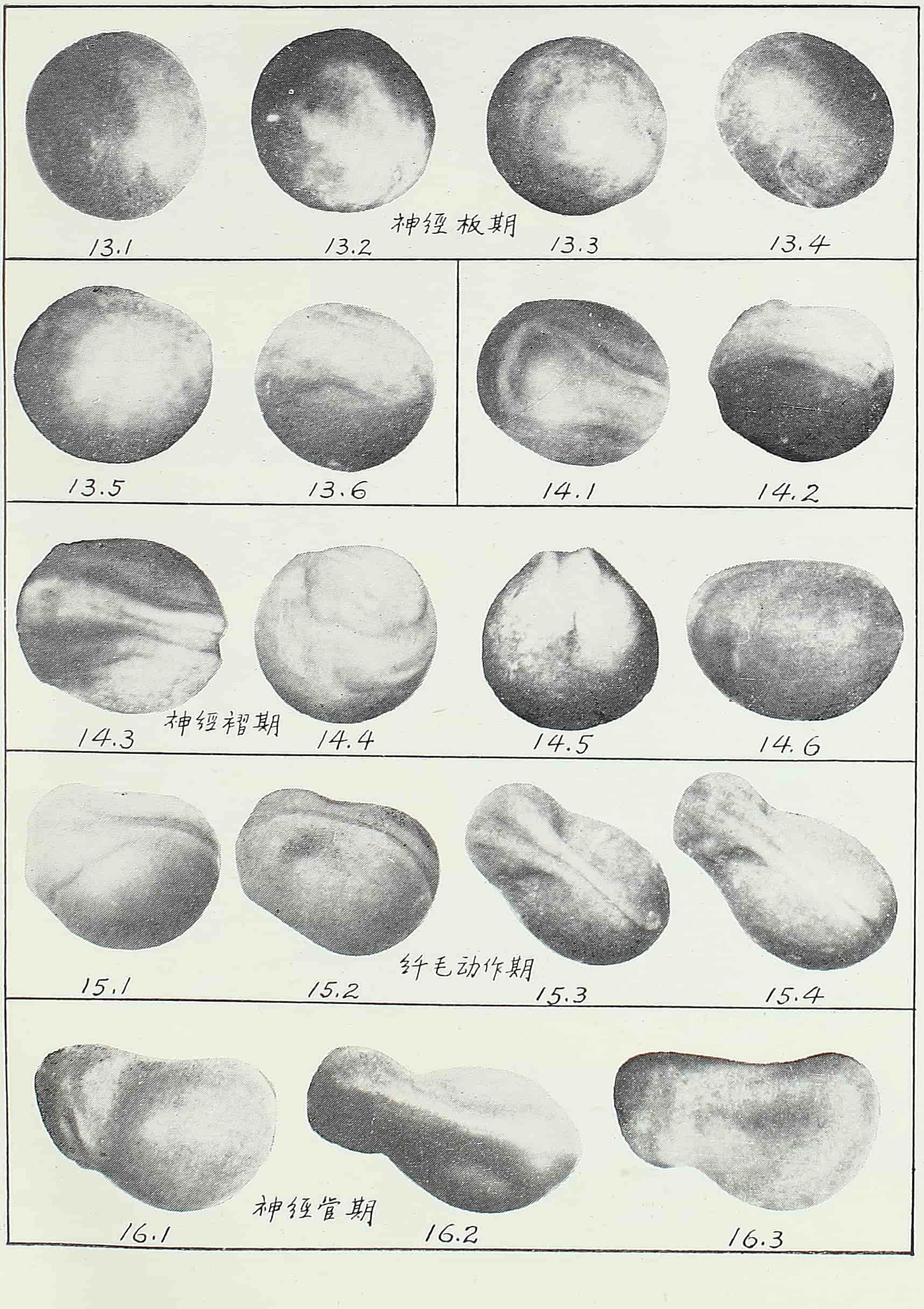
青蛙受精过程：1－7.

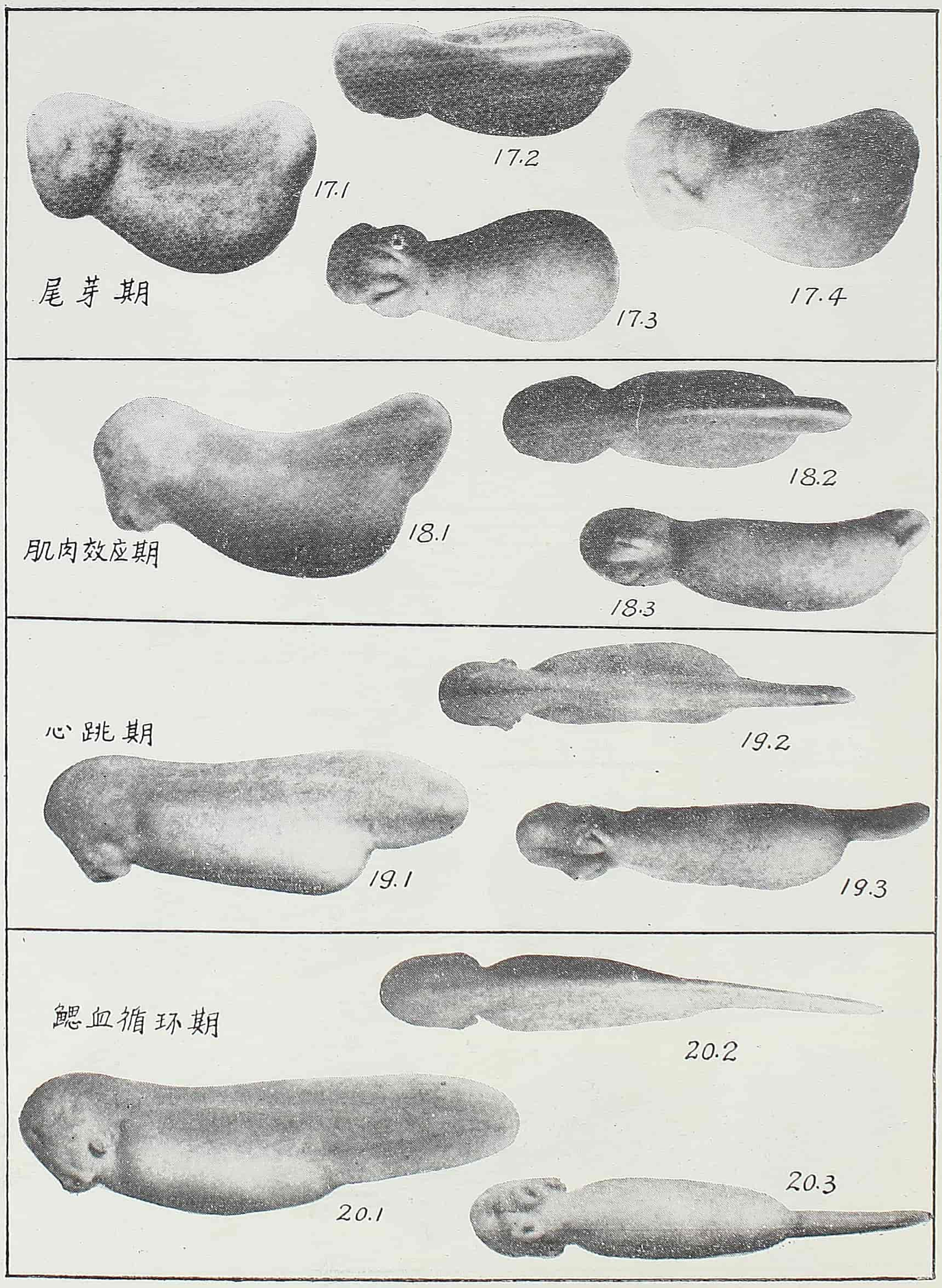
青蛙蝌蚪腹部解剖：

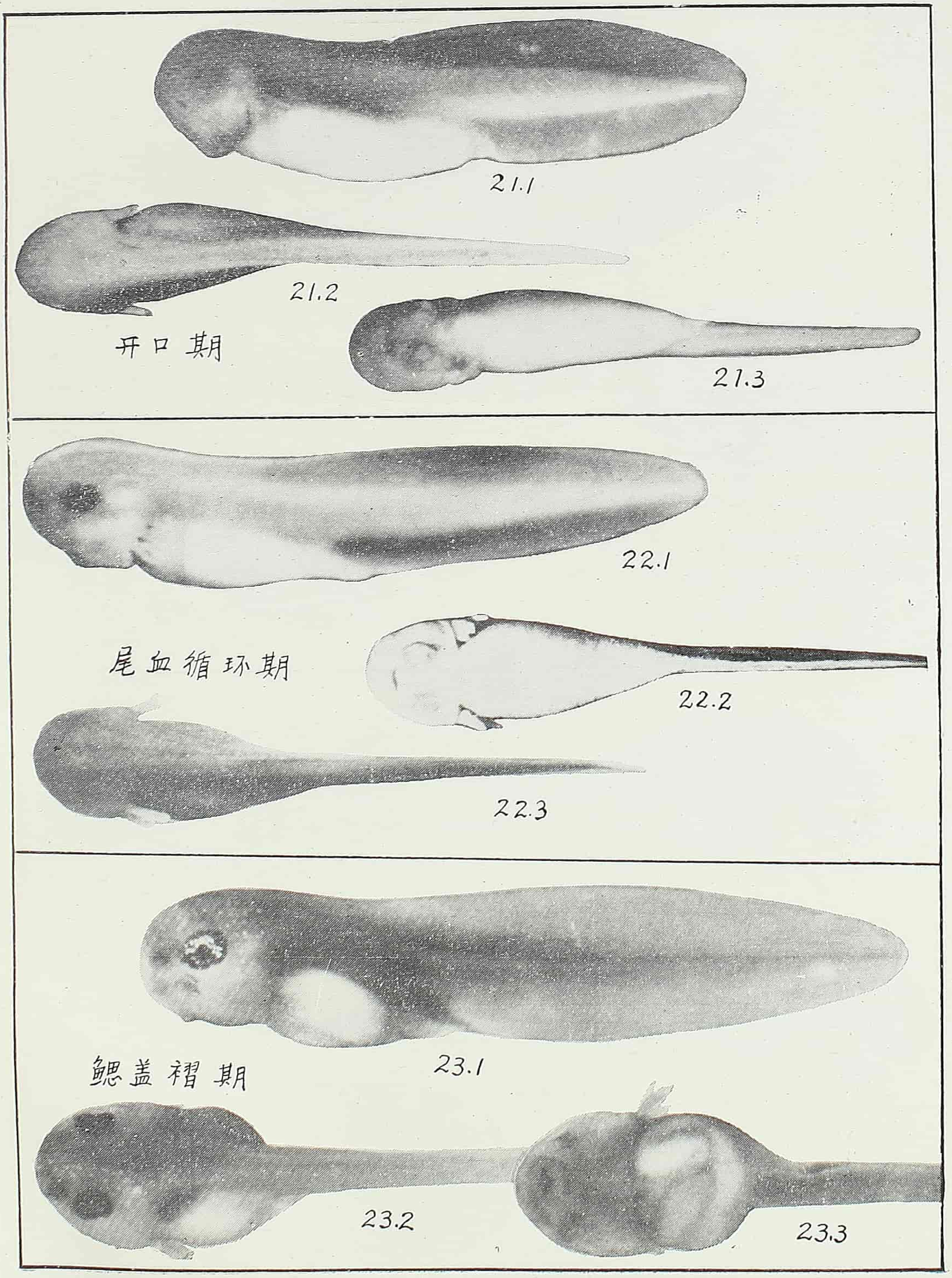


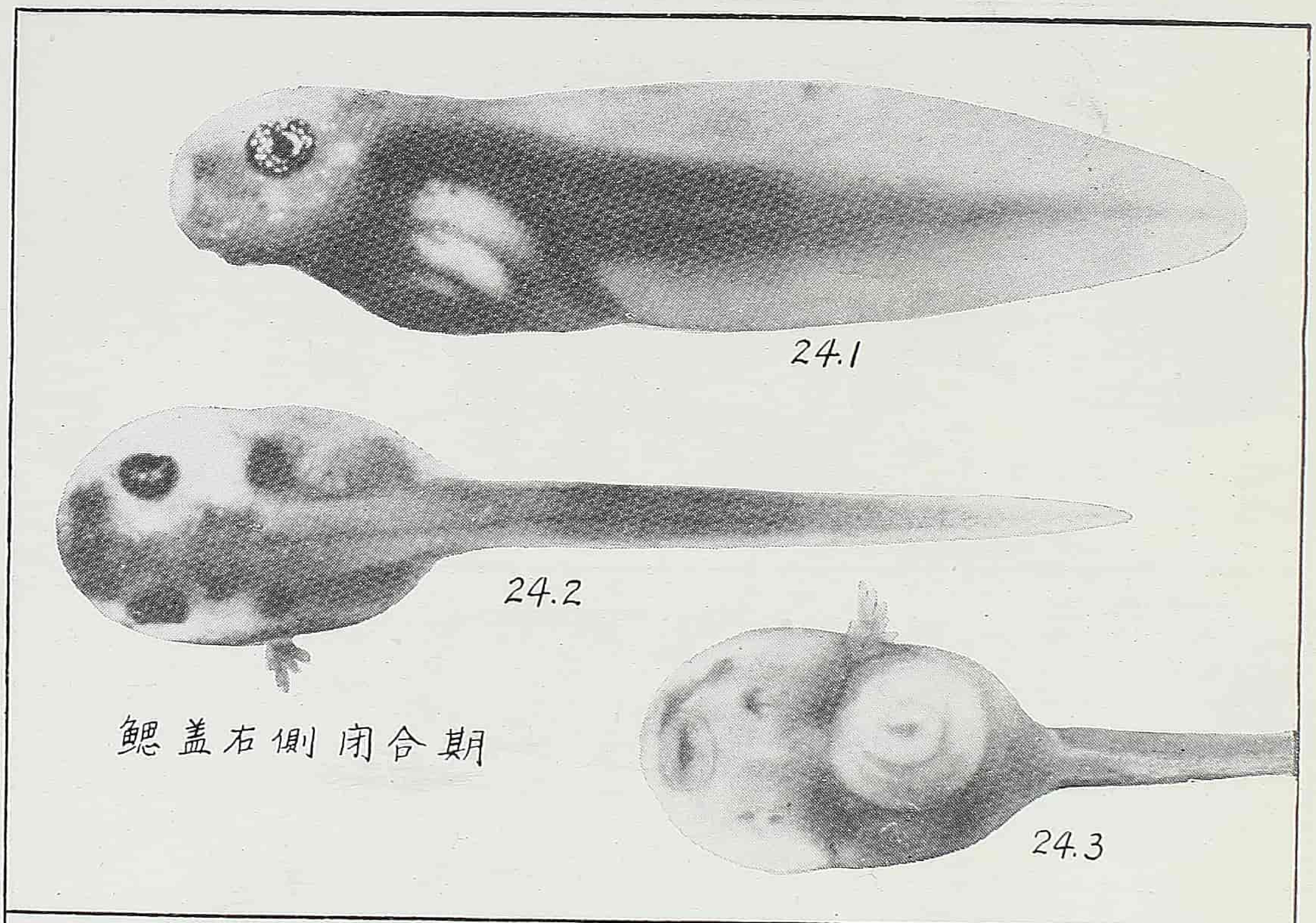

未受精卵期
1.1
1.2
受精卵期
2.1
2.2
2-细胞期
3.1
3.2
3.3
4.1
4-细胞期
4.2
4.3
8-细胞期
5.1
5.2
16-细胞期
6.1
6.2
6.3
6.4
32-细胞期
7.1
7.2
7.3
8.1

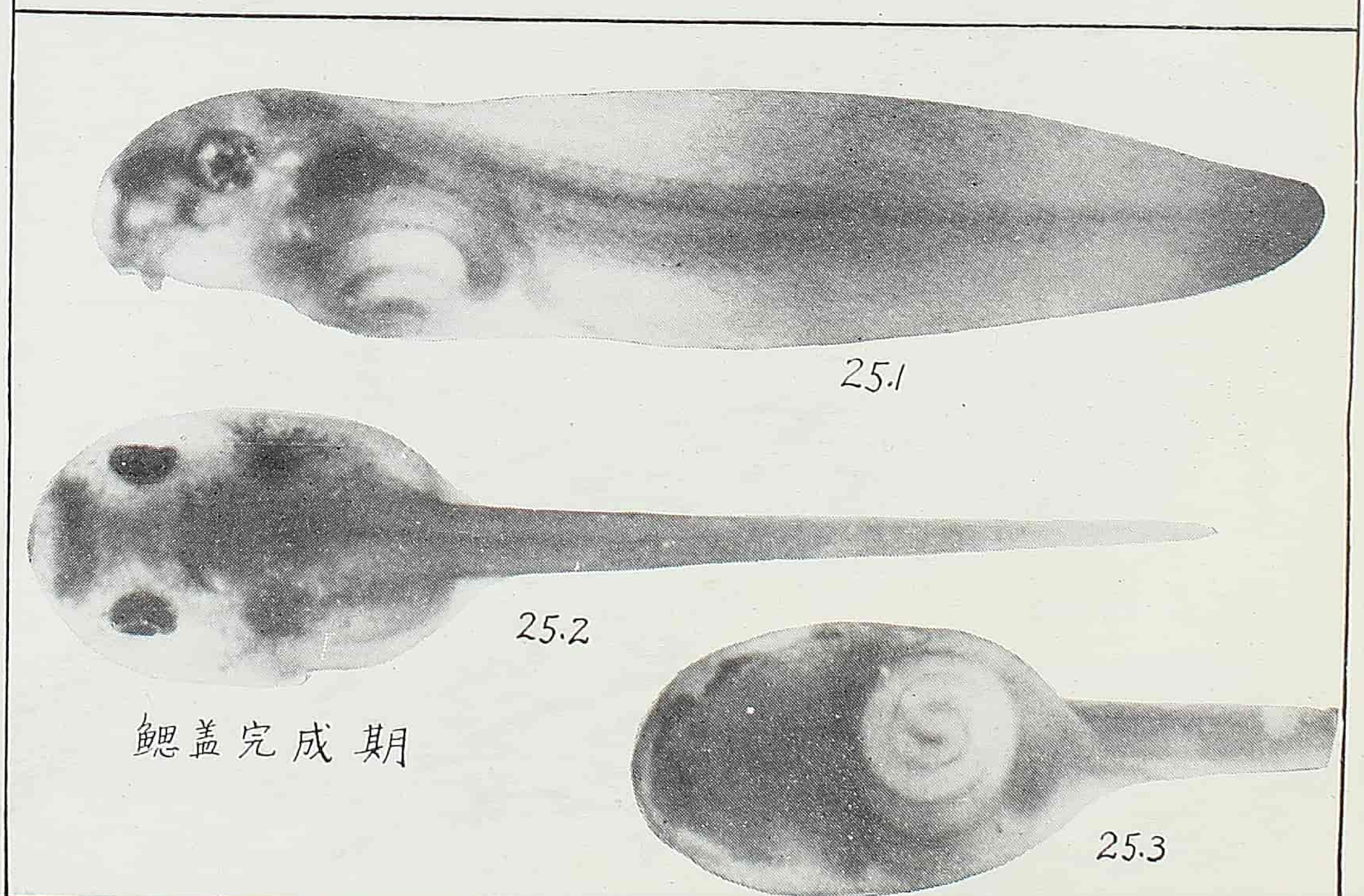

粗束胚期
8.2
8.3
8.4
8.5
细束胚期
9.1
9.2
9.3
9.4
原腸胚早期
10.1
10.2
10.3
10.4
原腸胚中期
11.1
11.2
11.3
12.1
原腸胚晚期
12.2
12.3
12.4
12.5


神經板期
13.1
13.2
13.3
13.4
13.5
13.6
14.1
14.2
神經褶期
14.3
14.4
14.5
14.6
纤毛动作期
15.1
15.2
15.3
15.4
神經管期
16.1
16.2
16.3


17.1
17.2
17.3
17.4
尾芽期
18.1
18.2
18.3
肌肉效应期
19.1
19.2
19.3
心跳期
20.1
20.2
20.3
鳃血循环期


21.1
21.2
开口期
21.3
22.1
尾血循环期
22.2
22.3
23.1
鳃盖褶期
23.2
23.3


24.1
24.2
鰓盖右側闭合期
24.3


25.1
25.2
鰓盖完成期
25.3

刺猬冬眠时与禁食時体重及器官重量的改变*

趙以炳　叶甲壬**　陈瑞新

（生物学系人体及动物生理学教研室）

許多变温哺乳动物在長时冬眠期內不貯存任何食物，因而必須完全禁食．在此情况下研究其体重与个别器官重量的改变可揭示冬眠时代謝过程的某些特征，这是冬眠生理学的一个重要問題，很早以来便引起了生理学家的極大兴趣与注意．更多的生理科学工作者广泛地研究了各种动物和人在禁食时体重与器官重量的改变．关於这些方面的文献是非常之多的，綜合性报道可参考 Morgulis[1], Jackson[2], Ferdmann 与 Feinschmidt [3], Kayser[4], Lyman 与 Chatfield[5], Eisentraut [6]等氏的專著．在本工作中我們研究了刺猬冬眠时的体重耗損並和实驗禁食时的体重耗損进行比較，亦即比較冬眠与禁食的一般代謝情况．我們也研究了刺猬冬眠时器官重量的改变，从而对冬眠时主要能量来源为脂肪組織这一結論提出了补充証明，並确定刺猬皮下脂肪的代謝具有極大易变性的特征．从比較生理学的角度来看，本报告所提供的資料是有意义的，因为各种哺乳动物的冬眠各不相同，甚至在同一綱內的各科也並不完全相同[7]．

实驗部分

冬眠时体重耗損　刺猬的冬眠季节，在北京的露天生活条件下，一般自 10 月初开始至次年 3 月底終止[8]．如果在冬眠初期（11 月，少数刺猬尚未入眠並可得到所供給的食物）和在冬眠末期（3 月，少数刺猬已出眠但尚未得到食物）分别測定許多刺猬的体重，可估計冬眠期內体重耗損的大概情况．在表 1 內列举了 4 系列这类观察的結果．根据 86 只刺猬的結果，（其中 91% 的动物在冬眠初期体重为 500—1000克，最大变动范圍为300—1200 克），經过 100—153 日冬眠后，平均体重耗損量的近似値为每日 1.13 克，或每公斤体重每日 1.50 克．

表 1　刺猬冬眠时体重耗損率的近似估計

冬眠季节	动物数	冬眠日数	平均体重耗損率	
			克/日	克/日/公斤
1948—1949	10	143	0.93	1.39
1949—1950	11	110—117	1.13	1.51
1950—1951	27	132—153	1.06	1.28
1956—1957	38	100—115	1.24	1.69
	86		1.13	1.50

* 1957 年 9 月 29 日收到．

** 通信地址：重庆小龙坎 2102 箱 16 号．

在不間断的深眠期內(11月中至3月中平均气温为$-1.6°$[8])，可以更精确地測定刺猬冬眠时体重耗損．1949—1950年和1950—1951年的冬眠季节，曾用兩系列共9只刺猬进行此項研究，結果見表2．这些刺猬分別飼养在兩个用大孔鉄絲網圍繞的亭內，其中堆有大量稻草，刺猬藏在草堆內冬眠，一般环境情况是非常接近自然生活条件的．自11月11日起，这些刺猬卽已进入基本深眠狀态(皮膚溫度一般在7°以下)，乃將所有食物移出亭外．为慎重起見，曾在F系列刺猬的場合，自11月11日至15日內每日測定体重一次，直至最后数日体重基本恆定为止，此后卽不再加以任何干扰而任其冬眠．$3^1/_2$月后，卽次年3月初，再測定体重一次，此时全部动物仍在深眠狀态，F系列4只刺猬的皮膚溫度为1.5—2.5°，H系列5只刺猬的皮膚溫度为0.3—0.7°．这兩系列刺猬在106—107日的自然冬眠期內，平均每日体重減少1.04克，或每公斤体重每日1.37克．上述近似估計的結果比这些更精确的数值仅約大10%．

表2　刺猬在長期深眠狀态下的体重耗損率

刺猬編号	冬眠日数	体重(克)		体重耗損率	
		冬眠初	冬眠末	克/日	克/日/公斤
F108♀	106	752	631	1.14	1.52
F 36♀	106	811	685	1.22	1.47
F 88♂	106	846	758	0.83	0.98
F 98♂	106	875	710	1.56	1.78
H 74♀	107	569	494	0.70	1.23
H 97♂	107	652	544	1.01	1.55
H139♂	107	699	606	0.87	1.24
H 96♂	107	714	611	0.96	1.35
H141♂	107	914	798	1.08	1.19
平均		759	649	1.04	1.37

禁食时体重耗損　1949—1950年冬眠季节，与研究刺猬在室外冬眠狀态下体重耗損的同时(表1与表2)，曾在保持平均25—28°高溫的实驗室內[9]用刺猬$D12$, $D32$与$F2$进行禁食实驗，作为冬眠組动物的对照．后来又在非冬眠季节(6—9月)用$F2$, $G17$等刺猬进行禁食实驗(見表3)．

在非冬眠狀态下禁食对於刺猬可能产生严重的影响[10]，並且对不同刺猬其影响也很不相同，这和动物的肥胖程度或营养狀況有密切关系．对於中等大小(体重500—800克)和更幼小的刺猬，一般禁食1—2日后体溫卽开始下降，常常接近外界气溫水平，数日后动物死亡(表3)．对於肥胖(如$G17$)与極肥胖的刺猬(如$F2$)，禁食期可延長至20余日，但$F2$在禁食后期仍不免出現輕度的体溫过低(直腸溫度在32.5°以下)，而$G17$則在結束为期23日的禁食实驗后迅速死亡．唯有在$D32$的特殊場合，長达31日禁食並未引起任何不良影响．$D32$是一只極肥胖的刺猬，禁食前一个月內平均体重为1404克(每日变动范圍为1356—1458克)，平均直腸溫度为35.2°(每日变动范圍为32.8—36.1°)．在全部31日禁食期內，$D32$始終保持健康活潑狀态，平均直腸溫度为34.7°(变动范圍33.9—35.5°)，比对照期內体溫仅低0.5°．自1月28日(禁食12日)以后，$D32$並呈現强烈的性活动，几乎每当將雌刺猬引入其籠內时卽开始追逐，並伴有生殖器官的勃起．禁食实驗結

束后亦未出現任何不良后果.

表 3　刺猬禁食时的体重耗損率

刺猬編号	禁食期	"初期" 日	"中期" 日	体重(克) "中期"初	体重(克) "中期"末	体重耗損率 克/日	体重耗損率 克/日/公斤	备註
D 32♂	1月16—2月16	2	29	1323	978	11.9	9.0	
F 2♂	2月16—3月9	2	19	1288	1072	11.4	8.8	
G 17♂	6月23—7月16	1	22	1068	736	15.1	14.1	7月20日死亡
D 12♀	1月16—21	2	3	1031	993	12.7	12.3	
F 2♂	7月1—12	2	9	1006	888	13.1	13.0	
F 88♂	6月23—30	1	6	622	493	21.5	34.6	8月20日死亡
F 96♂	9月7—13	1	3	519	475	14.7	28.3	9月13日死亡
F 97♂	9月7—13	1	5	506	437	14.2	28.0	10月 8 日死亡
F 95♂	9月7—13	0	2	269	240	14.5	53.9	9月16日死亡

禁食的主要影响为体重的繼續下降. 在禁食期内刺猬体重的降低大致可分为三个相繼出現的时期. 禁食"初期" 1—2 日内, 体重迅速減少, 显然和消化道的排空有关. 繼而出現一个体重成直線地下降的"中期"(見圖 1). 最后在禁食"末期", 当体温下降至气温的水平时, 体重降低則趋向緩慢, 終於导致死亡.

在体重成直線地下降的"中期"内, 如果按一般慣例以每公斤体重为單位計算每日耗損量, 則体重耗損率与"中期"初的体重有密切关系. 如表 3 的数据所示, "中期"初体重 1,300 克左右最大的刺猬(如 D32 与 F2), 不仅可耐受長期的禁食, 並且体重耗損率最低, 为 9 克/日/公斤. 在另一極端, "中期" 初体重仅 200—300 克最瘦小的刺猬(如 F 95, 未成熟), 体重耗損率最高, 为 54 克/日/公斤. 体重耗損率对"中期"初体重的依从关系在圖 2 中表現得更为明显.

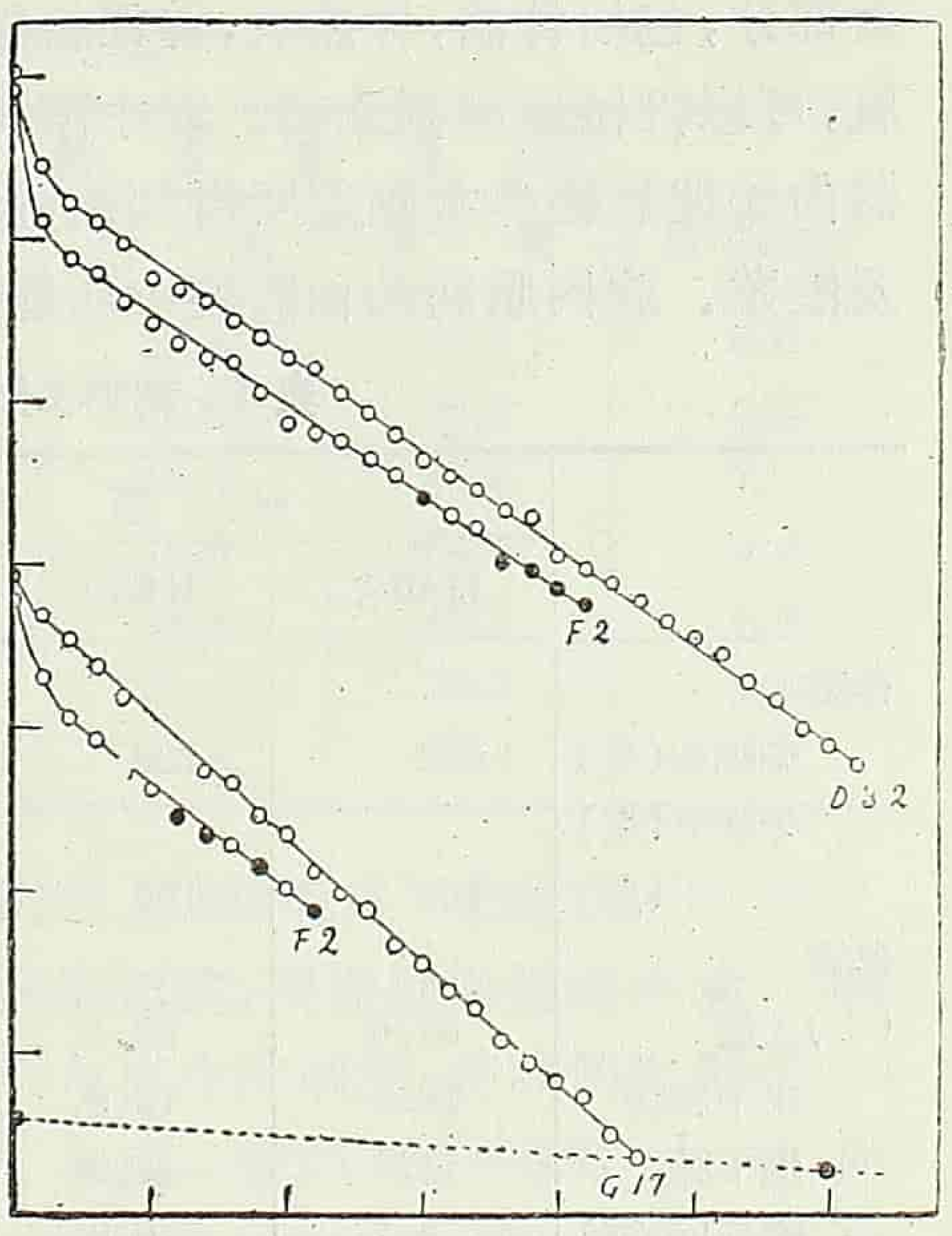


圖 1　刺猬禁食时体重耗損. 黑点表示体温过低. 虛線表示冬眠时体重耗損.

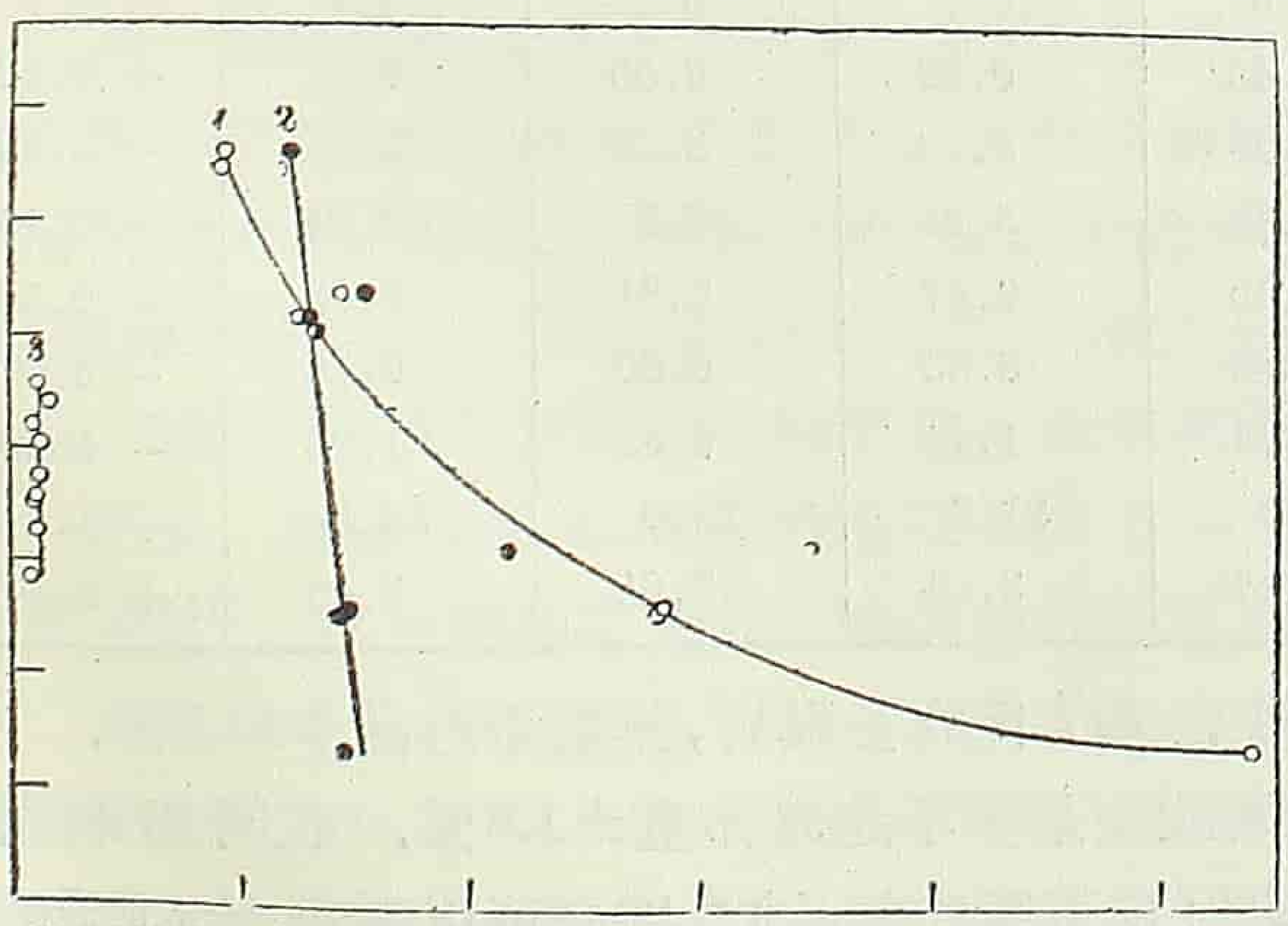


圖 2 刺猬体重耗損率与体重的关系. (1)禁食时: 克/日/公斤. (2)禁食时: 克/日(黑点). (3)冬眠时: 克/日.

如果不考慮刺猬的肥胖程度, 而以动物个体为單位計算每日体重耗損量, 則各只刺猬間的差異很不明显. 由表 3 的数据可見, 除 F88 外, 每日体重耗損量仅仅变动於 11—15 克的狹小范圍内, 平均每日降低 13.5 克, 虽然"中期" 初体重的差異可达 5 倍. 如果將这些数据同样繪入圖 2 內, 則可見每日体重耗損量对

“中期”初体重的依从关系依然存在，但远不如按每公斤体重計算时那样的突出．下面我們將提供一些补充資料，証明刺猬体重的巨大变动主要决定於脂肪的积累量，而脂肪組織本身的代謝是很低的，因此脂肪的积累並不显著地增加整个机体的代謝需要．

冬眠时器官重量的改变　为了确定刺猬冬眠时諸器官重量的改变，曾於1950年11月15日与开始第二系列研究冬眠时体重耗損实驗的同时(見表2)，用 H40 与 H83 兩只經过同样处理的刺猬(即自11月11日起任其禁食冬眠)，进行器官組織的解剖与其重量的測定，按体重百分数計算，作为冬眠初的对照值．1951年3月2日，即冬眠107日后，再用 H91 与 H141 兩只刺猬同样測定其器官重量，但按冬眠初体重百分数計算，並与冬眠初的对照值进行比較，从而求得冬眠后的改变(表4)．如此比較是更为恰当的，因为对照組刺猬与冬眠組刺猬在冬眠初的一般情况和体重都大致相同．

表4中所列举的諸器官組織大致可分为三类：(1)皮膚，包括皮下脂肪，皮下肌，剛刺等；(2)內臟，其中某些个別器官的重量也曾經分别測定；(3)軀幹，即剝皮並去內臟后的剩余部分，包括骨骼，骨骼肌，神經組織等．刺猬有数量不等的皮下脂肪与非常發达的皮下肌，可以机械地解剖分离．表中剛刺与骨骼的重量为干重，即用碱水煮过与去水並在干燥器內处理后經多次測定所得到的恆定重量．生殖器官包括睪丸，精囊，前列腺，尿道球腺及陰莖．腹內脂肪为由腹腔中所能机械地分离的脂肪組織．

表4　刺猬冬眠前后的器官重量(冬眠初体重百分数)

	对照組			冬眠組			差異
	H40♂	H83♂	平均	H141♂	H96♂	平均	
体重							
冬眠初(克)	854	729	792	914	714	814	
冬眠后(克)				798	611	705	
(%)	100	100	100	87.3	85.6	86.5	－13.5
器官							
(1)皮膚	54.6	52.4	53.5	43.4	41.2	42.3	－11.2
皮下脂肪	19.1	19.8	19.5	11.6	5.5	8.6	－10.9
皮下肌	11.1	10.2	10.7	10.2	8.4	9.3	－ 1.4
剛刺(干重)	5.7	6.8	6.3	6.9	8.9	7.9	＋ 1.6
(2)內臟	14.1	15.9	15·0	13.7	15.0	14.4	－ 0.6
心	0.43	0.47	0.45	0.39	0.55	0.47	＋ 0.02
肝	2.51	3.47	2.99	2.46	3.46	2.96	－ 0.03
胃腸	4.27	4.39	4.33	3.24	3.53	3.39	－ 0.94
腎	0.53	1.17	0.85	0.57	0.81	0.69	－ 0.16
生殖器官	1.06	0.57	0.82	0.83	0.66	0.75	－ 0.07
腹內脂肪	2.47	1.70	2.09	1.44	0.62	1.03	－ 1.06
(3)軀幹	29.6	30.3	30.0	27.9	29.0	28.5	－ 1.5
骨骼(干重)	3.36	3.16	3.26	3.19	3.61	3.40	＋ 0.14

由表4可見，冬眠組刺猬 H141 与 H96 在107日的冬眠后，体重平均減少13.5%．个別器官組織，除皮膚与皮下脂肪外，其重量的改变最多不超过体重±1.6%．在同組刺猬中，同一器官組織的个体差異最高也可达2%(皮下脂肪除外)．因此可以認为，±1.6%的差異是在实驗誤差范圍之內，並無特殊重要意义．非常明显並有重要意义的差異为皮膚

与皮下脂肪重量的改变．冬眠組刺猬的皮膚比对照組減輕 11.2％，佔全部体重耗损量 83％．冬眠組的皮下脂肪比对照組減輕 10.9％佔全部体重耗损量 81％，或全部皮膚耗損量 97％．显而易見，刺猬冬眠时体重耗損主要是由於皮膚重量的減輕，而皮膚重量的減輕又几乎完全是由於皮下脂肪的消耗．这种关系在圖 4 內表現得特別明显．因此必須認为，刺猬冬眠时能量代謝的基質主要是皮下脂肪．

刺猬皮下脂肪的易变性　多年的工作过程中，我們曾經有机会解剖 49 只各种情况的刺猬，並將全部器官如上述分为軀干，內臟与皮膚(包括皮下脂肪)三部分，分別測定其重量(表 5)．这些刺猬的情況有極大的不同，其中有因实驗处理而死亡的和死因不明的，有未成熟的和成熟的，有非常消瘦的和非常肥胖的．解剖时的体重可以作为肥胖程度的大概标誌，皮下脂肪的数量則是更精确的标准．表 5 內所列举的 *B*20 与 *L*29 分別为 49 只刺猬中最瘦小的未成熟动物与最肥大的成年动物，它們的体重和器官重量大致可代表全部数据的个体变动范圍．

表 5　各种刺猬的器官重量(体重百分数)

組　別	数目	体重(克)		器官重量(％)			
		最高时	解剖时	軀幹	內臟	皮膚	皮下脂肪
(1)無皮脂，未成熟	10	160—567	139—259	43.6	20.4	35.3	0.0
(2)無皮脂，成熟	9	738—1035	359—721	41.4	21.8	36.0	0.0
(3)有皮脂，混合	22	342—1099	256—799	36.3	17.4	45.0	7.5
(4)有皮脂，肥胖	8	791—1511	729—1357	29.1	14.8	54.9	20.6
全部	49	160—1511	139—1357	38.0	18.4	43.1	6.8
最瘦小(*B*20♂)	1	160	139	48.1	21.4	30.5	0.0
最肥大(*L*29♂)	1	1478	1357	27.9	14.4	57.4	20.2

可以將全部 49 只刺猬分为兩大类：無皮下脂肪类(19 只)和有皮下脂肪类(30 只)．每类又各分兩組．組(1)包括 10 只無皮下脂肪的未成熟的刺猬，观察期內最高体重一般未超过 460 克，而解剖时大多数体重为 200—260 克．当年出生的刺猬，在我們实驗室的普通飼养条件下，於冬眠初期(当年齡为 3—6 个月时)，体重一般为 300—600 克．組(2)包括 9 只無皮下脂肪的但已經成熟的刺猬，最高体重多数曾經一度达到 800 克以上，但解剖时則一般已消瘦至 570 克以下．組(3)包括 22 只有少量乃至中量(1—14％)皮下脂肪的刺猬，其中有未成熟的(少数)和已成熟的动物，但解剖时体重都不超出 700 克，(冬眠末期解剖的 *H*141 除外)．一般地說，体重大的动物皮下脂肪亦多．但也有少数的例外情况，譬如 *K*4♀ 是一只年齡为 67 日的小刺猬，解剖时体重为 256 克，但皮下脂肪量为体重 12％．組(4)包括 8 只肥胖和極肥胖的成年刺猬，体重为 729—1357 克，皮下脂肪量多至 18—25％．也必須指出，在特殊生活条件下，年齡为 9 个月的刺猬(如 *G*17)最高体重曾达 1436 克[11]．这 4 組刺猬的分类情況与其皮下脂肪量的分佈情況描繪在圖 3 內．

由表 5 可見，兩組無皮下脂肪的刺猬中，三类器官平均重量比例有良好的符合情况，軀干平均值为体重 42.5％，內臟为 21.1％，皮膚为 35.6％，变动范圍不超过 2％．但是在兩組有皮下脂肪的刺猬中則不然，三类器官平均重量比例有很大的变異，軀干与內臟的比重下降，而皮膚的比重則上升．如果以組(4)肥胖动物的器官重量和上述(1)、(2)兩組的

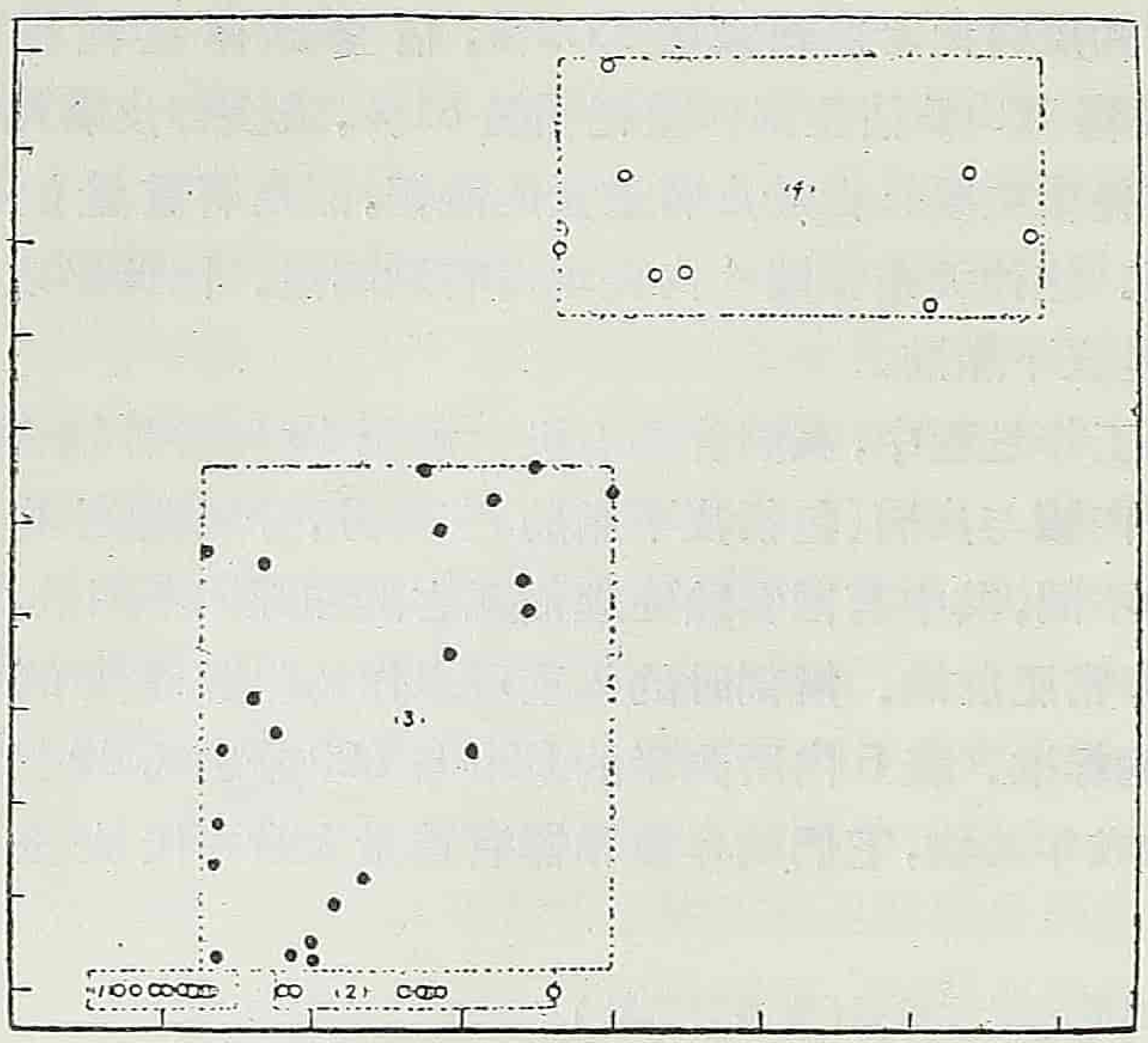


圖 3　刺猬皮下脂肪含量(49 只动物的分組,参考表 5).

平均值进行比較，即可見軀干重量減少 13.4%，內臟減少 6.3%，二者共減少 19.7%，而皮膚重量則增加 19.3%。即使就最肥大的刺猬 $L29$ 与最瘦小的 $B20$ 进行比較，軀干重量減少 20.2%，內臟減少 7.0%，二者的总和为 27.2%，同时皮膚重量則增加 26.9%。显而易見，这些改变的原因与改变的多少主要决定於皮下脂肪貯存量的極大易变性。根据現有的資料，刺猬的皮下脂肪最多可达 300 克，或等於体重的 25%。

由表 5 亦可見，在各組刺猬中，和在全部或个别刺猬中一样，軀干与內臟重量大致都保持同一的比例关系。如果以軀干重量作为标准 (1.00)，並按比例分别計算內臟与皮膚的比值，則四組动物的內臟比值仅仅变动於 0.47—0.53 的狹小范圍內(平均值为 0.48)，而皮膚比值的变动范圍則为 0.81—1.89。即使在最瘦小与最肥大的刺猬之間，二者的內臟比值为 0.44—0.52，而皮膚的比值則为 0.63—2.06。刺猬軀干和內臟的这种相对稳定性与皮膚和皮下脂肪的巨大易变性在圖 4 中得到明显的表現。

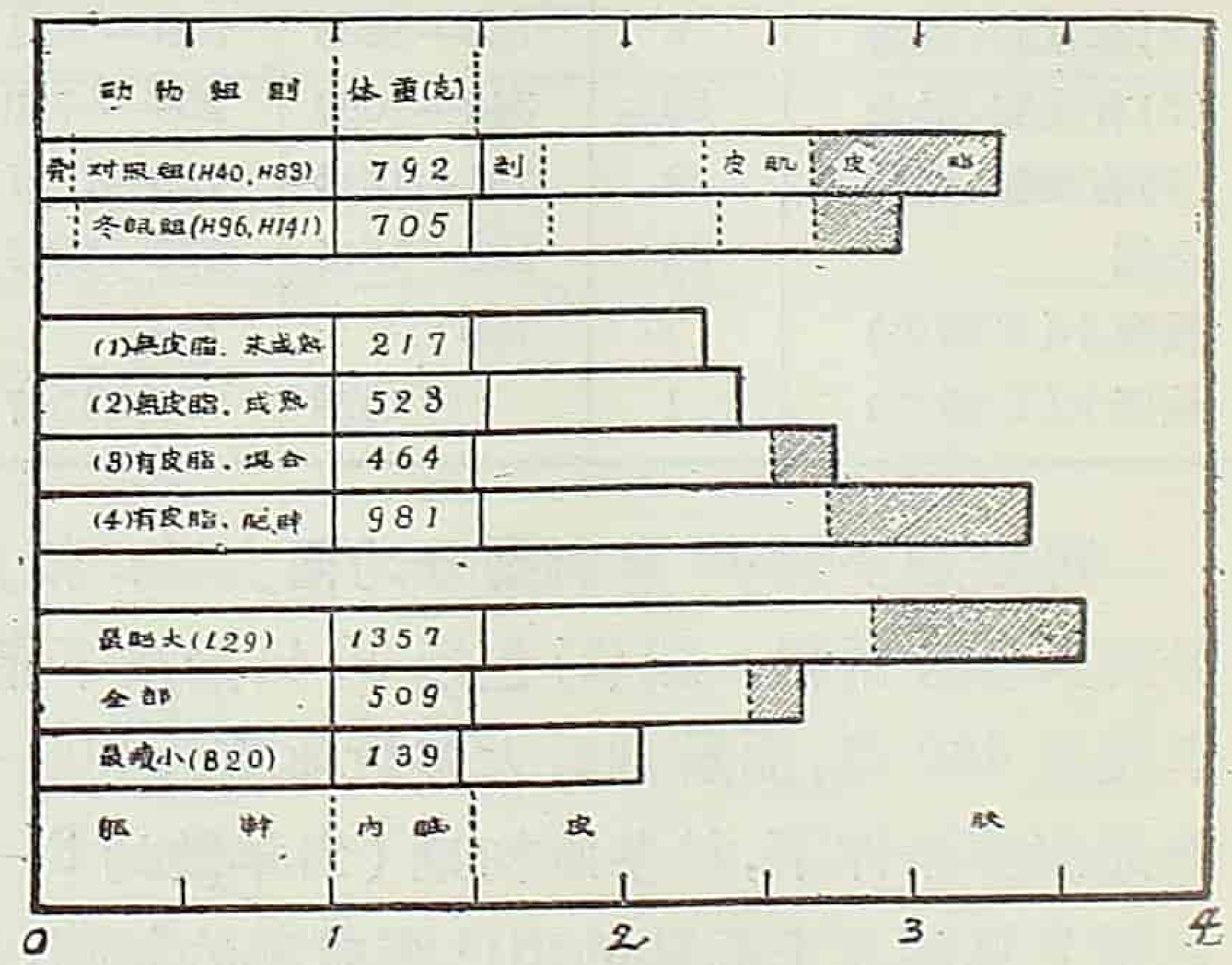


圖 4　刺猬的器官重量：以軀幹重量为 1.00 的比值.

刺猬体重的巨大变动在頗大程度上也可反映其皮下脂肪的易变性。表 6 中所列举的一些个别例証可以表明在不同情况下刺猬体重变动的大致范圍。刺猬是非常貪食的动物，只要情况适宜，其体重的迅速增長可以發生在一年中的任何时期。不仅在冬眠季节前所謂准备阶段体重一般都大有增加，即使在冬眠季节內当保持夏季高温时有些刺猬仍可繼續生長(如 $G\,17$)[11]。在出眠后一个短时期內，一般体重也都有或多或少的增長，例如 $L\,69$ 在出眠后 15 日內体重增加 38%，远远超过冬眠期內其体重耗損的总值(15%)。雌刺猬例如 $D\,19$ 在完成其哺乳后，於 78 日內体重增加 158%。表 6 中这些刺猬都是非常肥大的动物，体重最高时平均 1,452 克，但在死亡时則一般体重最低，平均 657 克，仅为最高时 45%。这些刺猬的体重最大变动范圍約为 900 克，即在数月的短期內可增減一倍以上。

表6　不同情况下刺猬体重的变动

刺猬編号	动物情况	观察期	日数	体重(克) 期初	体重(克) 期末	体重增加率 克/日	体重增加率 克/日/公斤	最高体重(克)	最低体重(死亡时) (克)	最低体重(死亡时) %最高值
G17♂	年龄87—226日	9/11—1/28	139	725	1446	5.19	7.16	1446	728	50.3
L69♂	出眠后	3/4—3/9	5	1012	1219	41.4	40.9			
		3/9—3/19	10	1219	1395	17.6	14.4			
F 2♂		5/27—8/16	81	704	1308	7.46	10.6	1432	594	41.5
F30♀	5/20分娩，婴死后	5/27—8/1	66	609	1363	11.4	18.8	1363	480	35.2
D19♀	6/8分娩，断乳后	7/22—7/28	6	608	763	25.7	42.2			
		7/28—8/23	26	762	1100	13.0	17.1			
		8/23—9/6	14	1100	1376	19.7	17.9			
	10/12开始冬眠	9/6—10/8	32	1376	1568	6.00	4.36	1568	827	52.8

討　論

在表7内我們列举了几种变温哺乳动物冬眠时体重耗損的一些数据，其变动范圍一般不超出1—5克/日/公斤．考虑到动物种类的差異，体重的極大变化(由数克乃至3,000余克)，以及实驗条件的不同，这些数据的符合情况可以說是良好的．至於冬眠时体重耗損量的准确数据並不如想像地那样容易得到，因为有些动物，特別在实驗条件下冬眠期内常常苏醒[8]而每次苏醒都消耗大量的能量．例如根据 Kayser [12]估計，大眼賊 (Spermophilus) 在冬眠季节平均睡眠147日，苏醒12日，为全部冬眠期7.5%，但是就能量消耗而言則90%是由於苏醒时的需要．如此說来，大眼賊在眞正冬眠时的体重耗損量仅仅是0.2克/日/公斤．值得注意，Benedict 与 Lee[13]在深眠(直腸温度为6—8°)的土撥鼠(Marmota)身上測定了短期内不显現的体重降低(不显汗)，並获得0.2克/日/公斤的最低值．但是作者們自己指出这一数值的意义不大，因为空气湿度的改变对於不显汗的数量有極大的影响．我們的結果是当刺猬在非常接近自然的情况下無間断地長期深眠时所得到的，因而有更大的代表性与眞实性．

多数研究者認为哺乳动物在禁食时体重降低按冪数形式进行[1]，但是对变温哺乳动物而言，这类研究資料很少．Mimachi 与 Weinland [14]曾报告兩只刺猬短期(3—5日)禁食时体重耗損情况，其中一只动物在禁食第一日体重減少約60克，第四日減少11克，而第五日当体温下降至18.2°时則体重只減少1.0克．Groebbels[15]曾簡略地提到兩只比較肥胖的刺猬(体重約900克左右)在8—9日的禁食期内，体重分別減少20.5%与19.4%，或25.6与21.6克/日/公斤．Benedict 与 Lee[13]曾用17只体重1.11—3.66公斤的土撥鼠进行禁食至死的实驗，其中16只动物在77—173日内体重耗損率为3.25—7.73克/日/公斤，平均5.03．这一数值可能偏低，这和在禁食期内出現冬眠狀态有关．Benedict 与 Lee 的动物之一，土撥鼠 *H*，在全部48日禁食期内，实际上不存在冬眠的复杂化情况，其体重降低可以完全用一条直線来表示，体重耗損率为12.1克/日/公斤，远远超出其余动物的变动范圍．作者們指出，在禁食初期並在頗大程度上与最初体重(2—3公斤)無关，体重每日耗損約50克，但在禁食后期則耗損較少，同时直腸温度略为降低，产热量亦減少．由他們所發表的一些体重降低曲線亦可見，在禁食初期体重一般都成直線地下降．在我

們的工作中，將刺猬禁食时的体重降低分为三个时期，这和 Falck 用狗，Lasarev 用豚鼠在 19 世紀末期所获得的結果基本上是一致的(引自 Morgulis[1])。

表 7 变溫哺乳动物冬眠时体重耗損率(括弧內为平均値)

动物种类	动物数	体重(克)	冬眠期(日)	体重耗損 %	体重耗損 克/日	体重耗損 克/日/公斤	备註
土撥鼠			91	12—14		1.3—1.5	Mangili (1807)[15]
同上	7	669—3274	40—169	8.3—40.6	1.81—15.96 (4.17)	1.4—4.9 (2.6)	Valentin (1857)[1]
同上	1 ♂	1640	116	18.2	2.58	1.57	Polimanti (1913)[6]
同上	1 ♀	1436	116	19.8	2.45	1.70	Polimanti (1913)[6]
同上	13	1300—3500	57—110	12.78—43.31		2.13—3.94 (2.95)	Rasmussen & Rasmussen[18]
同上						0.2	Benedict & Lee [13]
刺猬	2		26—50	25		5.0—9.6	Valentin (1857) [19]
同上	1	872	69	23		3.3	Groebbels [15]
同上	9	569—914	106—107	10.4—18.9 (14.6)	0.70—1.56 (1.04)	0.98—1.78 (1.37)	赵、叶、陈
大眼賊	8	145—283	118—191	20.5—39.5		1.74—2.60 (2.04)	Kayser [12]
同上	5			39		1.8—3.9 (2.9)	Johnson [20]
同上	1	157		38		4.8	Johnson [20]
睡鼠			58	25		4.3	Barkow (1846)[6]
蝙蝠	1	27.50	85	6.73	0.0218	0.8	Hári [21]

在我們的工作中指出了用兩种不同的方式計算禁食中期的体重耗損率，从而得到不同結果的有趣事实：卽当以每公斤体重为單位計算每日体重耗損量，則可見体重愈小的刺猬禁食时耗損率愈大(在其它动物中也是如此[1])；而当以动物个体(不論体重大小)为單位計算每日耗損量时，則与最初体重的关系相对地很不明显(見圖 2)。在这里可提出一个有趣的問題，卽在冬眠时是否也存在着类似的情况。在我們現有的資料中(也許由於体重的变化范圍还不够大，見表 2)，不能發現冬眠时体重耗損率与动物体重有何关系。但从表 7 中所列举的数据来看，在冬眠时体重耗損量与动物体重之間也沒有一定的依从关系。当比較土撥鼠，刺猬，大眼賊，睡鼠(Myoxus)等哺乳动物在夏季(活潑)和在冬季(冬眠)的产热量时，Kayser[16]指出，如果按每公斤体重計算每小时产热量，在夏季出現体重愈大产热愈少的依从关系，而在冬季則無論动物大小其产热量基本相等。但是，如果按每平方米体表面积計算产热量时，則在冬眠时仍出現对体重的一定依从关系，不过体重愈大的动物产热愈多。总之，用不同表达形式計算禁食时体重耗損量(我們的工作)或冬眠时产热量(Kayser 的工作)可得出不同的关系，用相同表达形式計算禁食时与冬眠时体重耗損量(我們的工作)或夏季与冬季的产热量(Kayser 的工作)也可得出不同的关系。这一問題值得进一步研究。

由於上述复杂情况，当比較冬眠时与禁食时的代謝，必須考慮計算方式与动物体重。根据我們的結果，無論刺猬大小禁食时平均每日体重減少 13.5 克，冬眠时減少 1.04 克，为禁食的 7.7%。如果按每公斤体重計算，由圖 2 可求得体重 760 克的刺猬(表 2 冬眠組动

物的平均值)禁食时每日体重減少 19 克,而冬眠时則減少 1.37 克,为禁食时的 7.4%. 兩种計算的結果甚为符合. 根据 Groebbels 的报告[15], 1 只体重約 900 克的刺猬在 69 日的冬眠期內体重減少 23% (3.3 克/日/公斤),而在 9 日的禁食期內則減少 19.4% (21.6 克/日/公斤),卽冬眠时体重耗損率为禁食时的 15%. 这一数值可能偏高. 由 Kayser 所提供的数据[16],可以計算出刺猬冬眠时的代謝(产热量)为夏季的 2.1%. 在其它种动物的場合得到变动於 1.3—4.1% 范圍內的数值. 因此概括地說,各种不同变溫哺乳动物的冬眠能量需要大約相当於每公斤体重每日数克的耗損量,为禁食时代謝量的百分之几.

在他对土撥鼠的系統研究中, Valentin 曾詳細地測定了冬眠时許多种器官重量的改变. 例如在 163 日冬眠期內体重減少 35.1% 的总值中, 16.28% 为脂肪, 7.63% 为肌肉, 5.57% 为皮膚,等等,其中脂肪几乎全部(99.31%)消耗迨尽. Weinland[17]在冬眠期各阶段上对 4 只刺猬的全部軀体进行了化学分析:在冬眠初期,一只体重 1047 克的刺猬其脂肪(乙醚提出物)总量佔体重 34.02%;而在冬眠后,一只体重 580 克的刺猬其脂肪含量仅为 4.48%. 所用的刺猬在体重上有很大的区别, 同时作者在其报告中也未提到冬眠的情况与体重耗損量,因此这种比較是不完全恰当的. 但是与醣元及氮含量相比較,則可見脂肪含量的改变是最主要的;粗略地說,刺猬冬眠时脂肪的消耗量可达体重 30.0% (这一数值偏高),等於全部脂肪含量的 87%. 气体代謝研究証明,許多动物在冬眠时呼吸商都非常接近 0.7[5,6], 可見冬眠的能量消耗几乎全部来自脂肪. 我們的結果,卽刺猬冬眠时皮下脂肪的減少佔全部体重耗損量 81% 为这一結論提供了补充証明. 更完全的証明則要求对整个机体进行化学分析. 这一工作还是有意义的.

Benedict 与 Lee[13] 曾經提到他們所飼养的 31 只土撥鼠中, 9 只动物在不超过 60 日(按他們的意見是非常短的)时間內体重增加 28% 或更多. 作者們似乎認为这是非常迅速的增長. Groebbels[15]报道,一只成年刺猬在出眠后 20 日內体重增加 28%,而一只幼年刺猬在出眠后 16 日內体重增加 42%. 根据我們的經驗,甚至成年刺猬可在出眠后 15 日內体重增加 38%,而在兩个月的时間內則可能增加一倍以上. 刺猬体重的迅速而巨大的变动在很大程度上是由於脂肪的增減,特別显而易見,是由於皮下脂肪的增減. 如果說整个刺猬机体的脂肪含量可达体重 34%[17],其皮下脂肪則可达 25%(我們的結果),卽 74% 的全部脂肪貯存於皮下. 由於刺猬皮下脂肪易於接近的位置,它为研究冬眠动物的脂肪代謝提供有利条件. 对冬眠生理学与生物化学来說这类研究是重要的,但是很少的. 特別值得注意神經系統对脂肪代謝的調节作用.

結　　論

刺猬在非常接近自然条件的情况下無間断地長期深沉地冬眠时,体重平均每日減少 1.04 克,或每公斤体重每日減少 1.37 克.

禁食时,刺猬体重最初 1—2 日內迅速減少,繼而成直線地下降,最后当体溫降低至气溫水平时則下降更慢. 刺猬对禁食的耐受性与体重有密切关系:一般动物禁食数日后死亡,少数極肥胖动物虽禁食 1 月而無危害. 在体重成直線地下降的禁食中期內,体重每日減少 11—15 克,肥胖动物耗損較少而瘦小动物耗損較多. 如果按每公斤体重計算每日減

少量，則上述差異显得非常突出，由極肥胖(1,300克)的动物至幼小(270克)的动物体重耗損率由9克增加至54克/日/公斤。

一般地說，普通刺猬冬眠时体重耗損率为禁食时7—8%。

刺猬冬眠时体重耗損量81%是由於皮下脂肪的消耗，刺猬皮下脂肪具有極大的易变性，在营养不良等情况下可完全消失，而在肥胖的机体中則貯存量可达体重25%。研究冬眠动物脂肪代謝的特征与其調节对闡明冬眠的机制可能有重要意义。

参考文献

[1] Morgulis, S., *Fasting and Undernutrition*, New York: E. P. Dutton & Co., 1923.

[2] Jackson, C. M.., *The Effects of Inanition and Malnutrition upon Growth and Structure*. Philadelphia: P. Blakiston's Son & Co., 1925.

[3] Ferdmann, *D.* u. O. Feinschmidt, *Ergebn. Biol.*, 8, 1, 1932.

[4] Kayser, Ch., *Biol. Rev.*, **25**, 255, 1950.

[5] Lyman, C. P. & P. O. Chatfield, *Physiol. Rev.*, **35**, 403, 1955.

[6] Eisentraut, M., *Der Winterschlaf mit seinen ökologischen und physiologischen Begleiterscheinungen*, Jena: Gustav Fischer, 1956.

[7] Lyman, C. P., *Journ. Mammalogy*, **35**, 545, 1954.

[8] 赵以炳，叶甲壬，中国生理学杂誌，**18**, 119, 1952.

[9] 赵以炳，叶甲壬，北京大学学报(自然科学)，**1**, 135, 1955.

[10] 赵以炳，叶甲壬，北京大学学报(自然科学)，**2**, 503, 1956.

[11] 赵以炳，叶甲壬，中国实験生物学杂誌，**3**, 121, 1951.

[12] Kayser, Ch., *Arch. Sci. Physiol*,, **6**, 193, 1952.

[13] Benedict, F. G. & R. C. Lee, *Hibernation and Marmot Physiology*, Carnegie Inst. Washington Publ. 497, 1938.

[14] Mimachi, H. u. E. Weinland, *Zeitschr. Biol.*, **55**, 1, 1911.

[15] Groebbels, F., *Pf. Arch.*, **213**, 407, 1926.

[16] Kayser, Ch., *Arch. Sci. Physiol.*, **4**, 361, 1950.

[17] Weinland, E., *Biochem. Zeitschr.*, **160**, 66, 1925.

[18] Rasmussen, A. T. & G. B. Rasmussen, *Amer. Journ. Physiol.*, **44**, 132, 1917.

[19] Johnson, G. E., *Quart. Rev. Biol.*, **6**, 439, 1931.

[20] Johnson, G. E., *Journ. Exp. Zool.*, **50**, 15, 1928.

[21] Hári, P., *Pf. Arch.*, **130**, 112, 1909.

CHANGES IN BODY WEIGHT AND ORGAN WEIGHTS OF THE HEDGEHOG IN HIBERNATION AND IN FASTING

Iping Chao, C. J. Yeh and J. S. Ch'en
(Laboratory of Animal and Human Physiology,
Department of Biology, Peking University, Peking)

ABSTRACT

Under the circumstances of uninterrupted deep hibernation for periods of three and half months in open air quarters, the body weight loss of the hedgehog proceeds at a rate of 1.04 g per day, or 1.37 g per day per kg.

During experimental fasting, the body weight suffers at first a rapid decrease for 1—2 days and then a more gradual diminution at a uniform rate, followed sooner or later by a terminating phase of a slow decline concurrent with a fall in body temperature to the level of the ambient temperature. The duration of fasting compatible to life varies with the initial body weight, a few days for the ordinary hedgehogs and a month or more for the exceptionally fat ones. During the period of uniform decrease, the rate of body weight loss is 11—15 g per day, slightly more in the samll animals. However, when the rate of loss is expressed in terms of g per day per kg body weight, it varies from 9 g in the very fat animals of about 1300 g to as much as 54 g in the small ones between 200 and 300 g.

In general, the body weight loss of an ordinary hedgehog in hibernation is 7—8% of that in experimental fasting.

About 80% of the body weight loss of the hedgehog in hibernation is accounted for by the disappearance of subcutaneous fat. The subcutaneous fat in the hedgehog is subjected to large fluctuations, disappearing completely in the very much emaciated animals and accumulating in large amounts up to 25% body weight in the well-nourished ones. It is suggested that a thorough investigation of the characteristics of fat metabolism and its regulation in the hibernating mammals may be of considerable importance in the elucidation of the physiological mechanism of hibernation.

北京大学学报(自然科学)編輯委員会

周 培 源(主編)

邢 其 毅　　赵 以 炳(副主編)

王 竹 溪　　申 又 棖　　叶 企 孙　　乐 森 璕

張 青 蓮　　湯 佩 松　　黄 子 卿　　程 民 德

虞 福 春　　謝 义 炳(以姓氏笔划为序)

稿　約

一、本学报为自然科学方面的綜合性刊物，刊載数学、物理学、气象学、化学，生物学，地質学、地理学等方面的科学論文，貫徹"百家爭鳴"的方針，开展学术上的自由討論，並根据理論与实际相結合、科学研究和教学相結合的方針、协助推进我校自然科学的研究工作。

二、本学报刊登下列种类的稿件：

1. 專題研究；
2. 有关科学方法論的探討；
3. 有关国民經济或科学發展中重大問題的評述；
4. 国內外重要科学論著的評論或介紹。

三、来稿概用中文橫写，注意正确地使用标点。插圖請用白紙（或繪圖紙）黑墨繕繪或照像，以便制版。插圖置於何处，請於稿紙左边註明。外文字母須用黑体或斜体者亦請註明。

四、来稿須附中、外文摘要。外文摘要可用俄、英、德、法文，应繕写清楚，最好打字。

五、参考文献一律置於正文之后，並須依次写出被征引文献的作者姓名、刊物名称（通用縮写）及其卷、頁、年分。在論文中某項文献征引处，須用小号阿拉伯字加方括弧写在右上角。脚註按順序置於本頁下，請用1、2等符号。

六、来稿凡經登載后酌送稿費，並贈送本期学报一册、單行本五十份。未用的稿件，妥予送还。

七、来稿請投寄本校学报編輯部。

ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM

UNIVERSITATIS PEKINENSIS, Vol. IV, No. 1 1958.

Contents

北京大学学报（季刊）

自 然 科 学

第四卷第一期(总 10 期)

Acta Scientiarum Naturalium Universi atis Pekinensis, Vol. IV, №. 1 1958.

編 輯 者	北京大学学报（自然科学）編輯委員会	总發行处	邮电部北京邮局
出 版 者	北 京 大 学 北京西郊海淀	訂 購 处	全国各地邮局
印 刷 者	北京西四印刷厂	代訂代售处	全国各地新华書店

(京) 1——3,000 册　　1958 年 2 月出版

本期定价：道林紙本 1.20 元
白报紙本 0.70 元

本刊代号：道 2—89
报 2—90