МИНИСТАРСТВО ВОЈЕНО.

ОСНОВНА МЕКАНИКА

I. ДЕО

КИНЕМАТИКА.

ЗА

УЧЕНИКЕ ВОЈЕНЕ АКАДЕМИЈЕ И ВИШИ ШКОЛА У СРБИЈИ

НАПИСАО

Стеван Здравковић,

ИНЖЕЊЕРСКИ ПОДПУКОВНИК, РЕДОВНИ ЧЛАН СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА, ПОЧАСНИ ЧЛАН СРПСКОГ ЛЕКАРСКОГ ДРУШТВА, СТАРИ ПИТОМАЦ ВОЈЕНЕ АКАДЕМИЈЕ.

СА 260 СЛИКА У ТЕКСТУ.

У БЕОГРАДУ
У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ
1875

ПРЕДГОВОР.

Кад сам у 1871 год. предавао меканику у војеној академији, приметио сам доста велики недостатак у томе, што нема ни једног на српском језику написаног дела меканике, које би питомцима поменуте школе могло да олакша изучавање, ове тако потребне науке. — Ја сам од овог доба почео радити, да једно оваково дело напишем, и то у оним границама, у коима сам ја напред поменуту науку у политекничкој и инжењерској школи (Ponts et chaussées) у Паризу изучавао.

На оваковом без сваке сумње врло трудном задатку, ја сам прилежно радио, и толико сам успео, те сам до сада три дела ове простране науке написао, и то: Кинематику, Статику и Динамику.

Но пошто се текничке науке код нас налазе још у свом почетку развијања, то би врло тежко ово прво дело света угледало, да га није министарство војено примило и печатало.

Није потребно да овде напомињем од какве користи може бити једно оваково дело, како за ученике виши наши школа, тако и за наставнике, кои би у предавању поменуте науке желили, да га при руци имају, па и за сваког другог, кои би хтео да меканику у основу изучава, ако само потребне спреме за то имао буде.

Да ли је овај први део меканике што се саме ствари тиче тако састављен и написан, да намењеној цели што је могуће више одговара, остављам компетентном а безпристрасном критичару, да о томе свој суд изрекне. — Овде само имам то додати, да сам се при саставу овог дела служио понајвише моим бележкама из школе политекничке, и инжењерске, затим помагао сам се и чувеним писцима у овој науци, као што су: Duhamel, Delaunay, Belanger, Bour, и други.

Напослетку што се тиче језика, којим је ово дело написано, у томе погледу ограђујем се против сваке критике, јер у данашње време, при овако разноврстним и млогоструčним знањима, која су за данашњу науку потребна, није ни могуће једноме човеку, да у свему буде спреман колико би он желио. Према томе дакле ја ћу се овде послужити оном истом а познатом изреком, којом се послужио у својој тригонометрији мој млогопоштовани и цењени професор г. Е. Јосимовић. — „Праштајте да би се и вама опростило.“

1. Септембра 1875 год.
У Београду.

Стеван Здравковић,
инжењерски подпуковник,
професор у војеној академији.

САДРЖАЈ.

УВОД

I. ДЕО.

СТРАНА.

1. Кретање без обзира на узроке, кои га проузводе — кретање тачке у опште . . . . 7.
2. Једно-мерно кретање тачке . . . . 8.
3. Једначина једно.мерног кретања . . . . 10.
4. Менљиво кретање тачке у опште . . . . 14.
5. Једно-мерно менљиво кретање тачке . . . . 16.
6. Право-пружно менљиво кретање . . . . 20.
7. Општи изрази право-пружног кретања . . . . 22.
8. Криво-пружно кретање тачке . . . . 24.
9. Пројекција кретања на неку сталну равнину . . . . . 25.
10. Пројекција кретања на неку сталну осу . . . . . . 26.
11. Графичка представа закона кретање у опште . . . . 27.
12. Употреба тога на:
    I. Једномерно кретање . . . . 30.
    II. Менљиво кретање . . . . 31.
    III. Једнако (једно-мерно) менљиво кретање . . . . . 35.
13. Закон падања тела, и употреба овог закона на неколико примера . . . . 37.
14. Сложена кретања тачке . . . . 42.
15. Слагање и разлагање кретања . . . . 45.
16. Слагање брзина. I. Паралелограм брзина . . . . . . 47.
    II. Полигон брзина . . . . 50.
    III. Параллелипипед брзина . . . . 52.
17. Разлагање брзина . . . . 53.
18. Кретање тачке однешено на право-пружне координате . 55.
19. Пројекција полигона брзина . . . . 56.
20. Кретање тачке однешено на поларне координате . . . 61.
21. Начин Roberval-а, по коме се могу тангенте на криве пруге да повуку . . . . 68.
22. О акцелерацијама једно-времени кретања . . . . . . 71.
    a. Право-пружно кретање . . . . 72.
    b. Криво-пружно кретање . . . . 73.

СТРАНА.

23. Општа теорија о акцелерацији при криво-пружном кретању. 75.
24. Тотална акцелерација 78.
25. Пројекција кретања на неку равнину 79.
26. Тангенцијална и нормална пројекција тоталне акцелерације. 81.
27. Кретање чврсти тела 84.
28. Напредно право-пружно или криво-пружно кретање тела. 85.
29. Обртање 87.
30. Просто елементно кратање тела 91.
31. Елементно кретање неке слике у својој равнини 91.
32. Елементно кретање неког тела, равноодстојно са једном истом равнином 99.
33. Елементно кретање неке сферне слике по својој сфери 100.
34. Елементно кретање тела, кога једна тачка остаје некретна. 100.
35. Елементно кретање неког тела, које се ма како у простору креће 101.
36. Непрекидно кретање неке слике у равнини 105.
37. Непрекидно кретање неког тела, које се равноодстојно креће са неком сталном равнином 107.
38. Непрекидно кретање неког тела, кога једна тачка остаје некретна 109.
39. Непрекидно кретање тела, које се ма како у простору креће. 111.
40. Слагање једновремени кретања неког чврстог тела 111.
41. Слагање једновремени елементни кретања тела
    I. Слагање и разлагане напредни кретања
    II. Слагање и разлагање обртања 113.
42. Слагање два обртања, кои се осе пресецају у једној тачки. 114.
43. Слагање једног напредног са једним обртним кретањем 117.
44. Слагање обртања око равноодстојни оса 120.
45. Особити случај два равноодстојна једнака и противположена обртања 122.
46. Слагање ма коликог броја равноодстојни обртања 124.
47. Спрега обртања 125.
48. Употреба спреге обртања. —
    Премештај неког обртања, равноодстојно са његовим првобитним положајем 126.
49. Слагање два обртање око оса, које се неналазе у једној истој равнини 127.
50. Слагање ма какви кретања тела 128.
51. Разлагање ма каквог елементног кретања неког тела, на три напредна кретања, равноодстојна са трима у једној тачки пресецајућим се осама, и на три обртања, око ови оса. 129.

СТРАНА.
52. Слагање акцелерација при релативном кретању . . . . 130.
53. I. Случај. Слагање акцелерација кад се систем сравњивања напредно креће . . . . 130.
54. II. Случај. Слагање акцелерација кад се систем сравњивања обрће . . . . . , ... 132
55. Центрифугална акцелерација . . . . 135.
56. Релативна кретања тела . . . . 138.
57. Теорија котрљања и клизања тела . . . . 140.
58. Конструкција тренутног средишта обртања . . . . . 144.
59. Рачунање лука клизања . . . . 145.
60. Разни задатци односећи се на напред-изложену теорију . 147-156.

II. ДЕО.

Примена Кинематике на махине.

61. Општи појмови о махинама, и о преносу или преиначењу кретања . . . . 156.
62. Махине сматране са кинематичког гледишта . . . . . 156.
63. Средства за осигурање правца кружног, или право-пружног кретања неки махински органа . . . . 159.
64. Вође право-пружног кретања . . . . 166.
65. Органи махински, кои се употребљују за пренос кретања
I Правац преноса сталан — Отношење брзина стално
Пренос кретања додиром. — А — Осе равноодстојне, а;
фрикциони ваљци. . 179.
ђ; Зубчасти точкови (зубчаници) . . . . 181.
66. Спољни ваљчасти зубчаници, и њиова разна конструкција. 184-199.
67. Унутарњи ваљчасти зубчаници и њиова разна конструкција. 199-204.
68. В. Пренос кретања између осовина под углом . . . . 204.
69. Конични зубчаници и њиова разна конструкција . . . 206-208.
70. Детајљ зубчаника . . . . 208-211.
71. Пренос кретања између осовина, које се неналазе у једној истој равнини . . . . 211-215.
72. Пренос кретања посредством крути тела . . . . . . 215-218.
73. Пренос кретања посредством ужета, ланаца и каиша . . 218-228.
74. Пренос кретања средством течности . . . . 228-229.
75. Разни међусобни сајузи разни органа махински (разни примери) . . . . 229-239.
76. Диференциална кретања . . . . 239-243.
77. *II Правац кретања сталан, отношењв брзина менљиво*
Основне криве пруге и њина својства 243-249.

СТРАНА.

78. Пренос кретања додиром: Постепено додирајући се кружни луци, зубчаници, и т. д. . . . . 249-252.

79. Артикуларни систем са мењљивим отношењем брзина
1 Осе равноодстојне . 252-255.

80. 2. Стицајуће се осе . . . . 255-258.

81. *III. Правац преносног кретања периодично мењљив, отношење брзина стално или мењљиво* . . . . . . 258-259.

82. Сајуз кружног и право-пружног кретање
I Случај. Оса обртања управна на правац напредовања . 259-262.
II Случај. Оба обртања равноодстојна са правцем напредног кретања . . . . 262-264.

83. III Сајуз два право-пружна кретања 264

84. IV Сајуз два кружна кретања, од који једно је непрекидно, а друго алтернативно . . . . 265-269.

85. Сајуз непрекидног обртног и прекидног правопружног кретања . . . . 273.

86. Теорија ексцентрика. — Кружни ексцентрик, ексцентрик састављен из кружни лукова, трпугли ексцентрик . . . 276.

87. *Разни органи за спој, прекид или преиначење кретања, код поједини кретни делова какве махине* . . . . 283.

88. Нагли прекид кретања код снажни махина . . . . . . 287.

89. Нагла промена брзина . . . . 294.

90. Промена брзина премештајем безкрајњег каиша на једнаке једно до друго намештене котуре . . . . 295.

91. Постепено мењање брзина . . . . 300.

92. Механизми за посматрање и експериментално дознавање закона каквог кретања . . . . 302.

ОСНОВНА МЕКАНИКА.

УВОД.

Кад сматрамо природна тела, која нас окружавају, онда налазимо, да она или на једном истом месту у простору остају, или са једног места на друго непрекидно — континуално — прелазе. У првом случају кажемо да се тело налази у покоју, а у другом да се креће.

Да ли какво тело почива или се креће, дознајемо сравњивањем његовог положаја, са положајем други некретни тела или предмета, које ћемо ми у будуће звати систем сравњивања.

Кретање као и почивање тела, или је абсолутно или релативно. Абсолутно је оно, кад је систем сравњивања некретан т. ј. сталан. Напротив релативно је оно, кад се и сам систем сравњивања креће, односно другог неког система узетог као сталног: тако на прилику: кад се неко тело креће по каквој лађи, која дуж реке плови, онда је кретање тела односно лађе, релативно, које се сасвим разликује од његовог абсолутног кретања, односно обала реке, које се сматрају као некретне.

Овде имамо приметити да абсолутног кретања као и почивања нема, јер у овом безграничном простору, ми незнамо ни за једно некретно тело, према коме би положаје кретног тела могли сравњивати.

Но за наша испитивања, у ужем смислу, ми можемо предпоставити, да је систем сравњивања, према коме положаје кретног тела опредељујемо, некретан, тако на прилику, ако предпоставимо да је наша земља некретна, онда су и сва тела на њеној површини, која свој положај немењају, некретна. Потоме сва кретања, која будемо испитивали, сматраћемо ми као абсолутна, док изриком некажемо да је говор о релативном кретању.

Из искуства знамо, да тело, које је у покоју, неможе само по себи да пређе у кретање,[1] ако се пак већ налази у кретању, онда неможе само себе да заустави, већ непрекидно продужава кретање по извесном неком закону. Отуда закључавамо, да мора постојати изван тела извесни неки узрок, који причињава да тело прелази из покоја у кретање и обратно. — Тај узрок, који кретање или промену у кретању тела производи, ма какав он био, зове се сила. (фр. force нем. Kraft). Тако нпр. кад се неко тело у неком одстојању над земљом изпусти, онда ће оно почети да пада, и сила која је узрок овог падања, зове се тежина (фр. pesanteur, нем. Schwere). — Кад се какав гас као нпр. пара, или ваздух у какав суд сабије, а затим се пусти, да се разшири, онда ће се он заиста и разширити. Узрок овог разширења јесу тако зване молекулерне силе од којих једне су привлачне а друге одбијајуће.

У природи има јошт и други под разним именима означени сила, као што су: мускуларна сила животина (forçe musculaire) електрична и магнетична сила (force électrique, force magnetique) и т. д. Ми ове силе за сада овде само напомињемо, а доцније и на свом месту постараћемо се да их из ближе упознамо и њина дејства испитамо.

Наука, која се занима са узроцима — силама — и законима по којима се телу крећу, или своја кретања преиначавају, и која изтражује отношења између ових узрока и произведеног кретања, зове се Механика.[2]

У кратко може се рећи да је механика наука о кретању и силама.

---

[1] У овај ред неспадају животиње дотле, докде су живе.

[2] Реч Механика (фр. Mecanique, нем. Mechanik) долази од грчке речи μηχανη, која значи махина, по томе може се мислити, да се Механика као наука, у почетку занимала само са махинама. —

Кад више сила дејствују на неко тело, које ћемо ми овде узети да почива, онда се може десити, да ове силе; или произведу кретање тела, или да оно и даље остане у покоју, при свом дејствовању сила. То нам показује свакидашње искуство. У овом последњем случају каже се да силе стоје у равнотежи, или просто да се тело налази у равнотежи. — Но силе, које дејствују на неко тело, могу и онда бити у равнотежи, кад се тело креће. Ово се потврђује тиме, што се кретање тела немења, ако би ове у равнотежи налазеће се силе, изостављене биле.

Отуда сљедује, да се меканика по природи предмета који обувата, може поделити, а и дели се на два главна дела. Један део занима се са испитивањем услова и закона о равнотежи сила и зове се Статика (фр. Statique нем. Statik) од грчке речи *στα* стојати. — Други део занима се са упознавањем узрока — сила — и закона, по којима се тела крећу, и зове се Динамика (фр. Dynamique нем. Dynamik) од грчке речи *δύναμις* која значи сила. Овај део обувата сва начела и правила, помоћу којих можемо решити сва питања о кретању тела.

Сва тела у природи по свом саставу или су чврста или течна.

Чврста тела (corps solides, нем. fester körper) јесу она, код којих се молекули (делићи) налазе један према другом у опредељеном положају, и тако међусобно сајужени да извесну слику образују, и осим тога да је извесна сила нуждна, која би овај међусобни положај молекула пореметити могла. Ако ова промена међусобног положаја молекула непрелази извесну границу, онда се код ових тела молекули

---

[1] По историји, Статика је као наука за осамнајест столећа старија од Динамике. Статика почиње са Архимедом, који је оставио два дела односећа се на теорију равнотеже. Динамика пак почиње са Галилеом, који је поставио законе о падању тешки тела. и о параболном кретању бачени тела, Хиген, Невтон и посљедоватељи њиови развијајући мисли Галилеове разрешили су највећи број задатака, који се односе на кретање тела изложени дејству дати сила.

враћају у свој првобитни положај, чим вопросна сила престане дејствовати.

Течна тела (фр. fluides нем. flüssig) јесу она, код којих су молекули тако покретни, да и најмањи узрок може њин међусобни положај тако пореметити, да ово поремећење, ма како мало било, неизчезава са узроком, који га је произвео.

Течна су тела двојаког рода: једна су капљичаво-течна (фр. liquides нем. tropfbarflüssig) као што је н. пр. вода, и молекули овакови тела држе се међусобно у сајузу са врло незнатном привлачном силом, која се зове кохезија (cohésion); а друга су еластично или боље гасовито течна (фр. fluides élastiques, gazeux, aëriformes; нем. ausdehnsamflüssig, gasförmig) као што је н. пр. ваздух, пара, и т. д. молекули ових тела узајамно се одбијају и теже да се рашире. —

Из ове природне поделе тела сљедује, да и напред именована два дела меканике, т. ј. Статика и Динамика имају ова своја под-оделења.

1. Статика чврсти тела или Геостатика.

2. Динамика „ „ „ Геодинамика.

3. Статика капљичаво течни тела или Хидростатика.

4. Динамика „ „ „ „ Хидродинамика која се јошт зове и Хидраулика (фр. Hydraulique нем. Hydraulik).

5. Статика гасовито течни тела или Аеростатика.

6. Динамика „ „ „ „ Аеродинамика која се јошт зове и Пнематика (фр. Pneumatique, нем. Pneumatik).

Кретање тела нарочито при махинама, можемо испитивати, без да се и најмање обзиремо, како на узроке, који ова кретања производе или их преиначавају, тако и на материју, из које се тела састоје, сљедствено можемо материална т. ј. физичка тела сматрати као чисто геометрична.

Оваково испитивање кретања образује за себе један одељак меканике, који је француз Ampère[1] назвао Кинематика (фр. Cinématique нем. Kinématik или и Phoronomie) од грчке речи *Κιγημα* која значи кретање.

---

[1] Essai sur la Philosophie de Sciences p. 50 1834.

Кинематика може се сматрати као неки увод у Меканику. Кад се добро знаду правила и теореми које Кинематика, о разноврстном кретању тела излаже, онда је млого лакше сватити и сва кретања, са којима се Динамика бави, и која су више за разумевање сложенија због тога што долазе у рачун разни узроци т. ј. силе, које ова кретања производе, а тако исто мора се у рачун узети и материја из које су тела састављена. Но осим тога Кинематика има и своју особену практичну корист, а то је та, што су само на основу њених правила изнађени врло млоги меканизми, при којима силе служе као потреба другог реда.

У геометрији употребљујемо по који пут кретање, да извесне геометриске теореме докажемо или да неке дефиниције поставимо, тако н. пр. кажемо да права пруга постаје премештајем тачке из једног њеног положаја у други; кретањем пруге добијамо површину, а кретањем површине тело и т. д. Но при оваковом кретању, ми сматрамо само разне положаје, које постепено заузимљу тачка, пруга, или површина, без и најмањег обзира на време, које ове геометријске количине требају, да из једног свог положаја у други пређу. У кинематики пак, да закон кретања подпуно дознамо, морамо у рачун узети јошт и време.

Овде имамо приметити да се време неда простим изразом определити — дефинисати. — Из изкуства само знамо да је оно безгранично и непрекидно — континуално — но ништа нам не смета да овако безгранично време можемо делити на делове, и сваки овакав део времена ограничен је јер има свој почетак и свршетак. — Потоме можено лако имати појма о трајању једног дела времена, који би раван био другом неком делу, па ма какве величине ови делови били; можемо лако изнаћи отношење, које постоји између два трајања и т. д. Из тога сљедује да се време, или боље, делови времена, као количине могу у рачун узимати.

Изложивши овако у кратко прве основне појмове и главну поделу меканике, ми ћемо сада да се упустимо у пространије штудирање правила појединих њени делова, а да би ово штудирање себи олакшали, поделићемо Кинематику, као науку и као увод у меканику на два дела. У првом делу изложићемо сва правила, која се односе на разноврстна кретања, најпре једне тачке, а затим тела. У другом делу видићемо како се ова правила примењују на поједине органе најпростијих и у practици најобичнијих махина.

КИНЕМАТИКА.

I ДЕО.

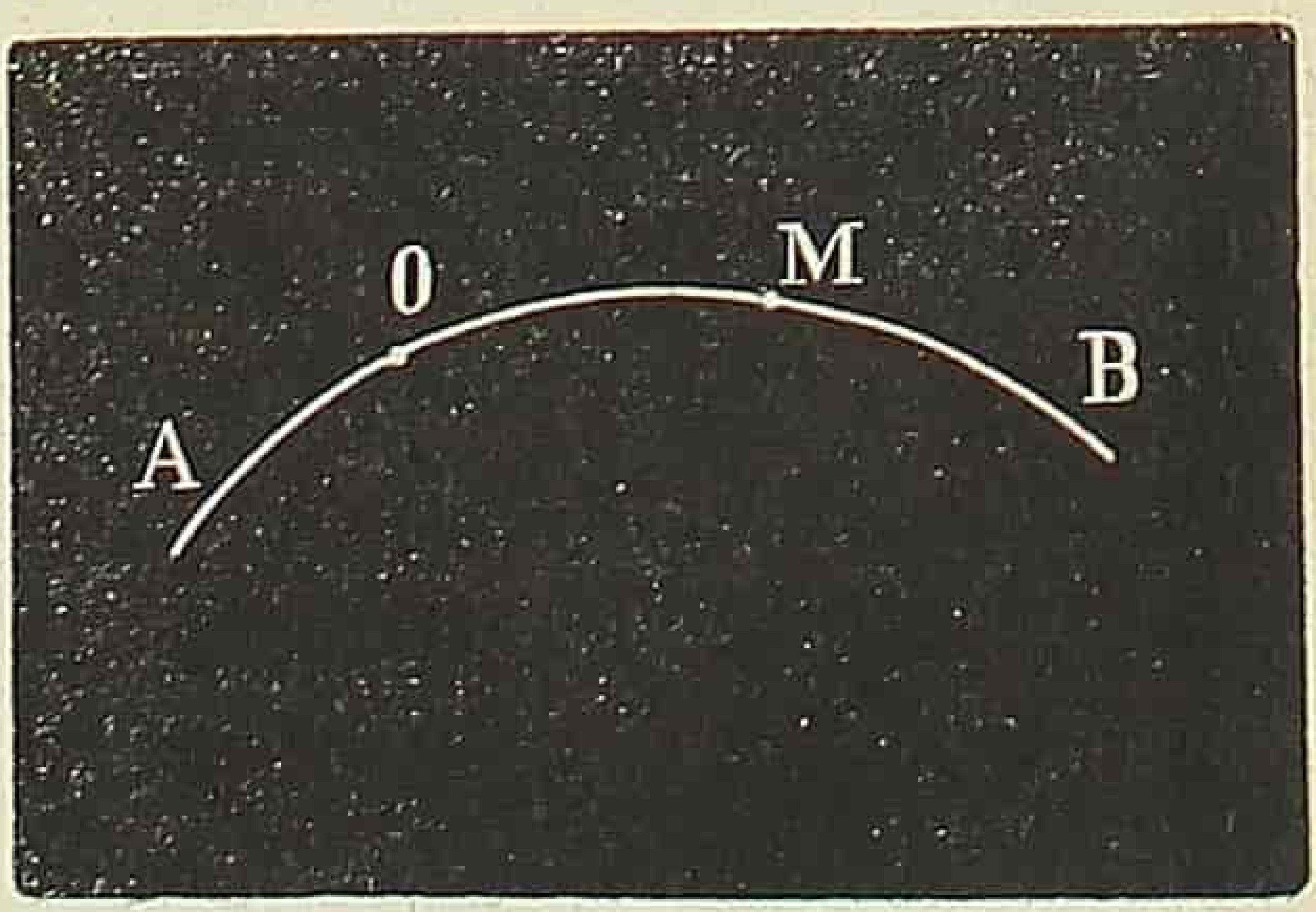
Кретање без обзира на узроке који га производе.

Кретање тачке у опште.

1. Кад сматрамо кретање неке тачке у опште, онда видимо, да она непрекидно — континуално — пролази извесни неки простор, т. ј. она непрелази нити може прећи, из једног свог положаја у други, без да не прође и све остале положаје, који се између ова два могу замислити. У овом кретању, тачка описује праву или криву пругу, која се зове пут кретне тачке (ф. trajectoire, нем. Weg).

2. Кретање неке тачке зове се правопружно (фр. rectiligne нем. geradlinig) или криво-пружно (фр. curviligne нем. krummlinig) потоме како је њен пут права или крива пруга.

3. Да би кретање какве тачке подпуно определили, морамо двоје у рачун узети, и то: прво њен постепени премештај из једног положаја у други, дакле њен пут и закон, по коме се она креће, и друго; време за које се креће. Тако н. пр. ако је AB пут кретне тачке Сл. 1. M њен положај на крају времена t; O нека стална точка на њеном путу, ако даље означимо са s одстојање OM, које може бити позитивно или негативно, потоме како се M буде налазило са једне или са друге стране сталне тачке O; онда кретање тачка биће савршено опредељено, ако нам буде познат јошт и израз.



Сл. 1.

$$s = f(t).$$

који постоји између одстојања s, и времена t; и којим је кретање подпуно представљено. Овај израз зове се једначина кретања кретне точке.

4. Кретање неке тачке или је једно-мерно (фр. uniforme нем. gleichförmig) или мењиво (фр. varié нем. ungleichförmig).

Кад се једна тачка тако креће, да у једнаким деловима времена, па ма како мали ови делови били, прође и једнаке путове, или што исто значи, ако су тачком протрчани путови, сразмерни одговарајућим деловима времена, онда се таково њено кретање зове једномерно.

Свако друго кретање тачке, које није једномерно, зове се мењиво. При оваковом кретању, путови, које тачка пролази нису у опште сразмерни одговарајућим деловима времена.

5. Ако тачка само у неким једнаким деловима времена, прође једнаке путове, онда се таково њено кретање зове периодично (фр. mouvement périodiquement uniforme, нем. periodische Bewegung). Може се узети да се периодично кретање тачке налази, између једномерног и мењивог њеног кретања.

Ми ћемо сада засебно и опширније испитати ова разна кретања тачке.[1]

I Једномерно кретање тачке.

6: Једномерна кретања двеју или више тачака, могу се међу собом разликовати величином пута, који тачке једновремено пролазиле буду. Ова разлика у величини пута, постаје на сваки начин у сљед бржег или споријег кретања појединих тачака; и отуда постаје појам о брзини.

Да би брзину, као нуждни елеменат, могли у рачун узети, и тиме једномерна кретања тачака подпуно определити, морамо предходно тачну дефиницију о брзини поставити.

---

[1] Као пример периодичног кретања може се навести, кретање секундне сказаљке каквог сата, кретање животиња, воденичног кола (roue hydraulique) замајног точка какве парне машине и т. д.

7. При једномерном кретању, *брзина је тачке: пут, који она пролази за јединицу времена* или другим речма: *отношење (размера) измађу учињеног пута и употребљеног зато времена.* Потоме тачка, које би брзина била представљена бројем 1; протрчала би јединицу дужине у јединици времена.[1]

По овој дефиницији брзине, лако је сватити, да ће при једном истом једномерном кретању, количина, којом је представљена брзина тачке, бити тим већа, што је јединица времена већа.

Тако исто лако је увидети, да се ова количина мења са јединицом дужина, и она је тим већа, што је јединица дужина мања. — Можемо дакле казати да је брзина неке тачке, која се једномерно креће, таква количина, која зависи од избора јединице за мерење времена и јединице за мерење дужина.[2]

8. Из свега што је о брзини речено сљедује, да кад оћемо брзину бројем да изразимо, онда морамо предходно да означимо јединице, којима се време, и дужине мере. У меканики узима се обично као јединица за мерење времена *једна секунда* (т. ј. $\frac{1}{86400}$ део средњег дана). Што се пак тиче јединице за мерење дужина, ми ћемо узети метар. И сад кад кажемо да је брзина неке тачке, толико метара, онда треба свагда разумети, да толики пут тачка учини у једној секунди.

9. Често је брзина изражена и другим мерама, тако на прилику каже се да је брзина неке тачке толико стопа за један минут или толико миља за један сат и т. д. Ако би брзина једномерног кретања овако изражена била, неће бити тежко изразити исту брзину у метрима за секунду. Тако н. пр. узмимо да нека точка учини 4 километра за сат. Њена брзина у метрима за секунду биће: $\frac{4000}{3600} = \frac{10}{9}$ $1^m,111$ —

---

[1] Није потребно овде навести да се неможе сравњивати простор са временом. Овде је изражено само отношење обе ове количине, однешене на њине дотичне јединице.

[2] Отуда сљедује да неможе бити говора о јединици брзина. Брзина је абстрахни број, кога се величина једновремено мења са јединицом дужине и јединицом времена.

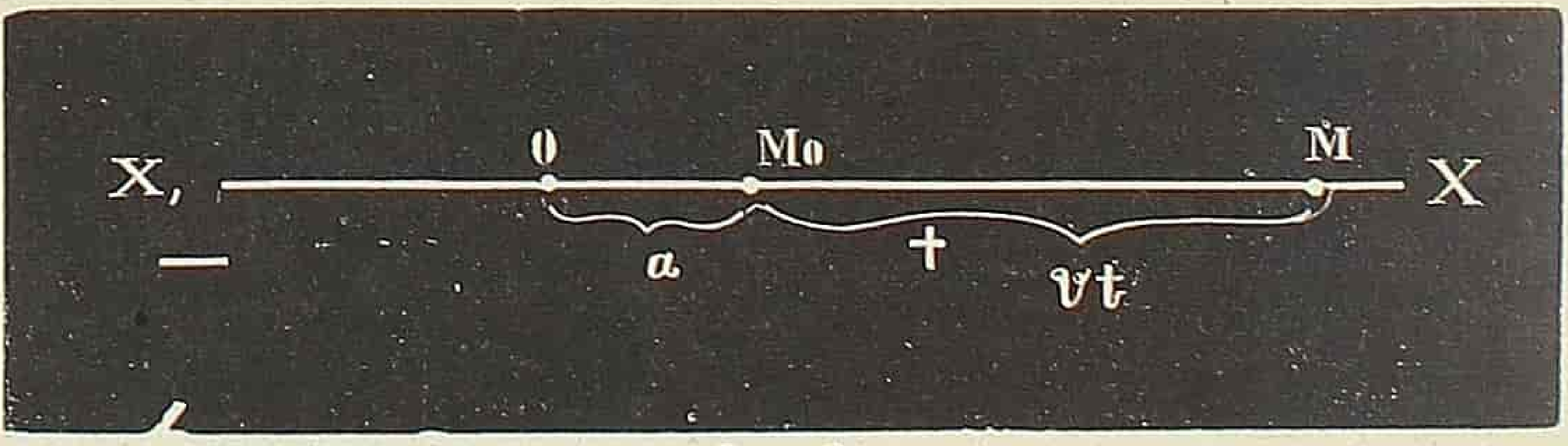
Тако исто ако је брзина неке тачке 100 инглески стопа за минут, то је њена брзина у метрима за секунду $\frac{100.\ 0,3049}{60} = 0,508$ и т. д.

При морепловству брзине лађи изражене су тако званим чвором (фр. noeud нем. knoten). — Колико чворова једна лађа за пола минута пројђе, толико морски миља она пролази за сат, дакле један чвор одговара једној морској миљи, која износи $1851,^{m}85$ потоме за једну секунду биће $0,^{m}5144$, и дакле брзина неке лађе биће определена множећи $0,^{m}5144$ са бројем чворова.[1]

Једначина једномерног кретања.

10. Једномерно кретање тачке по каквој правој или кривој пруги, може се представити једначином првог степена, између протрчаног пута, и употребљеног зато времена.

И заиста означимо са t време, које рачунамо од извесног неког тренутка, са x, одстојање кретне тачне M од



Сл. 2.

неког утврђеног почетка O на неопредељеној правој $\overline{OX}$ Сл. 2 по којој се тачка M креће, са a, одстојање $\overline{OMo}$ од почетка O до тачке Mo, у којој се M налази кад је $t = o$ (дакле у самом почетку времена t). Напоследку нека је v, брзина тачке M или њен пут, који она прелази у јединици времена.

Почем је то тако ми имамо сада да поставимо једначину, помоћу које могли би дознати положај тачке M у ма каком тренутку, т. ј. једначину између x и t.

---

[1] Одстојање између два чвора износи $15,^{m}432$ или $\frac{1}{120}$ морске миље од којих 60 на један степен иду: дакле једна морска миља = 120 чворова = $1851,^{m}81$ = 1,85185 километра. 1 километар = 0,54 морски миља = 0,13477 географски миља. 1 географска миља = $7420,^{m}4$.

Ово ћемо овако учинити. Почем тачка пролази пут v за јединицу времена, то ће она за време t учинити пут vt, и ако предпоставимо да се тачка M креће у правцу $\overline{OX}$, који овде узимамо као позитиван онда ће бити.

$$x = a + vt \ldots\ldots (1)$$

и ово је једначина једномерног кретања тачке, која вреди за ма какво време t.

11. У овој једначини количине x, a, v и t; могу бити позитивне и негативне. Тако н. пр. ако би узели да се тачка M креће у правцу, који би био противположен пређашњем правцу $\overline{OX}$ а тако исто и тачка Mo налази се са противположене стране почетне тачке O онда ће x и a бити негативно, дакле знак количине x и a, зависи од положаја тачке Mo и M према сталној тачки O. Тако исто ако би хтели да определимо разне положаје кретне тачке M, пре почетка времена t, онда у предходећој једначини треба узети t негативно. Напослетку ако узмемо да је v негативно, онда ће то значити да се тачка M креће у правцу, који је противположен узетом позитивном правцу $\overline{OX}$.

Тако дакле једначина под (1) представља нам сва могућа једномерна кретања тачке, за ма какво време и ма у ком правцу, ако се само количине x, a, v и t, узму са надлежним случају одговарајућим знацима. — Овде имамо јошт напоменути да се v, зове абсолутна брзина кретне тачке (vitesse absolue).

Положај тачке Mo којим је опредељена дужина a, од сталне тачке O и који одговара времену $t = o$ зваћемо почетни положај, кретне тачке, но нетреба узети, да се тачка одатле почела кретати, но да она заузима тај положај у почетном тренутку[1]) времена t.

12. Употребимо једначину под (1) на решење овог задатка.

---

[1] Тренутак нема трајања, као што геометричка тачка нема дебљине ни дужине.

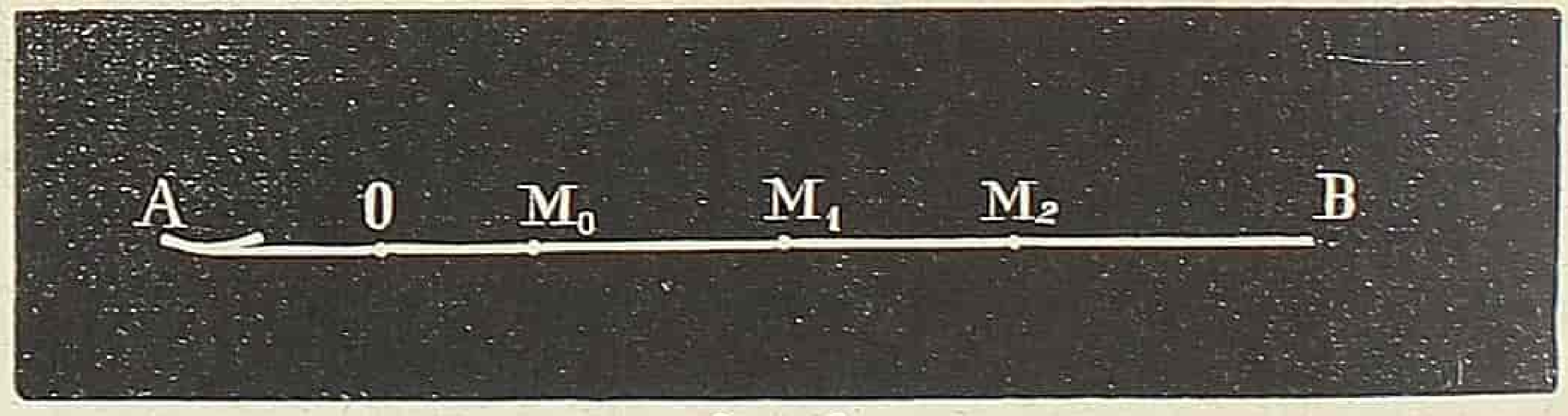
Знајући положај неке тачке M у два дата тренутка; и знајући да је њено кретање по датој пруги AB једномерно да се изнађе једначина овог кретања.

Решење. Тражена једначина мора бити вида:

$$x = a + vt \ldots . (\alpha)$$

Но сталне количине a и v, нису непосредно дате, морамо их дакле определити.

Ради тога ми ћемо повољно узети сталну тачку O, Сл. 3 од које ћемо рачунати дужине пута и времена.



Сл. 3.

Нека су $\overline{OM_1} = x_1$; $\overline{OM_2} = x_2$ одстојања тачке M у два дата положаја од сталне тачке O; t_1 и t_2 времена одговарајућа овим остојањима.

Постављајући сада у једн. под (α) место x и t ове вредности имаћемо:

$$x_1 = a + vt_1 \text{ и } x_2 = a + vt_2 \text{ отуда}$$

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \text{ и } a = \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{t_2 - t_1}$$

Почем је a и v опредељено овим једначинама имаћемо

$$x = \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{t_2 - t_1} + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} t$$

једначину, којом се може определити положај тачке у сваком тренутку.

Приметба. Ова једначина може се и овако написати:

$$x = \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1 + x_2 t. - x_1 t.}{t_2 - t_1} = \frac{x_2(t - t_1) + x_1 t_2 - x_1 t}{t_2 - t_1}$$

Ако бројитељу додамо и одузмемо $x_1 t_1$ биће

$$x = \frac{x_2 (t - t_1) + x_1 t_2 - x_1 t + x_1 t_1 - x_1 t_1}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{x_2 (t - t_1) - x_1 (t - t_1) + x_1 (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} (t - t_1) + x_1$$

$$\text{отуда } x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} (t - t_1).$$

сасвим подобним начином добиећемо

$$x - x_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} (t - t_2).$$

Ако посмотримо ова два последња израза увидиећемо, да смо их могли непосредно одма написати, примечавајући да тачка за време $(t - t_1)$ пролази пут $(x - x_1)$ са брзином $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.

13. Узимимо два једномерна кретања неке тачке, која се међу собом разликују, и нека је $x = vt$ једначина једног, а $x_1 = vt_1$ једначина оног друго кретања. Делећи ове две једначане једну са другом добиећемо

$$\frac{x}{x_1} = \frac{vt}{vt_1}$$

Ако сад узмемо $t = t_1$; имаћемо

$$\frac{x}{x_1} = \frac{v}{v_1}$$

Поставимо ли $v = v_1$ онда ће бити

$$\frac{x}{x_1} = \frac{t}{t_1} \text{ и напоследку}$$

ако је $x = x_1$ онда сљедује да је $\frac{v}{v_1} = \frac{t_1}{t}$ а то ће рећи:

1. Путови, које тачка пролази за једно исто време са разним брзинама, сразмерни су одговарајућим брзинама.

2. Ако је брзина једна иста онда су путови сразмерни одговарајућим временима, и

3, Ако су путови исти, онда брзине стоје у преокренутој сразмери времена.

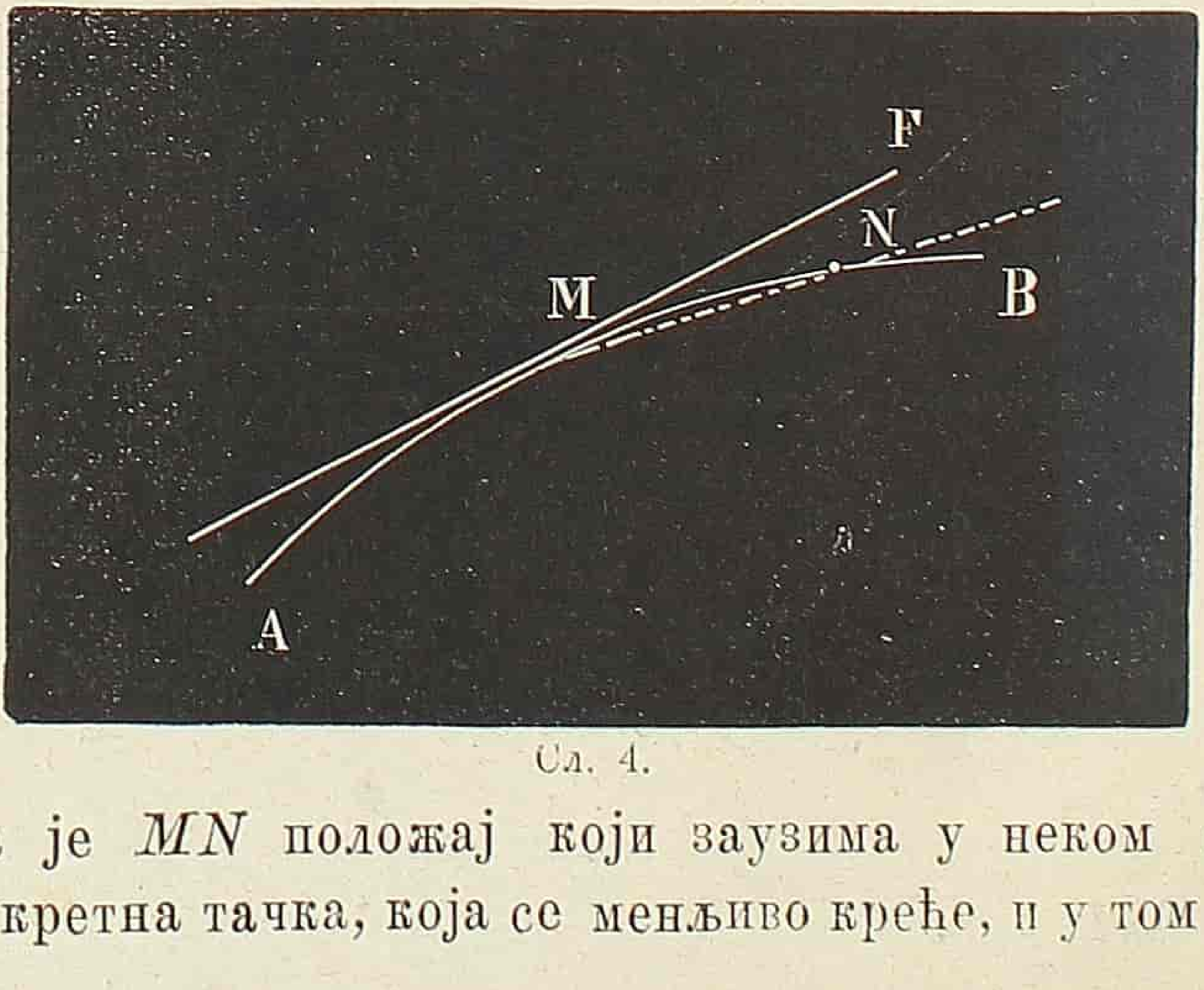
II Менљиво кретање тачке у опште.

14. Ми смо казали да кад се нека тачка тако креће, да њоме протрчани путови нису више сразмерни одговарајућим деловима времена, онда таково кретања зове се менљиво.

При менљивом кретању неможемо више звати брзином тачке, *протрчати пут за јединицу времена* јер у овом случају брзина се више мање неправилно мења, у доста малим и једнаким деловима времена.

Ако би са увећавањем времена и брзина непрестано расла, онда се каже, да је кретање убрзано (фр. mouvenent accélerée; нем. beschleunigte Bewegung). Напротив ако би се са увећањем времена, брзина непрестано умаљавала, онда се каже да је кретање успорено (фр. mouvement retardé нем. verzögerte Bewegung).

15, При менљивом кретању, важно је да знамо шта се разуме под брзимом тачке у неком извесном тренутку.



Сл. 4.

Нека је *MN* положај који заузима у неком извесном тренутку кретна тачка, која се менљиво креће, и у том кретању описује ма какву пругу $\overline{AB}$ Сл. 4. После извесног времена Δt, рецимо да ће се вопросна тачка налазити у N и да је за то време описала лук Δs. Ако сад поделимо Δs са Δt количник $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ биће средња брзина са којом је тачка овај пут Δs учинила; т. ј. кад би предпоставили да је кретање тачке једномерно онда $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ представљаће управо протрчани пут за јединицу времена, а Δs биће пут, који тачка пролази за време Δt, правац пак ове брзине биће управљен по тетивки $\overline{MN}$.

Ако сад предпоставимо да се Δt безкрајно умаљава, онда ће се и лук Δs непрестано умаљавати, средња пак брзина или количник $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ приближаваће се некој извесној граничној вредности, а правац тетивке $\overline{MN}$ приближаваће се правцу тангенће $\overline{MT}$ у M повученој. И ова гранична вредност количника $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, која се по појму диференцијалног рачуна обично са $\frac{ds}{dt}$ означава, јест брзина кретне тачке у тренутку кад се у M налази.

Дакле при менљивом кретању, брзина кретне тачке, у неком извесном тренутку, и у некој извесној тачки свога пута, опредељена је количником од безкрање малог позитивног или негативног простора ds са безкрајно малим временом dt, које је потребно тачки да $\overline{ds}$ прође.

16. Ако је $s = f(t)$ једначина кретања, и ако означимо са v, брзину тачке у неком извесном тренутку, онда ћемо по напред реченом имати

$$v = \frac{ds}{dt} = f_1(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ова брзина може бити позитивна или негативна, потоме како се тачка буде кретала у правцу, који је узет за позитиван или негативан.

Обратно, ако би брзина била дата, као функција времена t, онда можемо лако изнаћи отношење између учињеног пута и употребљеног зато времена, и заиста из једначине под (1) имамо

$$ds = f_1 (t)\, dt \text{ и отуда}$$

$$s - s_0 = \int_0^t f_1 (t)\, dt.$$

17. Ако поставимо $\frac{dx}{dt} = v$; означавајући овде са v неку сталну позитивну или негативну количину, онда ће нам овај израз представљати сва једномерна кретања. Ову једначину можемо добити, диференцирајући једначину $x = a + vt$; као и обратно интегралећи израз $ds = vdt$ долазимо до предходеће једначине, ако реченом интегралу додамо јошт неку сталну повољну количину a.

Израз $\frac{dx}{dt} = v$ зове се диференциална једначина једномерног кретања.

Једномерно-мењљиво кретање.

18. После једномерног кретања, долази као најпростије једномерно-мењљиво кретање (фр. mouvement uniformément varié нем. Gleichförmig veränderte Bewegung). При овом кретању брзина v није стална, али се једномерно мења, т. ј. њено увећавање или умаљавање сразмерно је увећавању времена. Отуда сљедује да је прва изводна брзине v т. ј. $\frac{dv}{dt}$ нека стална количина, и заиста, ако се брзина v, за свако безкрајно мало време dt увећава са dv, онда за јединицу времена, постаће нека извесна стална количина. Ако дакле ову сталну количину означимо са j, која може бити позитивна или негативна, онда општа једначина, којом је представљено свако једномерно-мерљиво кретање биће:

$$\frac{dv}{dt} = \pm j \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} = \pm j, \text{ јер је}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Отуда добијамо интегралењем

$$v = \pm jt + b = \frac{dx}{dt}$$

Сад ако сматрамо кретање тачке, само за време, за које се њена брзина увећава или умаљава, онда је $b = o$, јер за $t = o$ и v је $= o$; напротив, ако је тачка имала већ неку сталну брзину v_0 пре но што се почела убрзано или успорено да креће, онда b није o, већ то исто што и v_0; потоме за први случај биће:

$$v = jt = \frac{dx}{dt}; \text{ отуда}$$

$$dx = jtdt; \text{ и } x = j\int_0^t tdt = \tfrac{1}{2}\, jt^2$$

а за други случај

$$v = v_0 + jt = \frac{dx}{dt}; \text{ одкуда}$$

$$dx = (v_0 + jt)\, dt \text{ и } x = \int_0^t (v_0 + jt)\, dt = v_0 t + \tfrac{1}{2}\, jt^2 + \text{C}.$$

Што се тиче сталне количине C, имамо то исто приметити што и горе, т. ј. ако сматрамо кретање тачке само за време њеног убрзавања, онда је за $t = o$ и $x = o$ дакле и $C = o$; ако је пак тачка већ учинила неки пут пре но што се почела убрзо или успорено да креће, онда је стална количина C равна том учињеном путу.

Ако дакле означимо овај пут са x_0 добићемо ове три једначине.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{y} + v_0 t \pm \tfrac{1}{2} jt^2 \\ v &= v_0 \pm jt \\ \frac{dv}{dt} &= \pm j \end{aligned}\right\} \dots \text{I.}$$

којима је једномерно-менљиво кретање у опште представљено, с том приметбом да знак позитиван вреди за једномерно убрзано, а знак негативан за једномерно успорено кретање (фр. mouvement uniformément accélèré et uniformement retardé; нем. gleichförmig-beschleunigte und gleichförmig-verzögerte Bewegung).

19. Из тога што досад рекосмо о једномерно-менљивом кретању можемо укратко извести ова закључења:

1. При кретању представљено једначином

$$x = x_0 + vt \pm \tfrac{1}{2} jt^2$$

брзина се мења у сваком тренутку.

2. Величина ове брзине, у почетку времена t равна је позитивној или негативној количини v_0; која је почетна брзина тачке.

3. Брзина се увећава или умаљава у јединици времена, са сталном позитивном или негативном количином j; која се зове акцелерација.

4. Ако из прве две једначине под (1) елиминирамо j добићемо

$$x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t \text{ или } \frac{x - x_0}{t} = \frac{v_0 + v}{2},$$

а то ће рећи: при једномерно убрзаном кретању, средња брзина за извесно неко време t, средња је аритметичка сразмера, између брзина два крајња тренутка времена t.

Ако сматрамо кретање само за време убрзавања, т. ј. кад је x_0 и v_0 нулла, онда је $x = \frac{vt}{2}$, дакле при једномерно-менљивом кретању, учињен пут раван је само половини пута, који би тачка за исто време учинила, кад би се са сталном брзином v, дакле једномерно кретала.

5. Ако у првој једначини под (1) узмемо $t = 1$; а x_0 и $v_0 = o$, онда је $x = \frac{1}{2} j$, или $j = 2x$; дакле при једномерно убрзаном кретању, акцелерација равна је удвојеном путу, који тачка пролази у првој секунди.

6. Из прве једначине под (I) можемо лако и то видети, да се путови, које тачка пролази, увећавају као квадрати времена. Осим тога елиминирајући t средством прве и друге једначине, добијамо

$$v^2 - v_0^2 = 2j\,(x - x_0),$$

а то ће рећи, да је разлика квадрата брзина, равна удвојеном производу из сталне акцелерације и протрчаног пута.

20. Узмимо да се две тачке налазе у једномерно-менљивом кретању, но тако да се ова кретања међусобом разликују, и означимо са v и j брзину и акцелерацију једне тачке, а са x њен пут, који она пролази за време t; нека су v_1, j_1 x_1 и t_1 подобне количине за другу тачку; имаћемо:

$$v = jt \qquad v_1 = j_1 t_1$$

и

$$x = \frac{1}{2} jt^2 \qquad x_1 = \frac{1}{2} j_1 t_1 \quad \text{отуда}$$

$$\frac{v}{v_1} = \frac{jt}{j_1 t_1}\,;\ \frac{x}{x_1} = \frac{jt^2}{j_1 t_1^2} = \frac{vt}{v_1 t_1} = \frac{v^2 j_1}{v_1^2 j}$$

Из ових једначина сљедује:

1. Ако поставимо $t = t_1$ онда ће бити

$$\frac{x}{x_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{j}{j_1}, \text{ а то ће рећи:}$$

Путови, које тачке пролазе за једно исто време једномерно-менљиво кретајући се, стоје у сразмери одговарајући брзина или акцелерација.

2. Ако узмемо $j = j_1$ биће

$$\frac{v}{v_1} = \frac{t}{t_1}; \text{ и } \frac{x}{x_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{v^2}{v_1^2} \text{ што ће рећи:}$$

При једнаким акцелерацијама, дакле при једном истом једномерно-менљивом кретању, брзине стоје у истој размери, као одговарајућа времена, а протрчани путови као квадрати ови времена, или као квадрати крајњи брзива.

3. Поставимо ли $v = v_1$ добићемо:

$$\frac{j}{j_1} = \frac{t_1^2}{t}; \text{ а } \frac{x}{x_1} = \frac{t}{t_1} \text{ т. ј.}$$

При једнаким крајњим брзинама, акцелерације стоје у преокренутој, а протрчани путови у управној сразмери одговарајући времена.

4. Напоследку ако узмемо $x = x_1$ биће:

$$\frac{j}{j_1} = \frac{t_1^2}{t^2} = \frac{v^2}{v_1^2} \text{ а то ће рећи:}$$

При једнаким протрчаним путовима акцелерације стоје у преокренутој размери квадрата одговарајућим времена, а у упвавној размери квадрата брзина.

Приметба. Ми смо се овде при једномерно менљивом кретању нешто дуже задржали због тога, што ово кретање служи за сравњивање свију други менљиви или неправилни кретања, као што ћемо ниже видети. Доцније пак упознаћемо се јошт више са једномерно менљивим кретањем.

Правопружно менљиво кретање.

21. У напред реченом ми смо предпоставили да се тачка креће по ма каквој пруги. Но сада почем ћемо се упустити јошт у дубље штудирање кретања, ми ћемо најпре предпоставити, ради лакшег испитивања, да оно бива по правој пруги.

22. Појам о акцелерацији који смо при једномерно-менљивом кретању навели, може се раширити тако исто као и појам о брзини. И заиста

При менљивом кретању у опште има се сматрати не само пут (x) него и брзина (v) као функције времена t; потоме једно оваково (напредно право - пружно) кретање представљено ће бити овим двема једначинама;

$$x = f(t) \ldots\ldots (1)$$

$$v = \varphi(t). \ldots\ldots (2)$$

Што се тиче прве једначине, њену природу или боље њен значај можемо одма лако сватити, ако се опоменемо свега оног што смо о брзини мењљивог кретања казали. — При овом кретању предпоставили смо, да кретна тачка у безкрајно малим временима (dt) пролази једномерно, безкрајно мале елементе (dx) пута, другче речено, ако означимо са (v) њену брзину, онда је ова брзина.

$$\text{I} \quad v = \frac{dx}{dt} \text{ одкуда}$$

$$x = \int v dt + C.$$

$$t = \int \frac{dx}{v} + C^1.$$

Да би подобан израз за једначину под (2) извели, имамо сљедеће навести. Ако се t увећа за Δt, онда ће се v увећати за Δv, дакле Δv биће увећање брзине на концу времена Δt, а кад је то тако, онда ћемо имати овај из више математике познати ред.

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi t + \varphi_1(t) \Delta t + \varphi_2(t) \frac{(\Delta t)^2}{1 \cdot 2} + \ldots \text{ или}$$

$$v + \Delta v = v + \frac{dv}{dt} \Delta t + \frac{d^2 v}{dt^2} \frac{(\Delta t)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

$$\text{отуда } \Delta v = \frac{dv}{dt} \Delta t + \frac{d^2 v}{dt^2} \frac{(\Delta t)^2}{1 \cdot 2} \ldots \text{ или}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} \frac{(\Delta t)}{2} + \ldots\ldots = \frac{dv}{dt} + \varepsilon$$

означавајући са ε све остале чланове овог реда. Из овог израза лако је сватити да се увећање Δv брзине, од $\frac{dv}{dt} \Delta t$ разликује за безкрајно малу количину ($\varepsilon \Delta t$) у смотрењу самог увећања Δv, потоме ова безкрајно мала количина може се свагда пренебрегнути, кад год се узимљу граничне вредности, т. ј. кад се при непрестаном умаљавању Δt узме гранична вредност, којој се $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ приближава, потоме по познатом означењу имаћемо.

$$lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Ова гранична вредност од $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ коју ћемо ми у будуће означавати са j, зове се акцелерација вопросног кретања, у сматраном тренутку, и као што је израз ове акцелерације идантичан са акцелерацијом јеономерно-менљивог кретања, то отуда сљедује, да се при менљивом кретању у опште, безкрајно мала увећања брзине, могу тако исто рачунати, као кад би кретање једномерно убрзано било, и акцелерација овог посљсдњег кретања, може се узети као акцелерација сваког менљивог кретања, сматрајући при том само безкрајно мале интервале времена.

Из једначине

$$v = \frac{dx}{dt} \ldots\ldots\ \text{I}$$

и . . . .

$$j = \frac{dv}{dt} \ldots\ldots\ \text{II}$$

сљедује . . . .

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} \ldots\ldots\ \text{III}$$

у којој се dt као стално сматра.

Из I и II сљедује даље

$$j = \frac{xdv}{dx} = \frac{\frac{1}{2}d(v^2)}{dx} \ldots\ \text{IV.}$$

Од три последње једначине употребиће се при решењу задатака она, која најбрже цели води.

Општи изрази правопружног кретања.

Из свега досад реченог могли смо се уверити, да при ма каквом правопружном кретању неке тачке, имамо свега четири количине, које морамо у рачун узети. Ове количине јесу: време t; одстојање s кретне тачке од неке сталне тачке; брзина v кретне тачке и напоследку њена акцелерација j.

Кретање тачке биће подпуно опредељено, ако су количине s, v и j познате као функција времена t. — Но између ове четири количине позната су нам већ два израза:

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ и } j = \frac{dv}{dt}$$

Дакле довољно ће бити, ако поставимо јошт један израз између ове исте четири количине па да кретање буде подпуно опредељено.

Ако предпоставимо да се у овом трећем изразу налазе само две од четири количине t, s, v и j; онда се могу десити свега шест сљедећи задатака, које бп имали решити.

I. Дато $s = f(t)$.

Из ове једначине налазима $v = f'(t)$. и $j = f''(t)$.

II. Дато $v = f(t)$

$$\text{отуда } j = f'(t) \text{ и } s = s_0 + \int_9^t f(t)dt.$$

III. Дато $j = \varphi(t)$.

$$\text{имаћемо } v = v_0 + \int_0^t \varphi(t)\, dt = f(t);$$

$$s = s_0 + \int_0^t v dt = s_0 + \int_0^t f(t) dt.$$

IV. Дато $v = \psi(s)$ отуда изволимо

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\psi(s)};\ j = \psi'(s) \frac{ds}{dt} = \psi(s)\cdot\psi'(s).$$

V. Дато $j = \varphi(s)$

једначина $j = \frac{d^2s}{dt^2} = \varphi(s)$ неможе се одма интегралити, но

помножена са $2\frac{ds}{dt}dt$ постаје интеграљива, и отуд добијамо:

$v^2 = v_0{}^2 + \int_{s_0}^{s} \varphi(s) ds$ и тиме долазимо на предходећи задатак под III кад је v дато као функција од s, дакле:

$$v = \psi(s).$$

VI. Дато $j = \varphi(v)$ отуда изводимо

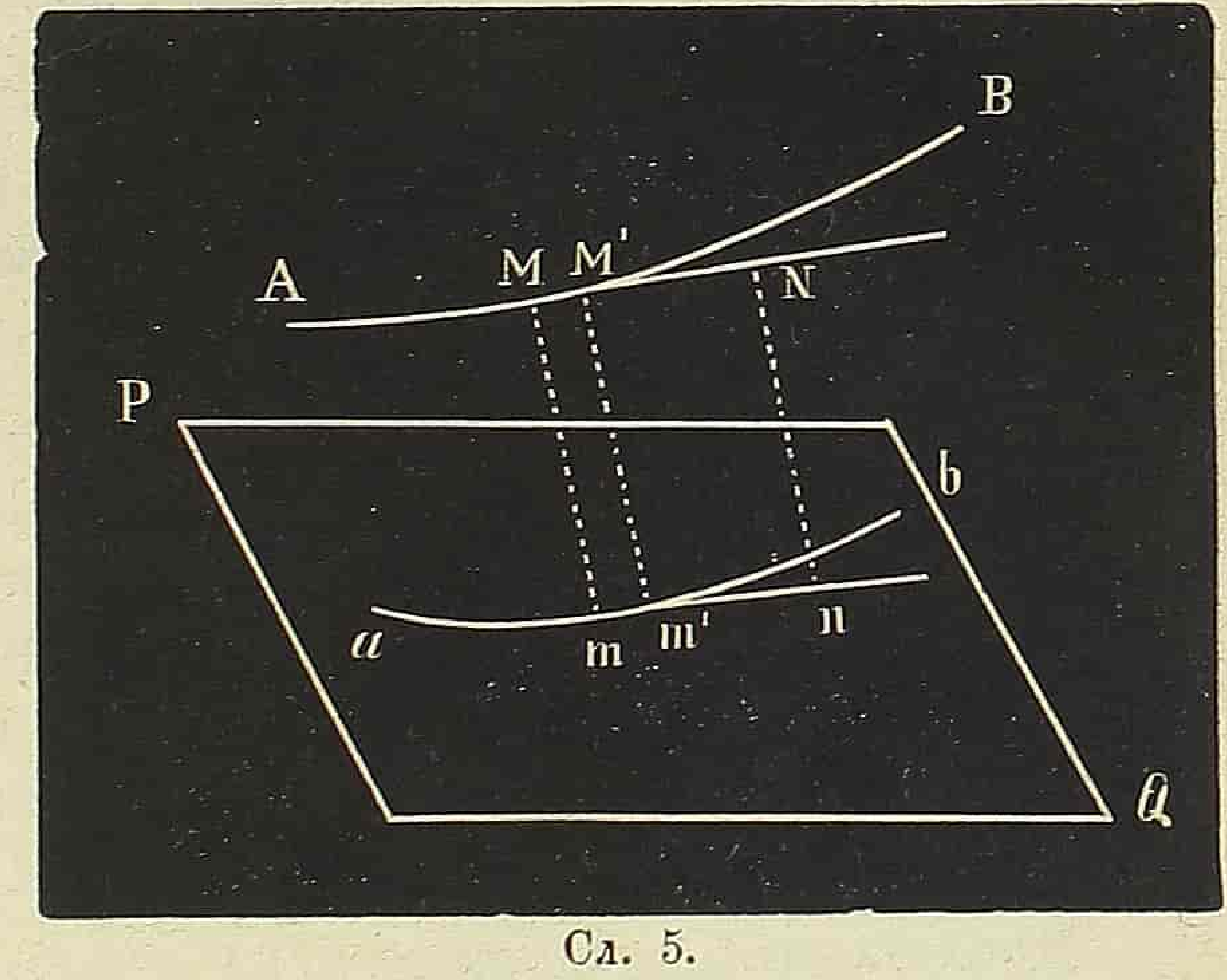
$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\varphi(v)}; \quad s = s_0 + \int_0^t v dt = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f(v)}$$

Као што се види, у овим задатцима имамо по већој части интеграле да определимо. — Кад се ови интеграли недаду непосредно определити, онда се приближно израчунају помоћу тако званог начина квадратуре (види вишу анализу).

Криво-пружно кретање тачке.

23. Правац брзине. Дефиниција коју смо о брзини поставили, независна је од пруге, коју кретна тачка описује, и која се обично зове њен пут (trajectoire). Но при кривопружном кретању мора се у обзир узети јошт и правац брзине. При кривопружном кретању, права, која сајужава два једно за друго сљедећа и у безкрајно малом одстојању налазећа се положаја кретне тачке, има свагда један исти правац, који се слаже са правцем по ком се тачка креће, и који се зове, правац кретања. При кривопружном кретању, права, која сајужава један извесни положај кретне тачке, са положајем, у коме се она после безкрајно малог времена налази, обично се мења са умаљавањем овог интервала, и приближава се извесној граници, која се по некад зове правац кретања у сматраном тренутку, и коју ћемо ми особено назвати правцем брзине у овом тренутку. Очевидно је да се овај правац брзине слаже са тангентом, која је повучена у сматраној тачки пута, и управљена у правцу кретања, као што смо то на једном месту већ напоменули.

Пројекција кретања на неку сталну равнину.



Сл. 5.

24. Узмимо да се тачка M у простору креће и описује ма какав пут AB. Сл. 5. Ако при том њеном кретању, сваки њен положај пројектирамо на неку сталну равнину PQ; онда ћемо тако поступајући, добити пројекцију $\overline{ab}$, коју можемо сматрати као пут, по коме би се кретала пројекција m, кретне тачке M у простору. Дакле пут ab пројектираног кретања ништа друго није, већ пројекција пута AB по коме се тачка у простору креће. Нека је MM' безкрајно мали пут, који тачка у простору пролази за безкрајно мало време dt; а mm' безкрајно мали пут, који њена пројекција за исто време dt у равнини PQ пролази. Очевидно је да је mm', пројекција од MM'. Ако узмемо да је брзина тачке у простору представљена правом $\overline{MN}$, а брзина њене пројекције правом $\overline{mn}$; и ако ове брзине означимо са v и v' имаћемо:

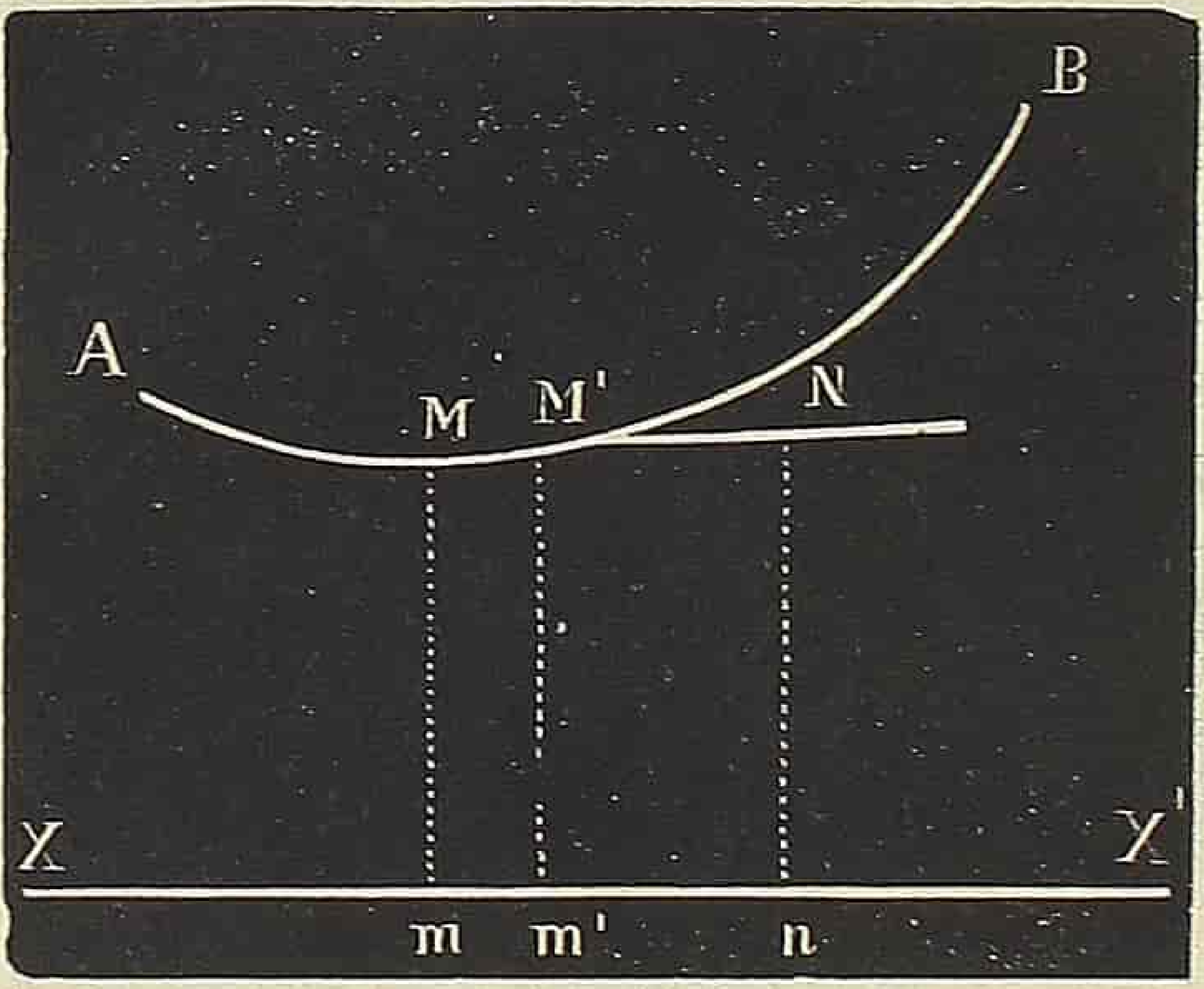
$$v = \frac{MM'}{dt}; \text{ а } v' = \frac{mm'}{dt} \text{ и отуда}$$

$\frac{v}{v'} = \frac{MM'}{mm'}$; дакле ове брзине стоје у размери као безкрајно мали путови MM' и mm', и као што се оне налазе у правцима ових безкрајно малих путова, то отуда сљедује: да брзина mn пројектираног кретања није ништа друго већ пројекција брзине MN кретне тачке у простору.

Ово постоји за сваку пројекцију, т. ј. била она коса или ортогонална.

Пројекција кретања на неку сталну осу.

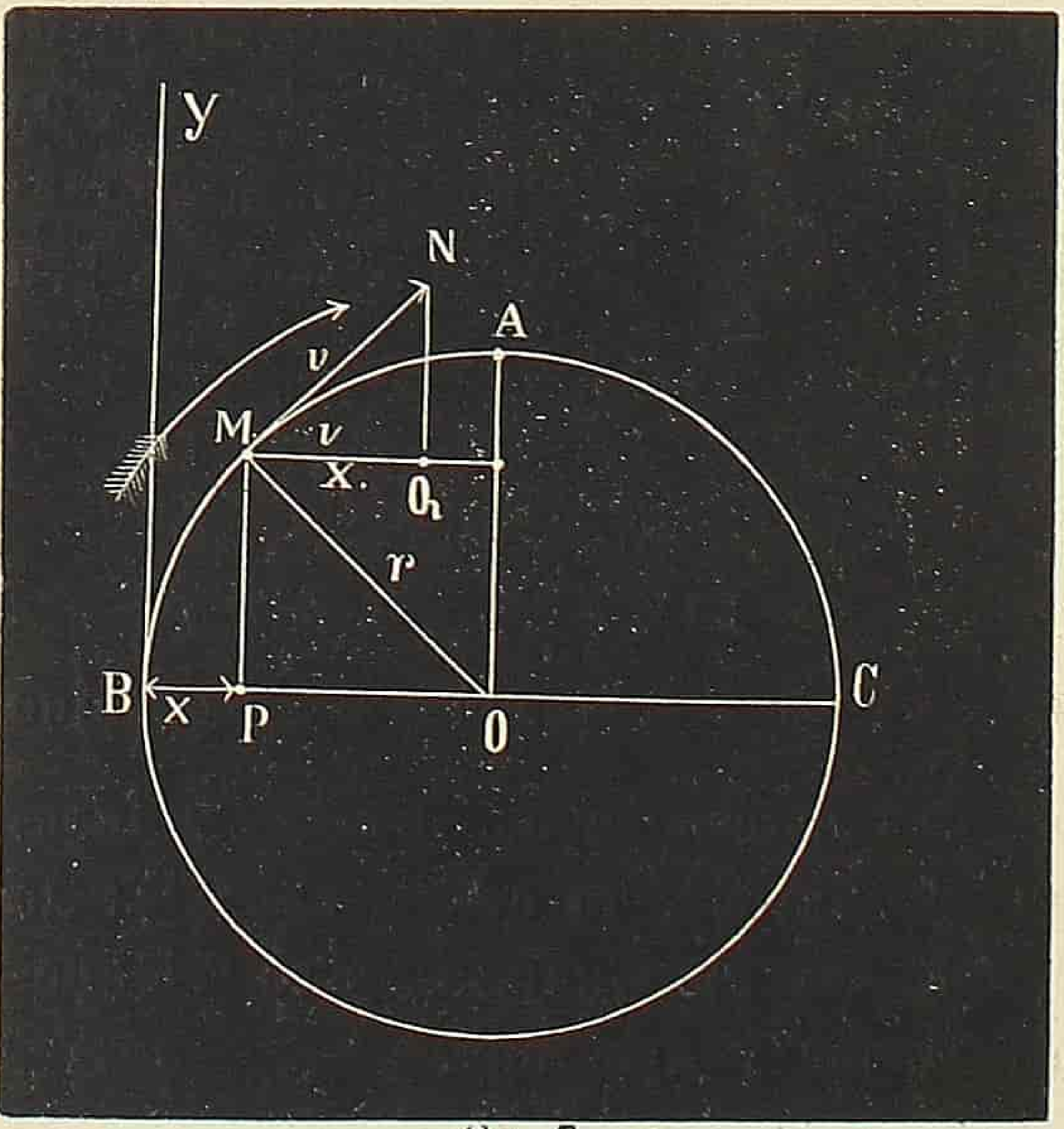
25. Ако пројектирамо стаки положај кретне тачке у простору на неку сталну осу $\overline{XX'}$ Сл. 6 у место сталне равнине, онда пројектирано кретање биће правопружно кретање по оси $\overline{XX'}$. Умствујући као и при пројектирању на сталну равнину, можемо лако видети, да ће и у овом случају брзина пројектираног кретања у ма ком тренутку бити пројекција брзине кретне тачке у простору.



Сл. 6.

26. Да напред речено боље објаснимо, узмимо један пример.

Представимо себи да се нека тачка M једномерно креће по периферији круга BAC Сл. 7 и да њено кретање у сваком тренутку ортогонално пројектирамо на пречник $\overline{BC}$. Тражи се једначина кретања пројекције P. —



Сл. 7.

Решење. Нека је v стална брзина кретне тачке M; r полупречник круга, t време, за које се тачка од B као почетка до M, а њена пројекција од B до P креће.

Нека је напоследку v_x брзина пројекције P на концу времена t. Једначина једномерног кретања по периферіи круга биће

$$s = vt.$$

Означавајући са s лук $\overset{\frown}{BM}$ кои точка пролази за време t.

Даље из саме слике налазимо:

$$x = BP = r\ (1 - cosBOM).$$

Но уго $BOM = \frac{\widehat{BM}}{r} = \frac{vt}{r}$ дакле је $x = r\ (1 - cos\frac{vt}{r})$ и ово је једначина пројектираног кретања.

Диференциалећи ову једначину налазимо $\frac{dx}{dt} = v_x = vsin\frac{vt}{r} = \frac{v\,MP}{r}$ и ово је тражена брзина пројекције P.

Лако је из саме слике видети да је ова брзина v_x заиста пројекција брзине v тачке M, што се слаже са напред изложеном теориом. — Даље да је v_x сразмерна ординати $\overline{MP}$. — Напоследку ова је брзина $= o$ кад се кретна тачка налази у B и C. Највећа је њена вредност v, а ту достиза онда кад се кретна тачка налази у A. Она мења свој знак, кад се кретна тачка налази испод пречника $\overline{BC}$.

Трајање кретања, т. је: време Θ, које потребује кретна тачка да пређе из B у C равно је $\frac{\pi r}{v}$, а да прође једанпут периферију круга. $\frac{2\pi r}{v}$

Графична представа закона кретања.

27. Досад нађени закони кретања тачке, могу се геометриским сликама, т. је графично представити. Ова геометрична представа кретања показује нам очигледно природу вопросног кретања, подпомаже памтење, предупређује знатне погрешке, и напоследку служи по кои пут за лакше и доста тачно изналазење непознати количина. — Нарочито пак кад имамо да дознамо закон каквог кретања средством посматрања, онда смо тако рећи принуђени да се послужимо графичним начином, како би у једно и прегледно могли представити све резултате укупно, које смо сматрањем добили.

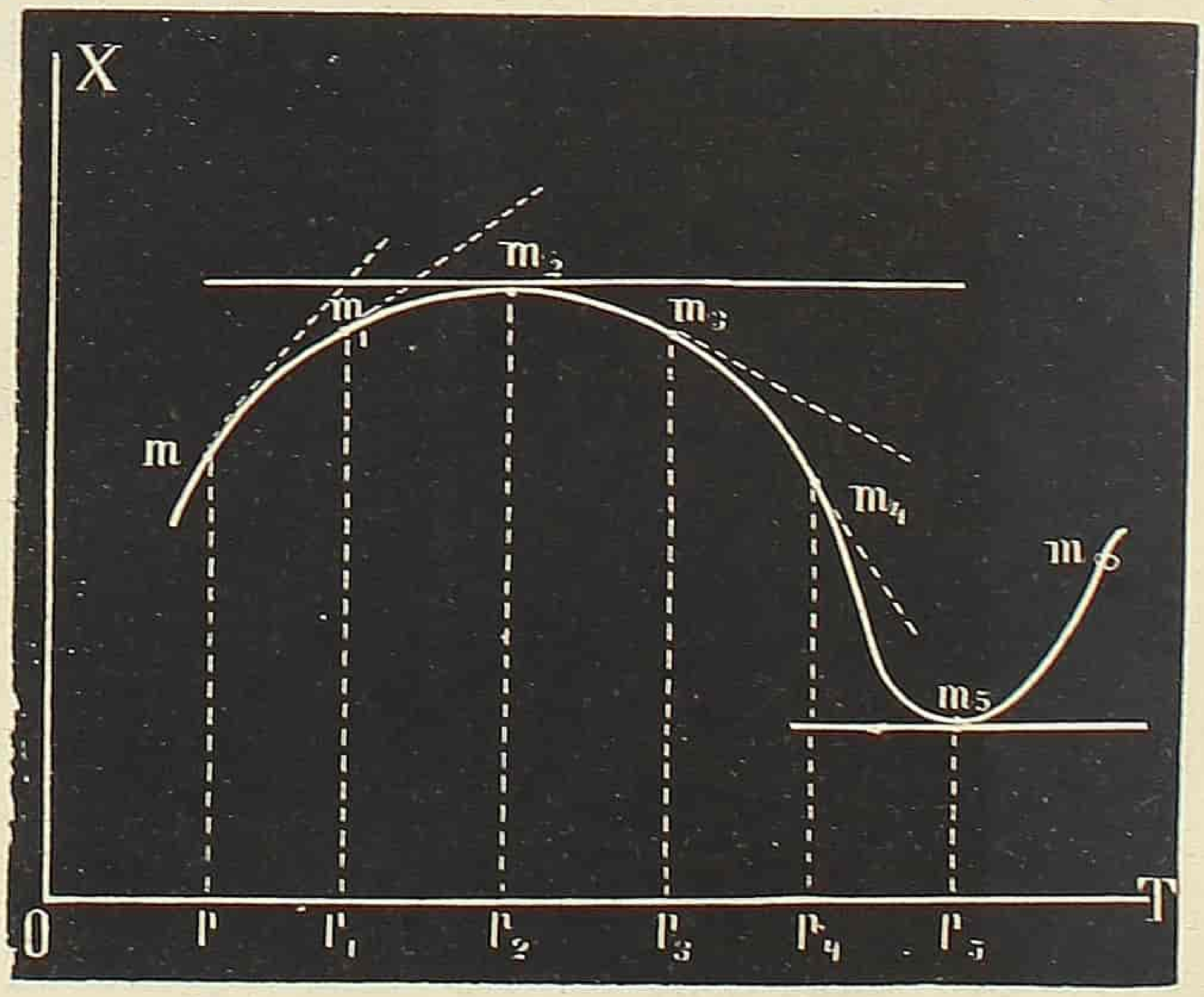
— Због континуалности криви пруга, које тиме добијамо, ни једна иоле мало већа погрешка неће моћи остати неприметна, значајне особине кретања биће очигледно представљене овим сликама. Погрешке, које би произилазиле из несавршенства инструмената, помоћу којих посматрања чинимо, биће исправљене самом трасом слике. — Напоследку сравњивање ови слика са разним познатим пругама, као што су параболичне, хиперболичне, логаритмичне, и тригонометричне пруге и т. д. олакшаће нам да и аналитичне изразе о вопросном кретању поставимо, ако то за нуждно нађемо. — Из ових узрока графична представа кретања, од врло је велике ползе у меканики.

28. Испитајмо сада најпре у опште, како се закон кретања може графично да прведстави. Ради тога нека је:

$$x = f(t)$$

једначина кретања у опште.

Узмимо две ортогоналне осе $\overline{OT}$ и $\overline{OX}$, и нека је сл. 8. прва оса сразмерна времену t за које се тачка у простору кретала, а друга $\overline{OX}$ сразмерна протрчаном путу x. Узмимо даље и то повољно неки део праве $\overline{OT}$, кои ће нам пред-



Сл. 8.

стављати јединицу времена. Ако сад пренесемо по оси $\overline{OT}$ абцисе Op_1 Op_2 Op_3 . . . . сразмерне временима t_1 t_2 t_3 . . . . која времена рачунамо од неког извесног почетног тренутка, затим кроз тачке тако опредељене подигнемо управне сразмерне одговарајућим вредностима x_e онда ћемо тим добити у равнини XOT извесни број тачака, које међу собом сајужене даће нам криву пругу m m_1 m_2 m_3 m_4 . . .

Ова пруга, коју ћемо ми за сада док се боља реч не нађе назвати *пруга простора*, и која је изражена једначином кретања . . . . . $\underline{x = f\ (t)}$. Помаже нам да једним погледом сватимо разна својства кретања, а осим тога служи, да у млогим случајима можемо доста тачно да определимо x, средством времена t и обратно t средством x.

И заиста посмотривши мало напред означену слику налазимо да се кретна тачка најпре све више и више удаљава од сталне тачке O, и ово удаљавање траје дотле, док време t недобије вредност, која одговара абциси Op_2 тачке m_2. За тај случај одстојање кретне тачке од сталне тачке O сразмерно је ординати $\overline{m_2p_2}$. Од овог тренутка кретна тачка мења правац кретања, и враћа се к' сталној тачки O док време t недобије вредност сразмерну абциси $\overline{Op_5}$. У овом случају одстојање кретне тачке од O одговара ординати $\overline{m_5p_5}$ затим опет мења свој правац удаљавајући се од тачке O и т. д.

29. Лако је сватити да за конструкцију ове пруге простора, није нуждно да се узму управо оне вредности x, које у самој ствари постоје. Ми можемо ове разне вредности x редуцирати по повољној некој размери т. је: узети ма какву праву, која ће служити као јединица дужине, са којом би се разне вредности x имале мерити. На тај начин абцисе и ординате биле би конструисане по повољно узетим размерама и потоме вопросна слика може имати у правцу абциса и ордината такове мере какове оћемо.

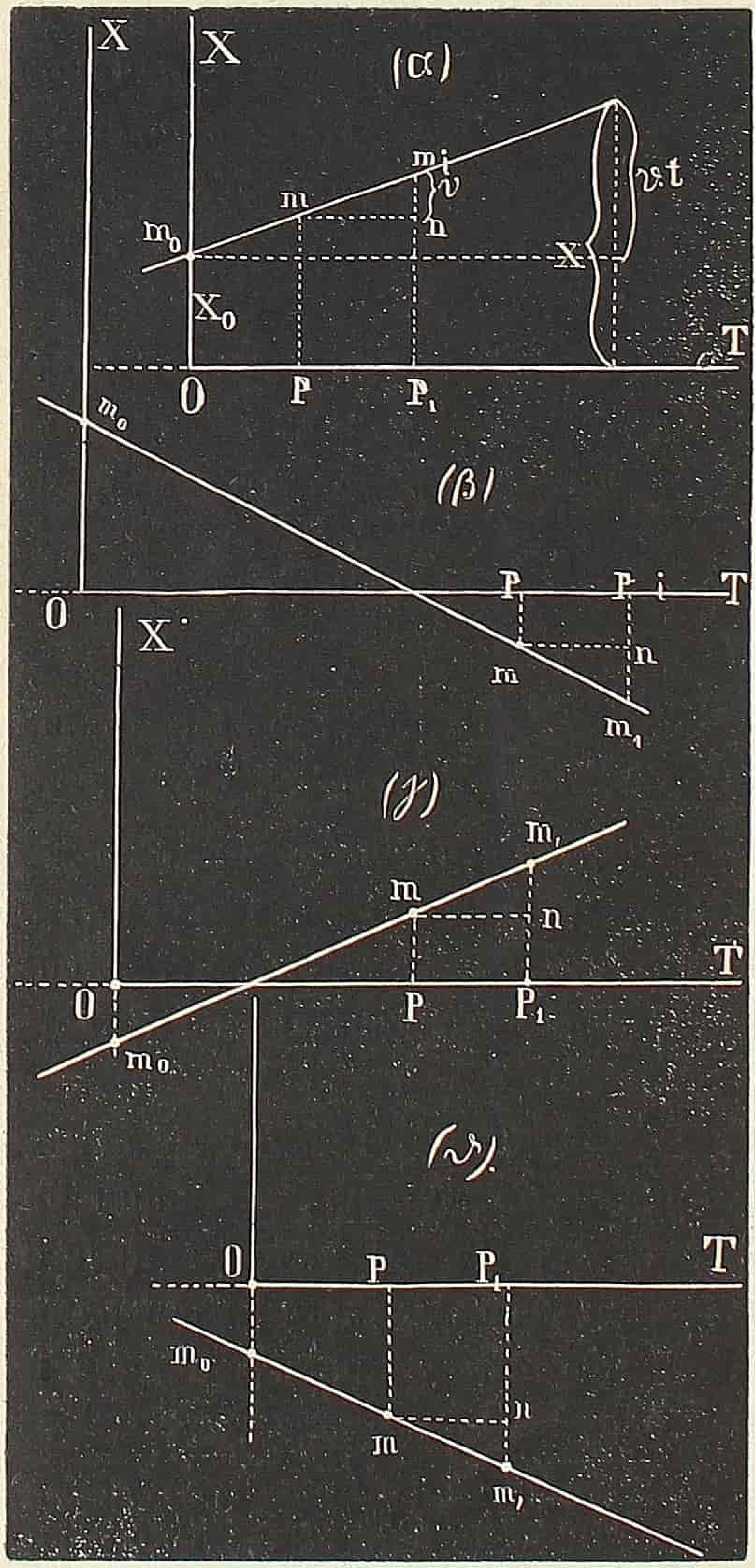
Приметба. Овде имамо приметити да треба добро сватити, да се пруга, која представља закон кретања не узме за пругу по којој се тачка креће и коју смо ми назвали њеним путом. Ове две пруге строго се међу собом разликују.

30. Ради бољег објасњења напред изложене теорије, употребимо је на већ позната нам кретања, и то

I Једномерно кретање.

Знамо да је једначина овог кретања

$$x = x_0 + vt.$$



Сл 9.

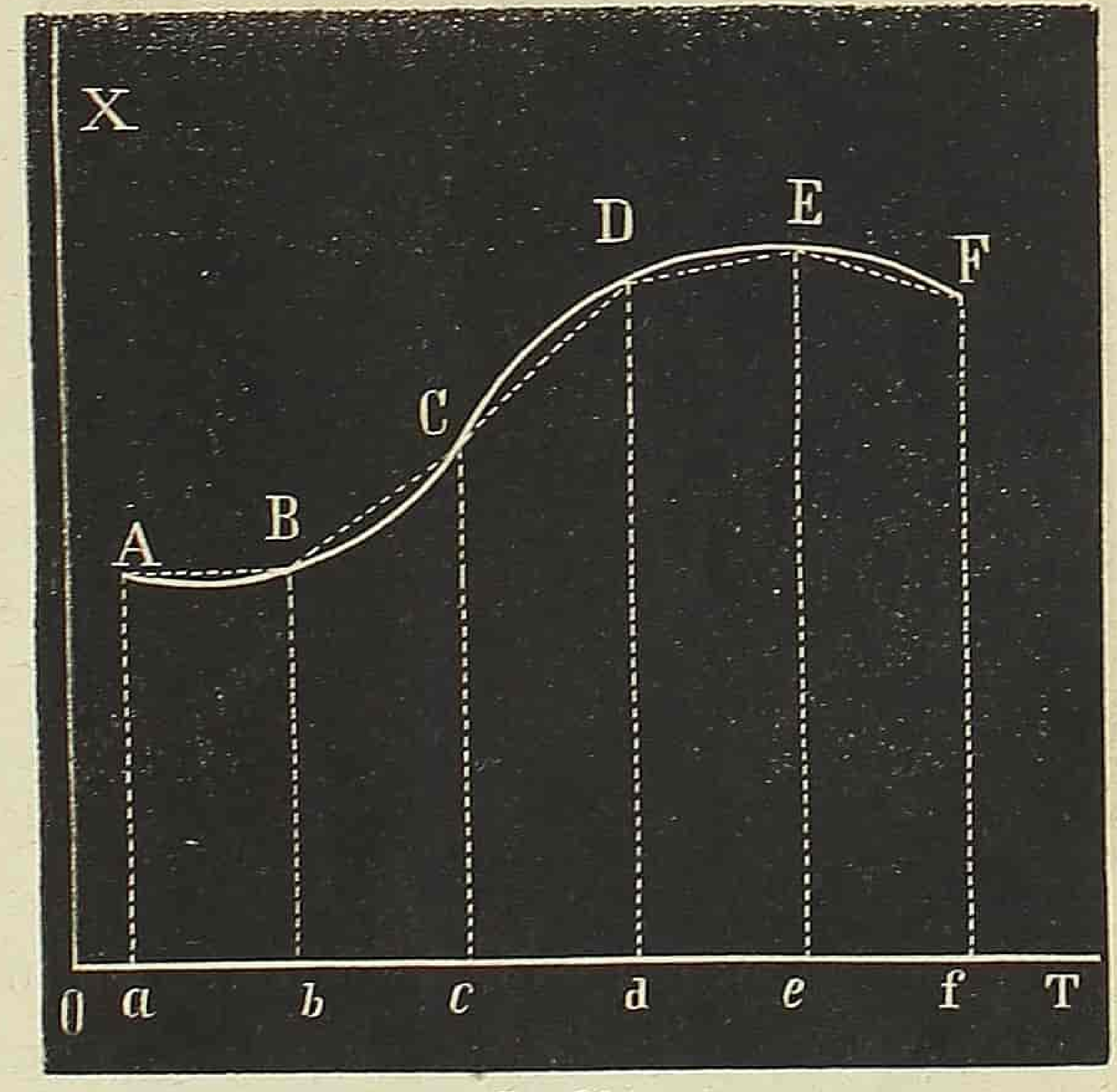
По овој једначини лако је сватити, да ће пруга, која представља закон кретања бити права пруга. Ордината почетка ове праве пруге јест позитивно или негативно одстојање x_0 које у почетном тренутку раздваја кретну тачку од почетне тачке сматраног пута; потоме права $\overline{m_0 m_1}$ простора (права која представља закон кретања) може имати положај као што на страни означене слике показују.

Угловним сачиниоцем ове праве, опредељен је правац и величина брзине. Ако би хтели да ову брзину графично определимо, онда треба од ма које тачке m праве $\overline{m_0 m_1}$ повући равноодстојно са $\overline{OT}$ праву $\overline{mn}$ која по узетој размери представља јединицу времена, затим кроз тачку n, а равноодстојно са $\overline{OX}$ треба повући праву $\overline{nm_1}$ до просецања са правом $\overline{m_0m_1}$. Права $\overline{nm_1}$ представљаће величину x за јединицу времена, т. је: ова права биће абсолутна брзина кретне тачке.

Знак ове брзине означен је положајем праве $\overline{m_0m_1}$. Брзина је позитивна у слики (α) и (γ), а негативна у слики (β) и (δ) (1).

II. Менљиво кретање.

31. Рецимо да крива пруга *ABCDEF* сл. 10. представља закон менљивог кретања неке тачке. Ако сада предпоставимо да је ово менљиво кретање замењено са једномерним кретањем, но под тим условом да кретна тачка за време представљено са $\overline{ab}$ пролази исти пут како при једном тако и при другом кретању, онда би то толико исто значило као кад би лук $\overset{\frown}{AB}$ заменули са тетивком, која га затеже. Тако дакле ако поделимо цело трајање $\overline{af}$ кретања на пет равни делова н. пр. и ако предпоставимо да је менљиво кретање за сваки овај део замењено са једномерним кретањем по горенаведеном услову, онда ће то бити таквог истог значења, као кад би криву пругу *ABCDEF* заменули са полигоном, који је образован од пет тетивака $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, и $\overline{EF}$. И ово би било геометрично тумачење или боље геометрична представа теорије менљивог кретања.

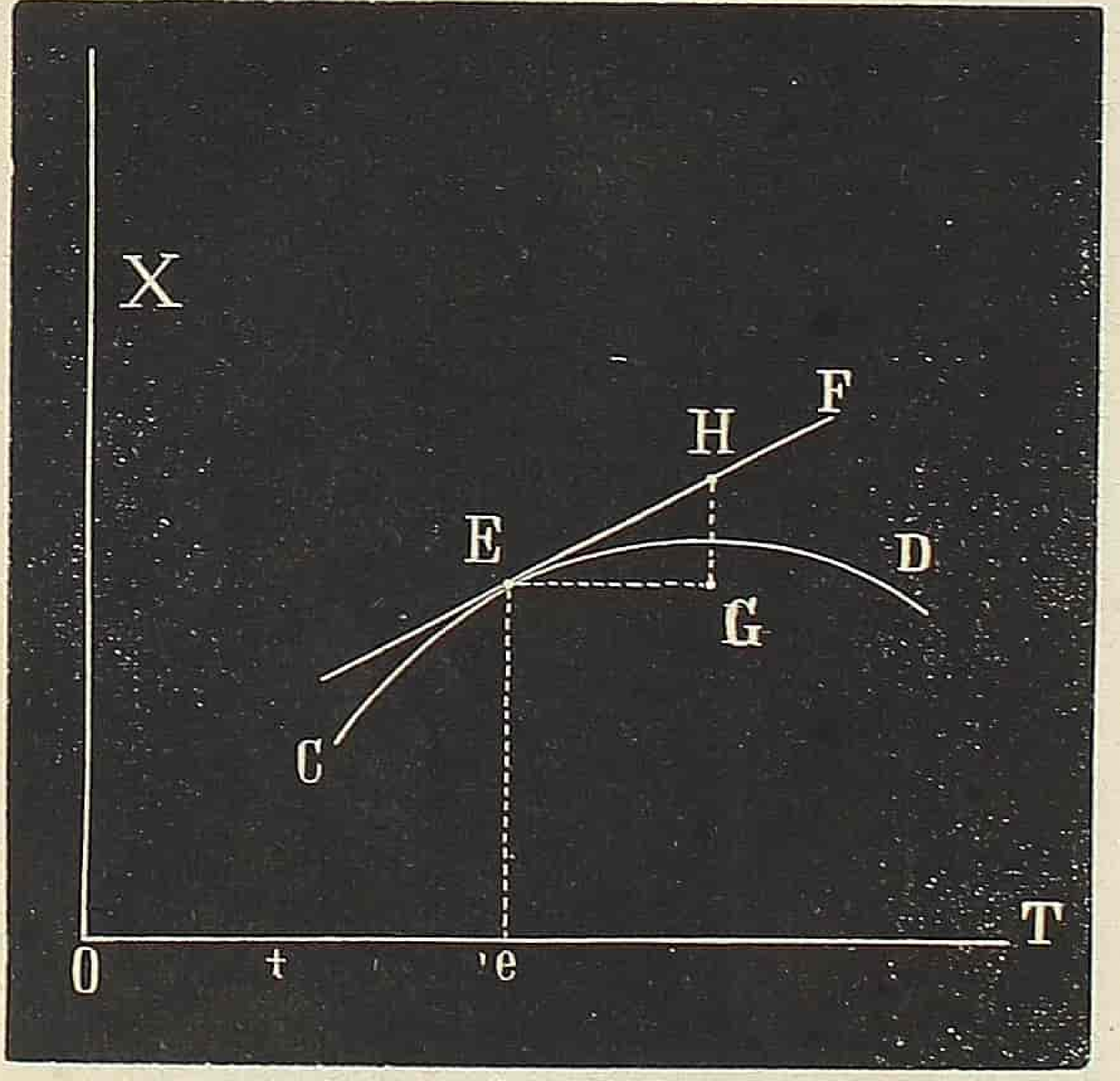


Сл. 10.

---

(1) У овим случајима сматрано је време t као позитивно.

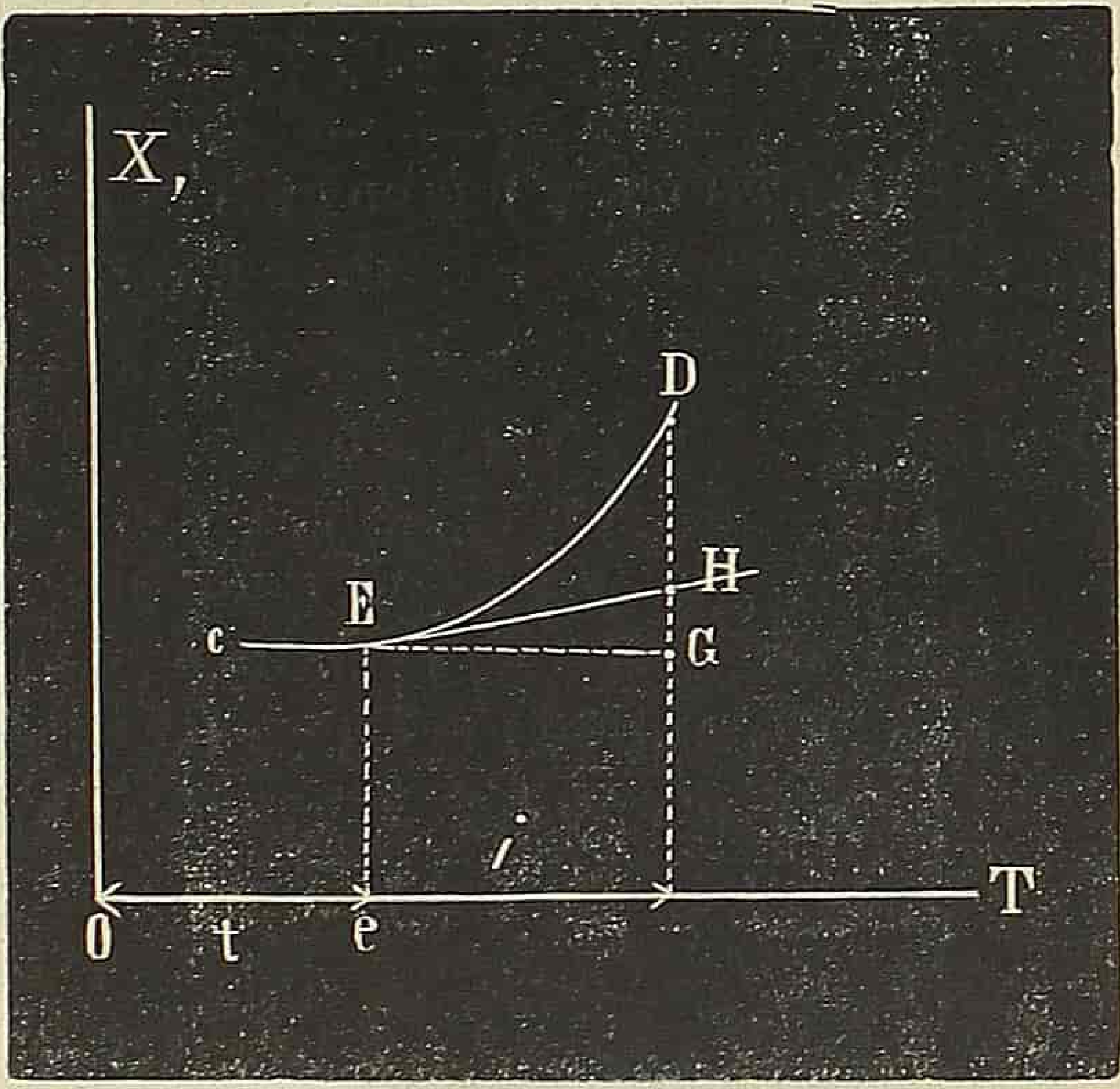
Потоме дакле, кад кажемо да се менљиво кретање може сматрати, као да се састоји из безбројно млого једно за друго сљедећи једномерни кретања од којих свако траје за безкрајно мало време dt, онда то толико исто значи, као кад кажемо да се крива пруга *ABCDEF* може сматрати као полигоп од безбројно млого безкрајно мали страна. Ова представа, која се у геометрији често употребљује, помаже нам да лакше сватимо прави значај менљивог кретања.



Сл. 11.

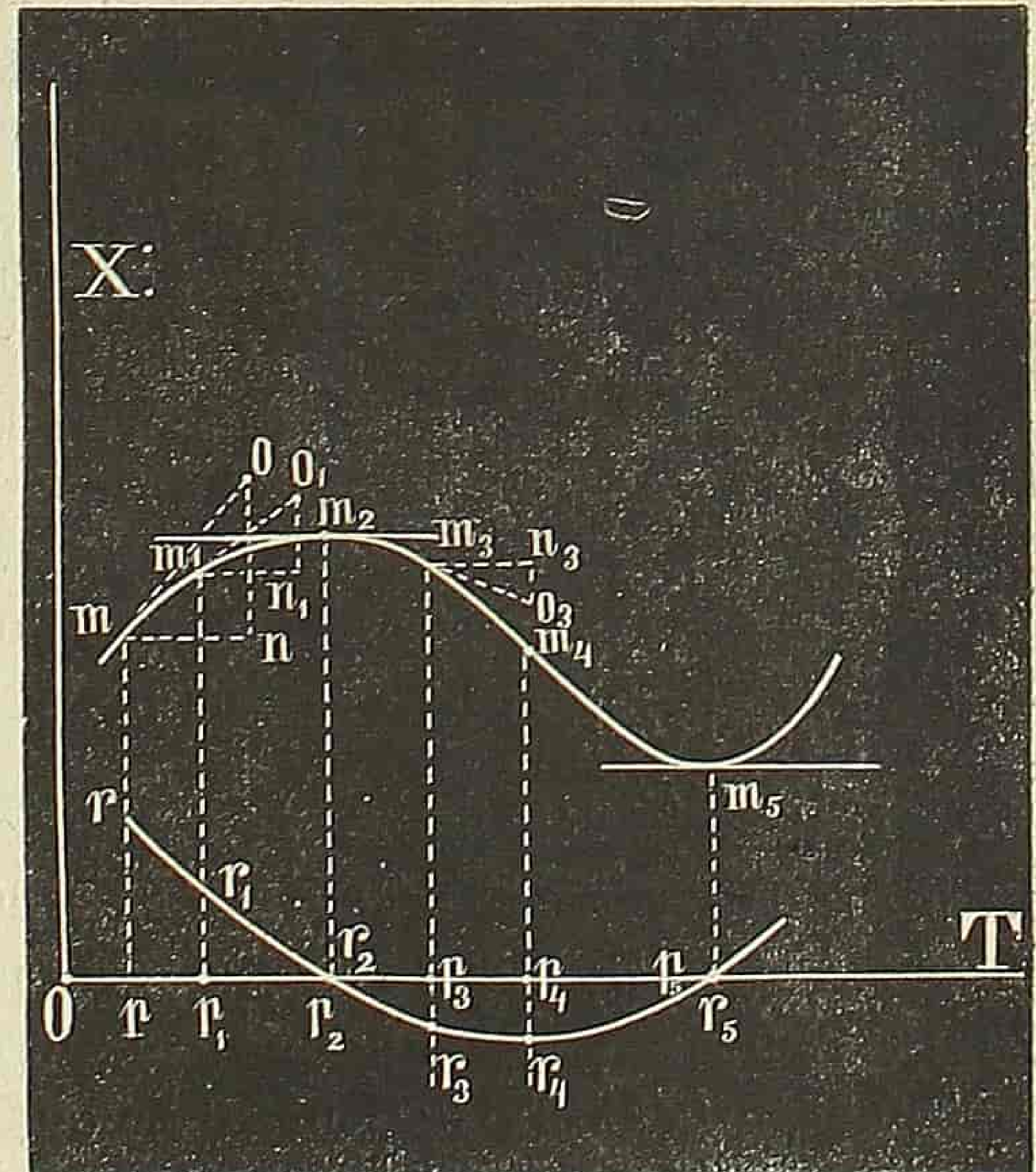
32. Ако би хтели да изнађемо брзину кретне тачке на крају времена t, које је представљено абцисом $\overline{Oe}$. сл. 11. треба најпре да определимо брзину једномерног кретања, које би било представљено правопружним елементом криве пруге $\overset{\frown}{CD}$, почињући од ма какве њене тачке E. Но ако ово једномерно кретање, које траје само за безкрајно мало време, узмемо да постоји, и за ма какво коначно време, онда би оно било представљено истим, у правој пруги неопредељено продуженим елементом, т. је: тангентом $\overline{EF}$, која је кроз тачку E криве пруге повучена. Но ми знамо изнаћи брзину једномерног кретања кад нам је позната права пруга, која га представља, а то бива кад кроз тачку E повучемо праву $\overline{EG}$ равноодстојно са $\overline{OT}$ и равну правој, која по усвојеној размери представља јединицу времена, затим повучемо $\overline{GH}$ равноодстојно са $\overline{OX}$ и ова права $\overline{GH}$, која се са тангентом пресеца, биће тражена брзина. Њен аналитични израз биће $v = \frac{dx}{dt} = f_1(t)$. Лако је сватити, да ће се брзина са уве-

ћавањем времена увећавати или умањавати, по томе како је крива закон кретања представљајућа пруга конвексна или конкавна према позитивној оси $\overline{OX}$



Сл. 12.

33. Знамо да је при менљивом кретању брзина функција времена t, и да вредност ове функције можемо у сваком магновењу определити, кад знамо закон кретања. Лако је сватити да се и закон, по коме се брзина овог кретања мења, може такође графично да представи, и то овако:



Сл. 13.

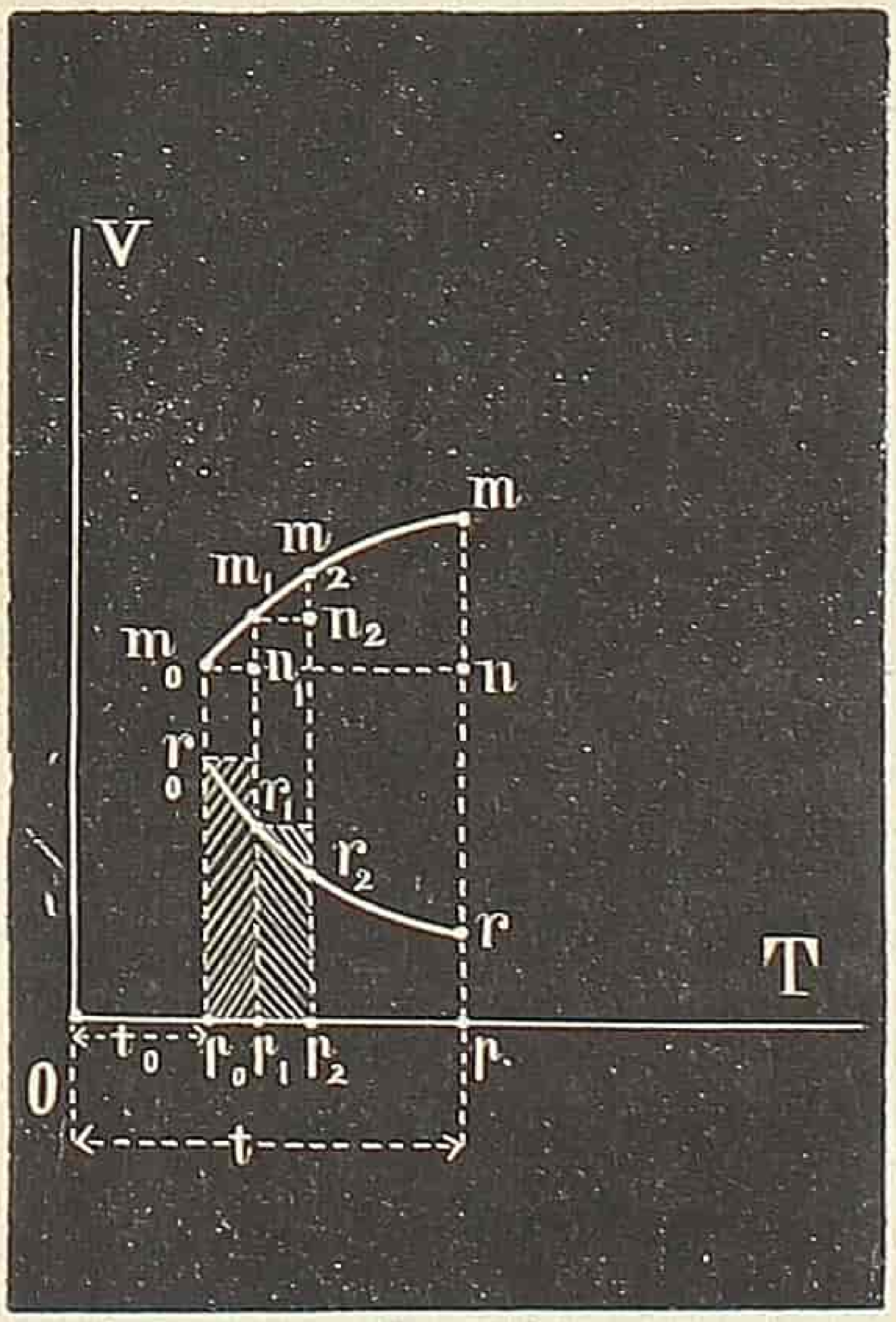
Почем је крива пруга простора $mm_1m_2m_3m_4m_5$ по познатом коструисана, онда се определе по напред реченом разне вредности брзине, које одговарају разним вредностима времена, тако н. пр. определи се брзина $\overline{no}$, која одговара тачки m пруге $mm_1m_2 \ldots m_5$ или кретној тачки M. Затим се ова брзина пренесе на одговарајућу ординату $\overline{mp}$, дакле биће $\overline{no} = \overline{pr}$. Поступајући овако и за друге тачке криве пруге $mm_1 \ldots\ldots m_5$ добићемо толико тачака $rr_1 \ldots\ldots r_5$ у равнини XOT колико оћемо. Ако сада све ове тачке међу собом сајузимо имаћемо криву пругу $rr_1r_2r_3r_4r_5$ помоћу које моћићемо једним прегледом сватити како се брзина при вопросном кретању мења. Ова пруга $rr_1 \ldots\ldots r_5$ зове се *пруга брзина.*

34. Обратно кад знамо пругу брзина можемо лако из ње извести пругу простора: било аналитично интегралећи једначину:

$$dx = vdt \ldots\ldots (\alpha)$$

било графично помоћу тако зване квадратуре. Но да би задатак био определен, треба осим пруге брзина, да је дата или позната јошт и једна и то почетна тачка вопросне пруге простора, како би могли определити вредност сталне количине, која се при интегралењу једначине под (α) повољно узима. Интеграл ове једначине биће овако означен.

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} vdt$$



Сл. 14.

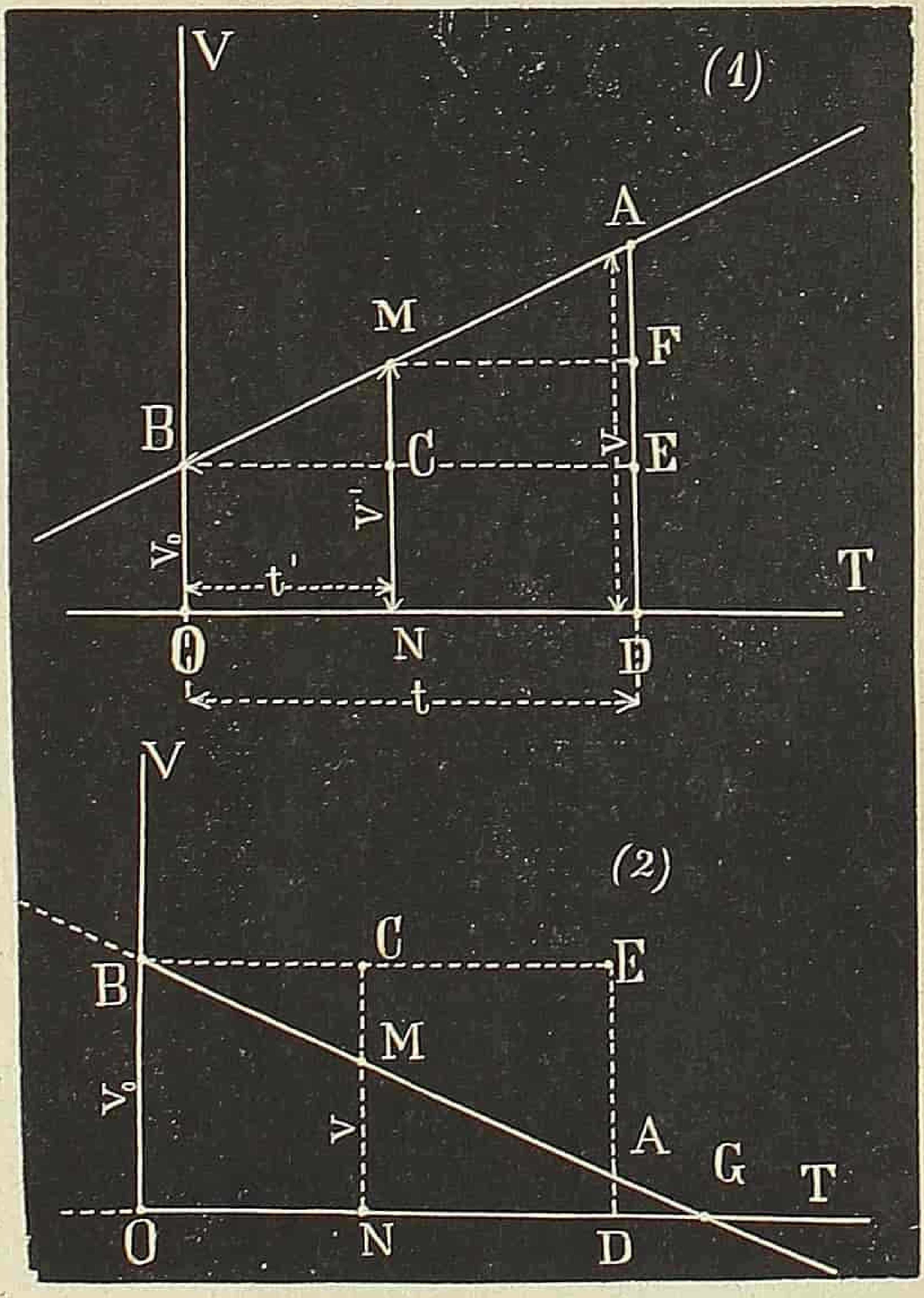
Нека је m_0 ова прва тачка пруге простора. За време dt прирашћај dx ординате раван је vdt, т. је: површини малог правоугаоника r_0p_1 кога је основица dt, а висина брзина v. Ако сада узмемо да је m_1n_1 тај прирашћај ординате који је раван правоугаонику r_1p_1, а тако исто узмемо да је m_2n_2 равно малом правоугаонику r_1p_2, онда ма какав крајан прираштај mn биће представљен одговарајућом површином r_0rpp_0, која ја гранична вредност од сбира ови мали правоугаоника, и тим начином определићемо тражене ординате.

Ако се интеграл $\int_{t_0}^{t} vdt$ неби могао тачно определити, што ће се свагда десити, кад год је крива пруга брзина графично дата, онда ћеду се рачунати протрчани путови (простори тражене ординате) кретне тачке, употребивши на то познато Симпсоново правило о приближном рачунању површине r_0p, т. је: тако звано правило квадратуре.

По себи се разуме да ако би се између два крајња магновења знак брзине мењао, онда треба узети површину над осом $\overline{OT}$ (Сл. 14.) као позитивну, а испод ове осе као негативну. Напоследку имамо још и то додати, да по природи мењљивог кретања, пруга $r_0r_1r_2 \ldots\ldots r$, може бити права или крива, може се почињући од r_0 удаљавати или приближавати оси $\overline{OT}$, може бити према овој оси конкавна или конвексна, но у сваком случају површина $r_0r_1 \dots pp_0$ равна ће бити менљиво протрчаном путу x.

Крива пруга $r_0r_1r_2 \dots r$ што се размере тиче, може се тако конструисати, да абцисе по узетој размери буду сразмерне узетим вредностима времена t, а ординате опет, или по истој или и по другој некој удобнијој размери буду сразмерне определеним брзинама.

III. Једнако-менљиво кретање.



Сл. 15.

35. Да би напред изложену теорију јошт већма објаснили, употребимо је на једнако-мерљиво кретање.

Знамо да је при овом кретању позитивни или негативни прираштај брзине сразмеран времену. т. је: да је

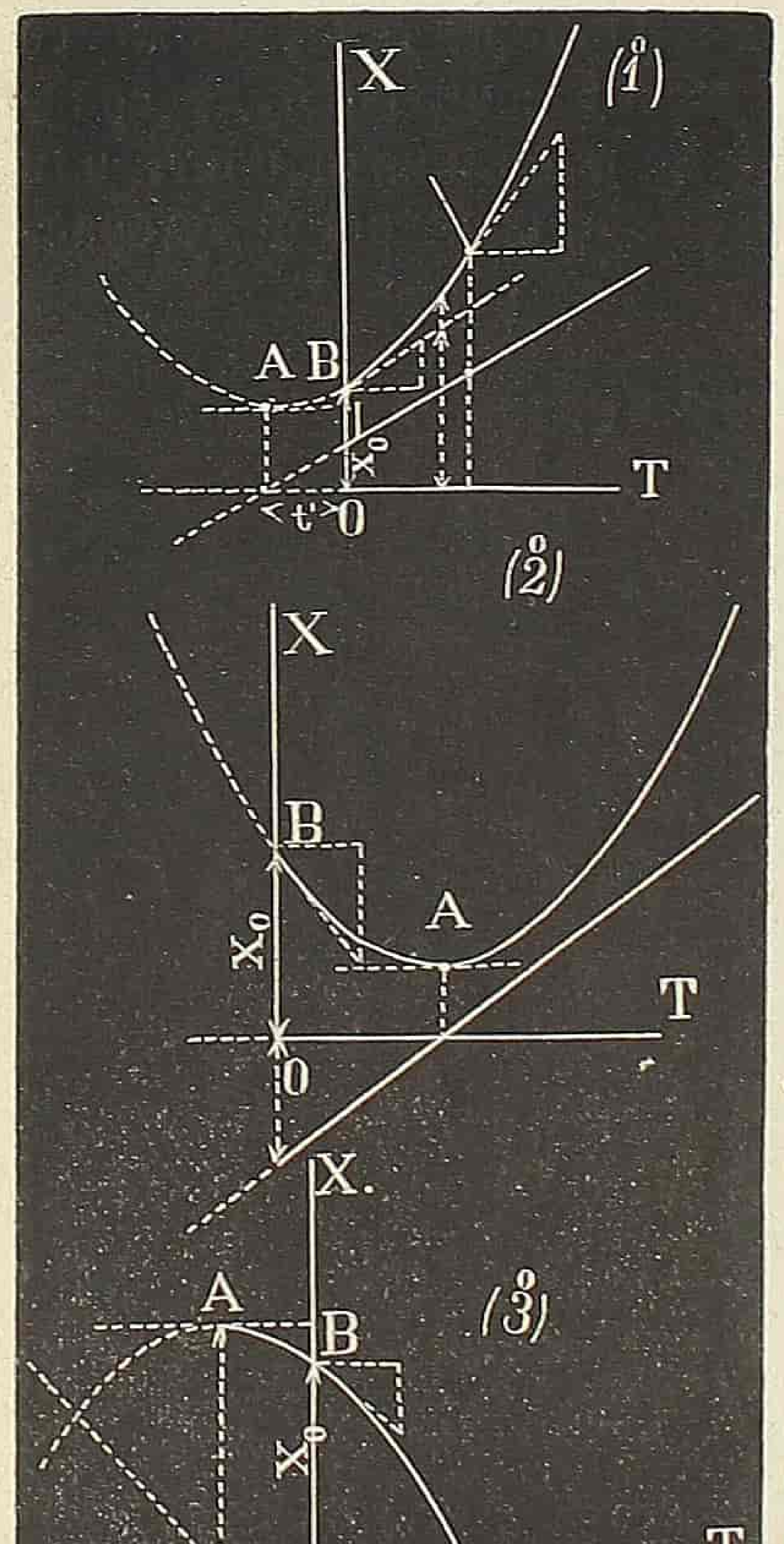
$$v - v_0 = \pm jt.$$

Ова једначина показује да је пруга, која представља закон по коме се брзина мења, права пруга, које је $v_0 = \overline{BO}$ на пример ордината у почетку а је угловни сачиниоц (Сл. 15.) и заиста: ако узмемо да је $\overline{BO}$ почетна, а $\overline{AD}$ крајња брзина кретне тачке на крају времена $t = \overline{OD}$, и ако узмемо даље да је $\overline{MN}$ њена брзина на крају времена $t' = \overline{ON}$ и напоследку ако повучемо $\overline{BE}$ равноодстојно са $\overline{OD}$, онда ћемо од брзине $\overline{MN}$ и $\overline{AD}$ одсећи равне делове $\overline{CN} = \overline{ED}$ и остаће нам $\overline{MC}$ и $\overline{AE}$ као прираштаји ових брзина, који прираштаји стоје у сљедећој сразмери:

$$\overline{MC}: \overline{AE} = \overline{BC}: \overline{BE} \text{ или } (v' - v_0): (v - v_0): t': t.$$

Ако сад кажемо да је $t' = 1$, онда је $v' - v_0 = j$, и сад

$$j: (v - v_0) = 1: t \text{ или } v - v_0 = jt.$$



Сл. 16.

Овде имамо приметити да се једнако-мерљива кретања у главноме разликују међу собом у сталној акцелерацији j, која се графично опредељује, кад се узме $\overline{ND} = 1$ (једној секунди) па се затим повуче управна $\overline{AF} = j$. Лако је схватити да при једнако-убрзаном кретању, т. је: кад је $v_0 > o$ и $j > o$, праве $\overline{BA}$ има положај као што (Сл. 15.) под (1) показује, дакле пење се на више од почетне тачке, а при једнако успореном кретању, т. је: кад је $v_0 > o$ а $j < o$, ова права има положај као што је (Сл. 15.) под (2) означен.

36. Ако се оће да графично представи још и закон кретања (пруга простора), с којим се занимамо, онда треба поставити $(x - x_0)$ равно површини трапеца $ABOD$, кога је висина равна времену t, а основице су му v_0 и v или $(v_0 + jt)$, по томе имаћемо

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2} (v_0 + v)\, t = \tfrac{1}{2}$$

$(v_0 + v_0 + jt)\, t$. одкуда $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} jt^2$ једначина једнако-мењливог кретања, као што смо је пређе нашли. Ако би при једнако убрзаном кретању почетна брзина $v_0 = o$ била, онда трапец постаје триуго, кога је површина $= \frac{1}{2}\, \overline{OD}.\overline{AD} = \frac{1}{2}\, vt$.

Једначина $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}jt^2$ показује, да је крива пруга, која представља закон вопросног кретања, парабола. Оса ове параболе равноодстојна је са осом $\overline{OX}$, и према знаку количине $v_0 - j$; она може заузимати један од четири положаја означена у слики (16) под (1), (2), (3) и (4), и то:

1° $v_0 > o, j > o$; кретање је једномерно убрзано у правом смислу речи.

2° $v_0 < o, j > o$; кретање је најпре успорено, затим убрзано у обичном смислу речи, т. је: абсолутна вредност брзине умаљава се, постаје $= o$; затим кретање на ново почиње у противположеном правцу са брзином, која безкрајно расте.

3° $v_0 < o, j < o$; кретање убрзано управљено на страну негативни X_a.

4° $v_0 > o; j < o$; кретање најпре управљено према позитивним ординатима, са брзином, која се непрестано умаљава, док не постане $= o$; а затим брзина расте према негативним ординатима.

Ордината у почетној тачки B кретања равна је почетном одстојању x_0, а једначина тангенте повучене кроз ову почетну тачку је $x = x_0 + v_0t$. Ово вреди за сва 4 напред наведена случаја обзирући се на знак количине v_0.

37. *Закон падања тела.* Искуством се дознало, да је кретање тела, које слободно у празном (безвадушном) простору пада, убрзано кретање. Акцелерација овог кретања за сва тела, једна је иста за једно исто место. Она се мења према географској ширини, и према узвишености места над површином мора, и обично се у науци означава са писмом g.

Узимајући метар за јединицу дужина и секунду као јединицу времена, ова акцелерација за Париз износи:

$$g = 9{,}^{m}808672.$$

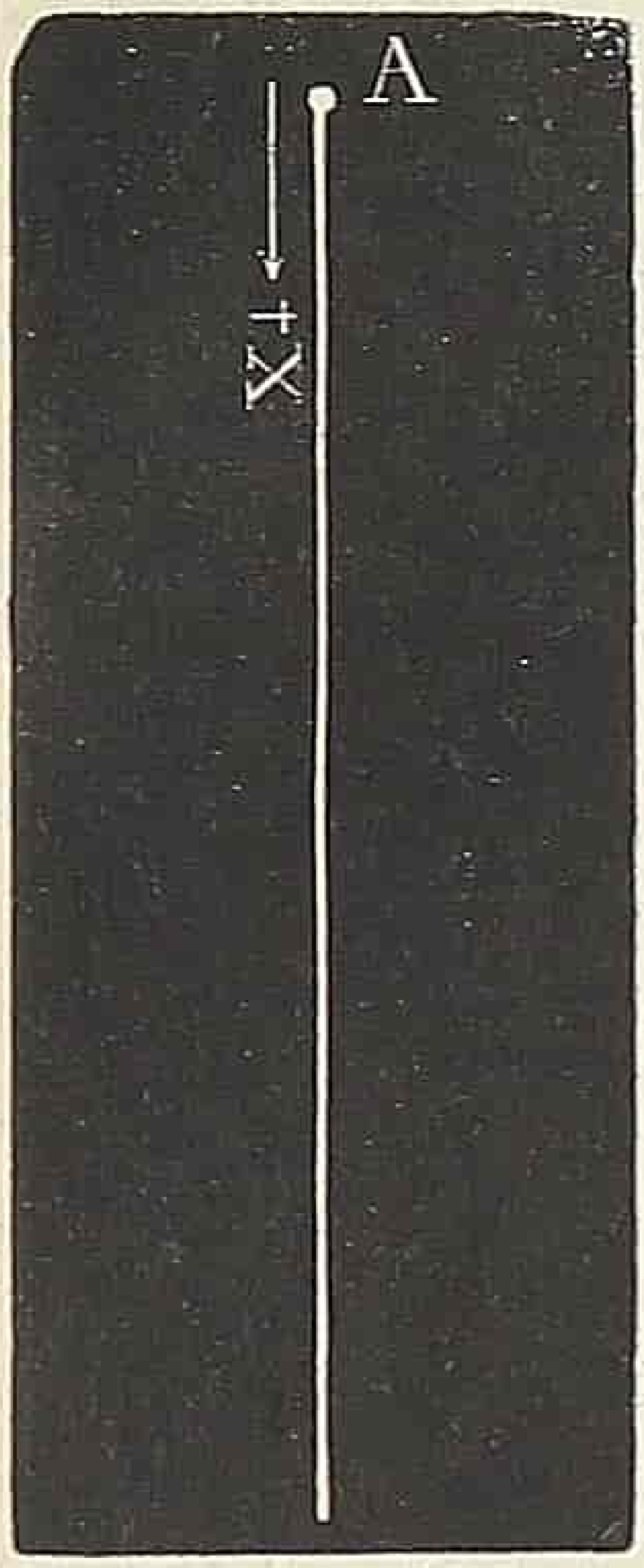
Како се овај број g определује говорићемо у динамики.[1]

---

[1] Као средња вредност узима се за g и то:

у Енглеској $g = 32{,}20$ енглески стопа.
„ Прајској $g = 31{,}25$ прајски „

За сада ћемо овде да разрешимо само неколико задатака, као објаснење теорије о једнако мењивом кретању.



Сл. 17.

I. Узмимо да неко тело[1] у празном простору вертикално пада, и представимо да његова почетна брзина $v_0 = o$. Означимо са A почетак а са x висину падања. Ако јошт узмемо да је x у правцу падања позитивно, онда једначине кретања биће:

$$v = gt \text{ и } x = \tfrac{1}{2}gt^2 \text{ и дакле}$$

$$v^2 = 2gx \text{ или } v = \sqrt{2gx}$$

Овај последњи израз зове се обично брзина одговарајућа висини x (vitesse due à la hauteur x; Fallhöhe) и обратно x или $\frac{v^2}{2g}$ зове се висина одговарајућа брзини v.

II. Да се определи висина, на коју би се тело попело, кад би вертикално одоздо на више са брзином v_0 бачено било.

Ако узмемо почетак кретања, као почетну тачку и за рачунање висине x, даље да је ова висина позитивна у правцу крêтања на више онда једначине кретања биће:

$$v = v_0 - gt,\ x = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Трајање пењања определићемо постављајући $v = o$ одкуда $t = \frac{v_0}{g}$; замењујући ову вредност t у другу једначину, тражена висина на коју се тело попело биће $x = \frac{{v_0}^2}{2g}$.

Дакле тело се пење за време равно времену које би му потребно било, па да добије почетну брзину v_0; и висина

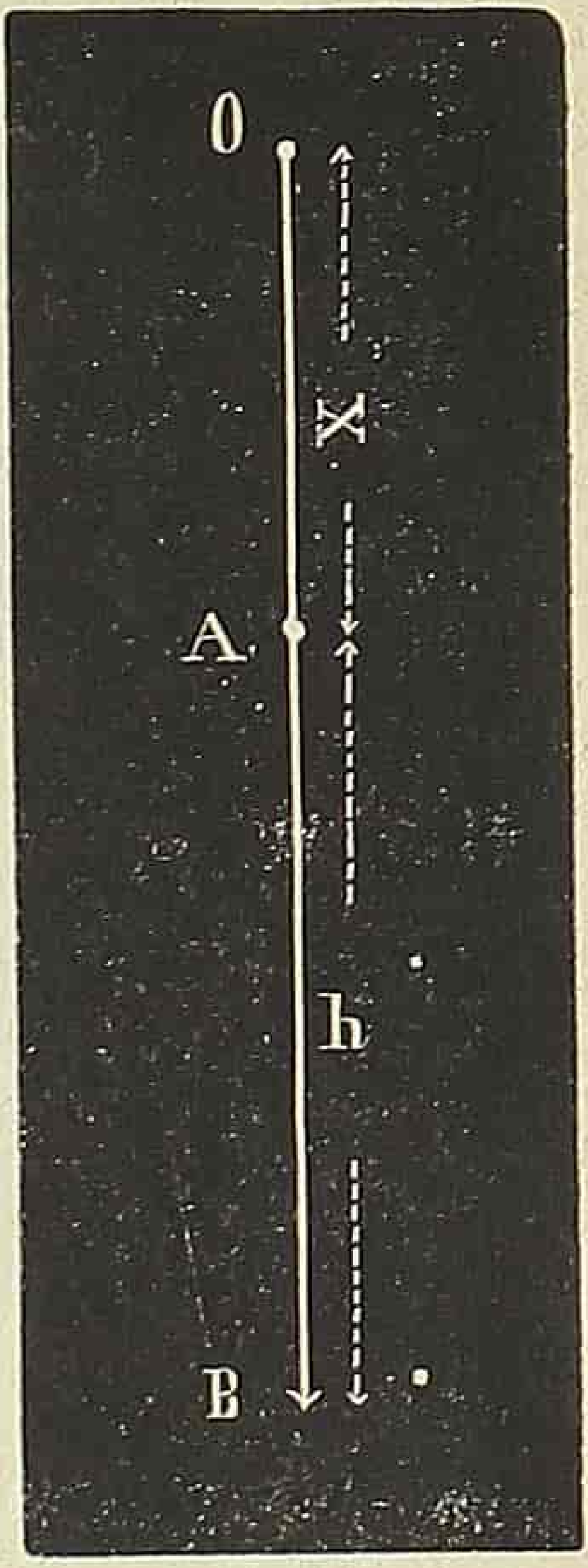
у Аустрији	$g = 34{,}64$	бечки	„
„ Саксонији	$g = 34{,}64$	дрезденски	„
„ Ханов. (Баварск.)	33,60	хановер. (бавар.)	„

[1] И материална је тачка тело и задатци, које ћемо овде решити, вреде како за тачку тако и за тело.

коју пролази, пењајући се, равна је висини коју пролази падајући за исто време без почетне брзине.

На крају времена $\frac{v_0}{g}$ тело почиње падати, будући се знак брзине мења; и по горе реченом оно се мора на крају новог интервала времена $\frac{v_0}{g}$ налазити у првој тачки полазка са брзином $= - v_0$. И заиста из предхођећи једначина добијамо за $t = \frac{2v_0}{g}$

$$v = - v_0 \text{ и } x = o.$$



Сл. 18.

III. Неко тело, падајући са неке висине, без почетне брзине, (без брзине у почетном тренутку) протрчало је од A до B простор h, у времену Θ које је мање од $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ Тражи се да се определи тачка, из које је тело почело падати, т. ј. да се определи одстојање $\overline{OA} = X$. Нека је t време за које тело пада од O до A биће

$$x = \tfrac{1}{2} g t^2 \ldots\ldots (\alpha).$$

Но лако је видети, да ће брзина тела кад у A дође бити

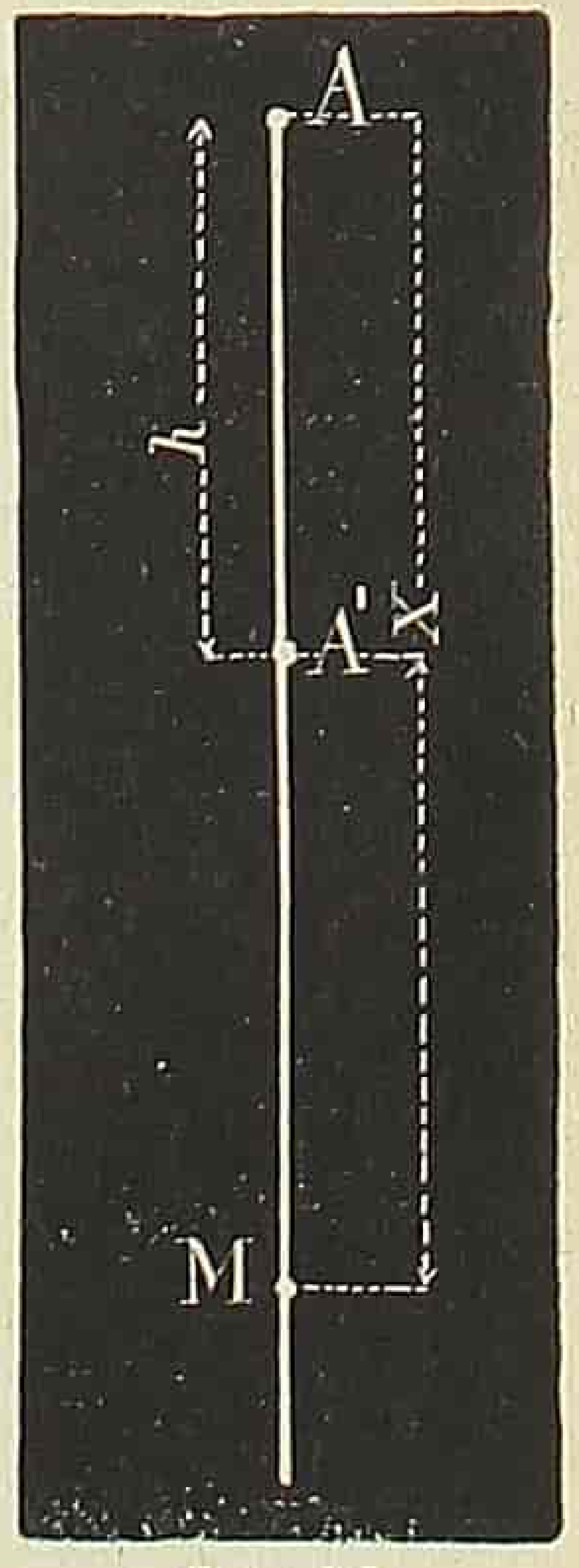
$$v = gt \ldots\ldots (\beta)$$

а кад је то, онда је $h = gt\Theta = \frac{1}{2} g\Theta^2$ одкуда

$$t = \frac{h}{g\Theta} - \tfrac{1}{2}\Theta$$

замењујући сад ову вредност од t у једн. (α) налазимо да је

$$x = \tfrac{1}{2} g \left(\frac{h}{g\Theta} - \tfrac{1}{2}\Theta\right)^2$$



Сл. 19.

IV. Неко тело падајући пролази кроз тачку A са брзином v; друго неко тело пролази кроз A' доцније за t' са брзином v'; одстојање $\overline{AA'} = h$. Тражи се да се определи тренутак и тачка M у којој ће се ова два тела на вертикалној $\overline{AM}$ састати.

Нека је x, одстојање тачки M од A а t време, за које прво тело пролази овај простор биће

$$x = vt + \tfrac{1}{2}gt^2 \;.\;.\;.\;.$$

Друго тело са својом почетном брзином v' протрчало би простор $(x - h)$ у времену $(t - t')$ имаћемо дакле

$$x - h = v'(t - t') + \tfrac{1}{2}g(t - t')^2$$

Из ове две једначине можемо лако определити једине две непознате x и t.

V. Два падна тела полазе без почетни брзина, (боље без брзина у почетном тренутку) из једне исте тачке у два разна тренутка раздвојена интервалом времена Θ. Да се определи тренутак, у ком ће се ова два тела налазити удаљена једно од другог за дато одстојање a; и да се определи протрчани пут сваког од ова два тела.

Нека је t време, које је протекло од полазка првог тела до траженог тренутка, а z пут учињен за ово време, или боље одговарајућа висина пада; $(x - a)$ биће пут протрчан другим телом у времену $(t - \Theta)$; потоме биће

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2; \quad (x - a) = \tfrac{1}{2}g(t - \Theta)^2 \quad \text{одкуда}$$

$$t = \frac{a}{g\Theta} + \frac{\Theta}{2}$$

Почем је t определено, онда је лако изначунати x и $(x—a)$.

Бројни пример. Друго је тело пошло за 0,01 секунде после првог; осим тога дато је $a = 0{,}019 = 0,^{m}0981$, овде је $\Theta = 0,^{s}01$, а отуда сљедује $t = 1,^{s}005$; а $x = 4,^{m}955$.

Као последњи пример о једнако-менљивом кретању, а и падању тела, узимамо јошт сљедећи:

VI. Да се израчуна дубљина x, неког бунара знајући време T, које протече од тренутка кад је неко тело у бунар изпуштено, до тренутка у ком се чује глас да је тело пало. Брзина је гласа на секунду $a = 337^m$.

Нека је t време за које тело пада, а t' време, које потребно да глас прође простор x, биће

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2, \quad x = at' \quad \text{и} \quad t + t' = T$$

из ових једцачина имаћемо:

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 = a(T - t) \quad \text{и отуда}$$

$$t = -\frac{a}{g} \pm \sqrt{\frac{a^2}{g^2} + \frac{2aT}{g}} \quad \text{сљедствено}$$

$$x = aT + \frac{a^2}{g} \mp \sqrt{\frac{a^2}{g^2}\left(\frac{a^2}{g} + 2aT\right)}.$$

Бројни пример. Рецимо да је $T = 3^s$ биће

$$x = 337 \times 3 + \frac{337^2}{9{,}81} \mp \sqrt{\frac{337^2}{9{,}81}\left(\frac{337^2}{9{,}81} + 2 \times 337 \times 3\right)}$$

отуда $x = 40^m{,}8$ и $25134^m{,}9$. Ова друга вредност неодговара задатку, јер је млого већа, него што је простор који глас пролази за 3 секунде, зато је треба одбацити, остаје дакле да је дубљина бунара $x = 40^m{,}8$.

Додатак. Ми смо дознали, да је падање тела у празном (безвадушном) простору, кад је почетна брзина и почетно одстојање, т. ј. $v_0 = 0$ и $x_0 = 0$ представљено овим једначинама

$$v = gt \quad \text{и} \quad x = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Ова последња једначина даје нам пут, који падајуће тело пролази за време t; за време пак $(t - 1)$ протрчани пут биће

$$x_1 = \tfrac{1}{2}g(t - 1)^2$$

Ако сад ову једначину одузмемо од предходеће и разлику са d означимо, имаћемо

$x - x_1 = d = \frac{1}{2} g (2t - 1)$ и ово је протрчани пут за време последње секунде.

Означимо са d_1 d_2 d_3 . . . . . d_n протрчане путове за време 1-ве; 2-ге, 3-ће . . . . . n-те секунде и сад ако у предходећој једначини узмемо редом

$t = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n$ добићемо да је:

$d_1 = \frac{1}{2} g,\ d_2 = \frac{3}{2} g,\ d_3 = \frac{5}{2} g \ldots\ldots d_n = \frac{2n-1}{2} g \ldots$ отуда

$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 = 1 : 3 : 5 : 7 \ldots\ldots\ldots$ а то ће рећи:

Протрчани путови у једно за друго сљедећим секундама стоје у размери као безпарни бројеви.

Сложена кретања тачке.

38 Дефиниција релативног (односног) кретања — Ми смо казали, да кретање неке тачке у простору, можемо само онда схватити, кад сравњујемо сваки њен положај, који она у сваком магновењу заузима са положајем други тачака, које су некретне, или се нама чини да су некретне, и које смо ми назвали систем сравњивања. Само пак њено кретање моћићемо савршено определити, ако знамо како се и по каквом закону мењају једно за друго идућа њена одстојања од ових сталних тачака.

Но ако будемо опредељавали разне положаје кретне тачке у смотрењу тачака, које се и саме крећу онда је лако схватити да овако опредељено кретање тачке неће бити њено право кретање у простору. — Оваково кретање као што смо једанпут већ напоменули, зове се релативно кретање у смотрењу тачака (или система) сравњивања (points de repére) које се и саме крећу. Напротив право кретање вопросне тачке у простору зове се абсолутно кретање.

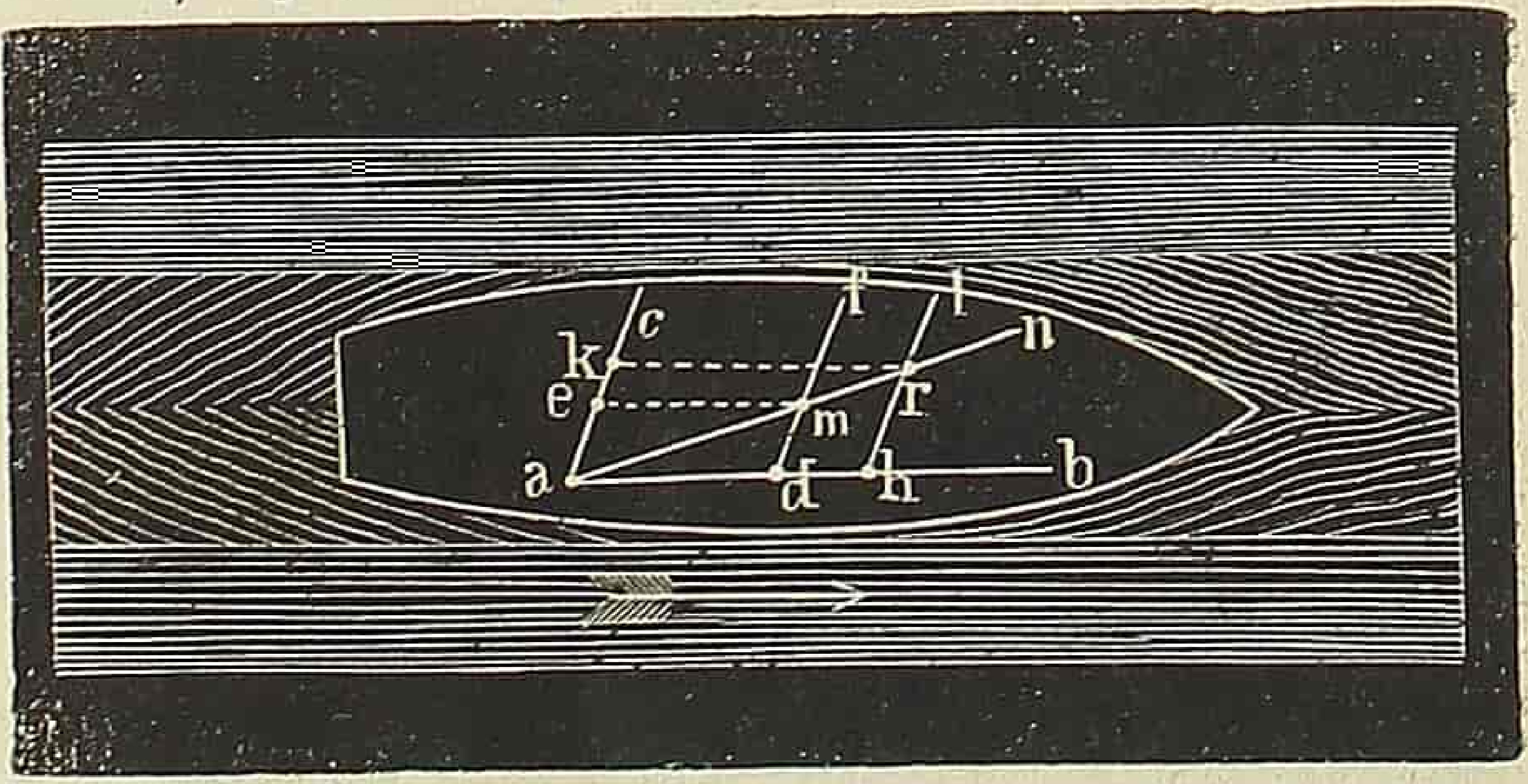
---

*) Релативно је кретања оно, које опажамо, кад се и сами без да знамо са системом сравњивања крећемо, и у овом случају често је релативно кретање означено под именом привидног кретања

Да би то што рекосмо боље објаснили, представимо себи, да се нека тачка креће по крову какве лађе, која и сама дуж обале плови. Сад ако би се и сами на лађи налазили, и сматрали би кретање тачке, онда ћемо видети да тачка заиста извесним начином мења свој положај, како према нама тако и односно лађе. Но ово њено кретање сасвим ће се разликовати од њеног правог кретања у простору, или боље од њеног кретања односно какве сталне тачке на обали.

Кретање је тачке односно лађе: релативно, а односно сталне какве тачке на обали абсолутно (предпостављајући нашу земљу као некретну).

39. Знајући релативно кретање тачке и кретање лађе можемо лако изнаћи абсолутно њено кретање у простору. И заиста: рецимо да се лађа једномерно у правцу $\overline{ab}$ са брзином $v = \overline{ad}$ креће, (Сл. 20.) и нека је кретање тачке по крову лађе такође једномерно и у правцу $\overline{ac}$. Брзина овог кретања неке је $v_1 = \overline{ae}$.



Сл. 20.

За једну секунду лађа ће учинити пут $\overline{ad}$, права пак ac кретајући се заједно са лађом и равноодстојно са својим првобитним положајем, на концу ове секунде налазиће се у $\overline{df}$, но тачка, која се по правој $\overline{ac}$ креће, за исто време учиниће пут $\overline{ae}$, и налазиће се у m; ако сада предпоставимо да ће лађа за време t учиниће нека пут $\overline{ah} = \overline{ad}.t$ онда је увиђавно да ће права $\overline{ac}$ на концу овог времена t, заузети положај $\overline{hl}$, но за то исто време, тачка која се у правцу $\overline{ac}$ креће, и која би учинила пут $\overline{ak} = \overline{ae}\ t$, кад би лађа на једном месту стајала, налазиће се на концу овог времена t у r, и као што је:

$$\frac{\overline{dh}}{ad} = \frac{\overline{ak}}{ae} = t = \frac{\overline{hr}}{dm} \text{ то отуда}$$

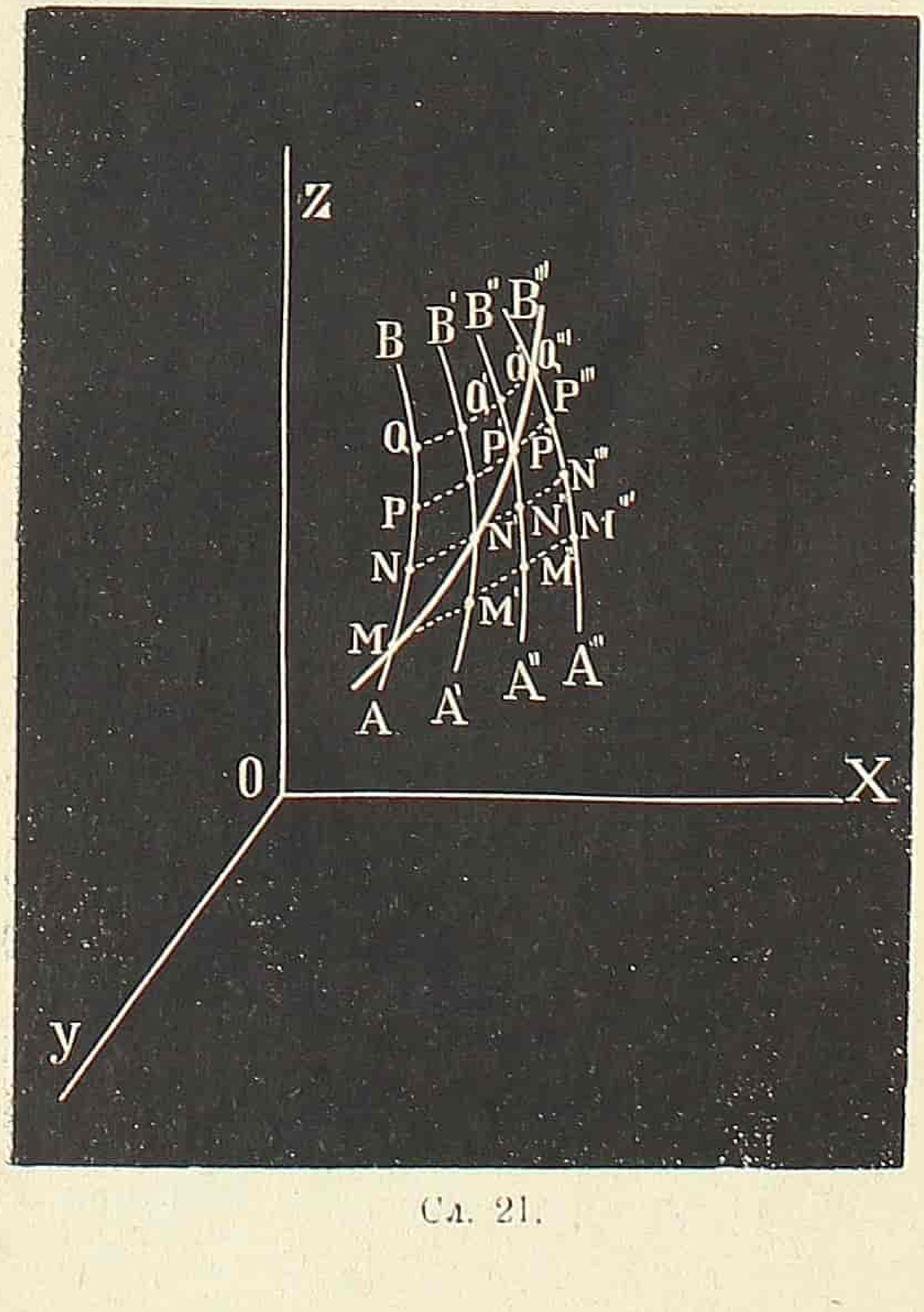
сљедује, да се кретна тачка креће по правој $\overline{an}$, која пролази кроз a и m; дакле је абсолутно кретање вопросне тачке правопружно. Осим тога из подобни триуглова adm ahr налазимо:

$$\frac{\overline{ar}}{\overline{am}} = \frac{\overline{hr}}{\overline{dm}} = t$$

дакле $\overline{ar} = \overline{am}\ t$ а то ће рећи: да је абсолутно кретање тачке једномерно, и њена је брзина равна правој $\overline{am}$.

40. У меканици као науци, сва кретања тачке, а и тела, као што ћемо видети, односимо на тако зване координатне осе, и односно ових оса опредељујемо закон кретања било тачке било тела, зато:

Узмимо да нека тачка, однешена на неке покретне координатне осе $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и OZ опише у свом кретању, односно ових оса, ма какву пругу $\widehat{AB}$ (Сл. 21.) Овај релативни пут $\widehat{AB}$ кретне тачке можемо у сваком тренутку опреелити, ако будемо мерили координате кретне тачке, односно кретни оса, а затим и ове координате однесемо јошт на три сталне осе. Рецимо да се у сљедству кретања оса, ова пруга налази на концу времена t, t', t'', t''' . . . . . . у $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$, $\widehat{A''B''}$ $\widehat{A'''B'''}$..



Сл. 21.

Почем је ово релативно кретање тачке у простору опредељено и почем је познато и кретање оса, онда можемо лако изнаћи абсолутно кретање тачке. И заиста предпоставимо да би се кретна тачка на концу времена t, t', t'', t''' .... налазила у M, N, P, Q криве пруге $\overset{\frown}{AB}$ кад би осе некретне биле. Сад почем се осе крећу, то ће се на крају времена t' крива пруга $\overset{\frown}{AB}$ по предпоставки налазити у $\overset{\frown}{A'B}$ а тачка N у N' дакле на крају времена t' кретна тачка неће бити у N већ у N'. Тако исто можемо видети да ће она на крају времена t'' бити у P'' а не у P и т. д. Потоме кретна тачка описаће у простору пут $MN'P''Q'''$ .... и налазиће се на крају времена t t' t'' t''' у тачкама M N' P'' Q'' и т. д.

Кретање тачке по путу $MN'P''Q'''$ зове се абсолутно, а по пруги $\overset{\frown}{AB}$ релативно, напоследку кретање оса, у слeдству кога крива $\overset{\frown}{AB}$ заузима постепено положаје $\overset{\frown}{A'B'}$ $\overset{\frown}{A''B''}$... назваћемо ми за сад док се боља реч ненађе, привлачно кретање кретне тачке (le mouvement d'entrainement du point mobile).

Приметба. По напред реченом, могло би се мислити, да се тачка једновремено креће у двојаком правцу. Очевидно је да нека тачка, која заузима постепено разне положаје у простору, може се само у једном правцу кретати, и ми кад кажемо да се нека тачка у двојаком правцу једновремено креће, то само ради лакшег схваћања самог кретања предпостављамо да то тако може бити. Разлагање једног истог кретања на друга два у самој ствари неможе постојати.

Слагање и разлагање кретања.

41. Кад из познатог релативног и привлачног кретања неке тачке, опредељујемо њено абсолутно кретање, онда се зове *слагање кретања.* — Релативна и привлачна кретања, означена су често под именом слагајућа кретања (mouvements composan*t*s) и онда абсолутно кретање зове се резултирајуће кретање (mouvement résultant).

Но почем се може поставити питање, да се из познатог абсолутног и релативног кретања определи привлачно, или из познатог абсолутног и привлачног да се определи релативно кретање, то ћемо ми позната кретања, из којих непозната определујемо, звати у опште слагајућа кретања, а из ових сложено, резултирајуће кретање.

Тако исто можемо себи представити, да се кретање неке тачке, састоји, из три четири и т. д. други кретања. Н. пр. Нека тачка креће се по крову какве лађе, лађа плови duж обале земља се обрће око своје кроз обрте умишљене осе, у исто време окреће се око сунца, заузимајући разне положаје на свом елиптичном путу и т. д. Сва ова кретања можемо сматрати, као једновремена кретања вопросне тачке, помоћу којих можемо определити њено абсолутно кретање у простору.

Кретање је тачке по крову лађе, као што смо напред рекли, релативно, а кретање лађе односно земље биће привлачно. Ако сада ова два кретања сложимо, — а како то бива видићемо на скоро — онда ћемо добити кретање тачке односно земље. Но ово резултирајуће кретање, такође је релативно, јер се земља креће, обртање пак њено око осе обртне, може се узети као привлачно кретање, ако ова два нова кретања сложимо, онда ћемо имати кретање вопросне тавке односно оса сталног правца које пролазе кроз средиште земље, и т. д.

42. Задатак о слагању и разлагању кретања може се у опште и аналитично овако решити.

Нека су x, y, и z, координате кретне тачке M однешене на три ортогоналне коордонатне сталне осе $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, и $\overline{OZ}$, (Сл. 22.) — Ове координате кретне тачке јесу без сумње неке функције времена t. — Означимо са α, β и γ; менљиве координате почетка O' кретних оса као система сравњивања. — Узмимо да су и ове осе ортогоналне т. ј. управне једна на другу. Означимо напоследку са x' y' и z' координате тачке M односно ових кретних оса.

Почем је то тако, координате x, y, z кретне тачке M у смотрењу стални оса биће определене овим једначинама:

$$x = \alpha + x' \cos (XX') + y' \cos (XY') + z' \cos (XZ')$$

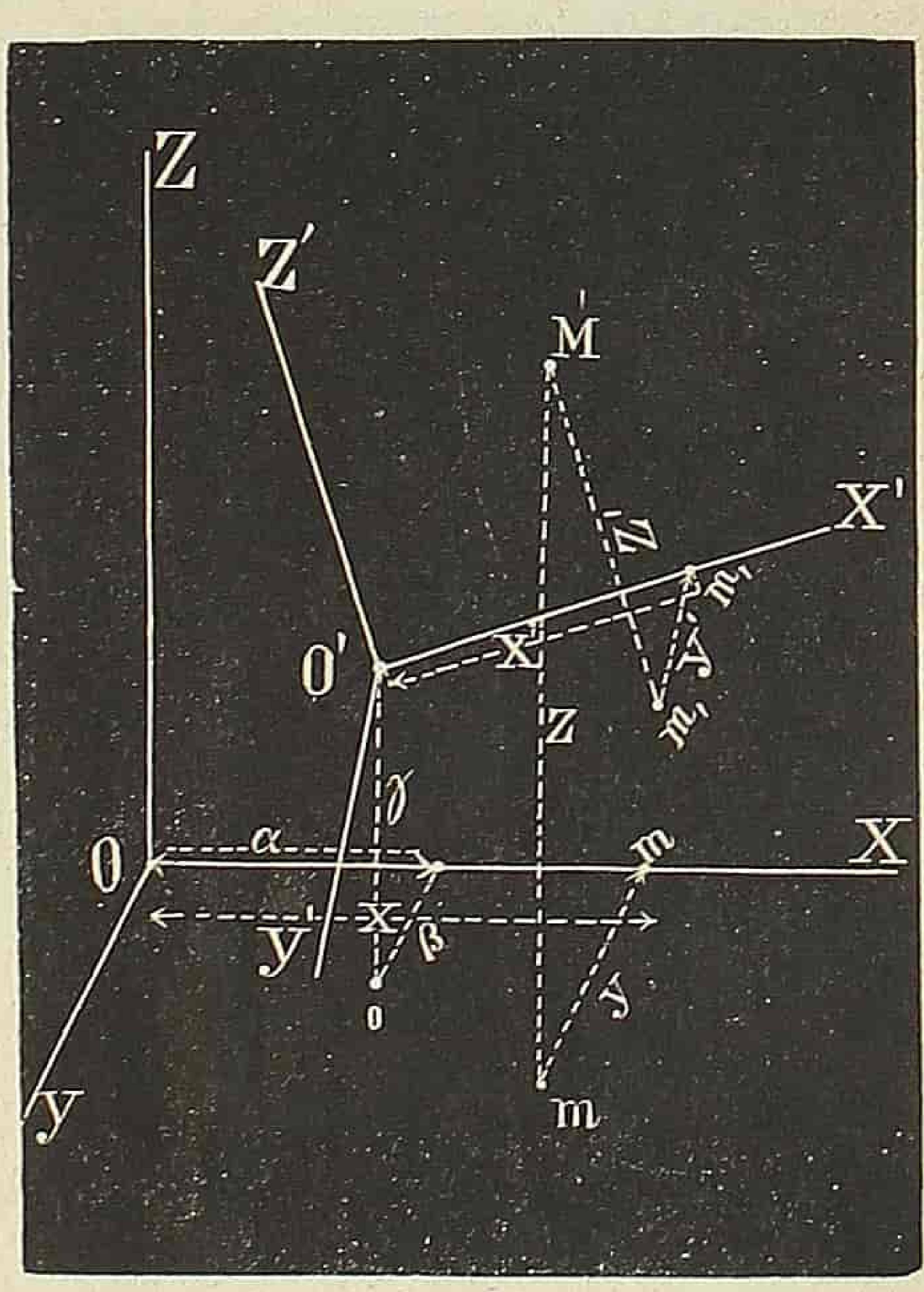
$$y = \beta + x' \cos (YX') + y' \cos (YY') + z' \cos (YX')$$

$$z = \gamma + x' \cos (ZX') + y' \cos (ZY') + z_{,} \cos (ZZ').$$

које добијамо познатим из аналитичне геометрије преображајем кордината.

У овим једначинама, (XX') (XY') . . . . . и т. д. означавају угле које образују кретне осе са одговарајућим сталним осама.

Ако ове две једначине односно времена t диференциалимо најпре један пут, а затим други пут, онда ћемо добити изразе, који постоје најпре између брзина, а затим између акцелерација разни сматрани кретања.



Сл. 22.

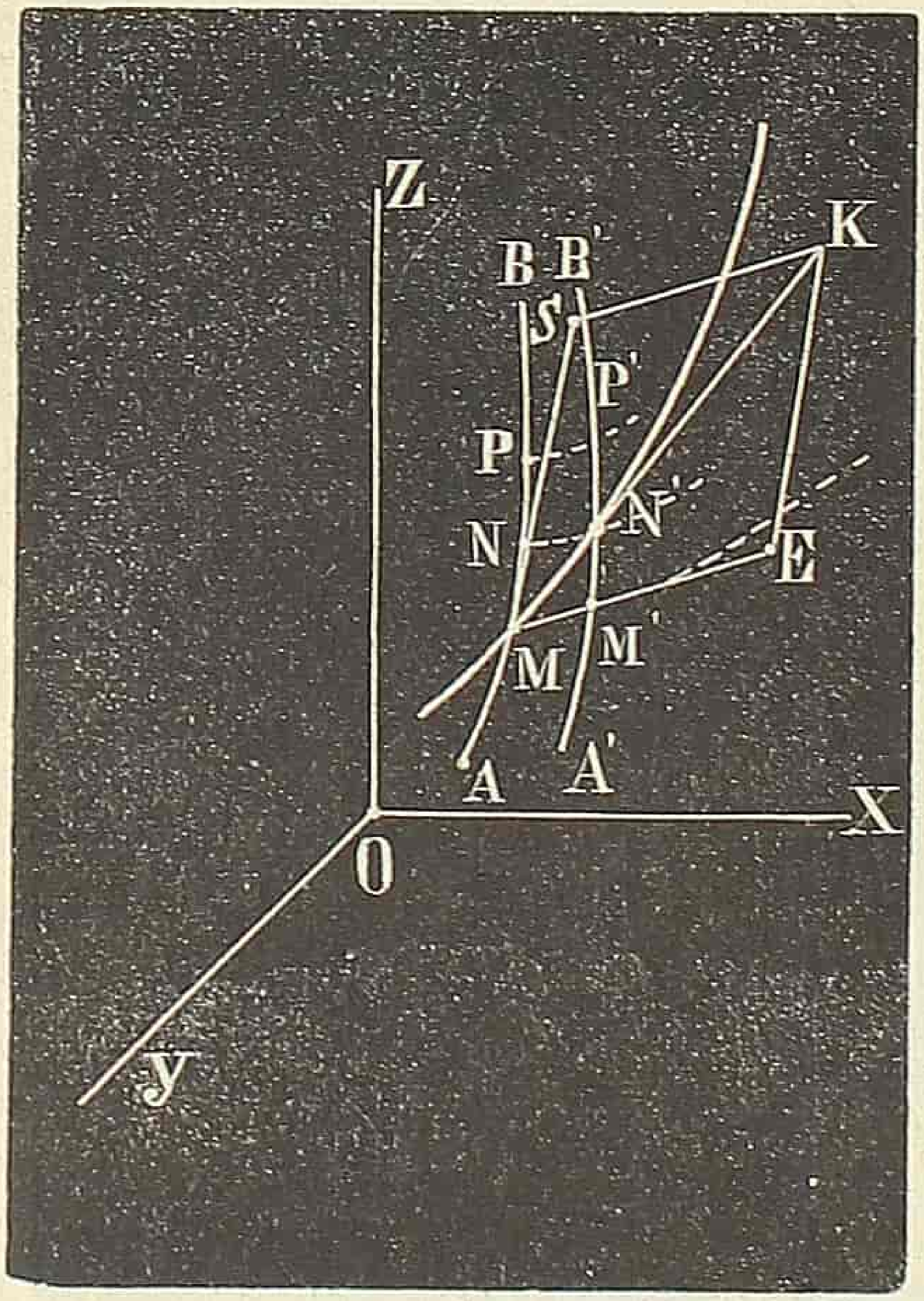
И то су ови изрази, које ћемо ми у дањем нашем штудирању геометрично да определимо.

Слагање брзина.

43. I. Паралелограм брзина. — Кад сматрамо неку тачку као да се једновремено налази у два или више други кретања, онда као што напред рекосмо — њено (реално) право кретање добијамо слагањем ови једновремени кретања. — Брзина пак кретне тачке у сваком магновењу, може се определити врло простим начином, из брзина, које она има у истом тренутку у сваком од ови саставни кретања.

И зааста узмимо најпре само два једновремена кретања неке кретне тачке т. ј. узмимо само њено релативно и привлачно кретање. Абсолутна брзина ове тачке може се определити врло простом конструкцијом из њене релативне и привлачне брзине на овај начин.

Нека је M положај кретне тачке на крају времена t (Сл. 23) $\widehat{AB}$ њен релативни пут. Овај пут, као што је познато, заузеће на крају времена t' према кретним осама $OXYZ$ неки положај $\widehat{A'B'}$ и разне тачке M, N P .... налазиће се у M', N' P' ....



Сл. 23.

Кад тачка M не би имала релативно кретање, онда би се она налазила на крају времена t' у M', но она се креће по свом релативном путу, и потоме у место да се налази у M, биће на крају времена t' у N'....

Отуда сљедује да је $M'N'$ релативни премештај кретне тачке; MN' је њен абсолутни премештај; а MM' премештај је тачке система сравњивања, која се слагала са M на крају времена t.

Ако сад представимо себи да се интервал времена $t' - t$ употребљен кретном тачком да пређе из M у N'; непрестано умаљава, и најпосле постане безкрајно мали dt; онда ће слика $MM'N'N$ за ову граничну вредност dt времена постати паралелограм, јер почем су стране $\overline{MN}$ и $\widehat{M'N'}$ два положаја једног истог елемента релативног пута, AB, који се у малом одстојању један од другог налазе, и образују међу собом уго, који може бити само безкрајно мали, то ове стране могу се сматрати као равне и равноодстојне. Може се дакле казати да је абсолутни премештај $\overline{MN'}$ кретне тачке за безкрајно мало време $dt.$; диагонала паралелограма, кога су стране: 1-во Њен релативни премештај $\overline{MN}$; 2-го Њен привлачни премештај $\overline{MM'}$, т. ј. премештај кои би она учинила за ово време, кад би била чврсто сајужена са кретним осама. —

44. Безкрајно мали премештаи .... $\overline{MN'}$, $\overline{MN}$ и $\overline{MM'}$ стоје у сразмери са абсолутном, релативном, и привлачном брзином, и заиста ако означимо ове брзине са v, v_r и v_e имаћемо да је:

$$\overline{MN'} = vdt;\ \overline{MN} = v_r dt \text{ и } \overline{MM'} = v_e dt$$

отуда

$$\overline{MN'} : \overline{MN} : \overline{MM'} = v : v_r : v_e$$

Дакле ако се конструира над релативном брзином $v_r = \overline{M\mathrm{S}}$ и привлачном брзином $v_r = \overline{ME}$ паралелограм $MSER$, диагонала MR овог паралелогрема представљаће по правцу и величини обсолутну брзину кретне тачке.

Овај паралелограм често је означен под именом паралелограм брзина (фр. parallélogramme des-vitesses. Нем. parallelogramme der Geschwindigkeiten).

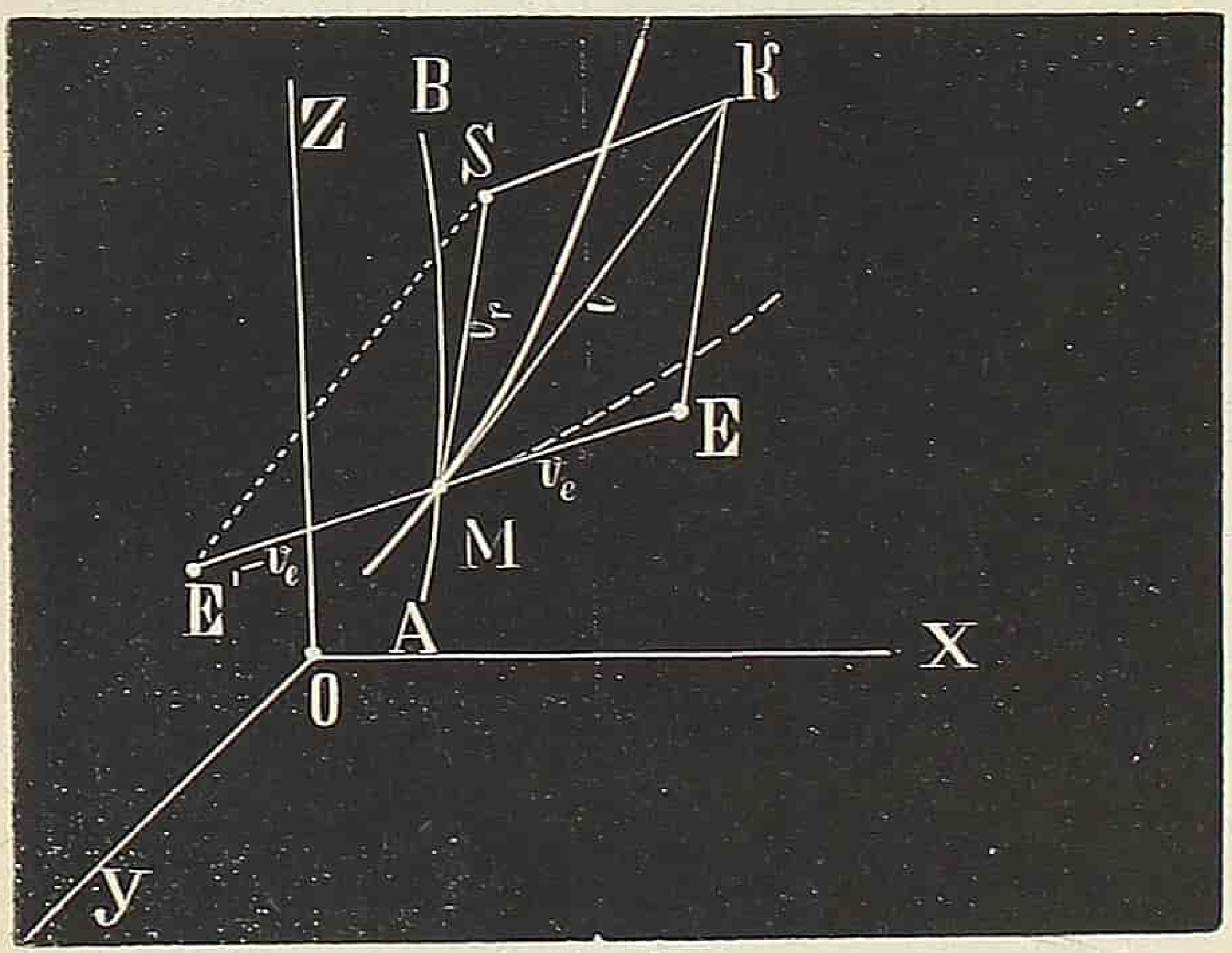
Овде имамо приметити, да ако би брзине v_e и v_r међусобом променули, т. ј. прву би узели као релативну, а другу као привлачну брзину, онда конструкција, којом опредељујемо обсолутну брзину биће сасвим иста, и зато се ове две брзине v_r и v_e зову једним именом композанте обсолутне брзине v; а ова њина резултанта. Дакле

Правило. *Абсолутна је брзина резултанта релативне и привлачне брзине.*

То што рекосмо о промени брзина v_e и v_r постои само што се конструкције тиче. Што се пак тиче саме суштине ствари, имамо приметити, да је композанта v_r, брзина кретне тачке, сматрана извесним начином, а композанта v_e, привлачна је брзина, која нестои у никаквом отношењу са самим кретањем тачке.

Ако се брзине v_r и v_e слажу са једним истим правцем, онда је абсолутна брзина кретне тачке равна сбиру или разлики ови двеју брзина, потоме како су оне истог или противног правца, и у овом последњем случају, абсолутна брзина налазиће се у правцу своје веће композанте, но ако би композанте биле једнаке, онда ће обсолутна брзина бити $= o$.

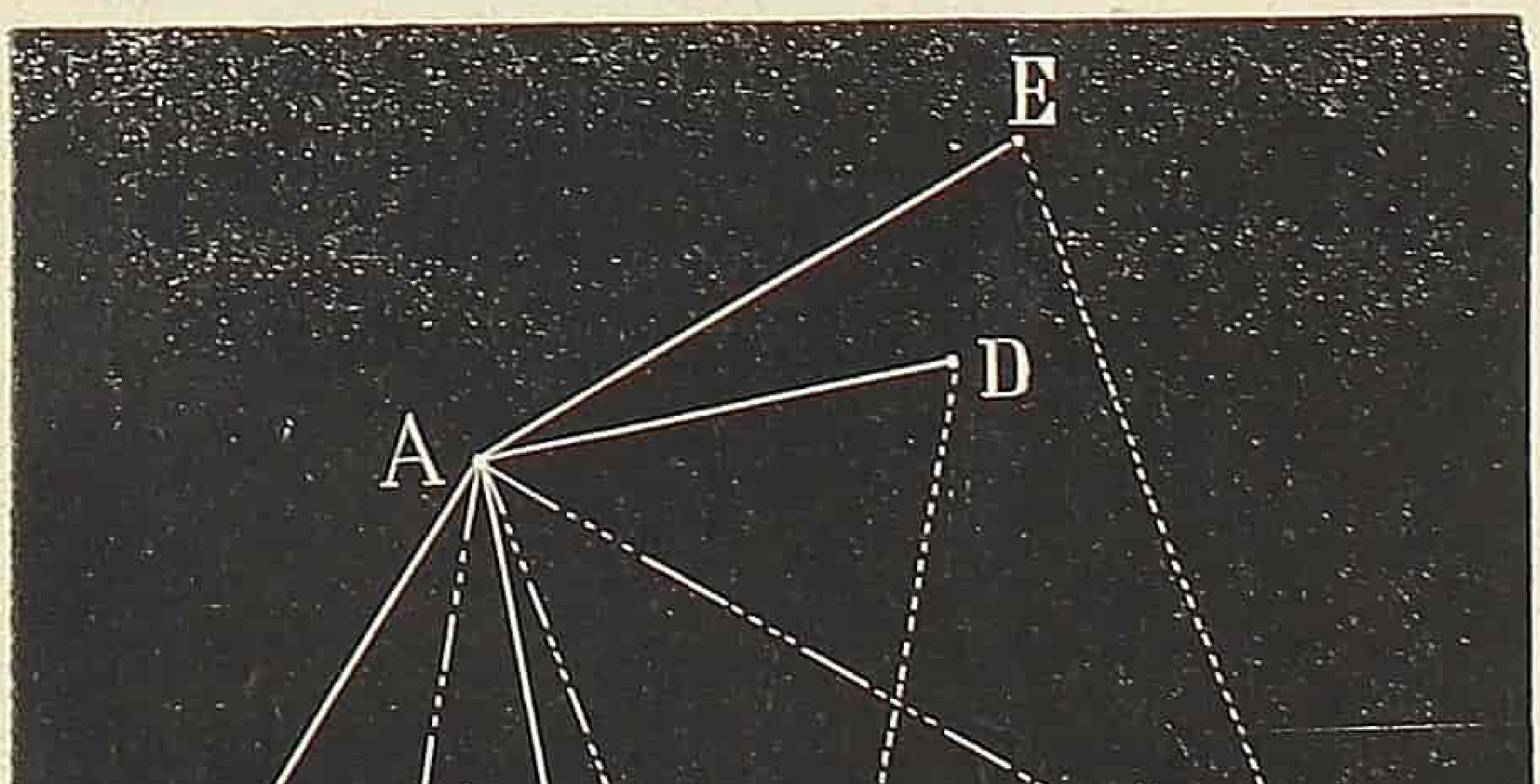
45. Ако би имали да определимо релативну брзину v_r кад је позната абсолутна брзина v и привлачна брзина v_e онда треба само да конструирамо једну страну паралелограма, знајући дијагоналу и ону другу његову страну, и задатак ће бити решен. Тако исто непозната страна $\overline{MS} = v_r$ може се сматрати као дијагонала паралелограма $MRSE'$ (сл. 24) одкуда сљедује ово:



Сл. 24.

Правило. *Релативна је брзина резултанта абсолутне брзине v и привлачне брзине v'_e узете у противположеном правцу.*

46. II. Полигон брзина. — Кад сматрамо неку кретну тачку, као да се једновремено налази у више од два кретања (№ 41) онда њену обсолутну брзину, можемо одредити, слагајући постепено брзине ови разни кретања и то овако:



Сл. 25.

Нека су $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$... (сл. 25) поједине брзине вопросни саставни кретања кретне тачке. Ако сада употребимо постепено конструкцију паралелограма брзина, онда ће мо наћи најпре да је $\overline{AF}$ резултанта брзина AB и AC, затим да је $\overline{AG}$ резултанта брзина $\overline{AF}$ и $\overline{AD}$, и сљедствено резултанта од три брзине $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, напоследку да је $\overline{AH}$ резултанта од $\overline{AG}$ и $\overline{AE}$ т. ј. резултанта од четири дате брзине.

Последња резултанта $\overline{AH}$ може се краће изнаћи овако: кроз крајњу тачку B прве брзине $\overline{AB}$ повуче се права $\overline{BF}$ равноодстојно и једнаке величине са $\overline{AC}$, кроз F повуче се права $\overline{FG}$ равноодстојно и једнаке величине са $\overline{AD}$, и напоследку кроз G повуче се права $\overline{GH}$ равноодстојно и једнаке величине са $\overline{AE}$. Права $\overline{AH}$ која закључује полигон $\overline{ABFGH}$ биће тражена резултанта. — Ова конструкција, која се употребљује за налазак резултанте и то геометрично, од ма каквог броја брзина, зове се полигон брзина (фр. polygone des vitesses; нем. Polygon des Gesckwindigkeiten).

Из напред реченог сљедује ово:

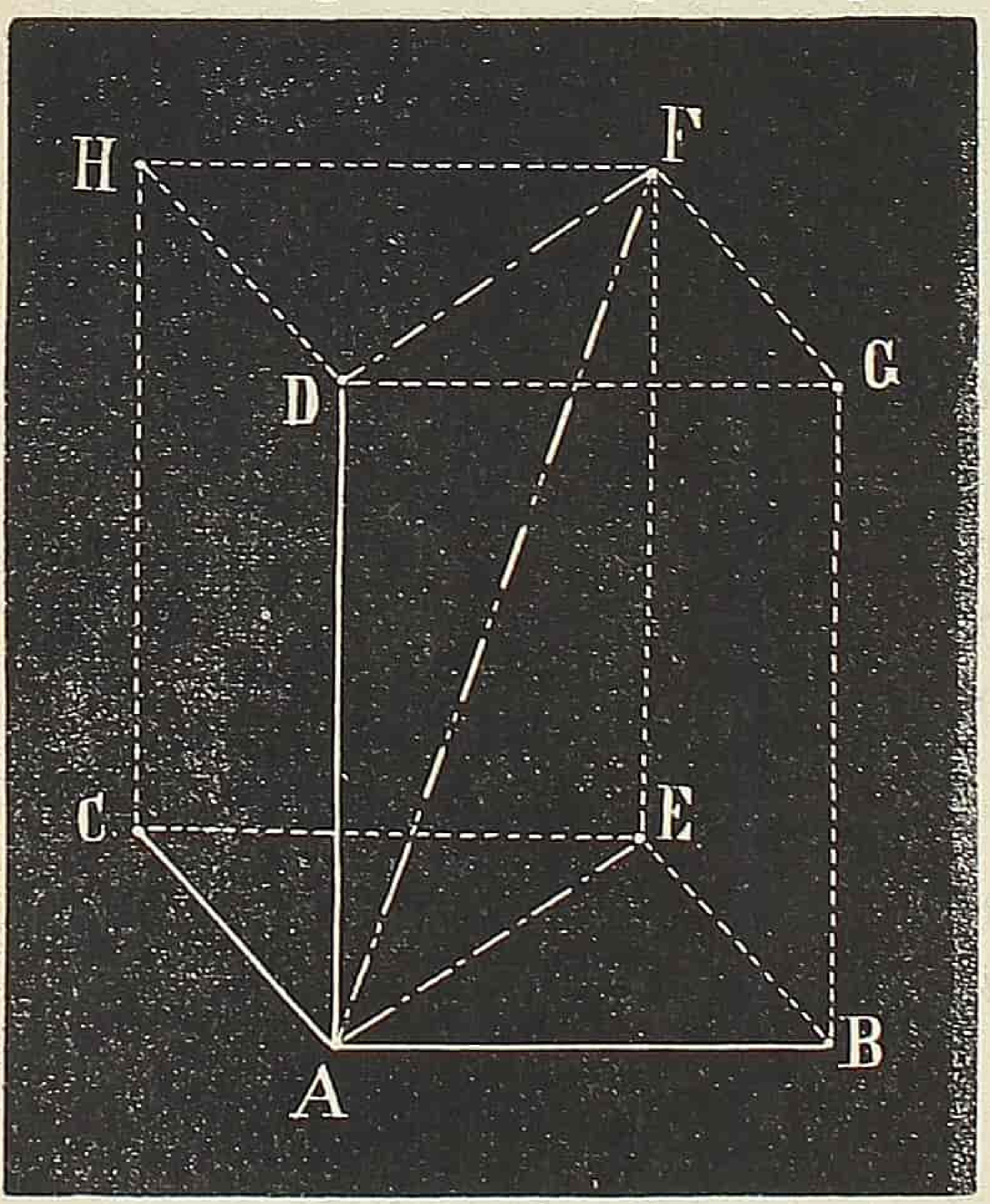
Правило. *Ма колики био број кретања, која се имају сложити, абсолутна је брзина, резултанта свију одговарајући брзина.*

Прим. 1-во Овај теорем независи никако од реда по ком се сматрају и слажу брзине композанте. Тако може се ма која композанта узети као прва, а затим остале узимљу се по произвољном реду, без да се тиме тражена посљедња резултанта ма у чему било, мења.

2-го Ако би једновремене брзине неке кретне тачке, биле управљене по једној истој правој и у истом правцу, онда ће резултанта ови брзина бити равна њином сбиру и биће управљена по иетој правој и у истом правцу. — Ако су пак једновремене брзине управљене по истој правој но неке од њих у једном а остале у противположеном правцу, онда је њина резултанта равна разлики између сбира брзина једног и сбира брзина противположеног правца, и биће управљена у правцу већег сбира ови брзина.

47. *Параллелипипед брзина.* Ако би имали три брзине композанте, којих се правци неналазе у једној истој равнини онда њину резултанту можемо такође конструктивно да определимо на ниже изложени начин, који се у нешто разликује од предходећег начина.

Нака су $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ (Сл. 26) три брзине композанте Ако констришемо паралелограм од две брзине $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, које се у равнини CAB налазе онда ће $\overline{AE}$ бити резултанта ове две брзине, ако затим конструишемо паралелограм брзина $\overline{AE}$ и $\overline{AD}$ налазећи се у равнини DAE онда ће $\overline{AF}$ бити њина резултанта, но у исто време и резултанта од три дате брзне $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.



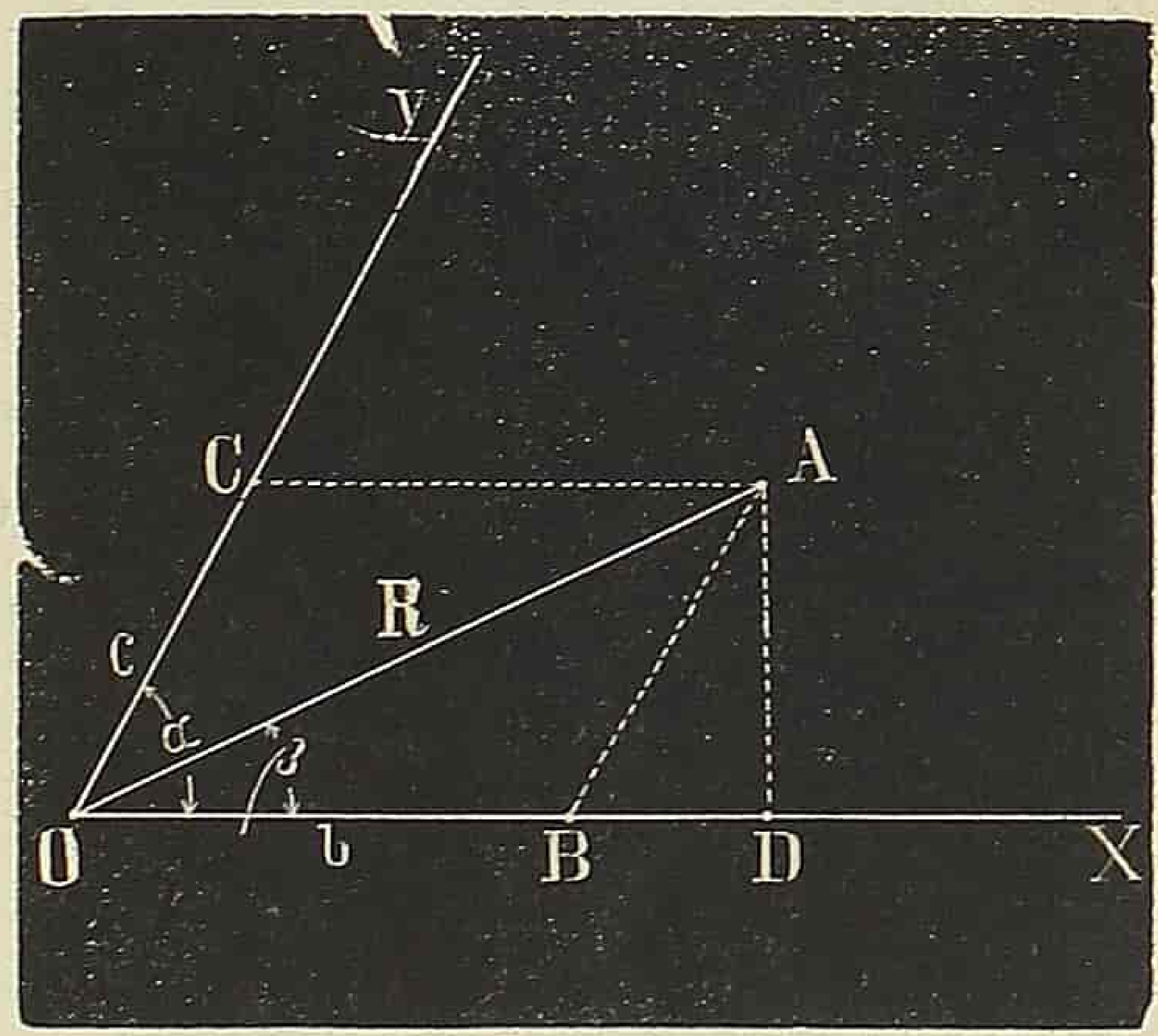
Сл. 26.

Сад ако повучемо кроз тачке B и C праве $\overline{BG}$ и $\overline{CH}$ равноодстојно и једнаке величине са $\overline{AD}$, затим сајузимо тачке H,D; D,G; G,F и F,H; правим пругама добићемо паралелограм $HDGF$, који је равноодстојан и раван паралелограму $ABEC$. Из тога сљедује да је резултанта $\overline{AF}$ диагонала параллелипипеда, кога су стране (ивице) три дате композанте $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Ова особита конструкција, која вреди за случај, кад се три брзине композанте неналазе у једној истој равнини, зове се параллелипипед брзина (фр. Parallelipipède des vitesses нем. Parallelipiped der Geschwindigkeiten).

Разлагање брзина.

48. Често се потреба покаже, да се нека брзина разложи по датим правцима на друге две или три брзине. Ово бива противно слагању брзина и то овако:

Нека је $\overline{OA}$ (Сл. 27) брзина неке кретне тачке, која се има разложити на друге две по правцима $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$. — Да би то могуће било, треба да се дата брзина $\overline{OA}$ налази у равнини XOY. Ако је тај услов испуњеп, онда треба повући кроз A равноодстојне $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ са правцима $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$. — OB и $\overline{OC}$ биће две тражене композанте од резултанте $\overline{OA}$.



Сл. 27.

49. Резултанта $\overline{OA} = R$ и њене композанте $\overline{OB} = b$ и $\overline{OC} = c$ стоје међу собом, што се њиме величине и правца тиче у известном отношењу, које ћемо ми овде сада да покажемо. Ако означимо краткости ради са α, уго XOY који образују међу собом композанте, са β, уго AOX образован резултантом R и композантом b; онда употребивши тригонометриске образце, имаћемо, да је:

$$R = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha}\,;$$

$$\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{c}{\sin\beta};$$

отуда $\sin\beta = \dfrac{c\sin\alpha}{R}$ и $\operatorname{tang}\beta = \dfrac{c\sin\alpha}{b + c\cos\alpha.}$

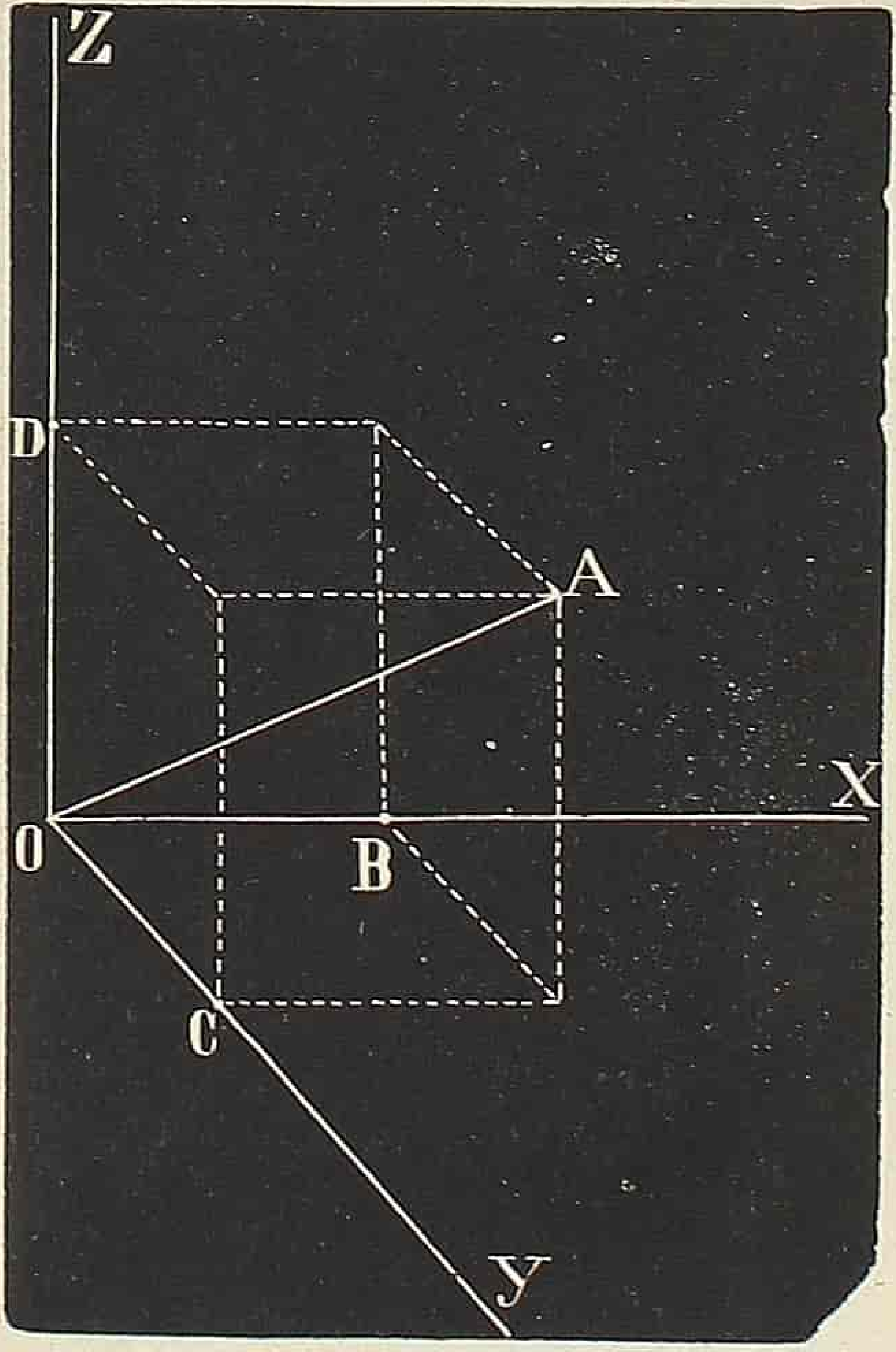
Ако су композанте b и c једнаке дакле ако је паралелограм ови брзина ромб, онда ће бити:

$$R = 2\,b\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ и } \beta = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Напоследку образујули композанте b и c међу собом прави уго т. ј. $\alpha = 90^0$ онда ће бити $R = \sqrt{b^2 + c^2}$ и $tang\, \beta = \frac{c}{b}$.

Приметба. Уместно је овде приметити да сви тригонометрички образци, који служе за решење троугла, могу се применити и на резултанту R и њене композанте b и c. —.

50. Узмимо јошт напоследку да имамо разложити неку дату брзину $\overline{OA}$ на три друге брзине управљене по правцима $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и $\overline{OZ}$, који се неналазе у једној истој равнини (Сл. 28). Овај ћемо задатак овако решити: Положимо кроз тачку A три равнине, које би равноодстојне биле са равнинама OXY, OXZ и ZOY и определимо тачке B, C и D у којима ове равнине пресецају правце $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и $\overline{OZ}$; $\overline{OB}$. $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$, биће три брзине композанте, које тражимо. —



Сл. 28.

И у овом случају можемо аналитично да изразимо резултанту $\overline{OA} = R$ средством њени композанта $\overline{OB} = b$; $OC = c$ и $OD = d$; као и обратно сваку композанту да изразимо средством резултанте и остале две композанте.

Ради тога означимо са α, β и γ угле које образује резултанта R са правцима $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и $\overline{OZ}$, и узмимо што обично бива, да су ови правци управни један на други, лако је дознати да је:

$$R \cos \alpha = b; \; R \cos \beta = c, \text{ и } R \cos \gamma = d.$$

Ако сваку од ових једначина подигнемо на квадрат и ове квадрате саберемо добићемо

$$R^2 = b^2 + c^2 + d^2$$ због тога што је

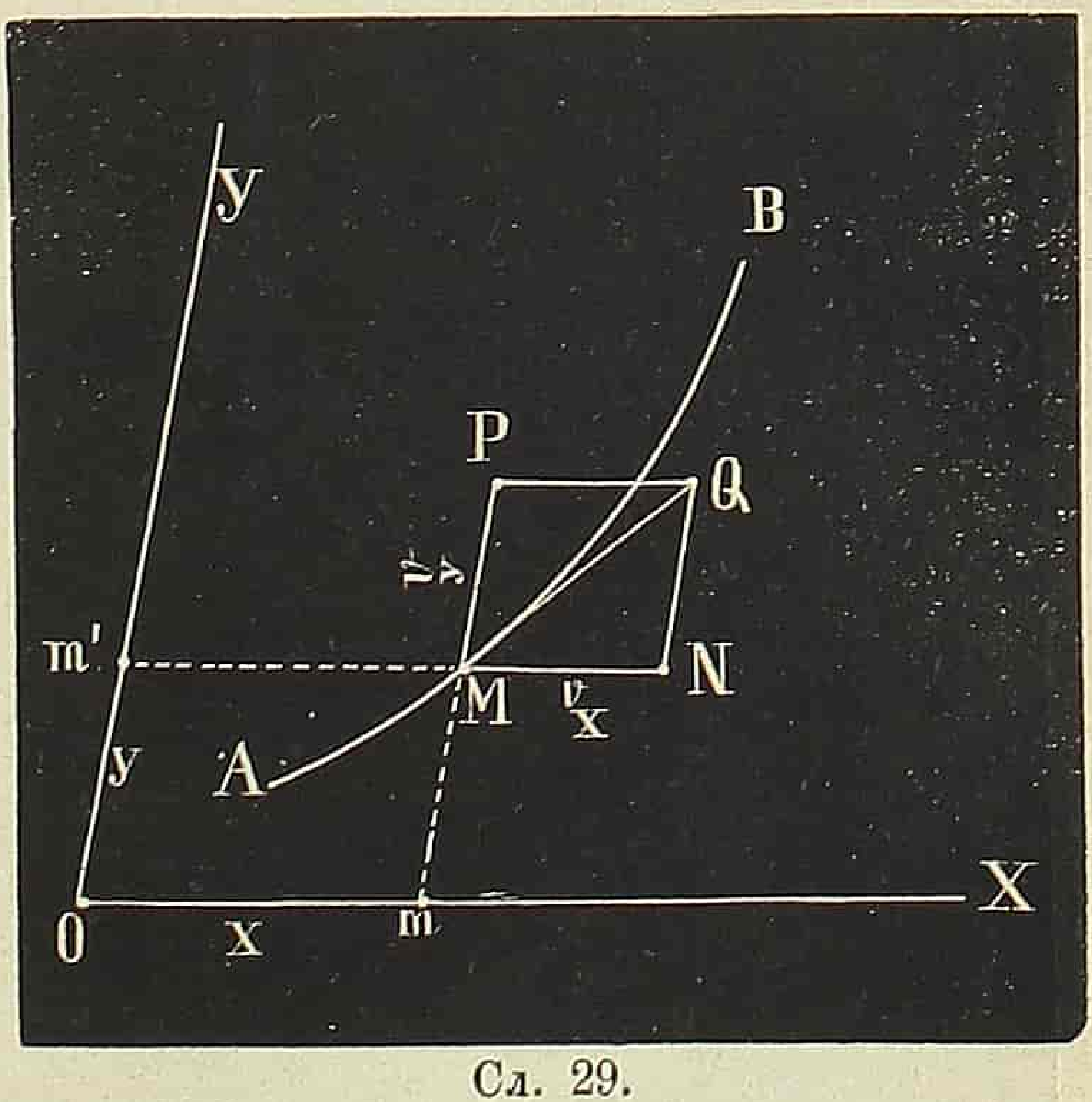
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$ (види апалит. геометр.)

и отуда $$R = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}.$$

Кретање тачке однешено на право-пружне координате.

51. Кад оћемо тачно да определимо постепене положаје, које нека кретна тачка у простору заузима, онда је најлакше и најобичније, ако однесемо кретање тачке на неки систем координата, као што смо на једном месту то већ напоменули, а затим изнађемо аналитичне изразе, кои показују, како се мењају ове координате за сваку вредност времена t, другим речма, како се за сваку вредност овог времена рачуном могу да определе координате поједини положаја, које тачка заузима у свом кретању. —

52. Узмимо најпре да се нека тачка M (сл. 29) креће у једној истој равнини, и однесимо њене разне положаје на две координатне осе $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ повучене у истој равнини. Нека је x, абциса $\overline{Om}$, а y ордината $\overline{Om'}$ тачке M, на крају времена t. Ове две координате x, и y, мењају се са променом овог времена t; потоме је $x = f(t)$; и $y = \varphi\ (t)$.



Сл. 29.

Ако пројектирамо тачку M на осу $\overline{OX}$ равноодстојно са $\overline{Oy}$ пројекција ће бити m, тако исто њена пројекција на нсу $\overline{Oy}$ биће m'. Дакле два предходећа израза јесу једначине кретања пројекција m и m' тачке M. — Ова два израза зову се често једначине кретања тачке M.

Елиминирајући t између предходеће две једначине, добићемо једначину између x и y т. ј. једначину пута $\widehat{AB}$ тачке M.

Ако означимо са v_x и v_y брзине пројекција m и m', имаћемо

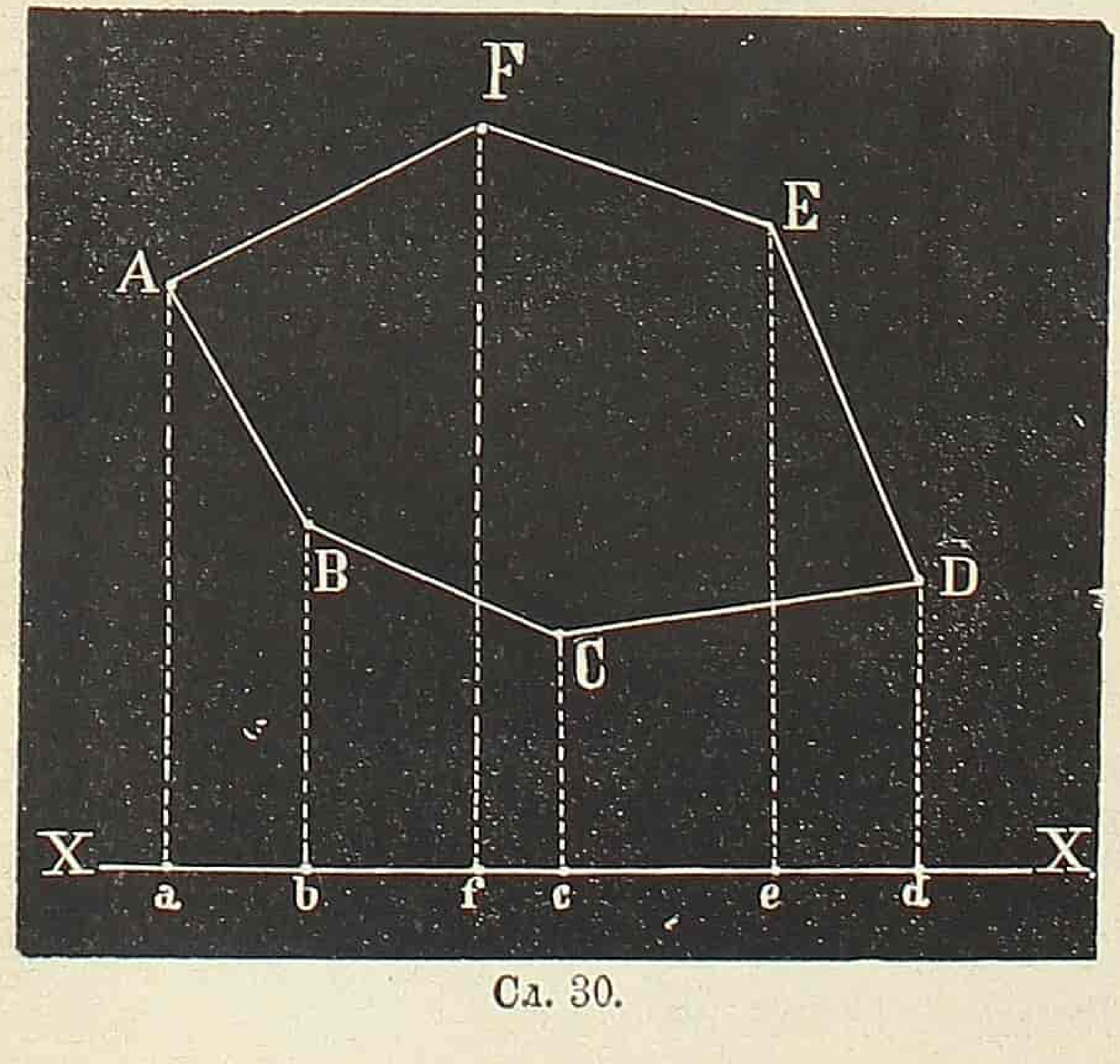
$$v_x = \frac{dx}{dt} = f_1(t)\,; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \varphi_1(t).$$

Знајући ове две брзине можемо конструктивно лако изнаћи брзину v тачке M, оснивајући се на томе што су v_x и v_y пројекције од брзине v на осе $\overline{OX}$ и $\overline{Oy}$. И заиста ако повучемо кроз тачку M две праве $\overline{MN}$ и $\overline{MP}$ равноодстојно са осама $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ и равне брзинама v_x и v_y, онда по познатом брзина v мора бити диагонала MQ паралелограма $MNQP$. — Ова диагонала је дина је права пруга, која пролази кроз M, и од које имамо појекције v_x и v_y, може се дакле укратко поставити овај:

Теорем. Брзина v тачке M резултанта је свои пројекција v_x и v_y на осе $\overline{OX}$ и $\overline{Oy}$.

Пројекција полигона брзина.

53. Лако је дознати, да кад се нека права $\overline{AF}$, (сл. 30) која закључује полигон $ABCDEF$, ортогонално или косо пројектира на ма коју другу праву $\overline{XX}$ онда је пројекција праве $\overline{AF}$ равна алгебрајичном сбиру пројекција од страна полигона, рачунајући ове пројекције од једне исте тачке A. Тако н. пр. у нашој



Сл. 30.

слики биће $\overline{af} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} - \overline{de} - \overline{ef}$. — Но што вреди за праву $\overline{AF}$, вреди и за сваку другу страну полигона, с том само разликом да пројекције треба рачунати, починући свагда од једне крајње тачке вопросне стране.

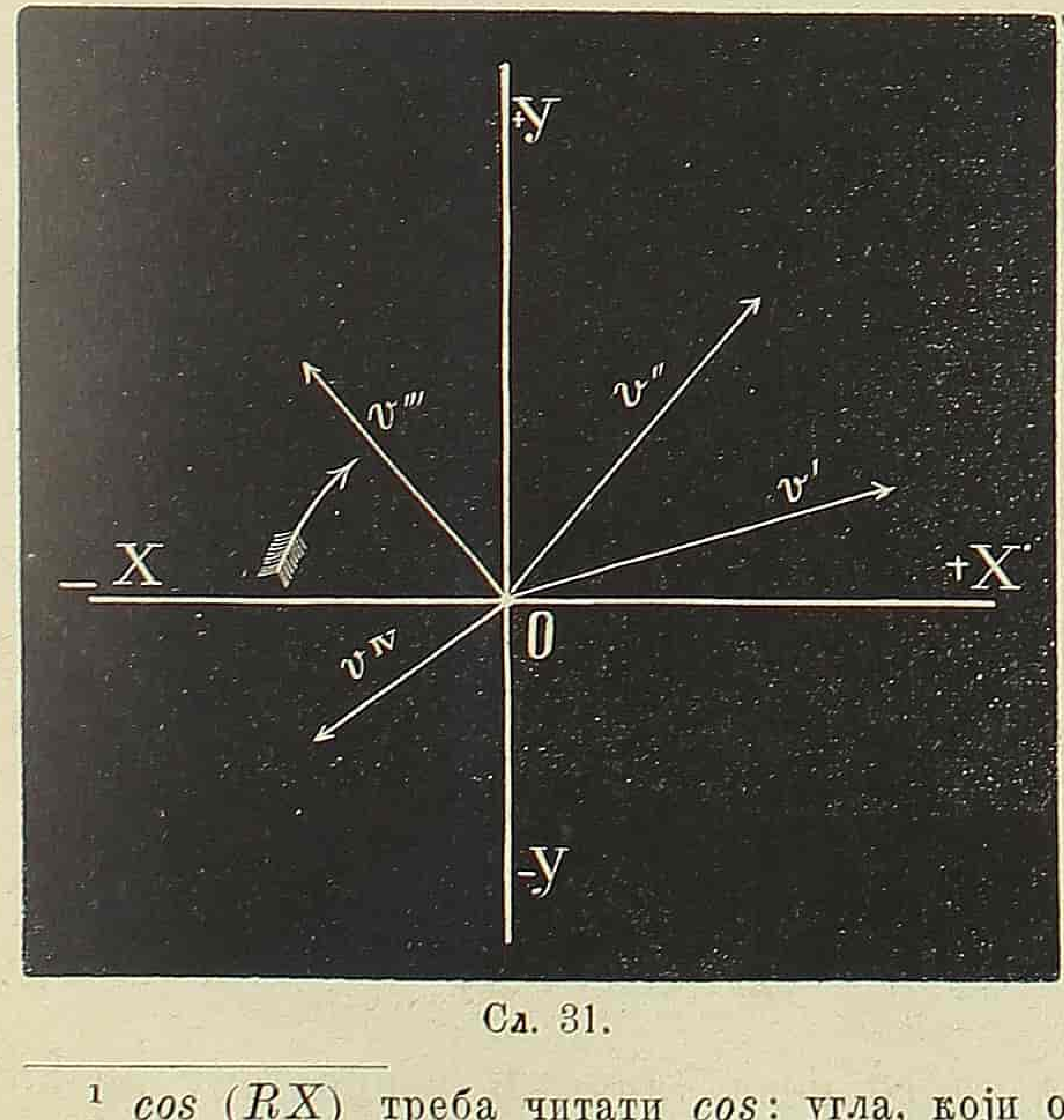
Ако сада узмемо да права $\overline{AF} = R$ представља нам правац и величину резултанте од брзина композаната $\overline{AB} = v'$; $\overline{BC} = v''$; $\overline{CD} = v'''$; $\overline{DE} = v^{IV}$ и $\overline{EF} = v^{V}$; неке кретне тачке, и ако означимо са R_x ортогоналну или косу пројекцију ове резултанте на осу $\overline{XX}$, онда ће по горе реченo бити

$$R_x = v_x' + v_x'' + v_x''' - v_x^{IV} - v_x^{V} = \Sigma v_x.$$

Означавајући са Σv_x алгебраички сбир пројекција композаната, узимајући сваку композанту са знаком који одговара њеном правцу.

Ако је пројекција ортогонална, онда предходећи израз постаје:

[1] $$R \cos (RX) = \Sigma v \cos (vx).$$



Сл. 31.

54. На основу напред изложеног, ми ћемо сада аналитично да изразимо апсолутну брзину неке кретне тачке која се једновремено налази у више од два кретања. —

Узмимо најпре да се правци брзина композаната разни сматрани кретања кретне тачке нала-

---

[1] $\cos (RX)$ треба читати $\cos$: угла, који образује резултанта R са осом X; то исто и за $\cos (vx)$, т. ј. $\cos$ угла који образује брзина v са осом x. —

зе у једној истој равнини, и нека су v'; v''; v'''; v^{IV}; ...... ове брзине. Однесимо сва ова кретања на две координатне осе $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ повучене у истој равнини Сл. 31. Ако брзине свију ових кретања пројектирамо на осе $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ и ако означимо са R_x и R_y пројекције резултанте (абсолутне брзине) на ове осе, онда по напред-изложеном биће:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \Sigma v_x \\ R_y &= \Sigma v_y \end{aligned}\right\} \text{отуда}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y - 2R_xR_y \cos(XY)} =$$

$$= \sqrt{(\Sigma v_x)^2 + (\Sigma v_y)^2 - 2\Sigma v_x \Sigma v_y \cos(XY)}$$

Ако би осе биле ортогоналне, онда је: уго $(XY) = 90$

и $$R \cos(RX) = \Sigma v \cos(vx)$$

и $$R \sin(RX) = R \cos(RY) = \Sigma v \sin(VX) = \Sigma v \cos(VY)$$

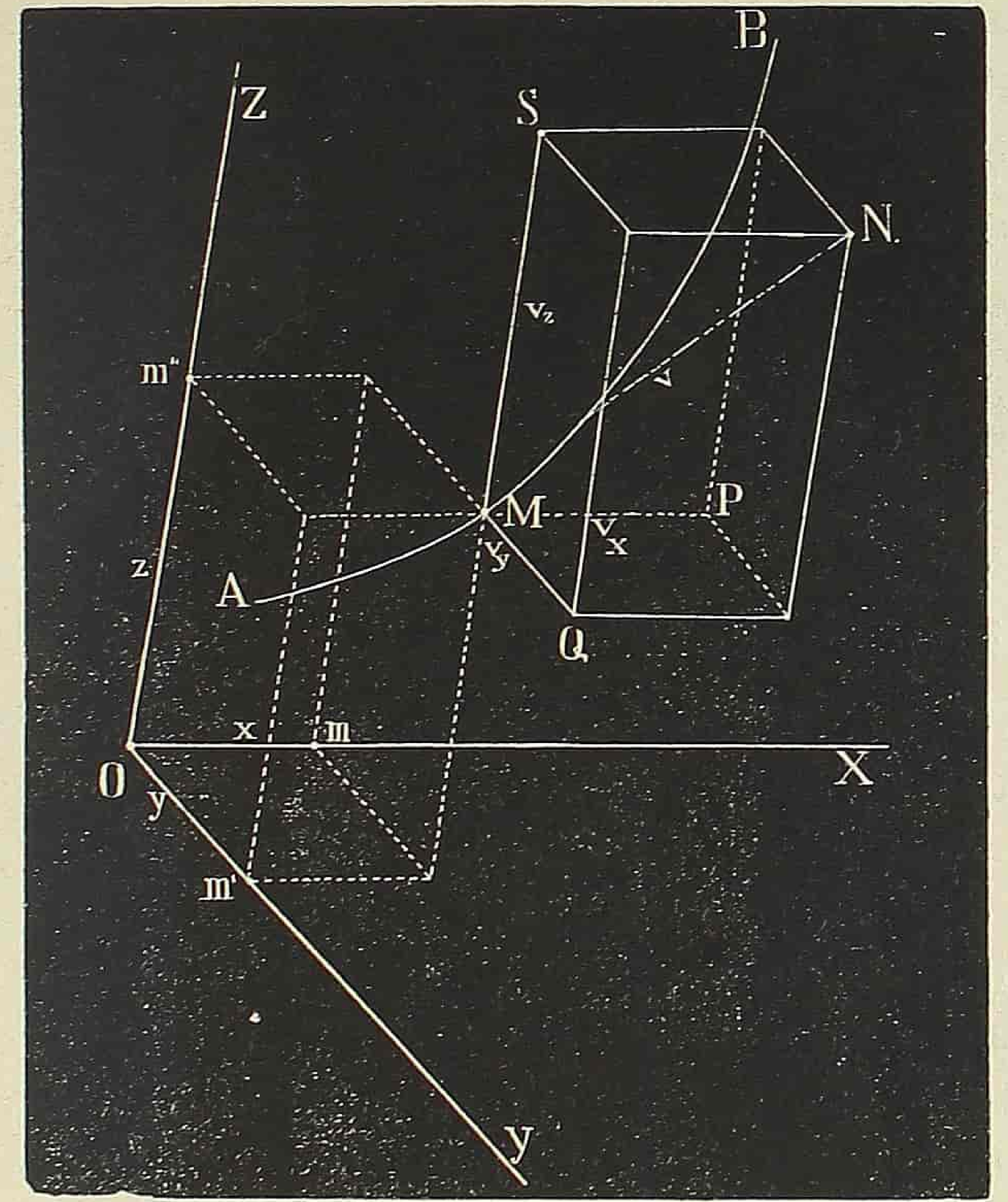
и дакле $$\sqrt{\left[\Sigma\, v \cos(vx)\right]^2 + \left[\Sigma\, v \cos(vy)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left[\Sigma\, v \cos(vx)\right]^2 + \left[\Sigma\, v \sin(vx)\right]^2}$$

Ови општи изрази, показују нам, како можемо величину резултанте изнаћи, при том имамо приметити да пројекцију сваке композанте треба узети са надлежним знаком, рачунајући угле, које оне са осама закључују, у једном истом правцу н. пр. с лева на десно. Што се пак правца резултанте тиче, овај је опредељен углом, који она са осом $\overline{OX}$ или $\overline{OY}$ образује, тако за ортогоналне осе биће:

$$\operatorname{tang}(RX) = \frac{\Sigma\, v \sin(VX)}{\Sigma\, v \cos(VX)}$$

55. Узмимо сада да се нека тачка M у простору креће Да би њене разне положаје могли определити, однесимо њено кретање на три координатне осе $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и $\overline{OZ}$ (Сл. 32).



Сл. 32.

Нека су x, y и z три координате $\overline{Om}$, $\overline{Om'}$ и $\overline{Om''}$; тачке M, на крају времена t; имаћемо да је:

$$x = f(t)\,; \quad y = \varphi(t)\,; \quad \text{и} \quad z = \psi(t).$$

Тачке m, m', m'', јесу пројекције од M на три осе. Ове пројекције добијамо као што је познато, полажући кроз M равноодстојне равнине са равнинама YOZ, XOZ и XOY; предходећа три израза јесу дакле једначине кретања ових пројекција. — Оне се често зову и једначине кретања тачке M.

Ако елиминирамо менљиву t између предходеће три једначине, онда добијамо две једначине између менљиви количина x, y и z; и ово су једначине пута $\widehat{AB}$ тачке M.

Ако означимо са v_x v_y и v_z брзине пројекција m, m', m'', имаћемо:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f_1(t)\,; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \varphi_1(t)\,; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \psi_1(t).$$

Осим тога брзине $v_x\, v_y\, v_z$ јесу у исто време и пројекције од брзине v течка M у простору. Отуда сљедује, да ако повучемо кроз M три праве равноодстојно са осама $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и $\overline{OZ}$ и равне брзинама $v_x\, v_y$ и v_z онда је брзина v дијагонала параллелипипеда, конструираног на ове три праве, отуда:

Теорем: Брзина v тачке M резултанта је своји пројекција $v_x\, v_y$ и v_z на три осе.

Ако су осе ортогоналне т. ј. управне једна на другу онда је:

$$v_x = v \cos (vx); \quad v_y = v \cos (vy) \quad \text{и} \quad v_z = v \cos (vz).$$

и

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

56. Ако би се кретна тачкаједновремено налазила у више кретања, којих брзине не би биле у једној истој равнини, онда на основу предходећег теорема, и аналог ономе што смо навели о пројекцији брзина на једну исту осу; можемо лако аналитично изнаћи абсолутну брзину кретне тачке, ако све брзине композанте, пројектирамо на три координатне осе.

Узимајући као што обично бива, ове осе управне једна на другу и означавајући са $v'\; v''\; v'''$ ..... брзине композанте разни сматрани кретања а са R њину резултанту, имаћемо да је:

$$R \cos (RX) = \Sigma\, v \cos (VX) = X \text{ краткости ради}$$

$$R \cos (RY) = \Sigma\, v \cos (VY) = Y$$

$$R \cos (RZ) = \Sigma\, v \cos (VZ) = Z \text{ отуда}$$

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$\cos (RX) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

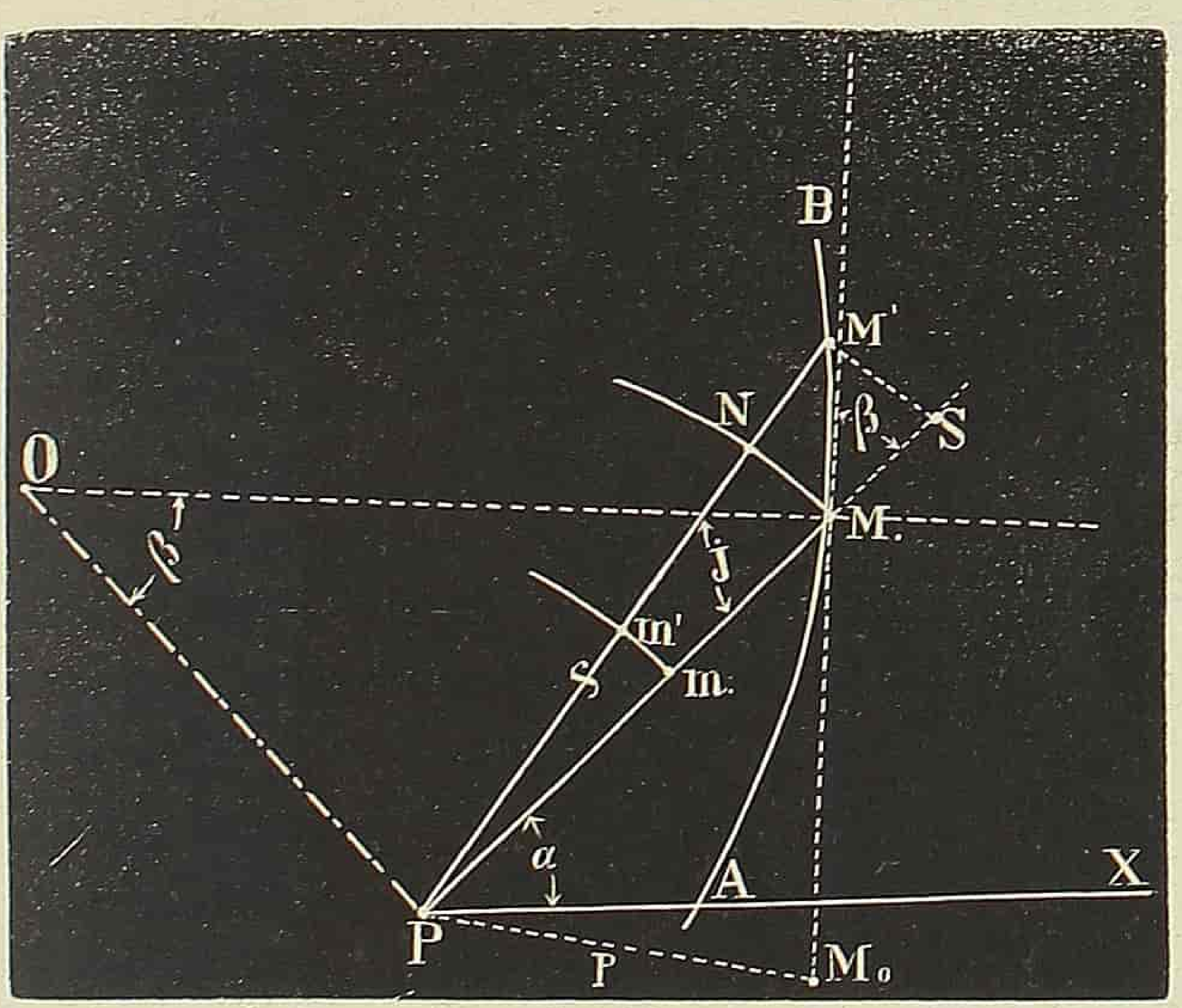
$$\cos (RY) = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \quad \text{и}$$

$$coc\,(RZ) = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\left[cos^2\,(RX) + cos^2\,(RY) + cos^2\,(RZ) = 1\right]. \ -.$$

Кретање тачке однешено на поларне координате.

57. Кретање неке тачке може се такође подпуно определити, ако га однесемо на поларне коордонате. При томе



Сл. 33.

могу бити два случаја: или се поларне координате налазе у истој равнини, у којој се тачка креће, или су ове координате у простору (т. ј. неналазе се у равнини кретања).

Испитајмо најпре, како се опредељује кретање тачке у првом случају.

58. Нека је $\widehat{AB}$ пут кретне тачке, P пол а $\overline{PX}$ поларна оса, на коју су однешени постепени положаји тачке, која се у равнини осе $\overline{PX}$ креће. Нека је M положај тачке на крају времена t, ρ; менљиви радиус вектор $\overline{PM}$; а α, менљиви уго MPX. —

Количине ρ и α; мењају се са временом t или боље зависе од овог времена, и потоме имаћемо ове две једначине:

$$\varrho = f(t); \quad \alpha = \varphi(t)$$

којима је кретање тачке подпуно опредељено, и заиста:

Првом једначином налазимо закон кретања тачке по радиусу вектору, а другом, закон по ком се мења угловно одстојање радиуса вектора од поларне осе $\overline{PX}$. — Слагањем ова два једновремена кретања тачке M, добијамо њено право кретање. —

Брзина клизања. — Ако означимо са v_ϱ брзину кретне тачке по радиусу вектору биће:

$$v_\varrho = \frac{d\varrho}{dt}$$

количина позитивна или негативна. Ова количина зове се брзина клизања по радиусу вектору. (Vitesse de glissement).

Угловна брзина. Даље ако означимо са v брзину обртања радиуса вектора око пола P и ако предпоставимо тачку M, као некретну по радиусу вектору, имаћемо:

$$v = \varrho \frac{d\alpha}{dt}$$

Израз $\frac{d\alpha}{dt}$ зове се угловна брзина тачке M и ова се брзина обично означава са w, (фр. vitesse angulaire; нем. Winkelgeschwindigkeit) и сад имамо:

$$v = \varrho w.$$

Ову брзину w(¹) можемо себи представити, као брзину неке тачке m, која се налази за јединицу одстојања од пола P,

---

[1] Нетреба заборавити, да је w брзина тачке m за јединицу времена т. ј. за једну секунду.

При примени правила Кинематике на махине, обично се стална угловна брзина опредељује — бројем обрта радиуса вектора у једном минуту. — Узмимо да се неки точак N пута обрне у једном минуту. Предпостављајући да је кретање једномерно, једна тачка овог точка, налазећа се за јединицу одстојања од средишта,

59. Кад је за неки известан тренутак познато ϱ, $\frac{d\varrho}{dt}$ и $\frac{d\alpha}{dt}$, онда се може лако изнаћи абсолутна брзина V тачке M за тај тренутак.

Нека је M' положај кретне тачке на крају времена $t + dt$. Ако повучемо праву $\overline{PM'}$ и безкрајно мали лук $\widehat{MN}$ добићемо правоугли диференцијални триуго $MM'N$ образован луком $\widehat{MM'}$ пута, или ds, правом $\overline{NM'} = d\varrho$ и луком $MN = \varrho d\alpha$. — Из овог правоуглог $\triangle$ имамо

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (\varrho d\alpha)^2} \quad \text{отуда}$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_\varrho^2 + \varrho^2 w^2}.$$

Ову абсолутну брзину V тачке M можемо и графично овако определити. — Пренесимо од M по радиусу вектору PM брзину $v_\varrho = \frac{d\varrho}{dt} = \overline{MS}$, затим подигнимо у M управну на $\overline{PM}$ и на ову управну пренесимо брзину $v = \varrho \frac{d\alpha}{dt} = \varrho w = \overline{MN}$, ако сад конструирамо паралелограм $MNM'S$, онда његова диагонала $\overline{MM'}$ биће абсолутна брзина тачке M дакле

Правило: *Брзина кретне тачке по свом путу $\widehat{AB}$ резултанта је од брзине клизања v_ϱ и брзине обртања ϱw.*

Осим тога можемо јошт рачунати уго β образован луком MM' или што је исто тангентом у M, и продужењем радиуса вектора ϱ. Лако је из саме слике видети да је:

протрчаће за један минут, лук раван $2\pi N$, а за секунду, лук раван $\frac{2\pi N}{60.}$ Дакле за ма какав полупречник точка, биће:

$$w = \frac{2\pi N}{60.}$$

$$\cos\beta = \frac{d\varrho}{ds} = \frac{v_\varrho}{V}; \text{ а } \sin\beta = \frac{\varrho d\alpha}{ds} = \frac{\varrho w}{V}$$

Ако још означимо са i уго, који образује нормала у M са радиусом вектором ϱ имаћемо:

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \cot\beta = \frac{d\varrho}{\varrho d\alpha} = \frac{v_\varrho}{\varrho w}$$ и као што је:

$$\varrho \cot\beta = \frac{d\varrho}{d\alpha} = \varrho\, tang\, i = \overline{PO}$$ то отуда сљедује

да је: $$\overline{PQ} = \frac{v_\varrho}{w}$$ дакле

Правило. *Кад се кретање неке тачке у равнини однесе на поларне координате, онда отношење између брзине клизања и угловне брзине, опредељено је субнормалом за сматрану тачку пута.*

Даље имамо да је:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\alpha}\right)^2} = \sqrt{\varrho^2 + \overline{PO}^2} = \overline{MO}$$

отуда $$ds = \overline{MO} d\alpha; \text{ и } \frac{ds}{dt} = V = \overline{MO}\,\frac{d\alpha}{dt} = \overline{MO} w$$

дакле $$\frac{V}{w} = \overline{MO}$$ потоме

Правило. *Отношење између брзине V неке кретне тачке и њене угловне брзине w око пола, равно је одговарајућој нормали.*

Тако исто можемо рачунати и менљиво одстојање p између пола P и тангенте у тачки M т. ј.

$$p = \varrho \sin\beta = \varrho^2 \frac{w}{V}.$$

Напоследку може се потреба показати да имамо опредедити површину, коју описује радиус вектор за неко извесно време. Увећање ове површине за време dt биће MPM'. Ово увећање површине, које ћемо ми означити са da; можемо овако израчунати.

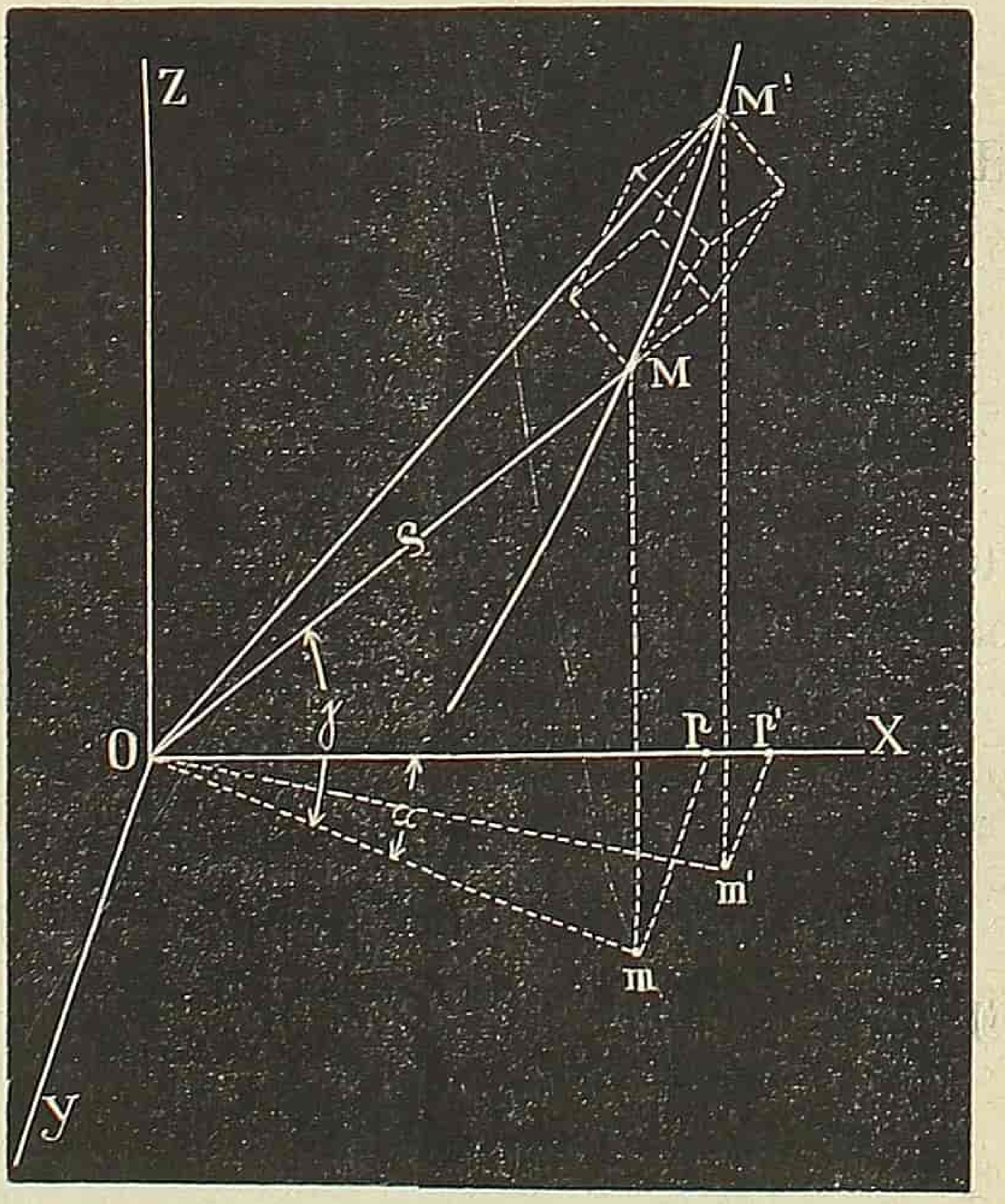
Површина триугла $PM_0M' = \frac{1}{2}\, p\, \overline{M_0M}$, а триугла $PM_0M = \frac{1}{2}\, p\, \overline{M_0M}$, разлика површина ова два триугла $= da$; дакле

$$da = \frac{1}{2}\, p\, ds = \frac{1}{2}\, \varrho^2\, d\alpha \quad \text{отуда}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\, \varrho^2\, \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\, \varrho^2 w.$$

Израз $\frac{da}{dt}$, коим налазимо закон, по коме се површина a, са временом мења, зваћемо ми, док се зато сходна реч ненађе, *ареолерна брзина*, (vitesse aréolaire) тачке M. — Ова брзина може бити стална и онда површине описане радиусом вектором за ма која времена, сразмерне су овим временима.

60. Узмимо сада случај у ком се тачка M ма како у простору креће. (Сл. 34).



Сл. 34.

У овом случају, положај кретне тачке у сваком тренутку, можемо определити, трима поларним координатама. — Ове координате јесу:

1° Радиус вектор $\overline{OM} = \varrho$; 2° Уго $MOm = \gamma$, кога образује радиус вектор $\overline{OM}$ и његова ортогонална пројекција $\overline{Om}$ на сталну равнину XOY. 3° Уго $m\,OX = \alpha$ образован ортогоналном пројекцијом $\overline{Om}$ и сталном осом $\overline{OX}$.

Ове три координате ϱ γ и α зависе од времена t, и по томе имаћемо ове три једначине

$$\varrho = f(t),\ \gamma = \varphi(t) \text{ и } \alpha = \psi(t)$$

којима је кретање тачке M подпуно опредељено.

И заиста, ми можемо сматрати кретање тачке M у простору, као да се састои из три једновремена кретања и то: 1° Кретање тачке M по радиусу вектору $\overline{OM}$, које опредељујемо једначином

$$\varrho = f(t).$$

2° Обртање радиуса вектора око пола O и у равнини OMm, које опредељујемо једначином

$$\gamma = \varphi(t). \qquad \text{и}$$

3° Обртање равнине OMm око осе $\overline{OZ}$ управне на равнину XOY; које налазимо једначином

$$\alpha = \psi(t).$$

Рецимо да се на крају времена dt тачка M налази у M'. Њена брзина по радиусу вектору за ово време биће:

$$v_\varrho = \frac{d\varrho}{dt}$$

Брзина исте тачке M, претпостављајући је као некретну по радиусу вектору, док се он у равнини MOm око пола O обрће, биће:

$$v_\gamma = \varrho \frac{d\gamma}{dt}.$$

Напослетку њена брзина, претпостављајући је као некретну у равнини MOm, док се ова око $\overline{OZ}$ обрће, биће:

$$v_\alpha = \varrho \cos \gamma \frac{d\alpha}{dt.}$$

Пошто су ови изрази, брзине у простору једне исте тачке за једно исто време dt; то је њима резултанта, или абсолутна брзина v тачке M, диагонала паралелипипеда, кога су ивице, горепоменуте три брзине, биће дакле:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\gamma}{dt.}\right)^2 + \varrho^2 \cos^2 \gamma \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}$$

61. Ова абсолутна брзина опредељује се графично овако: На продужење радиуса вектора $\overline{OM}$, а од тачке M, узме се права, која представља брзину $\frac{d\varrho}{dt}$; за тим се по управној повученој у M, на $\overline{OM}$ а у равнини MOm пренесе брзина $\varrho \frac{d\gamma}{dt}$; напоследку брзина $\varrho \cos \gamma \frac{d\alpha}{dt}$, пренесе се по управној повученој такође у M, на равнину MOm. Ако сад конструирамо паралелипипед на довако опредељене три праве, диагонала његова представљаће по правцу и величини абсолутну брзину тачке M.

Приметба. 1° Горенаведени израз брзине v можемо добити и преобраћајем кооордината тачке M.

Нека су $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, и $\overline{OZ}$ ортогоналне осе, на које је однешено кретање тачке M, имаћемо:

$$x = \overline{Om} \cos \alpha = \varrho \cos \gamma \cos \alpha ; \; y = \overline{Om} \sin \alpha = \varrho \cos \gamma \sin \alpha ;$$
$$z = \varrho \sin \gamma.$$

Ако сад диференцијалимо ове једначине и у образац $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy) + (dz)^2}$ заменимо место[1]) dx, dy, и dz нађене вредности, добићемо

---

[1]) $dx = d\varrho \cos \gamma \cos \; - \varrho \cos \gamma \sin \alpha \, d \, \alpha - \varrho \cos \alpha \sin \gamma \, d \, \gamma.$

$dy = d\varrho \cos \gamma \sin \alpha - \varrho \sin \gamma \sin \alpha \, d \, \gamma + \varrho \cos \gamma \cos a \, d \, \alpha.$

$dz = d\varrho \sin \gamma + \varrho \cos \gamma \, d \, \gamma.$

$(dx)^2 = (d\varrho)^2 \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha + \varrho^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha \, (d\alpha)^2 + \varrho^2 \cos^2 \alpha$ $\sin^2 \gamma \, (d\gamma)^2 \; -$

$$ds = \sqrt{(d\varrho)^2 + \varrho^2 (dy)^2 + \varrho^2 \cos^2 y \, (d\alpha)^2}, \text{ отуда}$$

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \cos^2 y \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}$$

израз који смо напред нашли.

Приметба 2°. Ако је $y = o$ онда кретна тачка остаје у једној истој равнини и потоме мора бити $ds^2 = \varrho^2 d\alpha^2 + d\varrho^2$

Начин Roberval-а по коме се могу тангенте на криве пруге да повуку.

62. Познато је, да је брзина неке кретне тачке у сваком тренутку управљена по правцу тангенте криве пруге, коју вопросна тачка описује. — Сад ако представимо себи, да се кретање тачке састоји из више други једновремени кретања којих брзине, или отношења ових, можемо изнаћи, онда је

$$- 2\varrho \cos^2 \gamma \cos \alpha \sin \alpha \, d\varrho \, d\alpha - 2\varrho \cos \gamma \cos^2 \alpha \sin \gamma \, d \varrho \, d \gamma +$$
$$+ 2\varrho^2 \cos \gamma \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma \, d \alpha \, d \gamma.$$

$$(dy)^2 = (d\varrho)^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha + \varrho^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \, (d\gamma)^2 + \varrho^2 \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha \, (d\alpha)^2 -$$
$$- 2\varrho \cos \gamma \sin \gamma \sin^2 \alpha \, d\varrho \, d\gamma + 2\varrho \cos^2 \gamma \sin \alpha \cos \alpha \, d\varrho d \alpha -$$
$$- 2\varrho^2 \sin \gamma \cos \gamma \sin \alpha \cos \alpha \, d\gamma \, d\alpha.$$

$$(dz)^2 = (d\varrho)^2 \sin^2 \gamma + 2\varrho \sin \gamma \cos \gamma \, d\varrho \, d\gamma + \varrho^2 eos^2 \gamma \, (d\gamma)^2$$

и сад $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 =$

$$= (d\varrho)^2 \left[\cos^2 \gamma (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \gamma\right] +$$
$$+ (d\alpha)^2 \left[\varrho^2 \cos^2 \gamma (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)\right] +$$
$$+ (d\gamma)^2 \left[\varrho^2 \sin^2 \gamma (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \varrho^2 \cos^2 \gamma\right] -$$
$$-2\varrho d\varrho \left[\cos \gamma \sin \gamma \, d\gamma (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \cos \gamma \sin \gamma \, d \gamma\right] =$$
$$= (d\varrho)^2 + \varrho^2 \cos^2 \gamma \, (d\alpha)^2 + \varrho^2 (d\gamma)^2 = ds^2 \quad \text{и отуда}$$

$$ds = \sqrt{(d\varrho)^2 + \varrho^2 \cos^2 \gamma \, (d\alpha)^2 + \varrho^2 (d\gamma)^2} \text{ и т. д.}$$

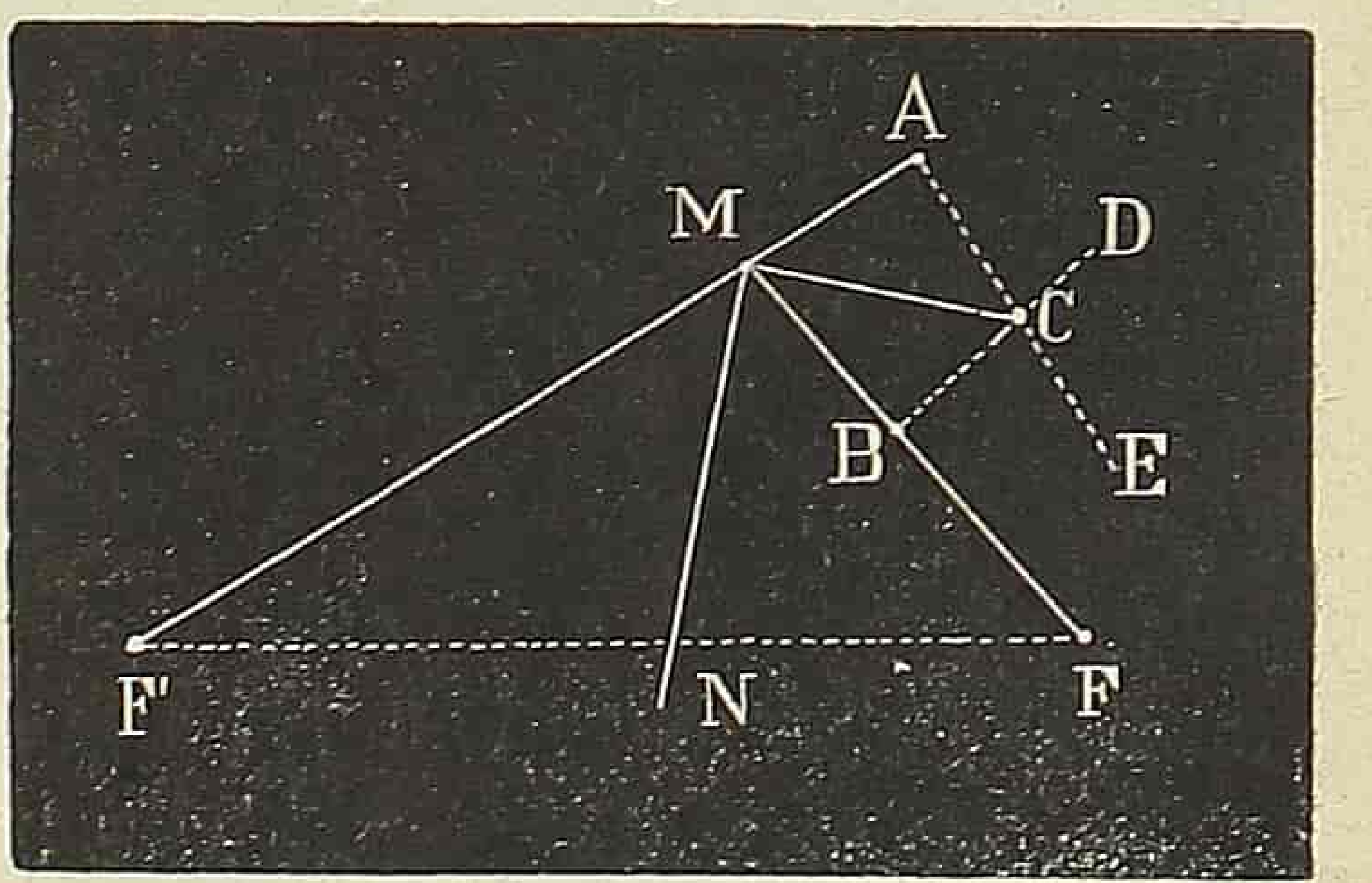
лако определити и правац њине резултанте, т. ј. обсолутне брзине кретне тачке, сљедствено и правац тангенте, коју би имали повући на криву тачком описану пругу.

На томе је поглавито основао Roberval геометер француски у 17 веку, свој начин, по коме се тангента у ма којој тачки неке криве пруге може повући.

63. Да би показали, како то у самој ствари бива, узмимо два три примера.

1-во. Рецимо да имамо повући тангенту у ма којој тачки елипсе.

Овај ћемо задатак овако решити: — Ми знамо да је елипса такова крива пруга, да је сбир одстојања сваке њене тачке *M* (Сл. 35.) од две дате тачке *F* и *F'* нека стална колична. Осим тога можемо предпоставити да је елипса пут, који је описан тачком *M*, сматрајући ову тачку као кретну.



Сл. 35.

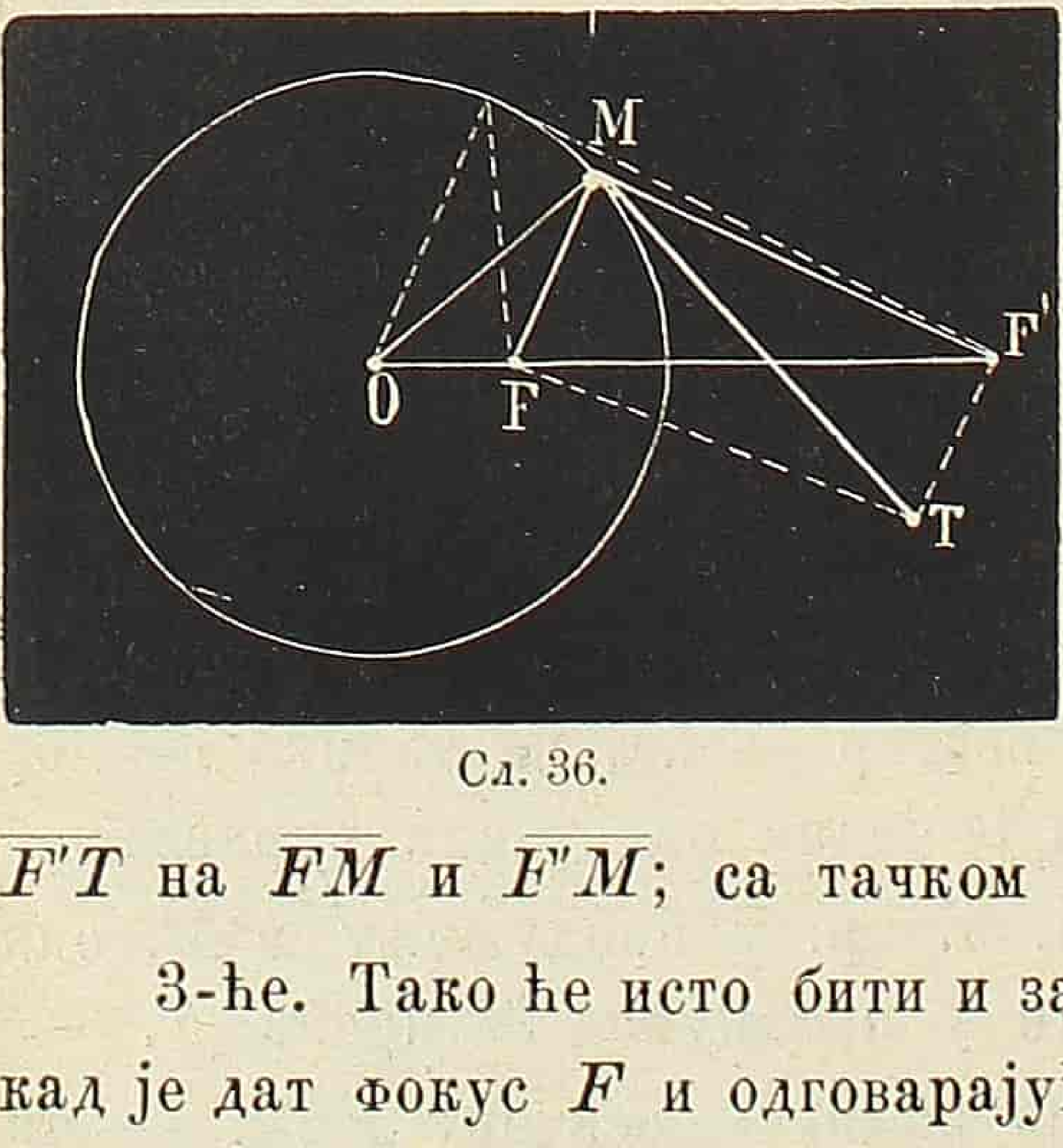
Ако сад сматрамо тачку *M*, као да принадлеже радиусу вектору $\overline{FM}$, који се око *F* као пола обрће, онда абсолутна брзина тачке *M*, може се разложити на две друге т. ј. на брзину по радиусу вектору, и на брзину обртања овог радиуса вектора око *F*. — То исто постоји — за абсолутну брзину исте тачке *M*, сматрајући је као тачку радиуса вектора $\overline{MF'}$, који се око *F'* као пола обрће. — Но као што је сбир $\overline{MF} + \overline{MF'}$ стална количина, то сљедује да су две брзине тачке *M*, по радиусима векторима јелнаке, јер за колико се један радиус вектор увећа, за толико се мора онај други да умали, и ако је једна од брзина управљена у продужењу радиуса вектора, н. пр. у продужењу $\overline{F'M}$, онда се она друга моуа налазити у правцу од *M* према *F*. —

Нека је $\overline{MA}$ брзина по радиусу вектору $\overline{F'M}$. — Сад ако би и брзина обртања овог радиуса око тачке *F'* позната била, онда би је требало пренети по управној $\overline{AE}$ на $\overline{AF'}$, сајузити њену крајну тачку са M, и тиме би добили правац и величину абсолутне брзине тачке M.

Тако исто нека је $\overline{MB}$ брзина тачке M по радиусу вектору $\overline{MF}$; ако у тачки B, подигнемо управну $\overline{BD}$, и на ову пренесемо одговарајућу брзину обртања, ако би ова позната била, онда сајужавајући крајњу тачку ове брзине са тачком M, добићемо опет абсолутну брзину ове тачке. Отуда сљедује да крајна тачка праве, која представља абсолутну брзину тачке M, мора се налазити у исто време и на правој $\overline{AE}$ и на правој $\overline{BD}$, а то само тако може бити, ако се налази у пресеку ове две праве т. ј. у C, дакле $\overline{MC}$ биће абсолутна брзина тачке M, а у исто време и тангента елипсе у овој тачки.

Због тога што је $\overline{MA} = \overline{MB}$, права MC као тангента, дели уго AMB на два равна дела, а тако исто и нормала $\overline{MN}$ дели уго FMF' на два разна дела. Лако је сада извести правило за конструкцију тангенте у ма којој тачки елипсе. —

2-го. Истим начином можемо повући тангенту на круг, који је описан тачком, која се тако креће, да је отношење између два радиуса вектора $\overline{MF}$ и $\overline{MF'}$ стална количина. (Сл. 36). Због овог сталног отношења и брзине кретне тачке по радиусима векторима морају бити у истом отношењу. Дакле права, која сајужава пресек T, управни $\overline{FT}$ и $\overline{F'T}$ на $\overline{FM}$ и $\overline{F'M}$; са тачком M, тангента је круга.



Сл. 36.

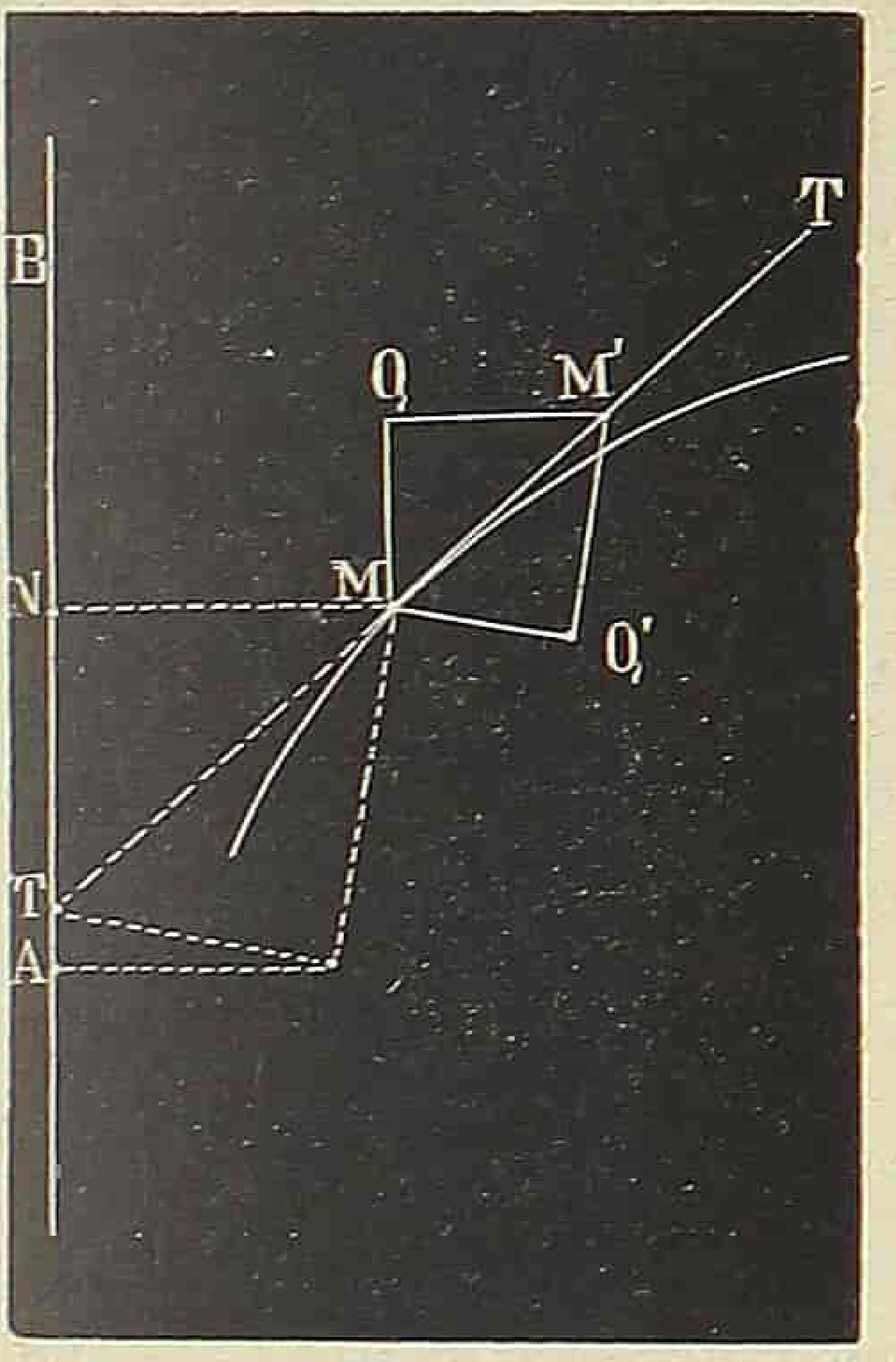
3-ће. Тако ће исто бити и за конични пресек (параболу) кад је дат фокус F и одговарајућа управница $\overline{AB}$. (Сл. 37.)

MQ је брзина обртања, $Q'M'$ брзина клизања.

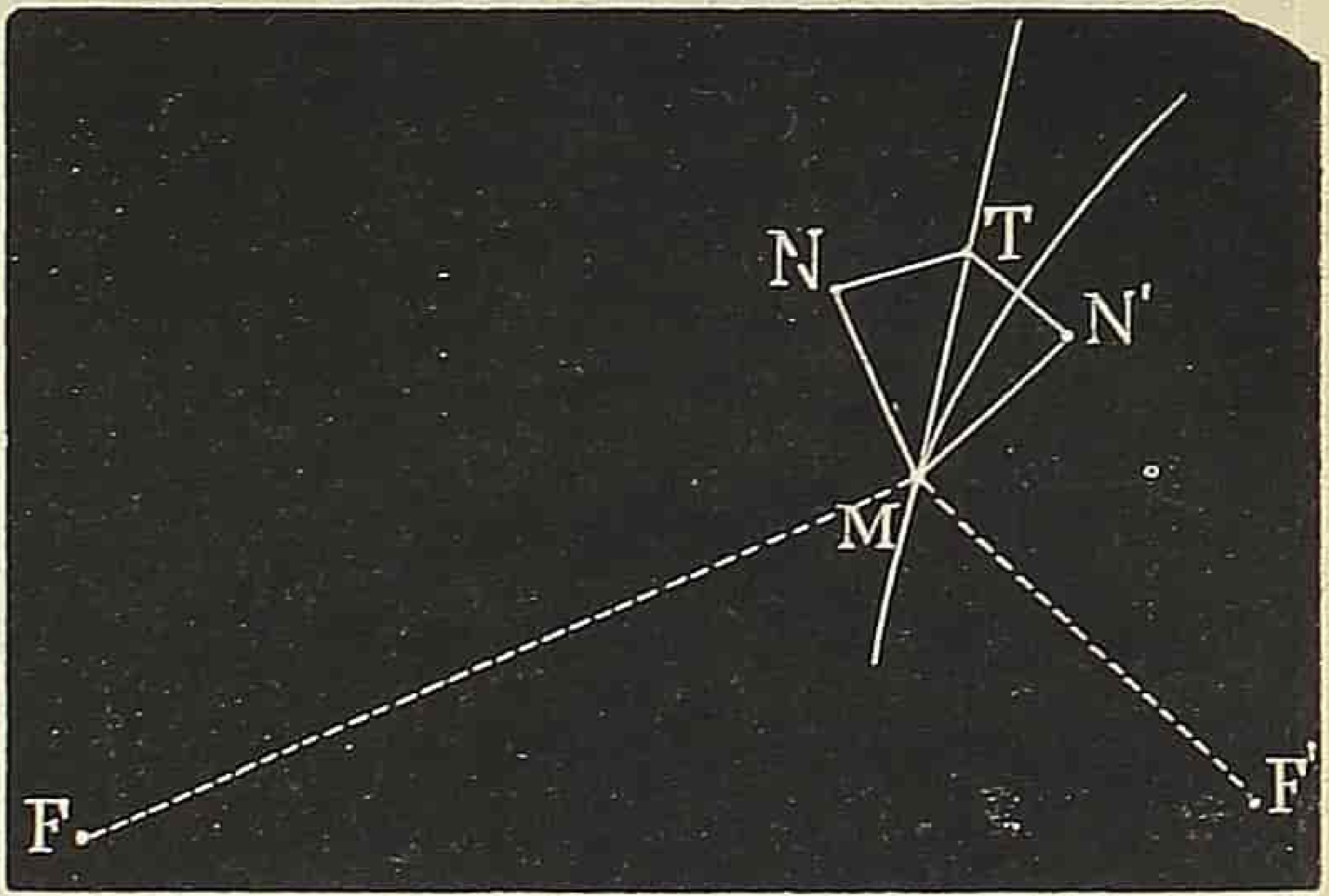
По дефиницији пруге биће

$$\frac{M'Q'}{M'O} = \frac{MF}{MN}$$

$\overline{FT} \perp \overline{MF}$; $FTNM \sim MOM'Q$ дакле је M' на MT.



Сл. 37.



Сл. 38.

Отношење између $\overline{NM}$ и $\overline{MF}$ стална је и позната количина n. $\overline{MT}$ је тражена тангента у тачки M.

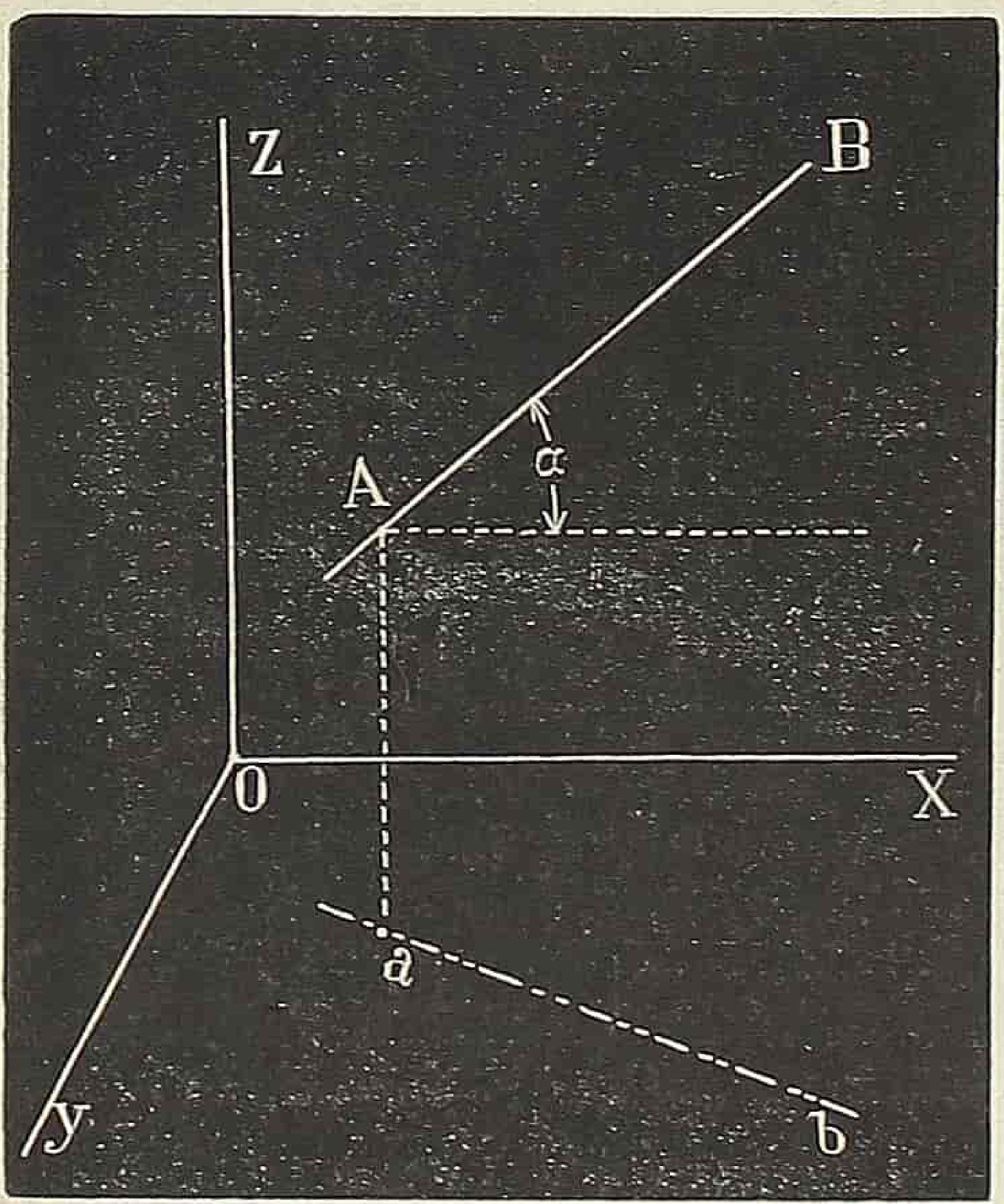
4-то. За хиперболу биће тако исто као и за елипсу. Сл. 38.

О акцелерацијама (убрзањима) једновремени кретања.

64. Ми смо дознали, да ма какво кривопружно кретање неке тачке, можемо подпуно определити, ако знамо једновремена кретања њене пројекције на три координатне осе, и поставили смо изразе, кои постоје имеђу њене абсолутне брзине $\frac{ds}{dt}$, и брзина $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ њени пројекција по реченим осама.

Испитајмо сада, каква отношења постоје између акцелерација $\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$ ови разни једнонремени кретања. Ради реда у нашем излагању узмимо најпре.

Правопружно кретање.



Слика 39.

64. Нека је $\widehat{AB}$ (Сл. 39) пут кретне тачке. $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ $\overline{OZ}$ три осе, које ћемо ми ради лакшег испитивања предпоставити да су ортогоналне т. ј. управне једна на другу. Ако означимо са α стални уго, кои брзина $\frac{ds}{dt} = v$ кретне тачке образује се осом $\overline{OX}$, онда пројекција речене брзине на исту осу биће:

$v_x = v cos \alpha \ldots\ldots\ldots (1)$

отуда $\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt} cos\, \alpha.$

т. ј. Ако означимо са j_x и j акцелерацију пројекције и акцелерацију кретне тачке у простору, имаћемо:

$$j_x = j \; cos \; \alpha \ldots\ldots (2).$$

једначину истог вида кога је и једначина под (1).

Овако ће исто бити и за остале две осе. — По томе при правопружном кретању, сва правила, која се односе на пројекције брзина, вреде и за пројекције акцелерација, и ми можемо како за косе тако и за ортогоналне пројекције правопружног кретања, поставити ово:

Правило. I. При правопружном кретању, резултанта од брзина пројекција неке кретне тачке, на три координатне осе, управљена је по правцу њеног кретања и равна њеној брзини v. — Резултанта пак акцелерација ови пројекција, такође је управљена по правцу правопружног пута и равна $\frac{dv}{dt}$.

Сматрајмо сад.

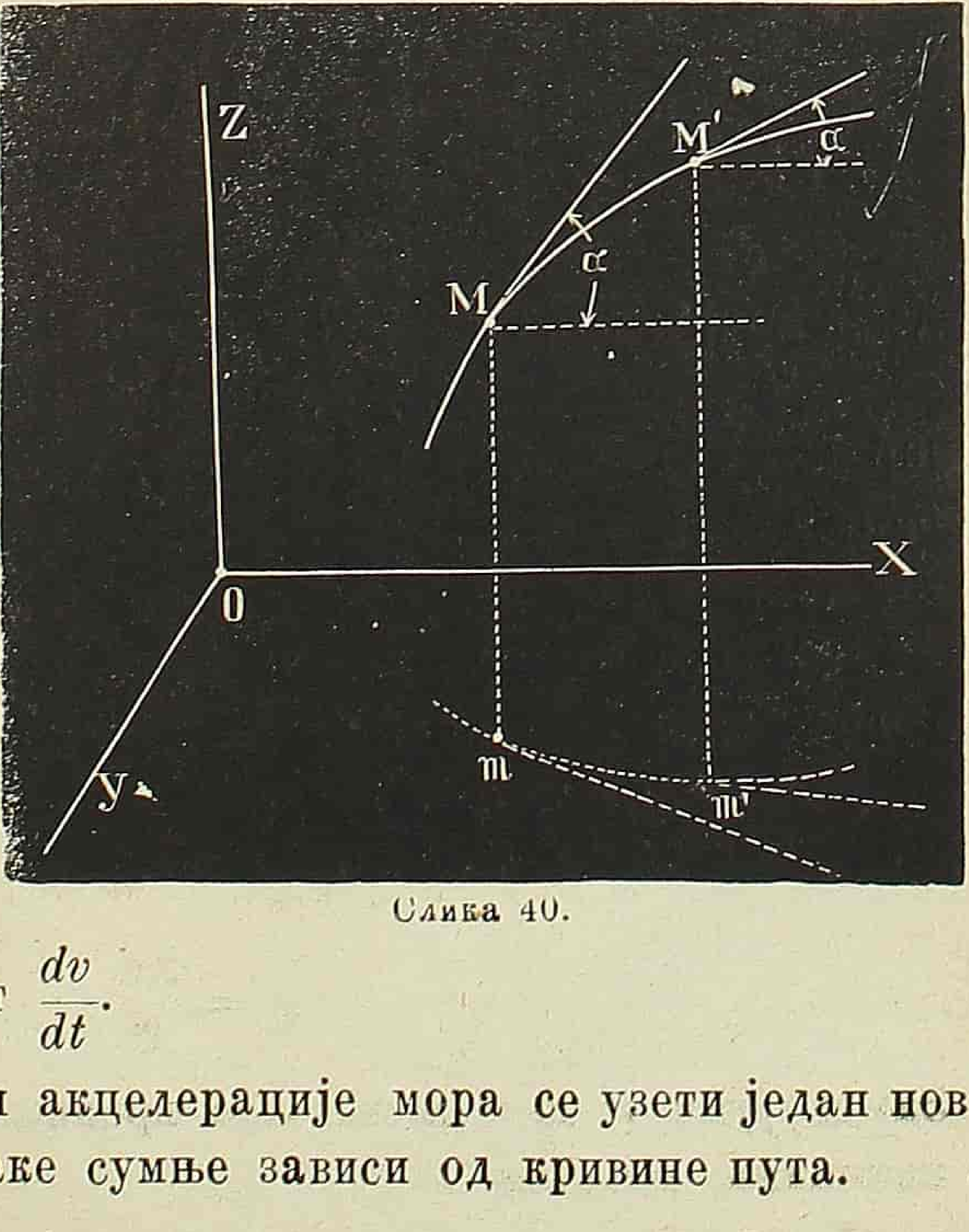
Кривопружно кретање.

64. Сва правила, која се односе на брзине вреде не само за правопружне но и за кривопружне путове протрчане кретном тачком. — И заиста, дотле док сматрамо само две тачке на кривопружном путу, које се у безкрајно малом одстојању једна од друге налазе, можемо свагда без велике погрешке заменути овај сматрани елеменат кривопружног пута, са тангентом повученом у једној његовој тачки.

Но при испитивању акцелерација овако неможемо без знатне погрешке радити. — Овде се морамо обзирати на кривину пута. и сматрати на овоме путу, не две но три у безкрајно малом одстојању једна од друге налазеће се тачке, дакле морамо сматрати два елемента пута.

И заиста кад је пут *MM'* (Сл. 40.) крива пруга, уго α није сталан, и диференциалењем једначине под (1) добијамо

$$j_x = jcos\alpha + v\frac{dcos\alpha}{dt}\ldots\ldots(3.)$$



Слика 40.

Дакле једначина под (2) у овом случају престаје постојати, и акцелерацијапројекције, није више пројекција од акцелерације кретне тачке у простору, или јошт боље, при кривопружном кретању резултанта од j_x, j_y и j_z није управљена по правцу тангенте повучене кроз сматрану тачку пута, нити је више њена вредност $\frac{dv}{dt}$.

По томе у рачун акцелерације мора се узети један нов елеменат, кои без сваке сумње зависи од кривине пута.

67. Пре но што се упустимо у испитивање и оцену овог утицаја кривине пута, на акцелерацију неке кретне тачке, употребимо то што досад дознасмо на један пример, да би боље објаснили ове прве појмове о акцелерацији.

Узмимо познати нам већ пример о једномерном кретању неке тачке по периферји неког датог круга.

При овом примеру ми смо нашли,

да је: $$x = r\left(1 - \cos\frac{vt}{r}\right)$$

или ако означимо са w угловну брзину тачке M, биће

$$v = rw, \text{ и дакле}$$

$$x = r(1 - \cos wt). \text{ отуда}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = rw \sin wt$$

Ако диференциалимо ову последњу једначину, добићемо акцелерацију тачке P. т. ј.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = rw^2 \cos wt = w^2(r - x) = w^2\overline{CP}$$

Ова је акцелерација сразмерна дакле одстојању, које раздваја тачку P од сталне тачке C.

Но у самој ствари акцелерација тачке M равна је нули, јер је њено кретање једномерно, потоме јасно је да акцелерација пројекције P, није пројекција од акцелерације тачке M. чиме је потврђено што напред наведосмо.

Даље смо нашли да је време за које тачка M једанпут прође периферију круга, т. ј.

$$\Theta = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{w} \qquad \text{одкуда}$$

$$w = \frac{2\pi}{\Theta}$$

Замењујући w са овом његовом вредности у предходећим једначинама, добићемо:

$$x = r\left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{\Theta}\right);\ v_x = \frac{2\pi}{\Theta} r \sin 2\pi \frac{t}{\Theta} \quad \text{и}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{4\pi^2}{\Theta^2} r \cos 2\pi \frac{t}{\Theta}.$$

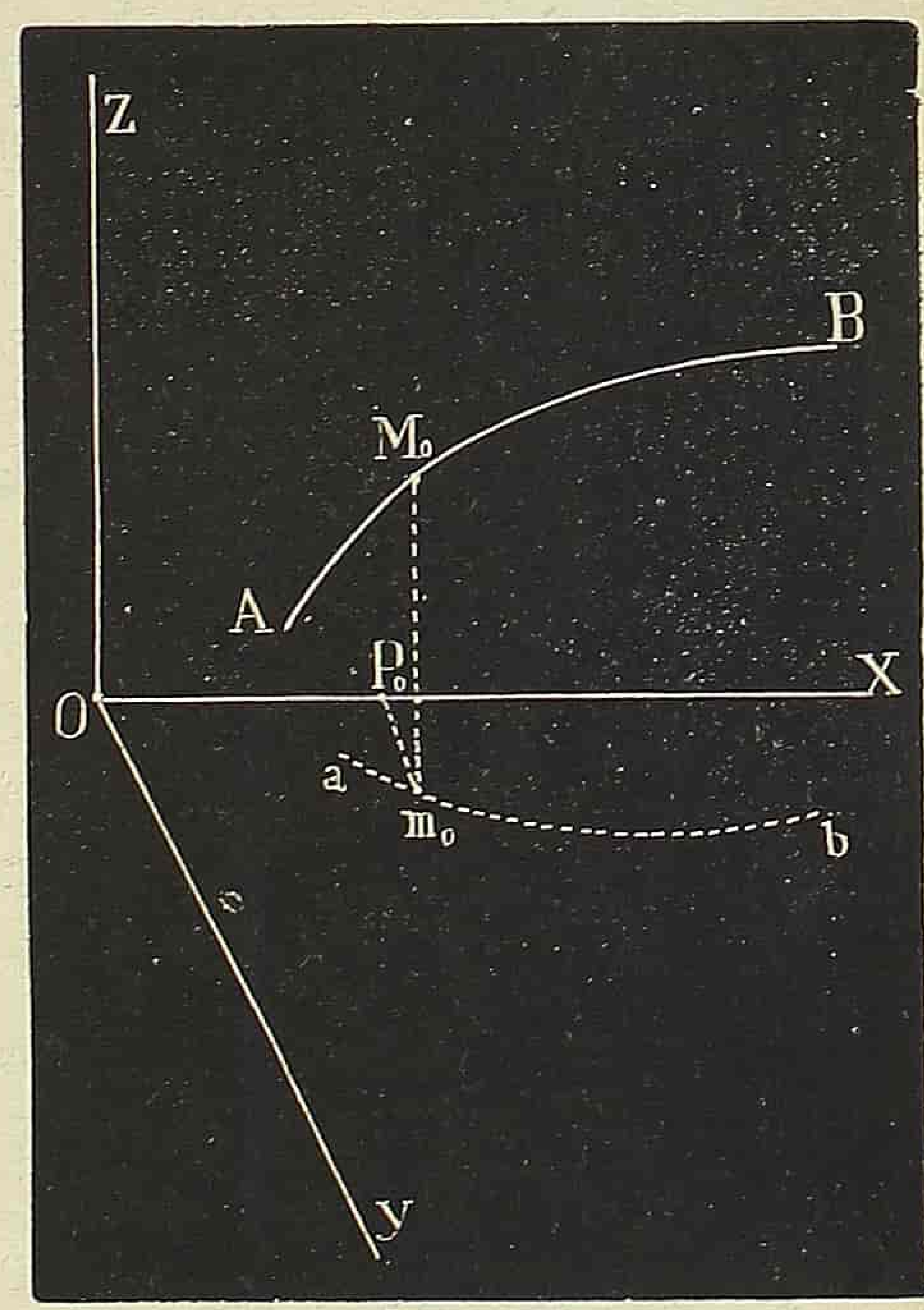
Општа теорија о акцелерацији при кривопружном кретању.

68. Сматрајмо неку тачку M_0 која се креће по ма каквој кривој пруги $\widehat{AB}$ (Сл. 41) и однесимо ово кретање на три артогоналне или косе координатне осе $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и $\overline{OZ}$.

Нека је $x = \varphi(t)$.

једначина кретања пројекције P_0 кретне тачке M_0 на осу $\overline{OX}$.

Ова функција φ (t) може се свагда по Маклореновом образцу (види вишу анализу) развити у ред вида:



Слика 41.

$$1 \left\{ \begin{aligned} & x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \ldots\ldots\ \text{одкуда} \\ & \frac{dx}{dt} = v_x = B + 2Ct + 3Dt^2 + \ldots\ldots \\ & \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 2C + 6Dt \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

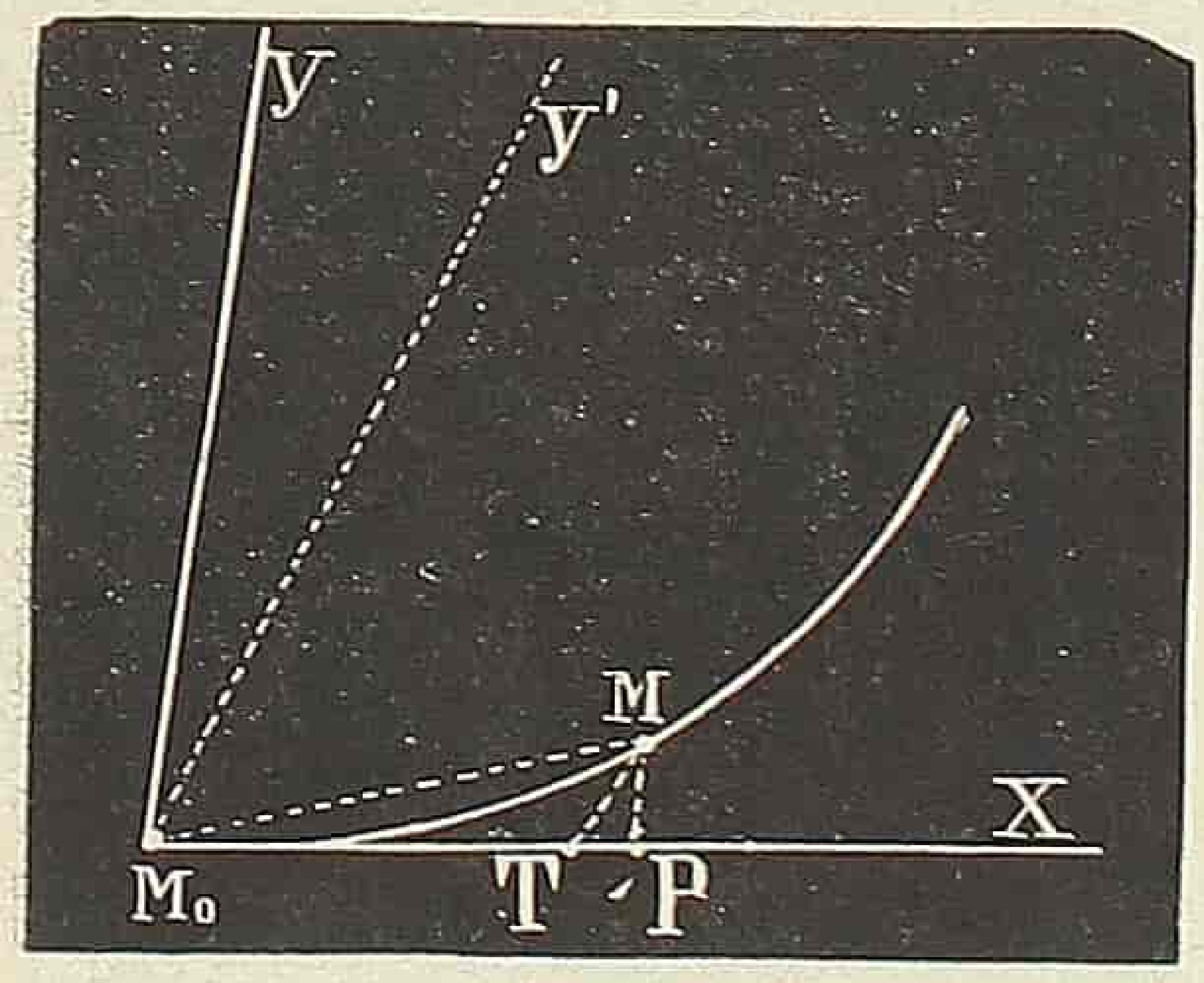
Ако сад поставимо у овим једначинама $t = o$ добиђемо да је:

$$2 \left\{ \ \ldots\ldots\ A = x_0 B = v_{0x} \ \text{и}\ C = \tfrac{1}{2} j_{0x} \right.$$

и сад означујући са Θ безкрајно мало време, и пренебрегавајући чланове у којима се Θ налази у већем степену од 2; биће. [1])

$$3 \{ \quad \ldots\ldots\ldots \; x = x_0 + v_{0x}\Theta + \tfrac{1}{2} j_{0x}\Theta^2.$$

Почем је то тако, ма макав систем пројекције употребили, знамо да је брзина v_{0x} пројекција од брзине v_0; но ми до сад незнамо за никакво отношење, које би постајало, између акцелерација, такви као што је j_x, од пројекција кретне тачке на ма коју осу; тако исто незнамо, како су ове разне количине сајужене са пра́вом акцелерацијом j.



Слика 42.

69. Да би могли лако ова одношења изнаћи, најбоље ће бити, ако преместимо координатне осе у тачку M_0 (Слика 42) јер ћемо тиме добити за наша испитивања, простије једначине једновремени кретања. И заиста ако тако урадимо, имаћемо:

$$x_0 = 0, \; y_0 = 0; \; z_0 = 0.$$

Осим тога, узмимо за равнину XM_0Y, равнину, у којој се налази полупречник кривине вопросног пута (ова се равнина зове оскулаторна равнина и ми ће мо је у будуће тако и звати). Почем је то тако, ма какав био правац осе Z, једна од једначина кретања, са том приближношћу, с којом се задовољавамо биће насваки начин

$$z = 0.$$

---

[1] Лако је видети, да пренебрегавајући чланове у којима се Θ налази у већем степену него што је број 2; значи предпоставити да је кретање тачке једномерно мењиво, по томе кад тражимо изразе између једновремени акцелерација, немамо потребе да се бринемо какову промену ове количине морају претрпити. Са тог гледишта ми можемо задржати или са свим изоставити значицу о; којом је акцелерација у предходећим једначинама означена.

јер три тачке вопросног пута, које су у безкрајно малом одстојању једна од друге, и које ми јединствено сматрамо, налазе се у поменутој оскулаторној равнини, по самој дефиницији ове равнине.

Напоследку, узмимо осу M_0X управљену по тангенти, повученој на пут кроз тачку M_0. Отуда сљедује, да ма како повучена бала оса M_0Y у оскулаторној равнини, пројекција брзине v_0 на ову осу биће нула, а пројекција исте брзине на осу M_0X биће јавна v_0

Имаћемо дакле пренебрегавајући да пишемо једначину

$$z = o.$$

Ове једначине кретања.

$$4 \begin{cases} x = v_0\Theta + \frac{1}{2} j'\Theta^2 \\ y = \frac{1}{2} j''\Theta^2 \end{cases}$$

Означавајући са j' и j'' извесне сачиниоце, кои зависе од правца узети оса.

Даље узмимо почињући од тачке Мо. (Сл. 42). по тангенти дужину $\overline{M_0T} = v_0\Theta$, сајузимо тачку Т са M, и узмимо нову осу $\overline{Y'M_0}$ равноодстојну са $\overline{TM}$.

Абциса тачке M, за ове осе и по овој конструкцији биће $\overline{M_0T} = v_0\Theta$; Што се пак y тиче, оно остаје као и пређе, под тим само условом да се за сачиниоца j'' узме она вредност, која одговара овим новим координатним осама. — Нека је J та вредност. Из свега напред реченог можемо поставити.

Правило II. *Ма какав био пут неке кретне тачке, може се свагда наћи у равнини полупречника кривина (оскулаторној равнини) ове криве пруге две осе, обично косе, и то такве, да се једначине кретања, односно ове две осе своде на овај прости вид.*

$$5 \begin{cases} x = v_0\Theta & v_x = v_0 \\ y = \frac{1}{2}J\Theta^2 & v_y = J\Theta \end{cases}$$

70. *Тотална акцелерација.* Сам начин коим смо до предходећег правила дошли, показује јасно, да је систем, у овом правилу поменути оса, јединствен, и потоме лако је сватити да количина J мора имати главну улогу у теоріи акцелерација. Због тога се ова количина J зове тотална акцелерација (accélération totale) а правац осе $\overline{M_0 Y'}$, кои одговара једначинама под (5) правац је тоталне акцелерације.

71. Генерал Poncelet први је сматрао тоталну акцелерацију, и испитао њена својства, која ћемо ми у главноме ниже навести, и која су од велике важности у меканики.

72. Изпитајмо јошт једанпут општу једначину

$$x = x_0 + v_{0x}\Theta + \tfrac{1}{2} j_x \Theta^2$$

која нам показује закон кретања пројекције неке кретне тачке, на ма коју праву, кад се пренебрегну чланови, у коима је Θ у већем степену од 2.

Познато је, да има само један начин, коим се развија нека функција по растућим степенима дотичне менљиве количине, по томе ако ма каквим начином нађемо за x израз вида.

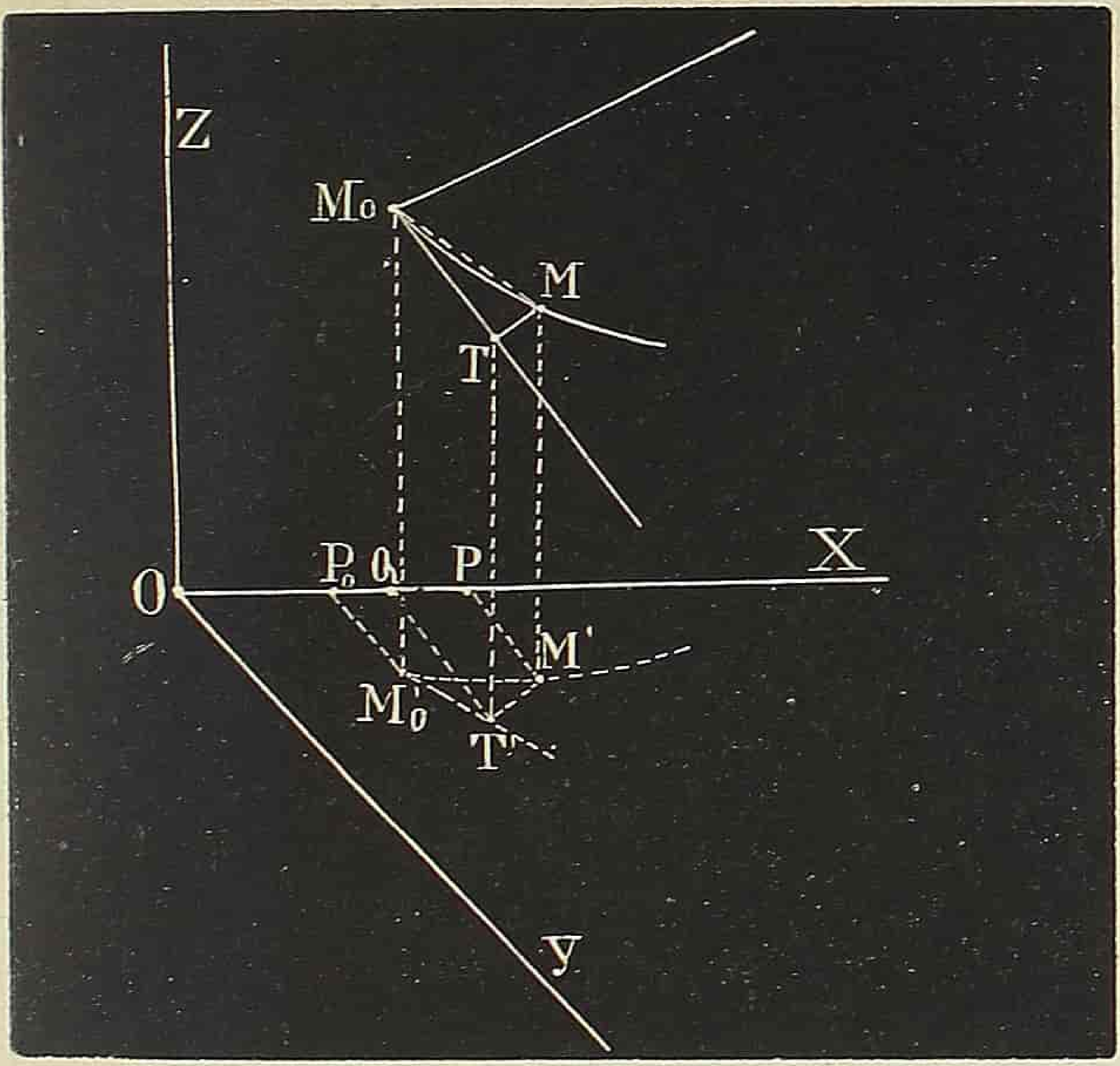
$$A + B\Theta + C\Theta^2$$

онда сачиниоц C биће без сваке сумње раван половини акцелерације j_x правопружног кретања тачке P_0 Сл: (43).

Почем је то тако, узмимо три ма какве осе $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и $\overline{OZ}$ и пројектирајмо безкрајно мали пут $\overset{\frown}{M_0 M}$ на осу $\overline{OX}$ Пројекција овог лука биће равна пројекціи изломљене пруге $M_0 TM$. Но пројекција од $\overline{M_0 T} = v_{0x}\Theta$; а пројекција од $\overline{TM}$ биће равна производу из бројног чиниоца $\frac{\Theta^2}{2}$ и пројекције од J коју можемо на сваки начин означити са J_x, дакле

$$x = x_0 + v_{0x}\Theta + \tfrac{1}{2} J_x \Theta^2.$$

Отуда можемо закључити да је j_x иста ствар што и J_x, потоме можемо поставити ово, у теоріи акцелерација једновремени кретања главно.

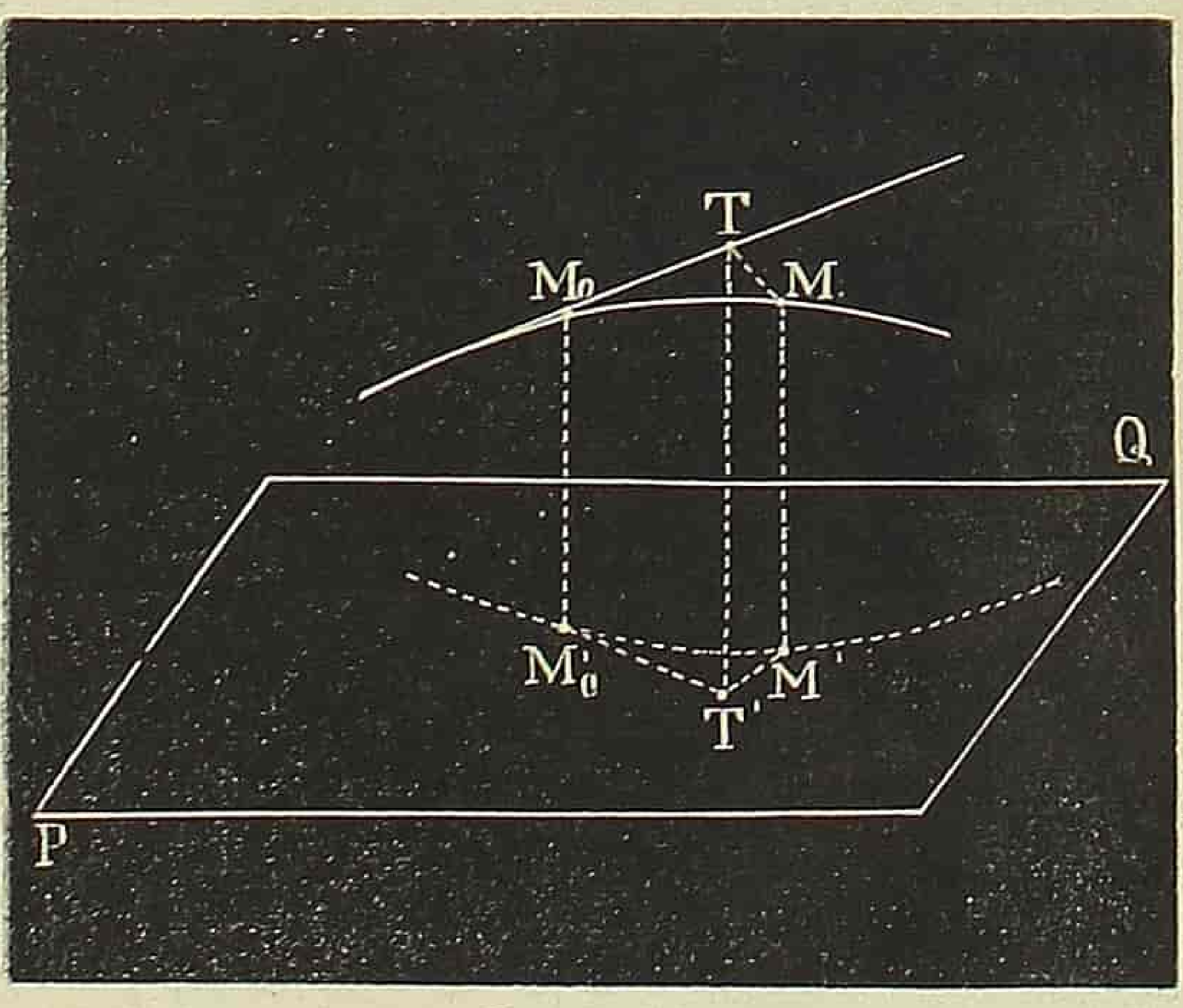


Сл. 43.

Правило ; III. *Акцелерација пројекције неке кретне тачке на ма какву осу нико други није, већ пројекција од тоталне акцелерације на исту осу.*

Пројекција кретања на неку равнину.

73. Ако на неку равнину PQ (Сл. 44) пројектирамо равноодстојно са ма каквим правцем, постепене положаје неке тачке, која се у простору креће (за нашу слику пројектирамо лук $\widehat{M_0M}$ и изломљену пругу M_0TM) онда можемо подобним начином доказати и поставити ово :



Слика 44.

Правило : IV. *Тотална акцелерација кривопружног или правопружног пројектираног кретања на неку равнину, неке* *кретне тачке у простору, равна је пројекцији на вопросну равнину, тоталне акцелерације у простору.*

75. *Конструкција тоталне акцелерације.* Из дефиниције тоталне акцелерације сљедује, како се величина и правац ове количине може конструктивно да определи. И заиста из речене дефиниције можемо извести ово :

Правило : V. *Ако сматрамо да је лук $\widehat{M_0M}$. протрчан за безкрајно мало време Θ и ако по тангенти повученој на овај лук узмемо дужину $\overline{M_0T} = v_0\Theta$. права $\overline{MT}$ даће нам правац тоталне акцелерације ; и ако поделимо дужину ове праве са квадратом времена Θ, добићемо половину те таталне акцелерације т. је : $\frac{1}{2}$ J.*

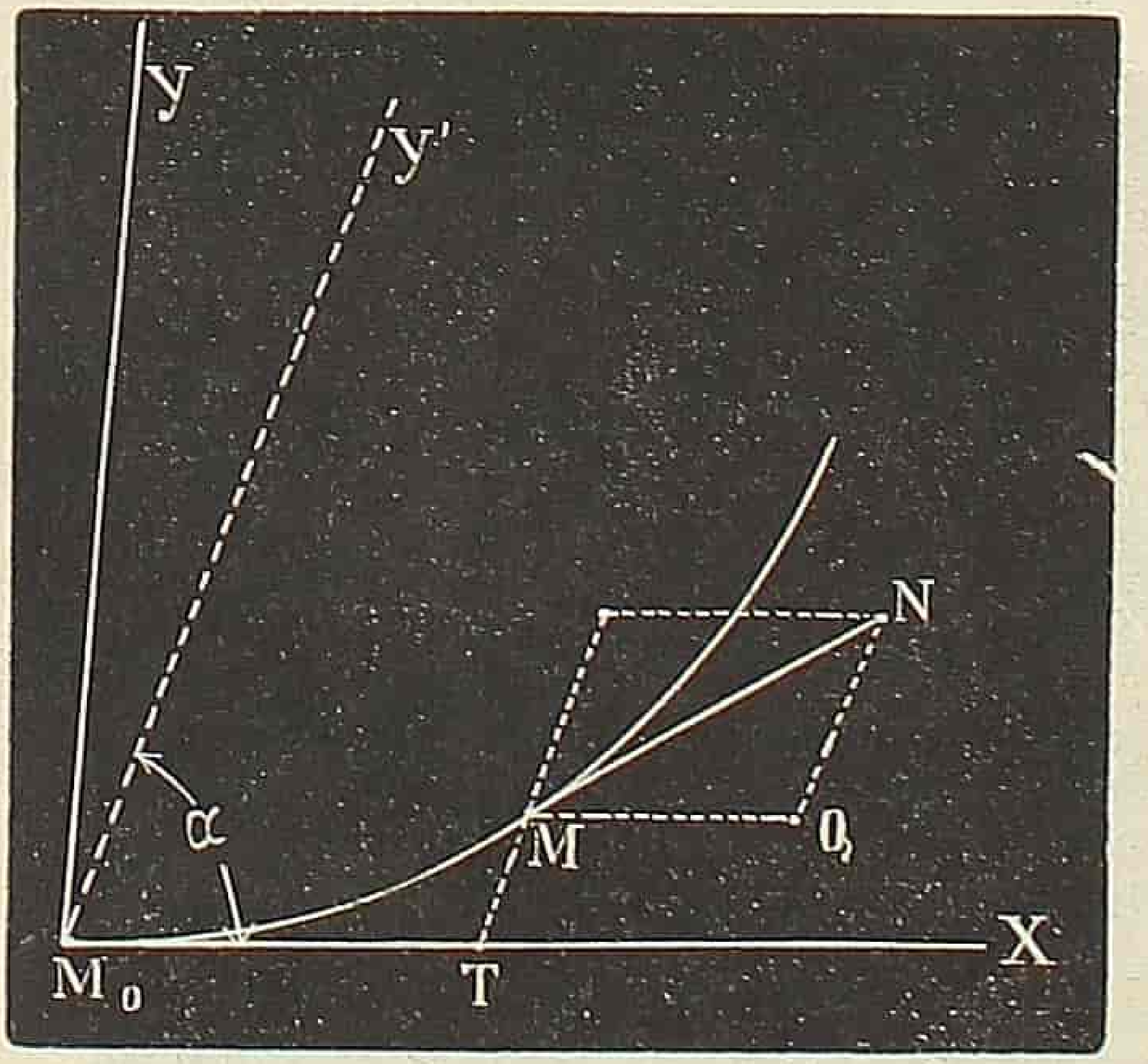
Овај резултат меже се још и овако изказати :

Тетивка протрчаног пута за време Θ, резултанта је количина $v_0\Theta$ и $\frac{1}{2} J\Theta^2$

75. Јеначине

$$v_x = v_0$$
$$v_y = J\Theta$$

дају нам могућност да можемо и на други начин конструисати тоталну акцелерацију, кад су нам познате брзине v_0 и v по правцу и величини. И заиста.



Слика 45.

Правило. VI. *Брзина на крају безкрајно малог времена Θ, резултанта је почетне брзине v_0 и брзине $J\Theta$.*

Другим речма :

Ако разложимо брзину v на две, од коих једна да је почетна брзина v_0, онда она друга по правцу и величини биће $J\Theta$[1] (Сл. 45.)

76. Кад је познат закон кретања пројекција неке тачке

---

[1] Код правопружног кретања, две количине v_0 и $J\Theta$ налазе се у једном истом правцу, и онда је крајња брзина v, (брзина која се у последњем тренутку добија) равна алгебраичком сбиру

на три осе, онда по правилу под III. имамо одговарајуће пројекције тоталне акцелерације; можемо дакле ову акцелерацију конструкцијом определити. Отуда сљедује ово:

Правило VII. *Акцелерације пројекција неке кретне тачке, на три ма какве координатне осе, имају једну резултанту, која се налази у оскулаторној равнини описаног пута, и која представља по правцу и величини тоталну акцелерацију J.*

Величина и правац ове резултанте независе од система узети оса.

Тангенцијална и нормална пројекција тоталне акцелерације.

77. Напоследку кад је познат пут и закон кретања тачке по овом путу, онда се тотална акцелерација може конструктивно да определи, употребивши само крајње вредности (т. ј. извесне подпуно опредељене количине), без да морамо у помоћ узсти кретања пројекција по трима осама.

Ради тога, израчунајмо количину или боље израз $\frac{dv}{dt}$, кои смо ми назвали просто акцелерацијом, кад смо штудирали кретање независно од пута, кои кретна тачка описује.

Узмимо опет за осе тангенту на пут у тачки M_0 и правац тоталне акцелерације (Сл. 45). За ове осе и за све тачке између M_0 и M умамо.

$$v_x = v_0. \qquad v_y = J\Theta \text{ одкуда}$$

$$v^2 = v_0^2 + J^2\Theta^2 + 2v_0 J\Theta \cos\alpha.$$

Ако диференциалимо ову једначину, биће

$$(6) \ldots\ldots\ldots v\frac{dv}{d\Theta} = j^2\Theta + v_0 J\cos\alpha.$$

од ове две количине. У општем случају, сбир је замењен са резултантом, као што то свагда у механики бива, кад се год имају да сајузе дужине, коих правци нису једни исти.

Но као што је Θ безкрајно мало, и потоме v разликује се врло мало од v_0, напоследку пренебрегавајући први члан десне стране једначине због безкрајно малог Θ, и замењујући $d\Theta$ са dt што је једна иста ствар, биће

$$\frac{dv}{dt} = J \cos \alpha . = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Отуда сљедује да је $\frac{dv}{dt}$ пројекција тоталне акцелерације на тангенту пута.

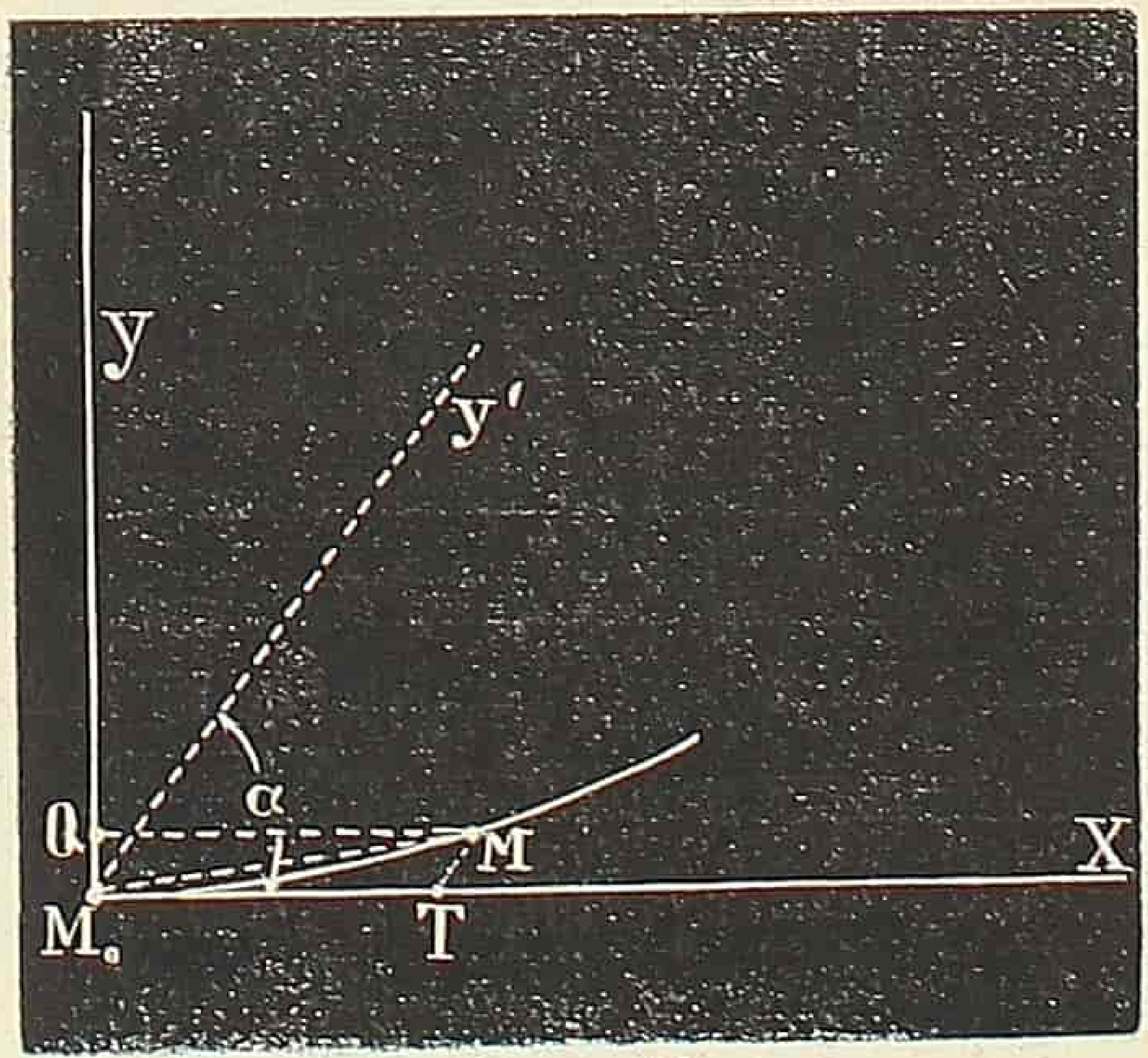
Ова количина $\frac{dv}{dt}$ зове се тангенцијална акцелерација, и потоме можемо поставити.

Правило VIII. *Тангенциална акцелерација, ортогонална је пројекција тоталне акцелерације на тангенту.*

78. Пошто имамо пројекцију тоталне акцелерације на тангенту, то ова количина биће подпуно опредељена, ако још изнађемо њену пројекцију на нормалу.

Једначина ортогонално пројектираног кретања на ову нормалу биће

$$y = \frac{1}{2} J \sin \alpha \, \Theta^2$$



Слика 46.

Но сматрајући лук $\widehat{M^0 M} = ds$ као да принадлежи оскулаторном кругу пута, и означавајући са ρ полупречник овог круга (Сл : 46) имаћемо

$$ds^2 = 2 \rho y \quad \text{одкуда}$$

$$y = \frac{ds^2}{2 \rho} = \frac{1}{2} J \, siu \, \alpha \, \Theta^2$$

дакле $\frac{ds^2}{\Theta^2} = \rho J \sin a$; и као што је

$\frac{ds}{\Theta} = \frac{ds}{dt} = v$, онда тражена пројекција биће

$$(7) \ldots\ldots J \sin \alpha = \frac{v^2}{\varrho} = J \cos (J\varrho).$$

Ова композанта тоталне акцелерације, зове се центрипетна акцелерација, због тога што је управљена према средишту кривине, дакле:

Правило IX. *Центрипетна акцелерација равна је квадрату брзине, подељеном са полупречником кривине пута, кои тачка пролази.*

79. Кад оћемо да узмемо место брзине v, угловну брзину w, око средишта кривине пута, онда треба поставити.

$$v = w\varrho \text{ и отуда}$$

$$\frac{v^2}{\varrho} = w\varrho^2.$$

нови изрази за центрипетну акцелерацију. —

80. Пошто се тотална акцелерација, налази у оскулаторној равнини пута, то тангенциална и центрипетна акцелерација, као што је лако схватити, довољне су за подпуно опредељење ове тоталне акцелерације. —

81, Из једначине $J \sin \alpha = \frac{v^2}{\varrho}$ сљедује, да кад је за неку тачку M пута, позната брзина v, тотална акцелерација J и уго α, кои она са тангентом образује, онда можемо определити полупречник ϱ кривине.

82. При једномерном кривопружном кретању, тангенциална је акцелерација нула, дакле тотална акцелерација своди се на центрипетну акцелерацију.

83. Код правопружног кретања, центрипетна је акцелерација $= o$, тотална акцелерација своди се дакле на тангенциалну акцелерацију.

84. Напоследку у општем случају, слагањем ови посебни акцелерација, добијамо тоталну акцелерацију, и заиста

Ако кроз неку тачку пута, кретне тачке, повучемо тангенту и нормалу, а затим пренесемо по овим правима одговарајуће дужине $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{v^2}{\varrho}$, диагонала паралелограма конструираног над овако определене две праве, представљаће по правцу и величини тоталу акцелерацију кретне тачке.

Примедба 1. При задатку једномерног кретања неке тачке M по периферіи датог круга, тотална акцелерација своди се на центрипетну, и њена је вредност w^2r, ако сада пројектирамо на пречник праву, која би равна била вредности w^2r, онда ће мо имати

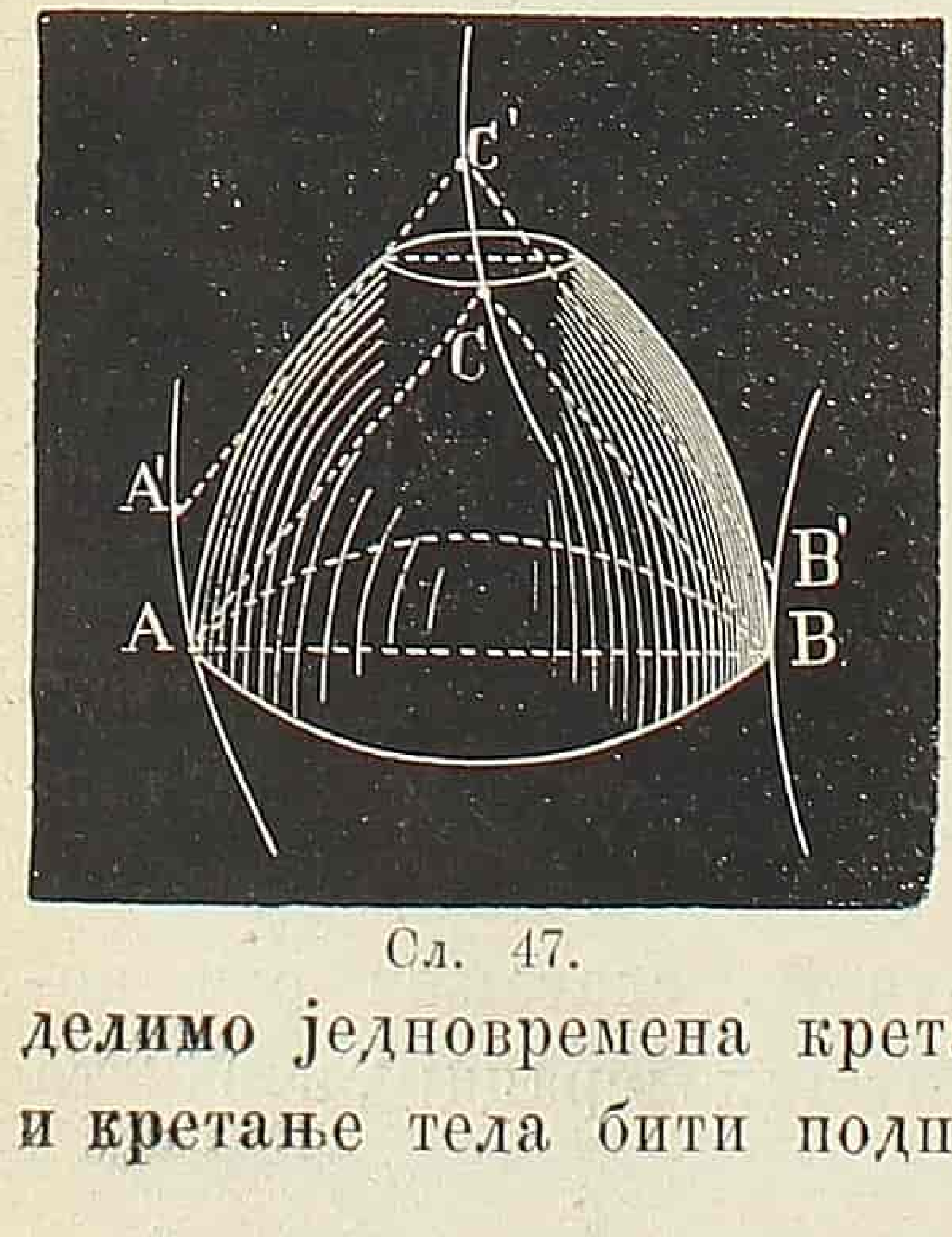
$$J_x = w^2r \cos wt.$$

исти израз, кои смо непосредно изнашли за акцелерацију тачке P.

Примедба 2 Напред постављена правила о акцелерацiи у опште, врло су важна при испитивању разни кретања, па због тога смо се ми овде нешто дуже и задржали. —

Кретање чврсти тела.

85. Пошто смо се упознали са неким општим правилима, о кретању једне тачке, испитајмо сада како се чврста тела крећу, т. ј. неки систем тачака, којих међусобна одстојања остају свагда една иста, па ма како се овај систем у простору кретао.



Сл. 47.

86. Лако је сватити да је слика неког тела подпуно определена ако су позната: 1-во међусобна одсоојања три његове тачке A, B, и C, које нису у једној правој, и 2-го одстојање сваке друге његове тачке од ове три тачке A, B и C (Сл. 47.) потоме лако је видети, да је довољно ако је познат положај триугла ABC, па да и положај целог тела буде познат. — Ако дакле определимо едновремена кретања три тачке A, B и C, онда ће и кретање тела бити подпуно определено.

87. Ми смо на једном месту казали; да пут, који нека кретна тачка, ма како за време t пролази, може да се сматра као полигон од безбројно млого врло мали страна. Представимо сада себи, да су путови разни тачака неког тела такође полигони, од безбројно млого страна, но такови, да кад је једна кретна тачка тела, у једном врху свог полигоналног пута, онда да се и све друге тачке налазе у одговарајућим врховима своји полигонални путова. У овом случају, кретање тела биће таково, да за први елеменат dt; времена, разне тачке тела прођеду свака, прву страну свога полигоналног пута; за други елеменат dt времена, ове исте тачке прођеду другу страну ових полигоналних путова, и т. д. Свако од ових постепених кретања, која трају за разне елементе времена, зове се елементно кретање тела (mouvement élémentaire du solide).

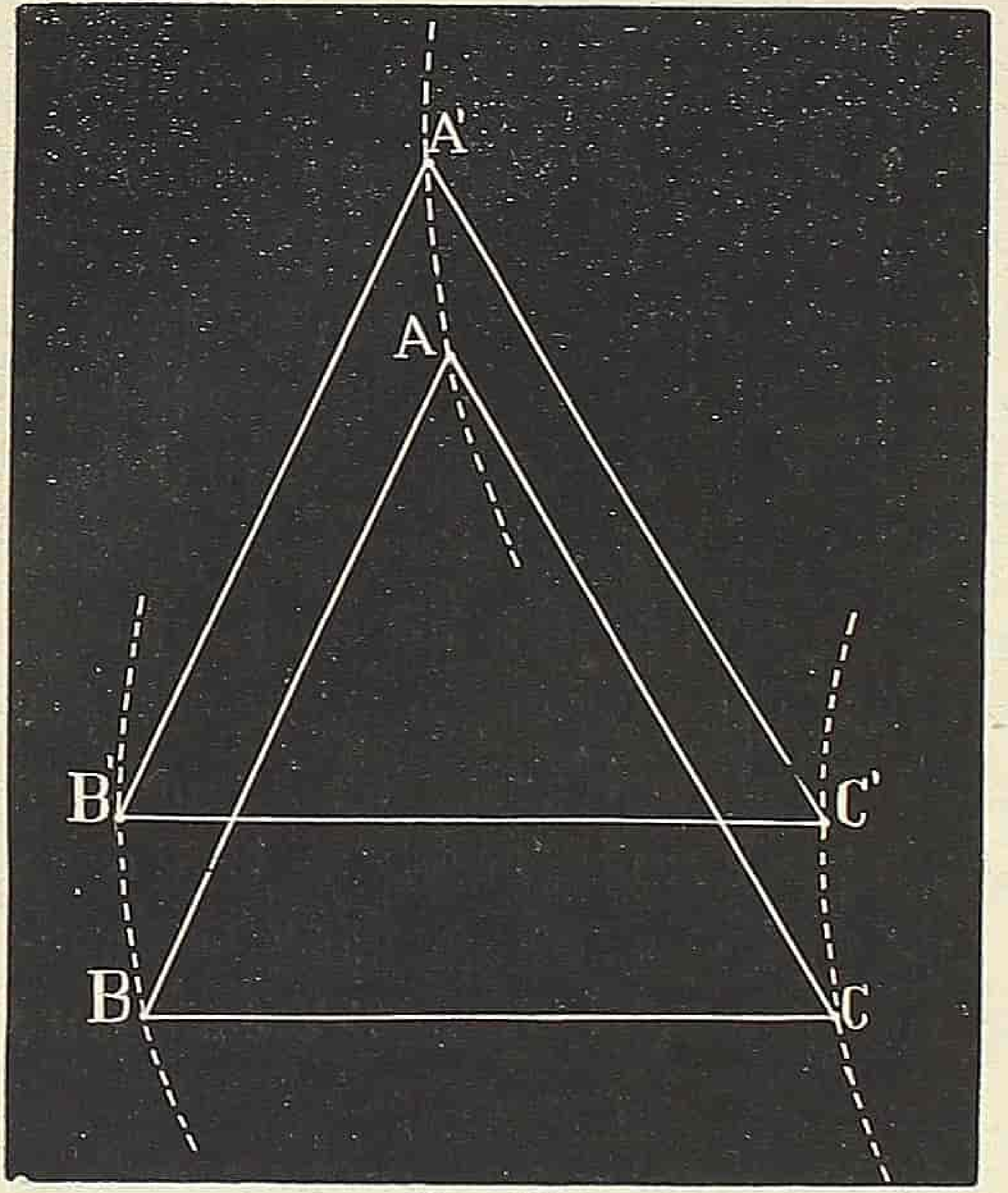
87$^{\text{bis.}}$ У меканики делимо кретања тела на проста и сложена. — Проста кретања или су трајна или тренутна. — Испитајмо најпре просто трајно кретање тела. Ово може бити двојаког рода: или је напредно, или обртно кретање (mouvement de translation et mouvement de rotation).

I. Напредно правопружно или кривопружно кретање тела.

(mouvement de translation rectiligne ou curvíligne).

88. Рецимо да се неко тело тако креће, да три стране триугла ABC (Сл. 48) остану непрестано равноодстојне са својим првобитним положајем. — Лако је сватити да праве, које сајужавају ма коју другу тачку тела, са трима тачкама A, B, и C, остаће такође равноодстојне са њиним првобитним положајем, а тако ће исто бити и са сваком другом правом, која сајужава ма које друге две његове тачке. — Оваково кретање тела зове се напредно кретање (mouvement de translation).

89. Ако будемо сматрали безкрајно мале путове $\widehat{BB}$ и $\widehat{AA'}$, које пролазе ма које две тачке B и A неког тела за



Сл. 48.

безкрајно мало време dt, видићемо: да су ови путови, које можемо узети као праве пруге, једнаки и равноодстојни, јер права $\overline{BA}$ равна је и равноодстојна са $\overline{B'A'}$ дакле је слика $BB'A'A$ паралелограм. Брзине пак тачака B и A налазе се у правцу безкрајно мали путова $\widehat{BB'}$ и $\widehat{AA'}$; осим тога сразмерне су дужинама ових елемената, сљедствено ове су брзине једнаке и равноодстојне. — Потоме можемо казати: да кад се неко тело напредно креће, онда све његове тачке имају у једно исто време једнаке и равноодстојне брзине. Ова заједничка брзина свију тачака тела, у једном истом тренутку, брзина је самог тела у том тренутку.

90. Код напредног кретања, брзина тела може се како по правцу тако и по величини у сваком тренутну ма како мењати. — Ако би брзина тела имала један исти правац, за сво време његовог кретања, онда ће се оно кретати по правој пруги, и оваково његово кретање, зове се напредно правопружно кретање (monvement de translation rectiligne), у противном случају биће напредно кривопружно кретање (mouvement de translation curviligne). Напоследку код напредног кретања, путови свију тачака тела подпуно се слажу кад се један на други положе.

Из свега напред реченог можемо у кратко казати: да је довољно, ако се три тачке каквог тела, које се неналазе у једној правој пруги, напредно крећу, па да се и цело тело напредно креће.

91. Ма каква слика у равнини може да се напредно креће у својој равнини, тако исто као и тело у простору, и све што досад рекосмо о напредном кретању тела, вреди и за ма каку кретну слику у њеној равнини.

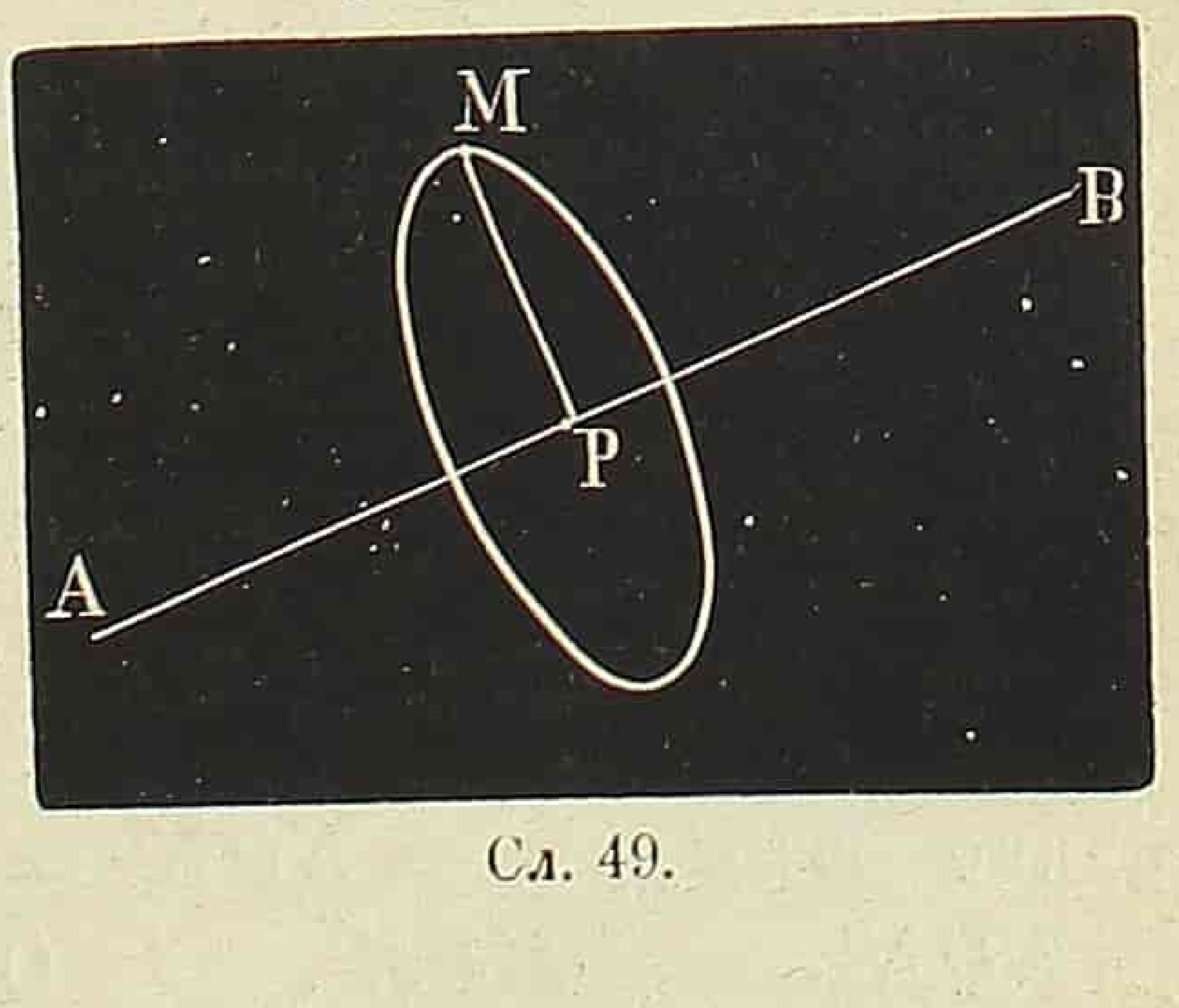
Обртање.

(mouvement de rotation).

92. Ако се неко тело тако у простору креће, да две његове тачке остају непрестано некретне, или да три његове тачке, које нису у једној правој пруги, немењају своја одстојања од две тачке у простору, онда се каже: да се тело обрће, и то: у првом случају око праве, која сајужава две његове некретне тачке, а у другом случају око праве која сајужава две тачке у простору. — Ова права око које се тело обрће, зове се оса обртања (l'axe de rotation), а само кретање тела зове се обртно кретање (mouvement de rotation) или једном речију обртање.

93. Лако је сватити, да кад оса обртања пролази кроз само тело, онда све његове тачке, које се на овој оси налазе, остају некретне, ако се пак оса у простору налази, онда одстојања свију тачака тела, од ма које две тачке осе, остају стална при обртању овог тела.

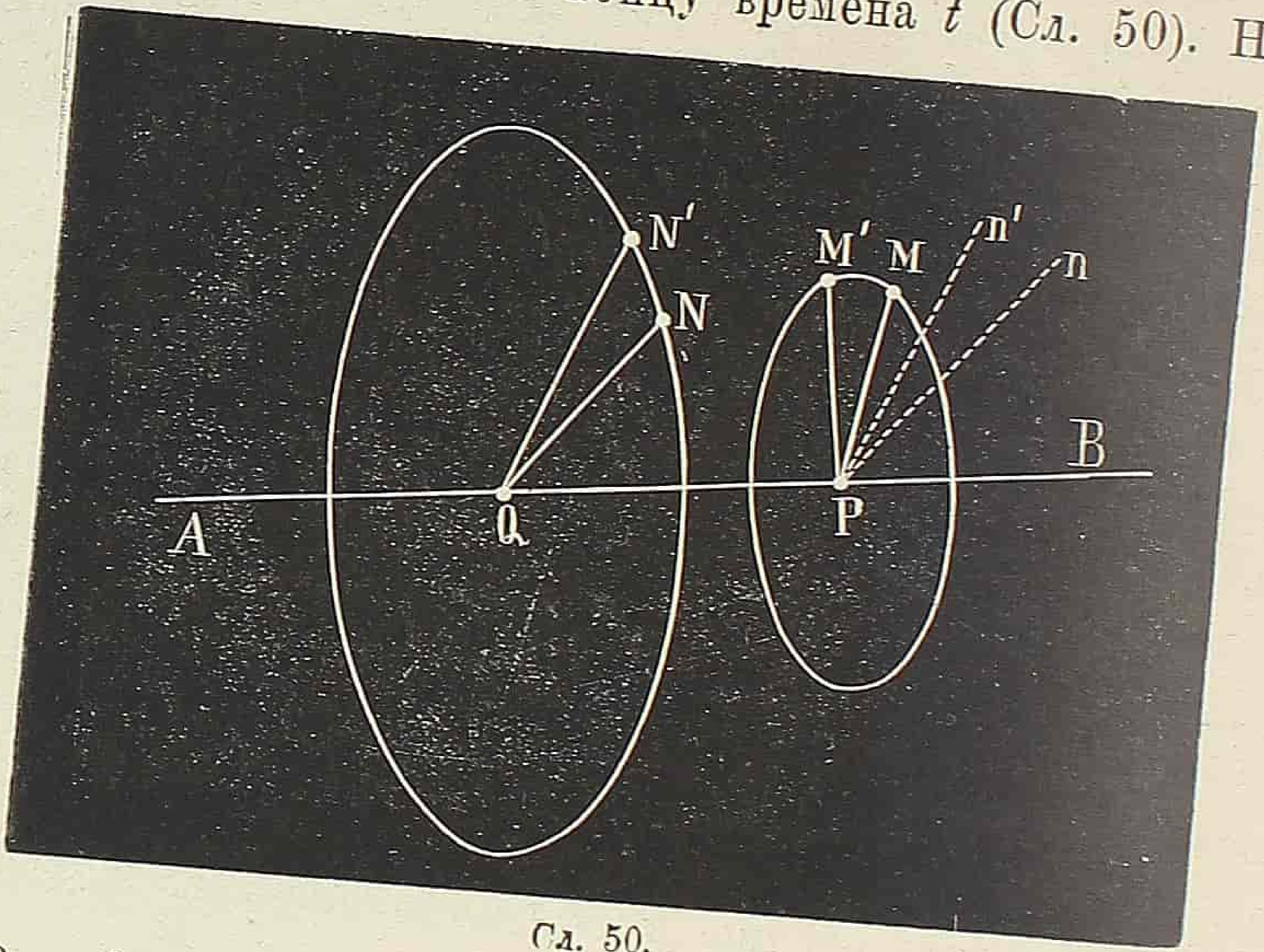
94. Нека је M ма која тачка тела (Сл. 49) а $\overline{AB}$ његова оса обртања. Ако спустимо на $\overline{AB}$ управну $\overline{MP}$, онда ова права, која се немења, остаће у сваком положају тела, управна на осу, дакле тачка M обртаће се око осе $\overline{AB}$ и описаће круг кога је средиште P, а равнина овог круга биће управна на $\overline{AB}$, но то исто постоји и за сваку другу тачку; тела отуда можемо извести ово закључење:



Сл. 49.

Кад се неко тело обрће око какве осе, онда свака његова тачка описује круг, кога је равнина управна на осу, и кога се средиште налази у самој оси.

95. Нека су M и N ма које две тачке тела, а M' и N' положаји ових тачака на концу времена t (Сл. 50). Нека су



Сл. 50.

даље P и Q средишта кругова описани реченим тачкама. Лако је видети да су угли MPM' и NQN' једнаки. И заиста повуцимо $\overline{Pn}$ равноодстојно са $\overline{QN}$. Ова права $\overline{Pn}$ биће управна на $\overline{AB}$ сљедствено налазиће се у равнини круга описаног тачком M. — Сад кад тачке M и N у сљед обртања тела дођу у M' и N', права $\overline{Pn}$, заузеће положај Pn' равноодстојан са $\overline{ON'}$, уго $\overline{nPn'}$ биће раван углу NQN'. Но уго nPM, остаје сталан за време обртања, дакле је уго $n'PM' =$ углу nPM, имаћело дакле:

$$\begin{array}{l} >n'PM' = >nPM. \\ >n'PM = >n'PM. \\ \hline \text{т. ј. } >MPM' = >nPn' \end{array}$$

и као што је и $>NQN' = >nPn'$ то отуда сљедује да је $>NQN' = >MPM'$. — Отуда изводимо ово закључење: При обртању неког тела, око неке осе, управне спуштене из разни његови тачака на осу, описују за једно исто време једнаке угле. — Ова заједничка величина поједини углова, која одговара једном истом времену, зове се угловни премештај тела за вопросно време.

96. Обртање тела око неке осе, зове се једномерно, кад су у једнаким деловима времена угли обртања једнаки, или другим речма, кад су угли обртања у ма каквим деловима времена, сразмерни овим деловима. — Већа или мања брзина обртања опредељује се углом, за кои се тело у јединици времена обрнуло. Овај уго зове се *угловна брзина тела.* (vitesse angulaire du solide).

97. Кад је обртање тела једномерно, онда се и све његове тачке једномерно крећу по периферијама одговарајућих кругова; но брзине ових тачака нису исте. Луци $\widehat{MM'}$ и $\widehat{NN'}$ (Сл. 50) описани за једно исто време, t; двема тачкама M и N, сразмерни су одговарајућим полупречницима $\overline{MP}$ и $\overline{NQ}$ зато што су угли MPM' и NQN' једнаки; луци, кои би били описани истим тачкама M и N у јединици времена; биће такође сразмерни полупречницима $\overline{MP}$ и $\overline{NQ}$. — *Отуда сљедује: да брзине разни тачака неког тела, које се једномерно обрће око неке осе, стоје у отношењу као одстојања ових тачака од осе обртања.*

98. Ако би мерили угле, одговарајућим луцима круга, кога је полупречник јединица, онда угловна брзина тела, које се једномерно обрће, биће лук, описан у јединици времена точком, која са налази од осе за јединицу одстојања, другим речма; угловна брзина тела биће, сама брзина ове тачке. —

Потоме, ако означимо са w угловну брзину тела, а са v; брзину ма које његове тачке, која је за r од осе удаљена, онда ћемо имати

$$v = r\,w$$

99. Свако друго обртање, које није једномерно, или што исто значи, при коме се угловна брзина у сваком тренутку мења, зове се менљиво. Менљиво обртање можемо сматрати, као да се састои из безбројно млого једно за друго сљедећи једномерни обртања, од коих свако траје за безкрајно мало време

dt. — При мењивом обртању, узима се за угловну брзину у ма ком тренутку, угловна брзина елементног једномерног обртања, које је саставни део овог мењивог обртања у вопросном тренутку.

Лако сада можемо изнаћи израз за ову угловну брзину, и заиста: ако означимо са α; уго за кои се тело у времену t; обрнуло, т. ј. пут протрчан за ово време тачком, која се налази за јединицу одстојања од осе обртања, онда ће $\alpha + d\alpha$ бити уго на крају времена $t + dt$; очевидно је дакле да је $d\alpha$; уго или пут кои је тачка учинила у времену dt. Ако сада, као што напред рекосмо, сматрамо обртање као једномерно за безкрајно мало време dt, онда брзина тачке, при овом једномерном обртању, на крају времена t биће $\frac{d\alpha}{dt}$; но ово је такође и угловна брзина тела у овом тренутку дакле брзина w коју тражимо биће:

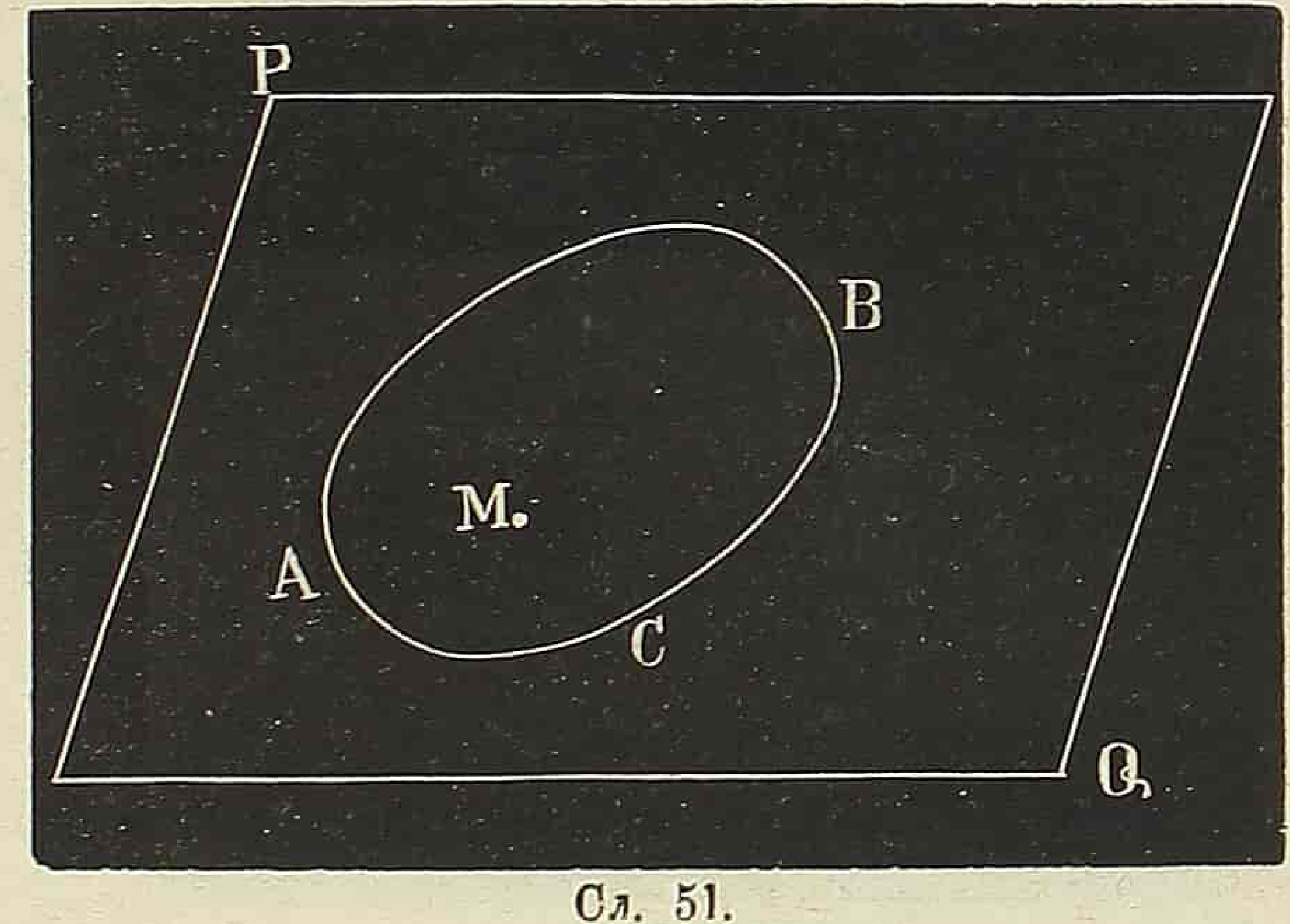
$$w = \frac{d\alpha}{dt}$$

100. Пошто мењиво обртање, можемо у сваком тренутку сматрати, као једномерно за безкрајно мало време, то је лако сватити, да брзине разни тачака тела, у једном истом тренутку, стоје у истом међусобном отношењу, као и у случају једномерног обртања; ове брзине сразмерне су дакле одговарајућим одстојањима вопросни тачака од осе обртања. Ако означимо са v брзину ма које тачке тела, која је од осе за r удаљена, онда ће опет бити:

$$v = r w = r \frac{d\alpha}{dt}$$

101. Свако кретање тела, које није нити само напредно нити обртно; већ састављено из ових, зове се сложено кретање, о ком ћемо ми доцније говорити. — Овде имамо само то додати, да напредно кретање, по кружном каквом путу, нетреба помешати са обртањем.

102. Ако представимо себи да се ма каква слика *ABC*..... (Сл. 51) обрће око неке осе *M* управне на њену равнину *PQ*, онда можемо лако видети, да ће слика непрестано остати у својој равнини. — Њено кретање можемо сматрати, као обртање око тачке *M*. — Ова тачка зове се средиште обртања (centre de rotation) слике *ABC*.....



Сл. 51.

Све што је досад речено о обртању тела око неке осе у простору, вреди и за обртање ма какве слике, око неке тачке у њеној равнини.

Просто елементно кретање тела.

103. Ми смо казали № 87 да елементно кретање тела, па било ово напредно или обртно, зове се оно, које траје само за један елеменат времена. Услови, који су при том елементном кретању постојали за један елеменат, неморају бити исти и за одма сљедећи елеменат времена.

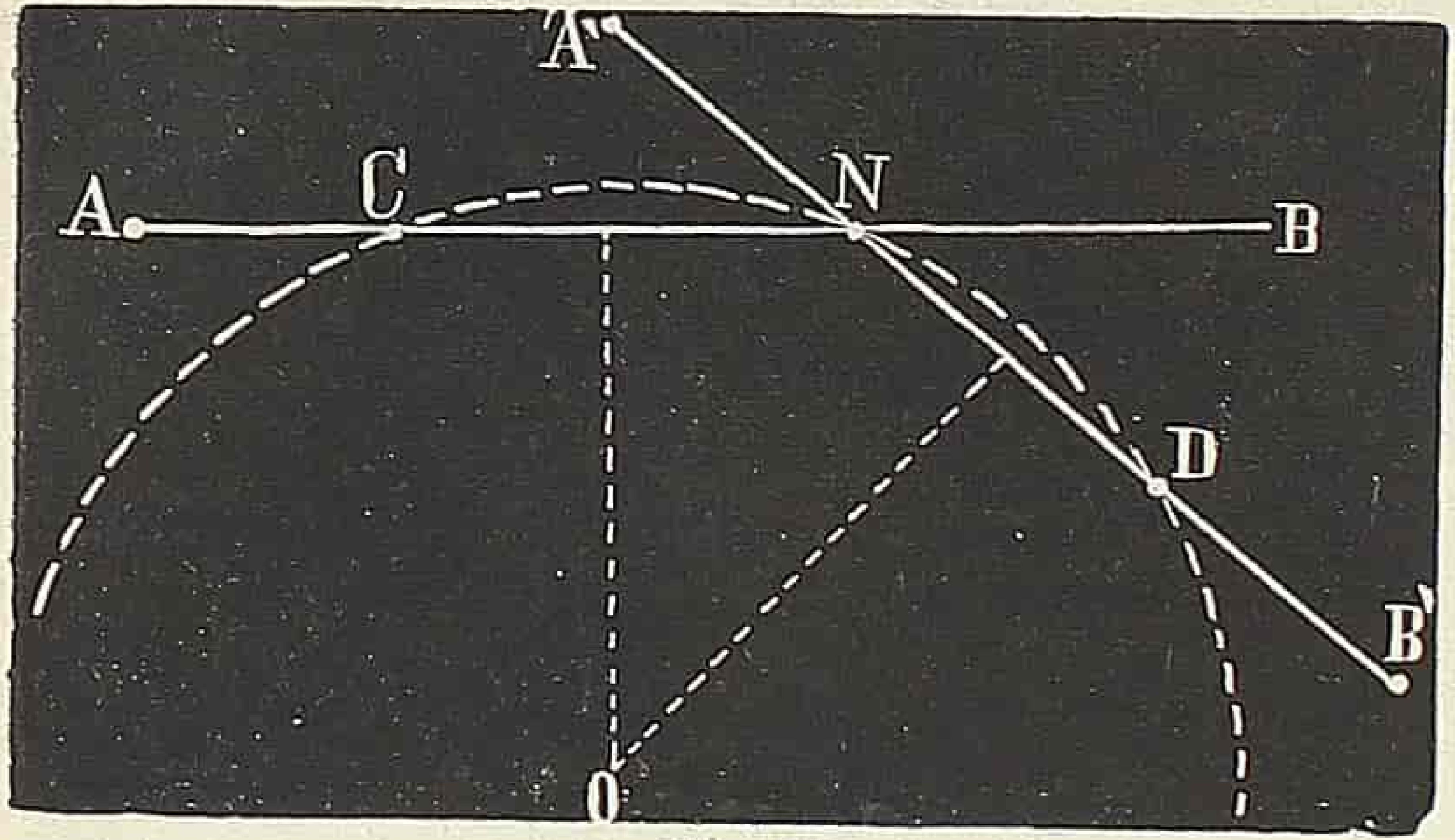
Ми ћемо сада редом да испитамо овакова кретања, како за слике у равнини, тако и за тела у простору.

Елементно кретање неке слике у својој равнини.

104. Да би могли добро схватити, у чему се састои елементно кретање неке слике у својој равнини, ми ћемо предходно да поставимо ово:

Правило I. *Ма каква слика, која се креће у својој равнини, може се у сваком тренутку, из једног њеног положаја да премести у други, обртањем око једне тачке, која се у њеној равнини налази.*

Да би ово доказали, сматрајмо кретање неке праве, која би чврсто сајужена била са вопросном сликом, и рецимо да је ова права управљена по $\overline{AB}$, кад се слика налази у једном свом положају, а по $\overline{A'B'}$ кад је слика у свом одма сљедећем положају. — (Сл. 52) Потоме у N налазе се две тачке, једна која принадлеже правој $\overline{AB}$, а друга правој $\overline{A'B'}$. Нека је C тачка праве $\overline{AB}$, која се после свршеног обртања налази у N и на правој $\overline{A'B'}$; нека је тако исто D, тачка праве $\overline{A'B'}$ у којој је дошла тачка N, сматрана као тачка праве $\overline{AB}$. Почем је то тако, онда мора бити:



Сл. 52.

$$\overline{CN} = \overline{ND}.$$

Напоследку нека је O средиште круга, кои пролази кроз три тачке C, N, и D. Ако сада обрћемо праву $\overline{AB}$ око O као средишта, и то дотле док њена тачка C недође у N; а N у D; онда ће она заузети положај $\overline{A'B'}$, кретна слика пак, која је по предпоставки чврсто сајужена са правом $\overline{AB}$, прећиће из свог првог положаја у други, обртајући се такође око тачке O; што смо имали да докажемо.

При овом доказу, ми смо узели, да се два положаја праве $\overline{AB}$ пресецају у тачки N. Но може се десити да небуде тако: праве $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ могу бити равноодстојне, или могу се поклапати. У овом случају да би довели све тачке праве $\overline{AB}$, да се слажу са одговарајућим тачкама праве $\overline{A'\text{Б}'}$; довољно ће бити, ако дамо правој $\overline{AB}$, сљедствено и кретној слики, која је с њоме сајужена, удесно правопружно напредно кретање. Но оваково кретање можемо сматрати као обртање око средишта, које је безкрајно удаљено, дакле горе доказано прарило вреди за све случаје у опште, с тим само условом, да се правопружно напредно кретање неке слике у својој равнини, сматра као особити случај обртања око неке тачке, која се у равнини налази, и која је безкрајно удаљена.

105. Ма какво било кретање неке слике у својој равнини, ми га можемо свагда, сходно ономе што смо казали под № 87, разложити на извесни број елементни кретања.

По напред доказаном правилу, ми можемо кретну слику, из њеног положаја, који заузима у почетку овог елементног кретања поставити у положај, који би на крају истог кретања заузимала, и то обртањем око неке у вопросној равнини налазеће се тачке. Но пошто при овом обртању, разне тачке кретне слике, пролазе безкрајно мале путове, то ове можемо сматрати као праве пруге, сљедствено ови путови сасвим се слажу са путовима, које би исте тачке протрчале при елементном кретању, које сматрамо, дакле ово елементно кретање исто је што и обртање, помоћу кога смо преместили кретну слику из једног њеног положаја у други. Можемо дакле рећи:

Да је свако елементно кретање неке слике у својој равнини, безкрајно мало обртање, око неке тачке, која се у равнини налази, и која може безкрајно удаљена бити.

Средишта ови разни елементни обртања, која скупа састављају непрекидно кретање слике, у опште разликују се међусобом, и кретна слика обрће се око сваког, као што напред рекосмо, само за безкрајно мало време. — Због тога се свако од ових средишта зове: *тренутно средиште обртања* (centre instantane de rotation):

106. Из свега тога сљедује: да при ма каквом кретању неке слике у својој равнини, безкрајно мали путови, протрчани разним њеним тачкама, за један исти елеменат времена, јесу луци кругова, којих је средиште, тренутно средиште обртања слике у вопросном тренутку; или другим речма; нормале повучене на путове разни тачака кретне слике, а кроз положаје, које ове тачке заузимају у једном истом тренутку, пролазе све кроз једну исту тачку равнине, и ова је тачка, тренутно средиште обртања у овом тренутку. — Осим

тога, брзине ови разни тачака кретне слике, у једном истом тренутку, сразмерне су њиним одговарајућим одстојањама од тренутног средишта обртања.

107. Ако би правац брзина за две тачке кретне слике у ма ком тренутку познат био, онда можемо лако да пределимо тренутно средиште обртања у овом тренутку и то овако:

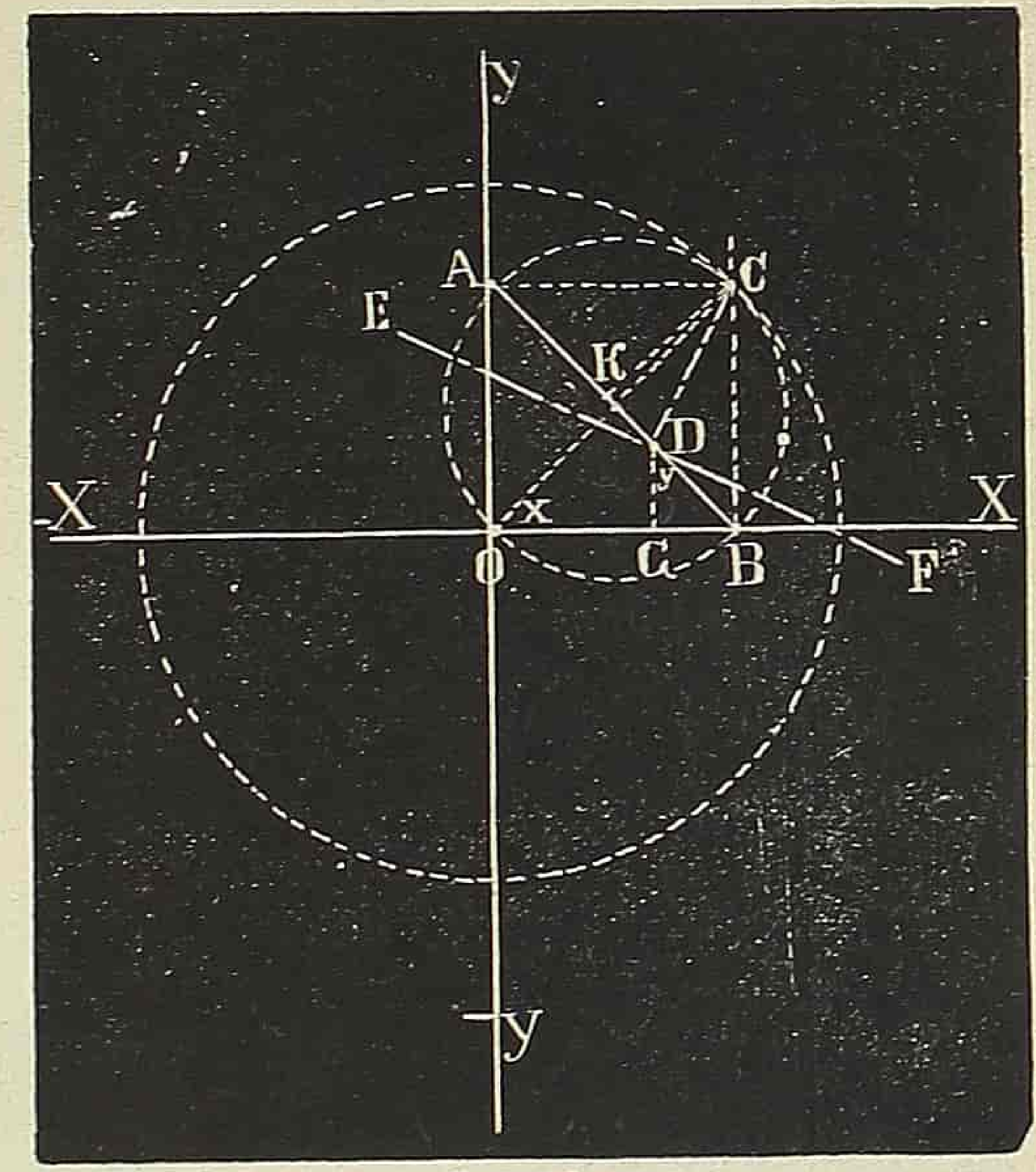
Кроз сваку тачку повуче се управна на њену брзину, и тачка у којој се две управне пресецају, биће тражено тренутно средиште обртања. — Разуме се по себи, да ради тога, две тачке треба да су такове, како њине брзине неби биле управне на праву, која их сајужава.

Ако би пак управне на правац брзина вопросни тачака, биле међусобом равноодстојне, онда се тренутно средиште обртања налази у безкрајном одстојању, и онда је елементно кретање слике, напредно кретање.

Ако је осим праваца брзина двеју тачака кретне слике, позната јошт и величина једне од ових брзина, онда можемо определити и брзину сваке друге тачке вопросне слике, и то овако: Најпре се определи тренутно средиште обртања, као што је напред речено, затим се постави сразмера, која се оснива на том, што се брзина ма које тачке, има према познатој брзини, као што се имају одстојања између тренутног средишта обртања и двеју тачака, на које се ове брзине односе. — Из ове сразмерне определи се на познати начин тражења брзина.

Нетреба узети, да је тренутно средиште обртања неке кретне слике у својој равнини, у исто време и средиште кривине путова протрчани разним њеним тачкаама. — При елементном обртању око овог тренутног средишта, свака тачка опише само један елеменат свога пута. Положајем тренутног средишта обртања, можемо изнаћи само правац тангенте у појединим тачкама пута, без да штогод тиме и о његовој кривини знамо.

108. Ради бољег објаснења, употребимо напред изложено на неке примере:



Сл. 53.

1-во. Дата је права $\overline{AB}$ сталне дужине, која се тако креће у правом углу YOX; да њен крај A непрестано клиза по оси $\overline{OY}$, а крај B по оси $\overline{OX}$ (Сл. 53) тражи се да се определе тренутна средишта обртања вопросне праве $\overline{AB}$.

Будући су брзине тачака A и B управљене по правцима $\overline{OY}$ и $\overline{OX}$, то управне на ове брзине за ма какав положај кретне праве $\overline{AB}$, биђеду управне на осе $\overline{OY}$ и $\overline{OX}$; ако дакле у A и B подигнемо управне $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, добићемо тачку C која ће бити једно тренутно средиште обртања праве AB. —

У четвороугаонику $AOBC$ диагонала $\overline{OC}$ равна је диагонали AB, која је стална. Отуда сљедује, да је геометрично место тренутног средишта обртања, круг, који је описан из O као средишта са полупречником $\overline{AB}$. — Даље ма која тачка D праве $\overline{AB}$, описује у њеном кретању елипсу, које је средиште тачка O.[1] — Осим тога $\overline{DC}$ нормала је, а $\overline{EF}$ управна на $\overline{DC}$, тангента је речене елипсе у тачки D.

Напоследку, почем је пречница $\overline{AB}$ правоуглог триугла ABC стална, то пут описан тренутним средиштем C у свом релативном кретању око праве AB, т. ј. геометрично

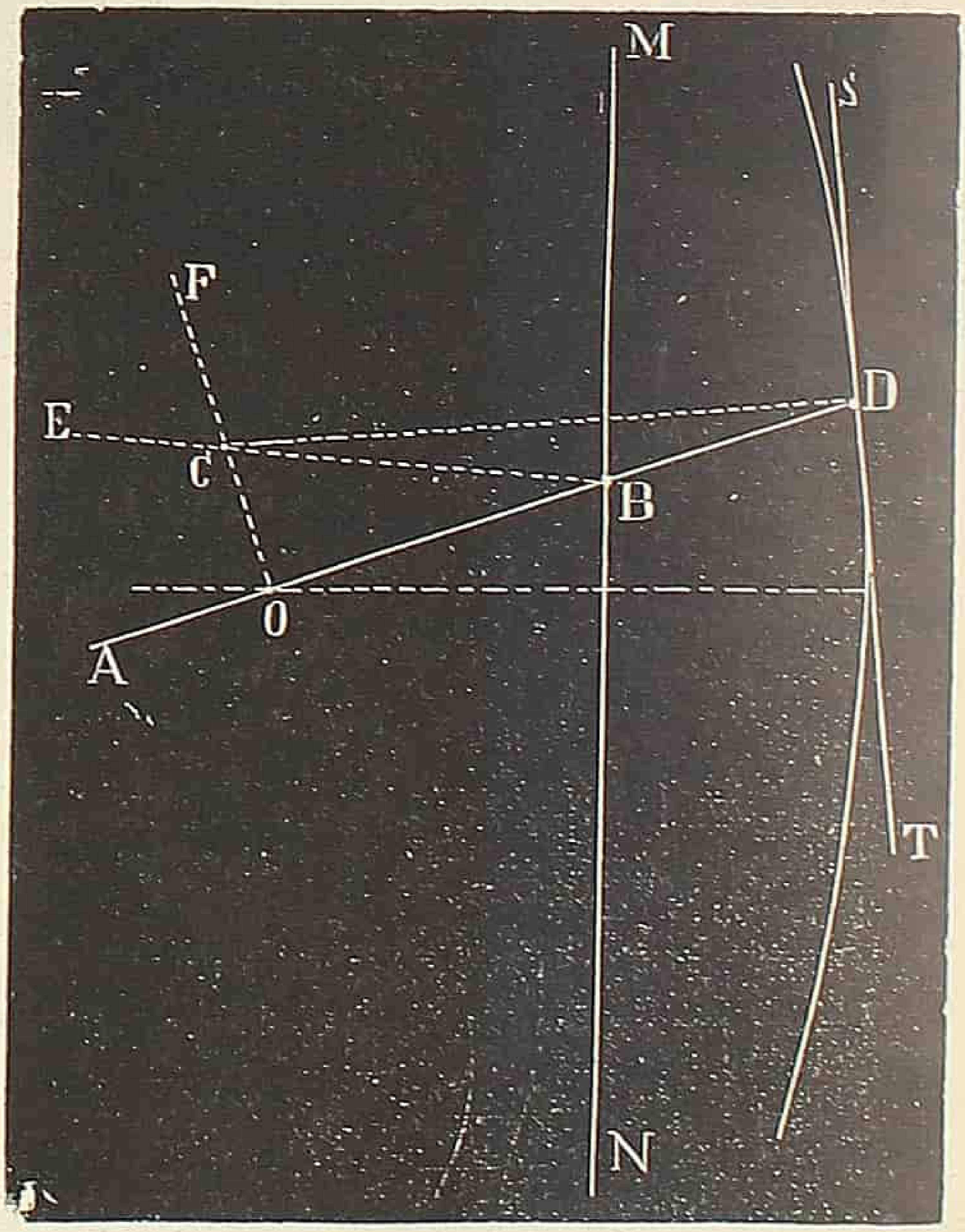
---

[1] $\overline{AD} = a$; $\overline{DB} = b$; $\overline{OG} = x$; $\overline{DG} = y$; $\overline{GB} = z$; отуда $z^2 = b^2 - y^2$ из $\triangle AOB \propto \triangle DGB$ имамо $a : b = x : z$ и $z = \frac{bx}{a}$ дакле: $\frac{b^2x^2}{a^2} = b^2 - y^2$; отуда $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ једначина елипсе. — Исто би тако било, кад би се тачка D, узела у продужењу сталне праве $\overline{AB}$.

место свију тачака, које су са кретном правом чврсто сајужене, и које се постепено слажу са тренутним средиштем обртања, такође је круг, описан над овом правом као пречником. — Из тога је лако видити, да кад се неки кретни круг котрља по унутрашњој страни неког сталног круга, двогубог полупречника, онда свака тачка D, узета у равнини кретног круга, описује елипсу око средишта сталног круга. Ова елипса своди се на један пречник, кад се описујућа тачка D налази у периферији кретног круга.[2]

Из свега тога можемо закључити, да кретање праге $\overline{AB}$ по постављеним условима, може се произвести котрљањем овог другог круга по унутрашњој страни оног првог. —

2-го. Нека је ABD права пруга, (Сл. 54) која се тако креће, да непрестано пролази кроз сталну тачку O, а крај B да клиза по сталној правој $\overline{MN}$. — По том кретању, брзина тачке B налазиће се у правцр $\overline{MN}$, дакле управна $\overline{BE}$ на ову праву, мора пролазити кроз тренутно средиште обртања кретне праве. Осим тога $\overline{OD}$ је радиус вектор, а $\overline{BD}$ је сталне дужине, дакле брзина тачке, која је сада у O, налазиће се непрестано у правцу, који буде заузимала нрава ABD у свом кретању, потоме управна $\overline{OF}$ на праву $\overline{AD}$, мора такође пролазити кроз тренутно средиште обртања, дакле



Сл. 54.

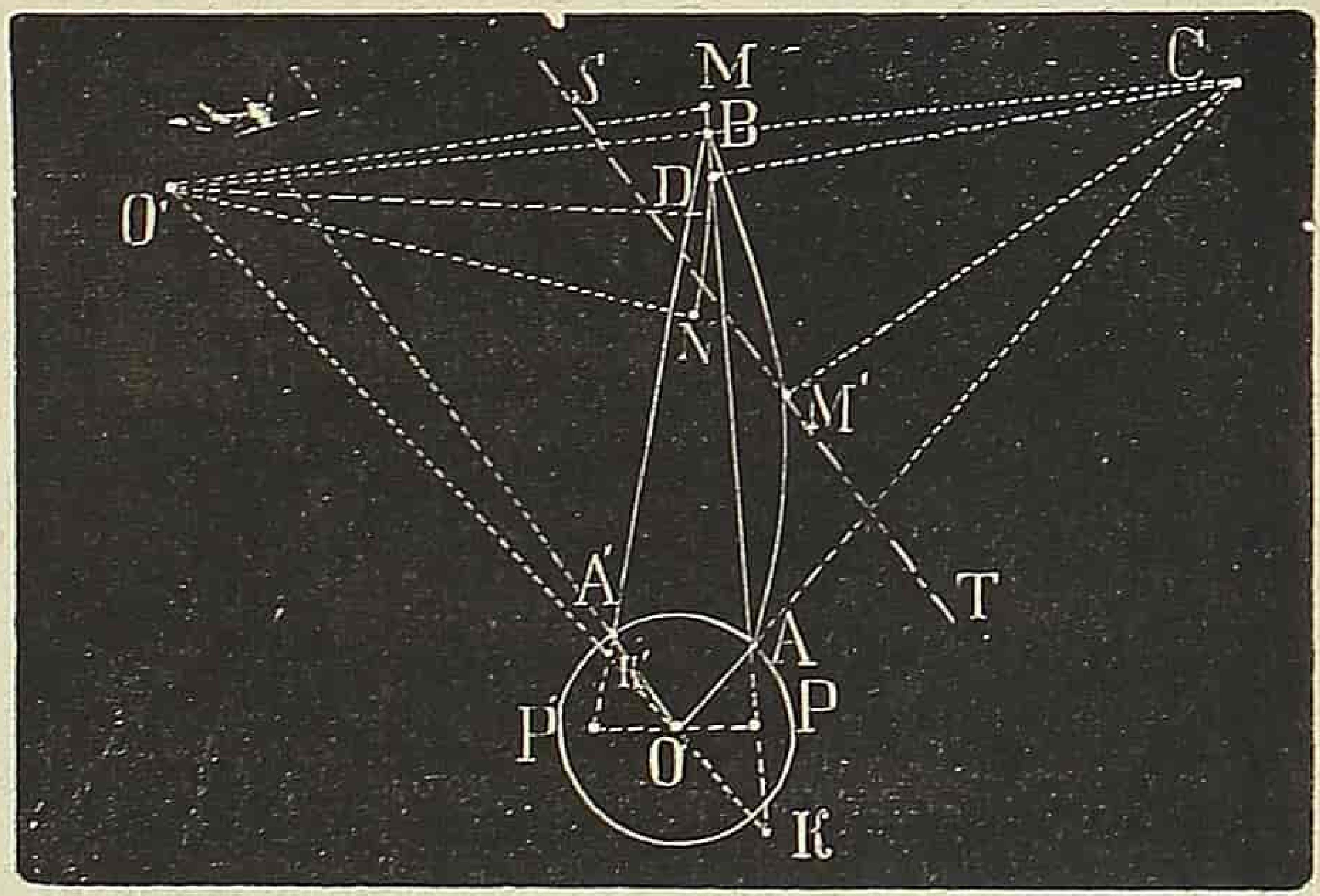
---

[2] Управна $\overline{CK}$ спуштена из C на праву $\overline{AB}$, нормала је криве пруге, које је једначина $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \overline{AB}^{\frac{2}{3}}$. Ова крива зове се анвелопа праве $\overline{AB}$. —

тачка C биће ово средиште праве $\overline{AD}$. — Крива пруга, коју тачка D при кретању праве ABD описује, зове се Конкоид (Conchoïde) први пут изнађена од Никомедија. $\overline{CD}$ је нормала на ову криву пругу, а $\overline{ST}$ управна на $\overline{CD}$ биће њена тангента.

3-ће. Узмимо неку праву $\overline{AB}$ сталне величине Сл. 55 и рецимо да се њен крај A креће по периферији круга O; а крај B по кружном луку од M до N.

Да би могли определити тренутно средиште обртања праве $\overline{AB}$, за ма који њен положај, знамо да су нормале на путове тачака A и B, полупречници $\overline{OA}$ и $\overline{O'B}$ кругова, које ове две тачке у свом кретању описују. Потоме тачка пресека C ова два полупречника, биће тренутно средиште обртања праве $\overline{AB}$.



Сл. 55.

Ако означимо са v, и v', брзине тачака A и B, а са u брзину ма које тачке M', која би чврсто сајужена била са правом $\overline{AB}$, онда ћемо имати:

$$\frac{v}{\overline{AC}} = \frac{v'}{\overline{BC}} = \frac{u}{\overline{M'C}}$$

Ова три израза, јесу у исто време, угловне брзине тачака A, B, и M', око тачке C. — $\overline{M'C}$ је нормала а $\overline{ST}$ управна на $\overline{M'C}$, тангента је криве пруге коју тачка M описује.

Из једначине $\frac{v}{\overline{AC}} = \frac{v'}{\overline{BC}}$ сљедује $v\overline{BC} = v'\overline{AC}$ но као што је $AC = \frac{\overline{CD}}{sin > CAD}$; $\overline{CB} = \frac{\overline{CD}}{sin > CBD}$, то ће бити $v\frac{CD}{\sin CBD} = v'\frac{\overline{CD}}{\sin CAD}$ или $v \sin CAB = v' \sin CBD$ а то ће рећи: да су пројекције брзина v и v' на праву $\overline{AB}$ једнаке, што се и предходно може дознати.

Ако означимо са w и w' угловне брзине тачака A и B око средишта O и O', и ако повучемо $\overline{OP}$ равноодстојно са $O'B$, добићемо:

$$\frac{v}{v'} = \frac{w\overline{AO}}{w'\overline{BO'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}};$$

због подобни триуглова ABC и AOP; отуда:

$$w\overline{OP} = w'\overline{BO'},$$

но триугли $BO'K$ и OPK такође су подобни, дакле биће:

$$w\overline{OK} = w'\overline{O'K}$$

Можемо дакле рећи: да су угловне брзине тачака A и B, сразмерне одстојањима средишта O и O' од тачке пресецања K прави пруга $\overline{OO'}$ и $\overline{BA}$.

Иста својства налазимо, и кад се права $\overline{AB}$ налази у положају $\overline{A'B}$, између средишта O и O' т. ј. и у овом случају имаћемо:

$$w\overline{OK'} = w'\overline{O'K'}.$$

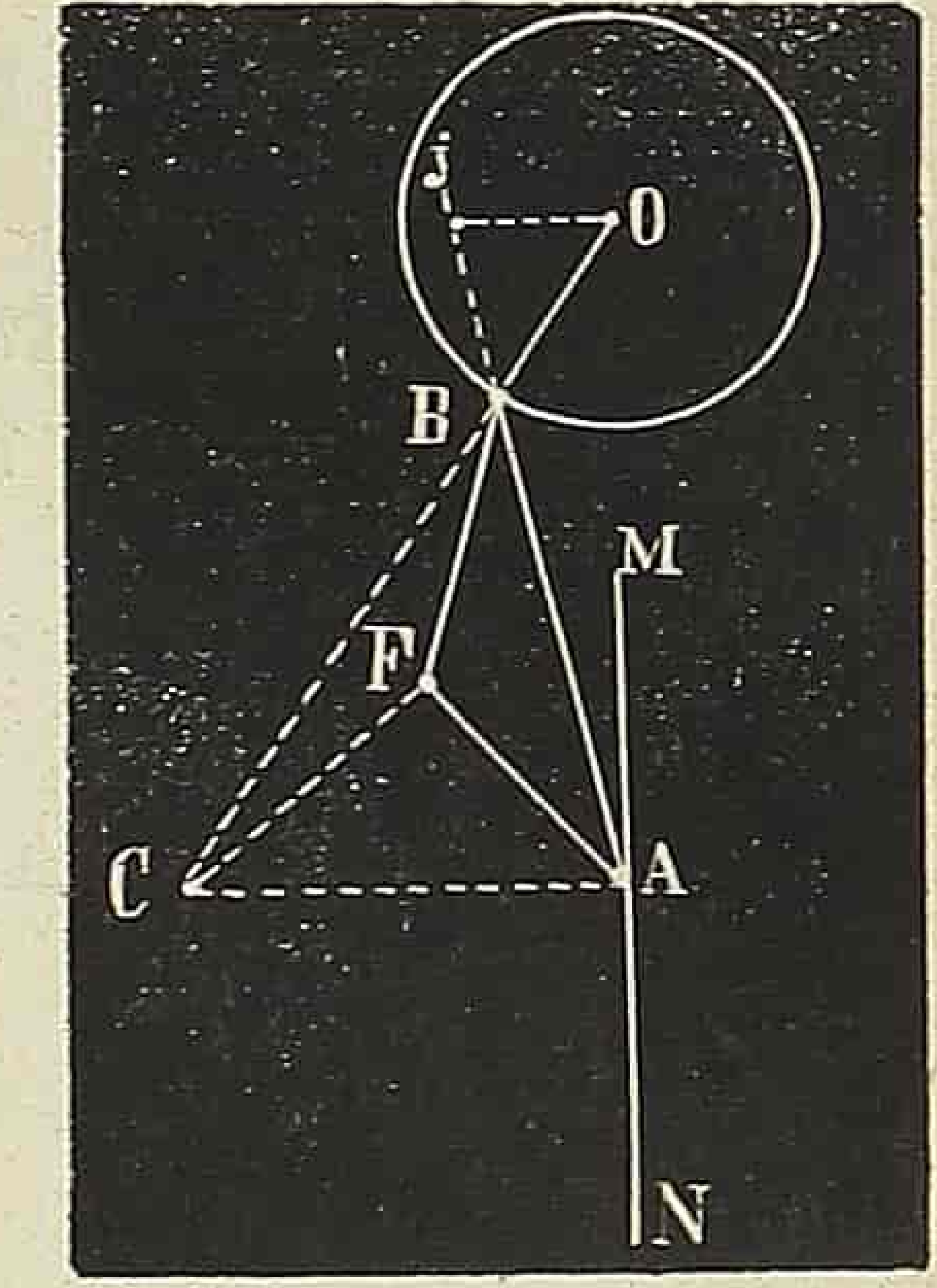
Овај пример показује нам јасно: 1. Да је обртање праве $\overline{AB}$ око тачке C само тренутко, јер се тачке A и B стварно око O и O' обрћу. 2. Да тачка C није средиште кривина, криви пруга описани тачкама A, B, и M'.

Кретање праве $\overline{AB}$ у овом примеру, подобно је кретању машке, која сајужава нијаљку и ручку код махина.

4-то. Ако узмемо да се тачка B креће по кругу O, а тачка A по правој $\overline{MN'}$ (Сл. 56); онда ћемо изнаћи тренутно средиште обртања система AFB, ако у тачки A подигнемо управну $\overline{AC}$ на $\overline{MN}$, затим продужимо полупречник

$\overline{OB}$ до пресецања са правом $\overline{AC}$, и тачка пресецања C биће тражено средиште. Ако је v, брзина тачке A по правој $\overline{MN}$, а w, угловна брзина тачке B, и ако на последку продужимо $\overline{AB}$, а затим кроз O повучемо равноодстојну $\overline{OJ}$ са $\overline{AC}$, онда ће бити $\frac{v}{\overline{AC}}$ $= \frac{w\overline{OB}}{\overline{BC}}$, и као што је $\frac{AC}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OB}}$, онда сљедује да је:

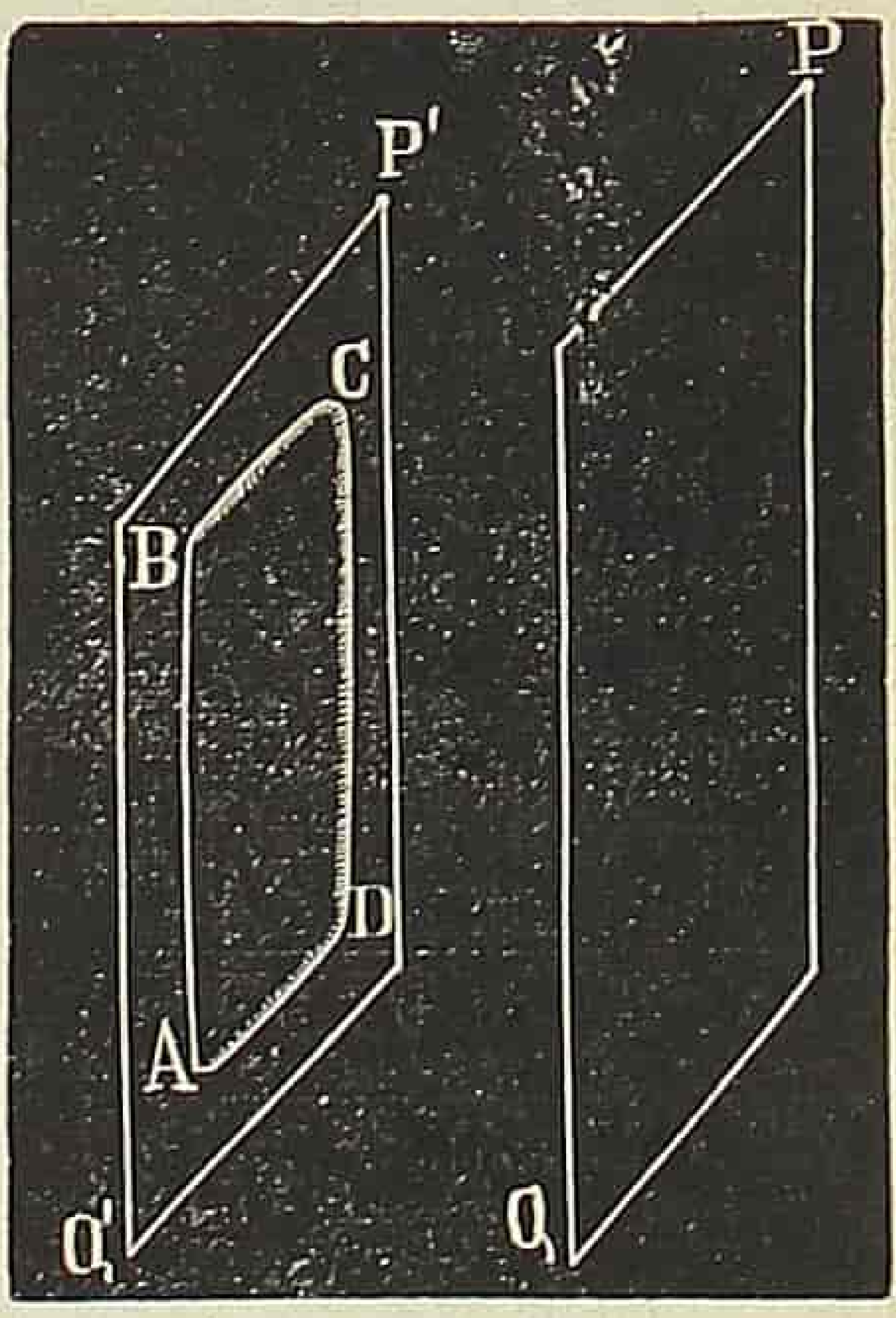
$$v = \overline{OJ}w.$$



Сл. 56.

Елементно кретање неког тела, равноодстојно са једном истом равнином

109. Да би дознали, у чему се састоји елементно кретање неког тела, кога се све тачке крећу, по путовима равноодстојним са неком сталном равнином PQ Сл. 57. Предпоставимо себи, да смо тело пресекли равнином $P'Q'$ која је равноодстојна са равнином PQ, и нека је $ABCD\ldots$ овај пресек.



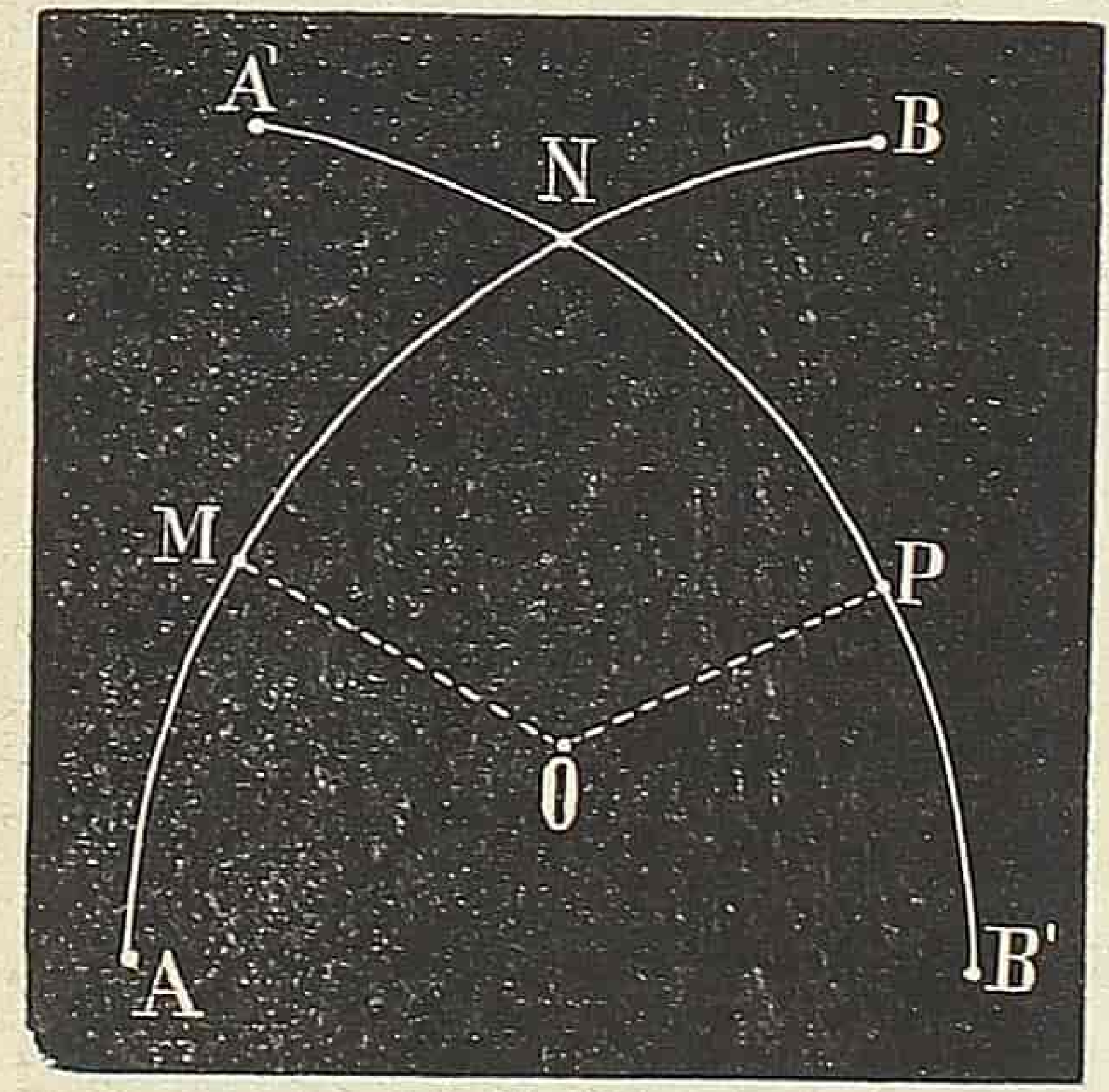
Сл. 57.

Ако сада сматрамо кретање слике $ABCD$ у њеној равнини, онда знамо, да је свако елементно кретање њено, обртање око неке извесне тачке E, која се у самој равнини $P'Q'$ налази, или што исто знкчи, обртање око управне у E на равнину $P'Q'$, дакле управне и на равнину PQ. — Тело пак, које је чврсто сајужено са овом сликом, налазиће се такође у истом кретању. Отуда можемо закључити, *да свако елементно кретање тела, које се креће равноодстојно са неком сталном равнином, обртање је око осе управне на ову равнину.* Због тога, оса око које бива тренутно обртање тела у ма ком тренутку, зове се тренутна оса обртања (l'axe instantané de rotation). — Ове осе имају у опште за разне тренутке, и разне положаје у простору. —

Може се десити, да је оса елементног обртања, безкрајно удаљена. У овом случају елементно обртање, своди се на напредно кретање.

Елементно кретање неке сферне слике по својој сфери.

110. Ако будемо тако исто радили као и код елементног кретања неке слике у својој равнини (№ 104,) замењујући само овде праве пруге, које смо тамо сматрали, са луцима највећи кругова сфере, можемо лако доказати сљедеће правило: нека сферна слика која се креће по сфери, може се преместити из ма ког њеног положаја у други, обртањем око једне тачке сфере као пола, или што је исто, обртањем око пречника сфере као осе. Отуда можемо извести као и код № 105: *да је свако елементно кретање неке сферне слике по сфери, безкрајно мало обртање, око неке тачке сфере као пола, или боље око пречника сфере као осе.*



Сл. 58.

Елементно кретање тела, кога једна тачка остаје некретна.

111. Ако се неко тело тако креће, да једна с њим чврсто сајужена тачка *O* остане непрестано некретна, онда ће се извесне његове тачке налазити на површини једне сфере, које је средиште *O*. Све ове тачке образоваће једну сферну слику, која ће се при кретању тела, непрестано по површини поменуте сфере кретати. — Но као што мало пре дознасмо, да је свако елементно кретање сферне слике по сфери, обртање око једног њеног пречника, то ће и кретање целог са

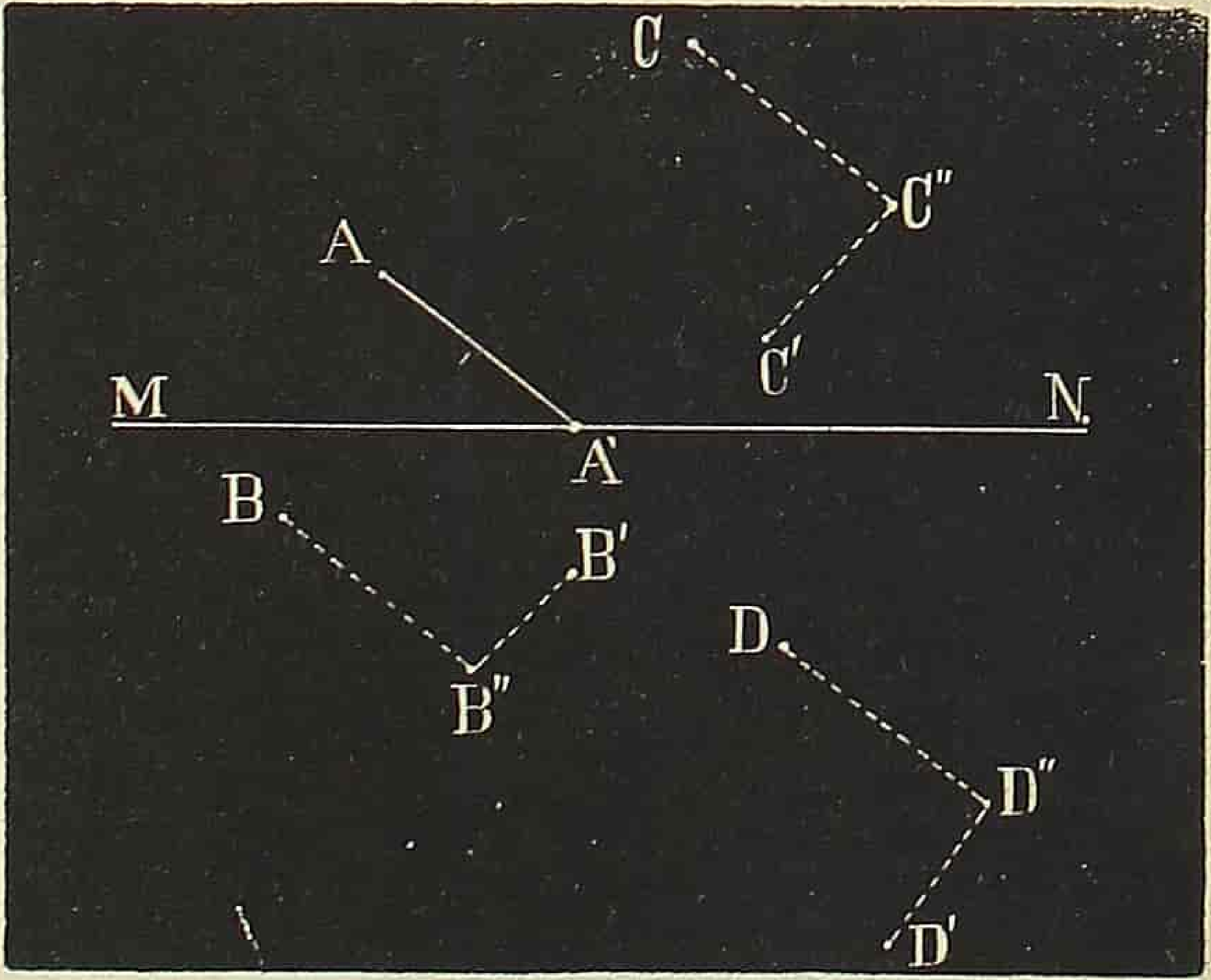
сферном сликом чврсто сајуженог тела, бити обртање око овог пречника. Отуда можемо извести: *да је свако елементно кретање неког тела, кога једна тачка остаје некретна, обртање око тренутне осе, која пролази кроз ову некретну тачку, и које се правац мења у сваком тренутку.*[1]

Лако је сад сватити да се тело, сматрањем сферне слике, образоване из разни његови тачака, једнако удаљени од сталне тачке O, може преместити из ма ког његовог положаја у други, обртањем око осе кроз O повучене.

Елементно кретање неког тела, које се ма како у простору креће.

112. Неко тело, које се ма како у простору креће, можемо свагда из једног његовог положаја у други преместити, давши му најпре напредно, а затим обртно кретање, око неке извесне осе. И заиста:

Нека су A, B, C, D, ... разне тачке кретног тела (Сл. 59) у једном, а A', B', C', D', ... исте тачке у другом његовом положају. Сајузимо правом пругом тачку A са A' и повуцимо кроз B, C, D, ... праве $\overline{BB''}$, $\overline{CC''}$, $\overline{DD''}$ ..... равне и равноодстојне са правом $\overline{AA'}$. Сад да би преместили тело из првог његовог положаја A, B, C, D ..... у положај $A'B'C'D'$ .... можемо узети да се најпре цело тело креће у правцу $\overline{AA'}$, и да је величина овог кретања представљена правом $\overline{AA'}$. — По том кретању тачке B, C, D ..... доћи ће у B'', C'', D'', ... сад треба дати телу такво кретање



Сл. 59.

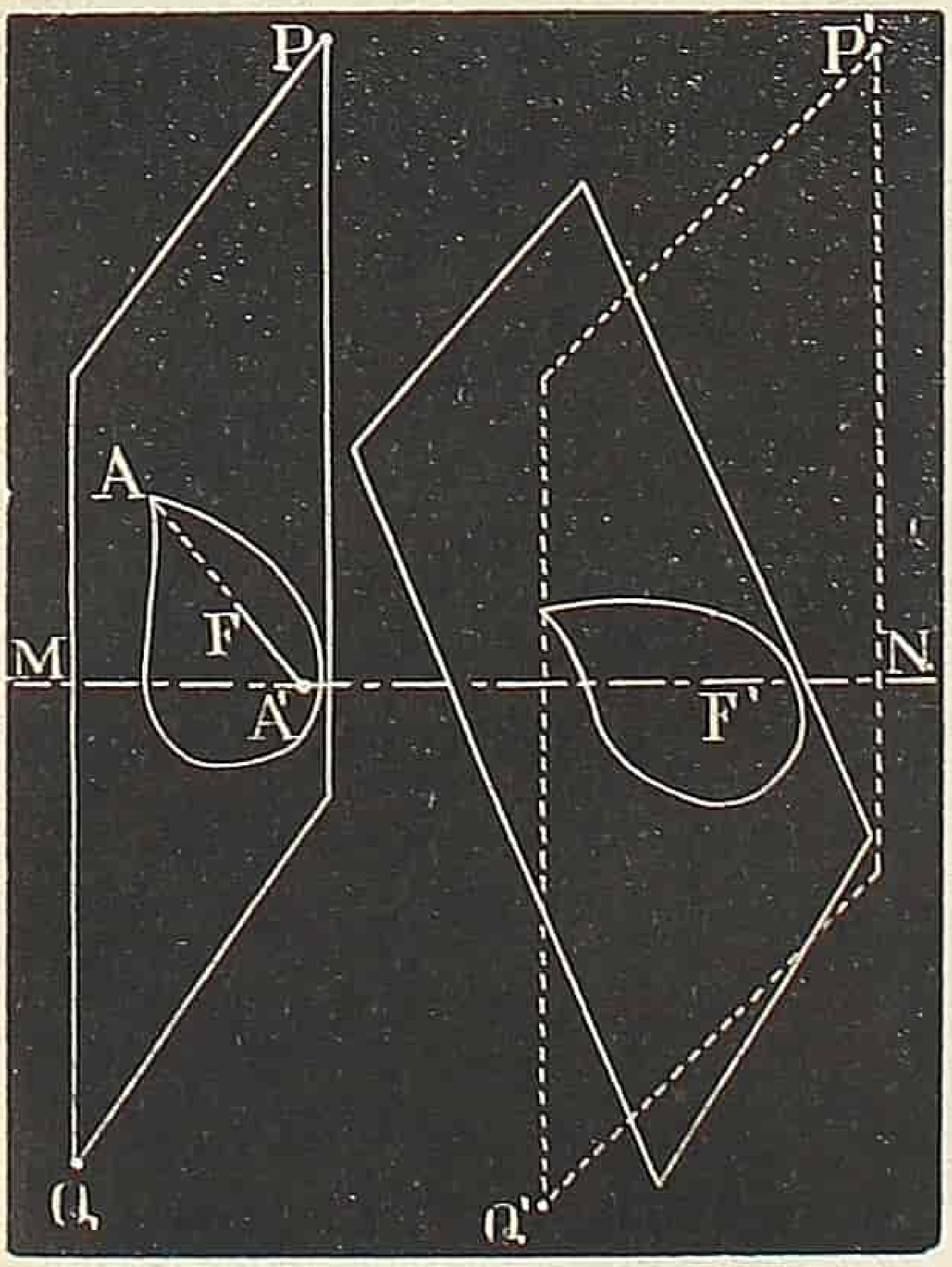
---

[1] Ово је познато под именом теорем d' Alembert-a.

да тачка A' остане некретна, B'', C'', D'' . . . . . да дођу у B', C', D' . . . . . Но ми знамо да оваково кретање тела, може бити само обртање, око осе, која пролази кроз тачку A'; дакле заиста можемо преместити тело из положаја $ABCD$. . . . . у положај $A'B'C'D'$ . . . . . ако му дамо 1-во Напредно кретање по правцу $\overline{AA'}$; 2-го Обртање око неке осе $\overline{MN}$ која пролази кроз A'.

Ово двојако кретање тела, можемо произвести на безбројно млого начина, па да исти резултат постигнемо, јер то, што смо учинили са тачком A, можемо учинити и са сваком другом његовом тачком. — Између свију ови разни кретања, налази се свагда кретање, код кога је напредовање равноодстојно са осом обртања.

И заиста; узмимо неку равнину PQ управну на осу MN Ст. 60 и сматрајмо слику F као пресек тела са овом равнином. Сад усљед напредног кретања по правцу $\overline{AA'}$; слика F налазиће се у некој равнини $P'Q'$ равнооостојној са равнино PQ, а у сљед обртања око MN, ова слика, окретајући се у равнини $P'Q'$ заузеће неки положај F'. — Но ми можемо слику о којој је говор, преместити из њеног положаја F у F', ако јој најпре дамо напредно кретање по управној, којом се опредељује одстојање између равнина PQ и $P'Q'$, затим је обрнемо у овој последњој равнини, око неке удесне тачке. — Ако сад представимо себи, да је тело чврсто сајужено са овом сликом, моћи ћемо лако сватити, да ће оно у сљед ова два кретања прећи из положаја $ABCD$ . . . . у положај $A'B'C'D'$ . . . . . Из тога сљедује, да се може свагда кретно тело, да премести из једног његовог положаја у други, средством напредног кретања и обр-

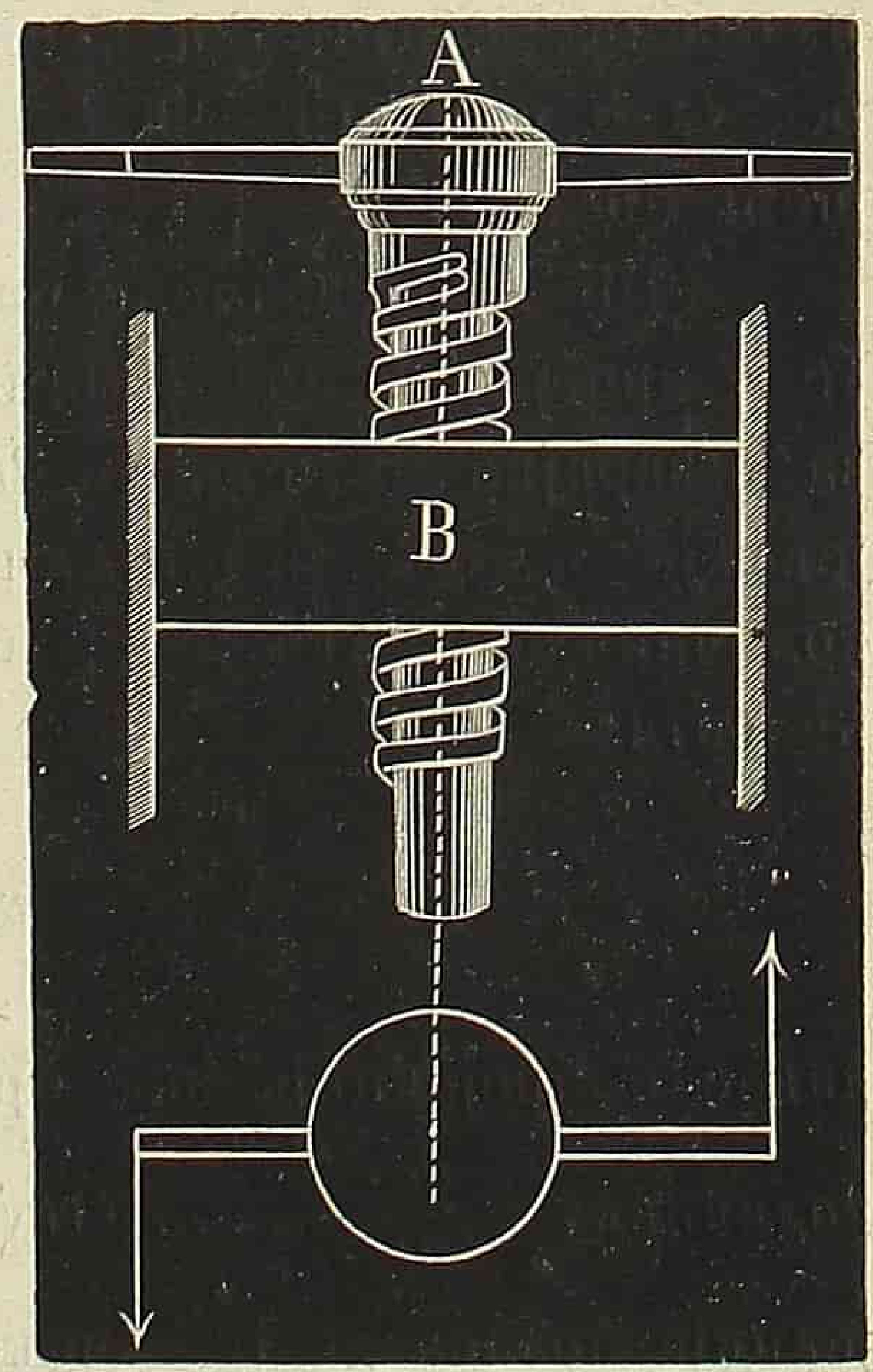


Сл. 60.

тања око неке осе, равноодстојне са напредним кретањем; што смо имали доказати.

113. Сматрајмо сада елементно кретање тела. — По напред реченом знамо, да се тело може преместити из свог положаја, који заузима у почетку овог елементног кретања у положај, који би на крају истог кретања заузимало средством безкрајно малог напредног кретања и безкрајно малог обртања, око осе равноодстојне са напредним кретањем. — Но ова два безкрајно мала кретања несастављају елементно кретање тела, јер ми знамо, да код елементног кретања, свака тачка прође само један елеменат свога пута, и овај је елеменат права пруга, напротив у сљед горепоменута два кретања, свака тачка прелазећи из једног положаја у други, пролази изломљену пругу, образовану од два правопружна, један на други управна елемента. — Испитајмо дакле, каковим кретањем можемо заменути напред поменуто напредно кретање и обртање, па да добијемо таково елементно кретање тела, какво у самој ствари треба да је.

114. Кад сматрамо неки шраф *A*, који пролази кроз своју сталну матрицу *B* (Сл. 61) онда видимо, да свака тачка шрафа, описује шрафну пругу (завојницу). Ове разне шрафне пруге, као путови разни тачака шрафа, означене су на површини ваљка, који има исту осу, коју и шраф, и за један обрт шрафа, његова је висина (корак) као и ваљка једна иста. Оваково кретање, зове се шрафно кретање (monvement héliçoïdal). За један елеменат кретања шрафа, свака његова тачка опише право - пружни елеменат свога шрафног пута. Но лако је схватити, да се шраф може преместити из положаја, који зау-



Сл. 61.

зима у почетку овог елементног кретања, у положај, који би на крају истог кретања заузимао, давши му најпре безкрајно мало напредовање по правцу осе, а затим безкрајно мало обртање око ове осе. — Отуда можемо извести, да кретање неког тела, које се састоји у безкрајно малом напредовању, и безкрајно малом обртању око осе равноодстојне са напредовањем, може се уподобити безкрајно малом шрафном кретању; Дакле свако елементно кретање тела, које се ма како у простору креће, може се сматрати као шрафно кретање.

115. Кад се неки шраф креће у својој матрици, може се узети, а и узима се, као да се налази у двојаком једновременом кретању, т. ј. да клиза по дужини своје осе, а у исто време, да се обрће око ове осе. — Тако исто може се сматрати елементно кретање неког тела, као да се састоји из два једновремена кретања, из обртања око извесне осе, и клизања дуж ове осе.

Ова оса, око које се тело у свом елементном кретању, обрће и по дужини које клиза, мења у опште у сваком тренутку свој положај у простору, због тога се она зове тренутна оса обртања и клизања тела (неки је зову централна оса (axe central), (l'axe instantané de rotation et de glissement du solide).

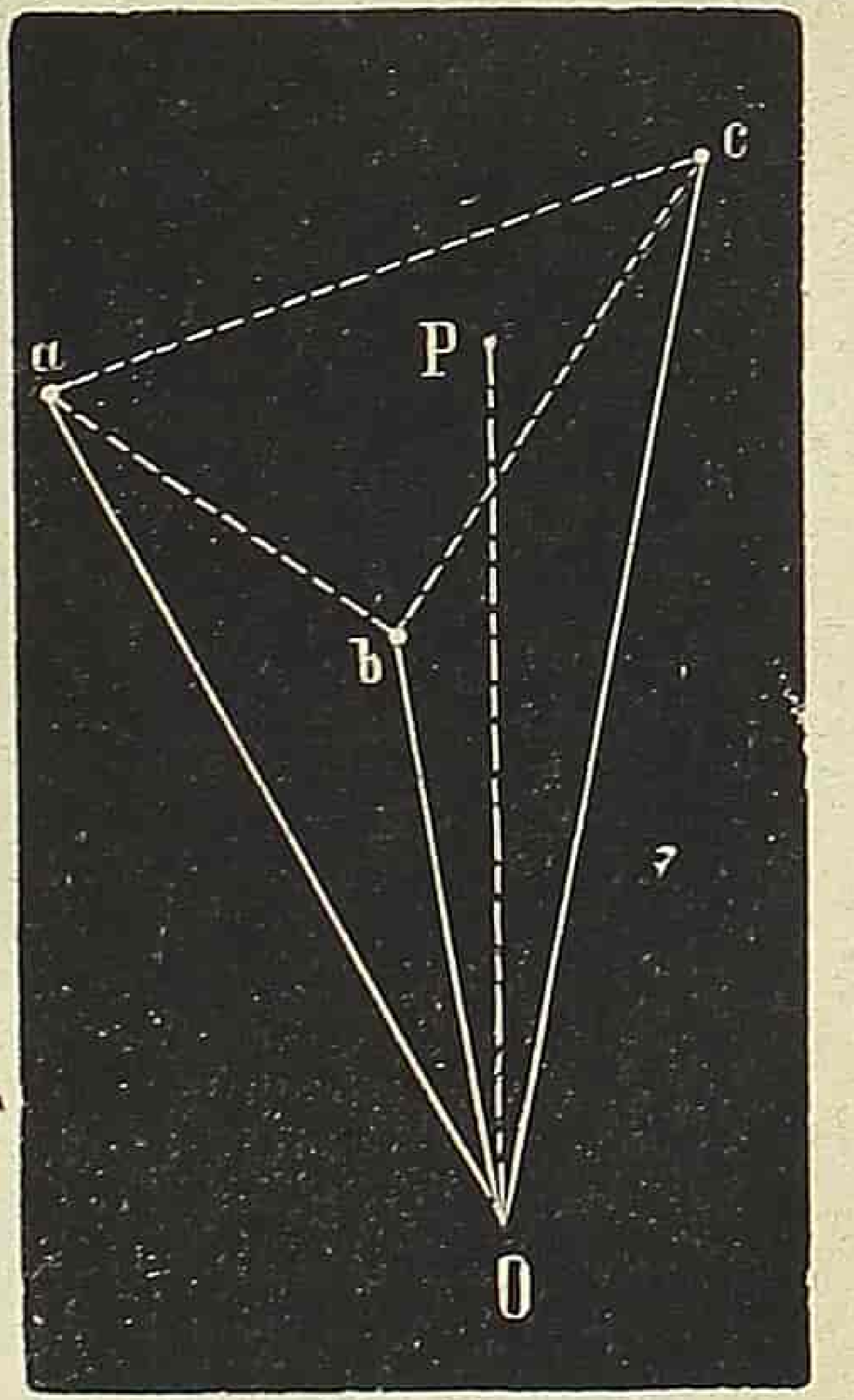
116. Ако означимо са ds безкрајно мали пут, који је тело протрчало по дужини тренутне осе обртања и клизања, за безкрајно мало време dt, онда је лако сватити, да су пројекције путова разни тачака тела, на поменуту осу, равне количини ds. Ако је v; брзина ма које тачке тела, онда ће бити:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

дакле и пројекција ове брзине на вопросну осу биће равна количнику $\frac{ds}{dt}$ . . . . . Отуда можемо закључити: да су пројекције брзина свију тачака тела, на тренутну осу обртања и клизања, у ма ком тренутку, једнаке међу собом.

Потоме ако повучемо из неке тачке O у простору, праве пруге, које би једнаке и равноодстојне биле са једновременим брзинама разни тачака тела, онда ће се све крајње тачке ови прави пруга, налазити у једној истој равнини, управној на тренутну осу обртања и клизања, дакле ако спустимо из тачке O управну на ову равнину, онда ће ова управна бити равноодстојна са реченом осом.

Но да би могли определити ову равнину, морамо знати три њене тачке, које се неналазе у једној истој правој пруги, дакле ако повучемо кроз тачку O три праве, $\overline{Oa}$ $\overline{Ob}$ и $\overline{Oc}$ (Сл. 62) једнаке и равноодстојне са једновременим брзинама трију тачака тела A, B и C, но тако да ове брзине небуду равноодстојне са једном истом равнином, онда ћемо имати три тачке a, b и c, које нам опредељују положај равнине управне на тренутну осу обртања и клизања. Управна $\overline{OP}$ на ову равнину, равноодстојна је са реченом осом.



Сл. 62.

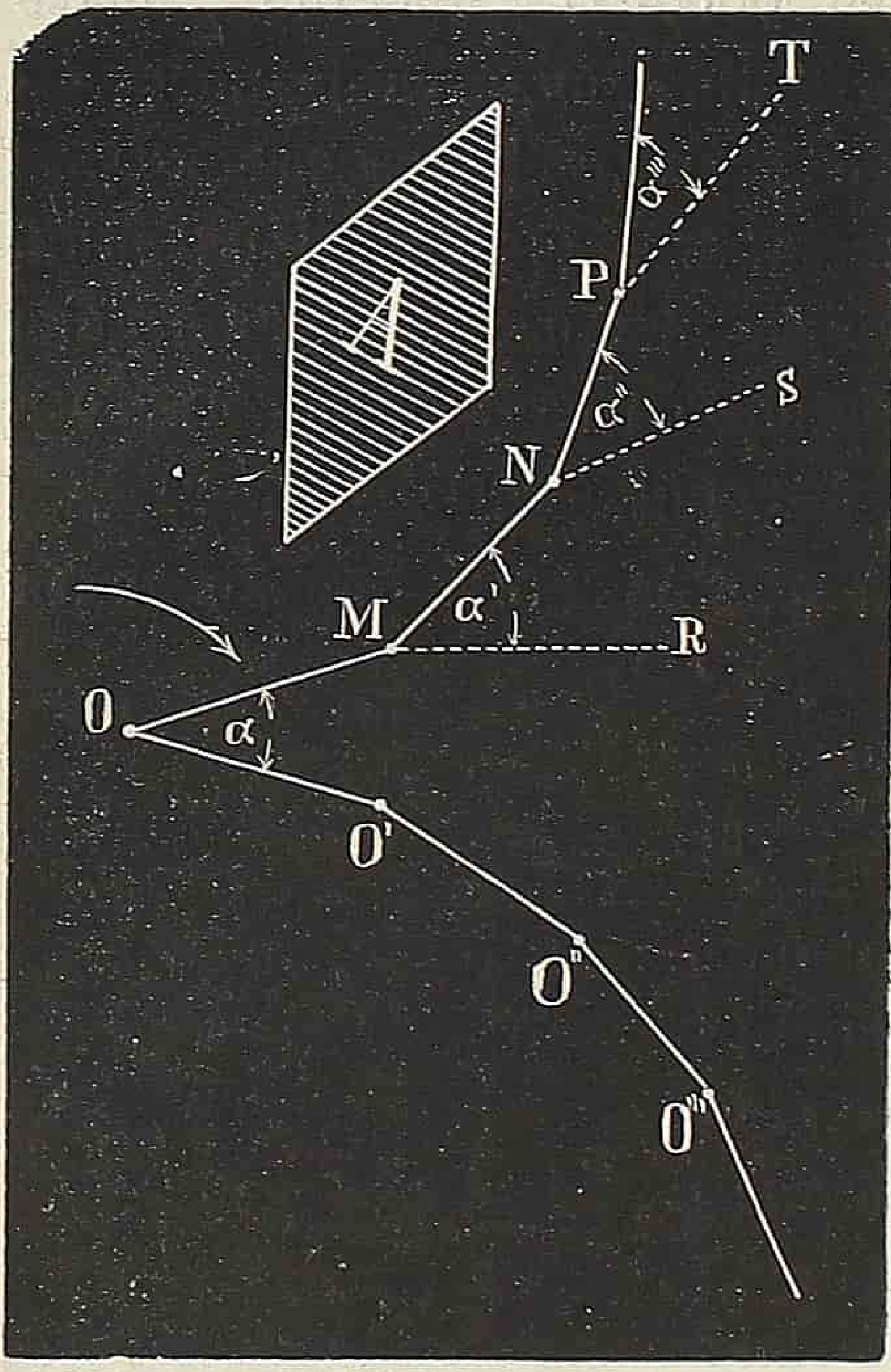
117. Пошто смо се у опште упознали са елементним кретањима тела, испитајмо сада његова непрекидна (континуална) кретања. Пре свега сматрајмо:

Непрекидно кретање неке слике у равнини.

(mouvement continu d'une figure plane dans son plan.)

Да би себи јасно представили непрекидно кретање неке слике у својој равнини, ми ћемо најпре сматрати сљедећи случај.

118. Узмимо да се нека кретна слика A (Сл. 63.) обрће за извесно време, најпре око тачке O, и то за уго α; за-



Слика 63.

тим око тачке O' за уго α', око O'' за уго α'', и т. д. Сматрајмо слику у тренутку, у коме се она почиње обртати око O, и повуцимо кроз ову тачку праву $\overline{OM}$, једнаке дужине са правом $\overline{OO'}$ и да образује са истом уго α. Повуцимо даље кроз M праву $\overline{MR}$ тако да уго OMR, буде раван углу $OO'O''$, а затим под углом α' повуцимо праву $\overline{MN}$ једнаке дужине са правом $O'O''$. Конструирајмо тако исто, уго $MNS =$ углу $O'O''O'''$, а праву $\overline{NP} =$ правој $\overline{O''O'''}$ и закључујући уго α'' са $\overline{NS}$, итд. — Ако сад кажемо, да је слика A чврсто сајужена са полигоналном пругом $OMNP$ .... онда је лако схватити, да ће се тачка M сложити са тачком O', а права $\overline{OM}$ са правом $\overline{OO'}$, кад се слика A буде обрнула око O за уго α. Тако исто права $\overline{MN}$ сложиће се са правом $\overline{O'O''}$ кад се слика буде обрнула око O' за уго α' и т. д. Отуда сљедује, да за време кретања слика A по напред постављеним условима, полигон $OMNP$ ..... котрљаће се по полигону $OO'O''O'''$ ..... Ако сад обратно узмемо, да се полигон $OMNP$ .... котрља по полигону $OO'O''O'''$ .... онда слика A чврсто сајужена са првим полигоном, кретаће се онако исто као што напред условисмо.

Предпоставимо сада да се слика A ма како у својој равнини креће

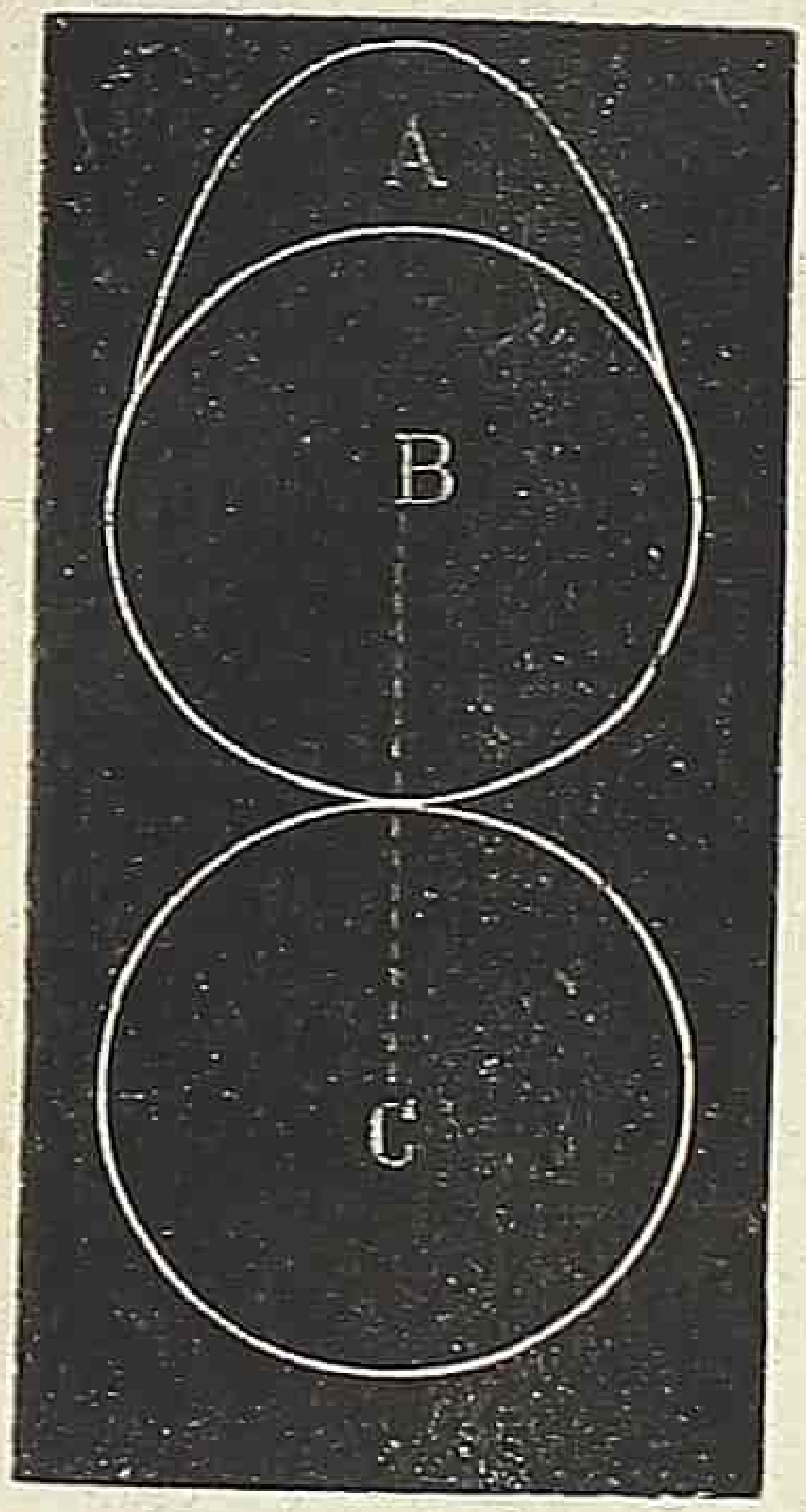
Сматрајмо дужине $\overline{OO'}$, $\overline{O'O''}$ ..... као безкрајно мале, вопросна слика, обртаће се као што је познато, за сваки елеменат времена, око тренутног средишта. — Ово тренутно средиште обртања, заузимаће у опште разне положаје у равнини, у разним једно за друго сљедећим тренутцима, осим тога, оно ће се такође постепено слагати са извесним тачкама, које би чврсто са кретном сликом сајужене биле. — Ако сада определимо 1° пругу, која сајужава све постепене положаје тренутног средишта обртања, (т. је: геометричко место постепени положаја овог тренутног средишта обртања). 2°. Пругу свију тачака, које су са кретном сликом чврсто сајужене, и које се постепено слажу са тренутним средиштем обртања, онда је лако видети, да се вопросно кретање слике, може произвести котрљањем ове последње пруге, са којом је слика чврсто сајужена, по првој пруги т. је: по пруги, која сајужава разне положаје тренутног средишта обртања.

За боље објаснење горереченог види пример № 108, Сл. 53.

Непрекидно кретање неког тела, које се равноодстојно креће са неком сталном равнином.

119. Из непрекидног кретања неке слике у својој равнини, можемо одма дознати непрекидно кретање тела, које се равноодстојно са неком равнином креће. И заиста, код оваковог кретања тела, одстојања сваке његове тачке од сталне равнине остају стална, потоме довољио је да знамо у сваком тренутку, положај пројекције тела на ову сталну равнину. Но ова пројекција остаје немењлива, можемо је дакле сматрати као кретање неке слике у својој равнини. Почем је то тако, лако је дознати, да тренутна оса обртања, мењајући при кретању тела, од једног тренутка до другог свој положај, описује један некретан ваљак у простору, но у исто време, она описује у самом кретном телу други ваљак, који можемо узети, као да се котрља по првом ваљку, повлачећи у свом котрљању и тело, са којим је чврсто сајужен. Дакле кад се неко тело креће, за извесно неко крајно време, равноодстојно са неком сталном равнином, онда се ово кретање може произвести котрљањем — без клизања — неке ваљчасте површине, чврсто сајужене са телом, по другој ваљ-

частој површини, која је геометричко место тренутне осе обртања. —



Сл. 64.

Да би то што рекосмо, јошт јасније представили, узмимо да је неко тело *A* чврсто сајужено са површином ваљка *B* ма какве основице, који се котрља — без клизања — по површини сталног ваљка *C*, (Сл. 64.) кога су правопружне производнице равноодстојне са производницама првог ваљка. — Свака тачка тела *A* у свом кретању описује криву пругу, и равнина ове криве пруге, управна је на производнице оба ваљка. — Тачке на површини ваљка *B*, описују криве пруге, које се зову епициклоиде, кад су основице — оба ваљка крузи[1]. Ако би кретни ваљак био круг, а ваљак *C* замењен би био равнином, онда крива пруга описана ма којом тачком периферије кретног круга, зове се као што је из аналитичне геометрије познато, циклоида.

Напоследку ако би ваљак *B* био замењен равнином, онда је крива пруга, коју ма која тачка ове кретне равнине описује, развијени управни пресек сталног ваљка *C*. Сва напред поменута кретања тела, зову се у опште епициклоидна кретања, или ваљчана котрљања. (mouvement épicycloïdal plan ou roulement cylindrique.) —

120. Ма какве биле основице ваљака, можемо лако изнаћи за датп тренутак, отношења, која постоје између брзина разни тачака кретног тела. И заиста, ако зименимо ваљке са уписаним призмама од безбројно млого мали и међу собом једнаки страна, онда криве пруге, описане тачкама тела, за безкрајно мало време, јесу луци кругова, којих су равнине управне на заједничку ивицу призама, и којих се средишта налазе у овој ивици, сем тога, брзине разни тачата тела,

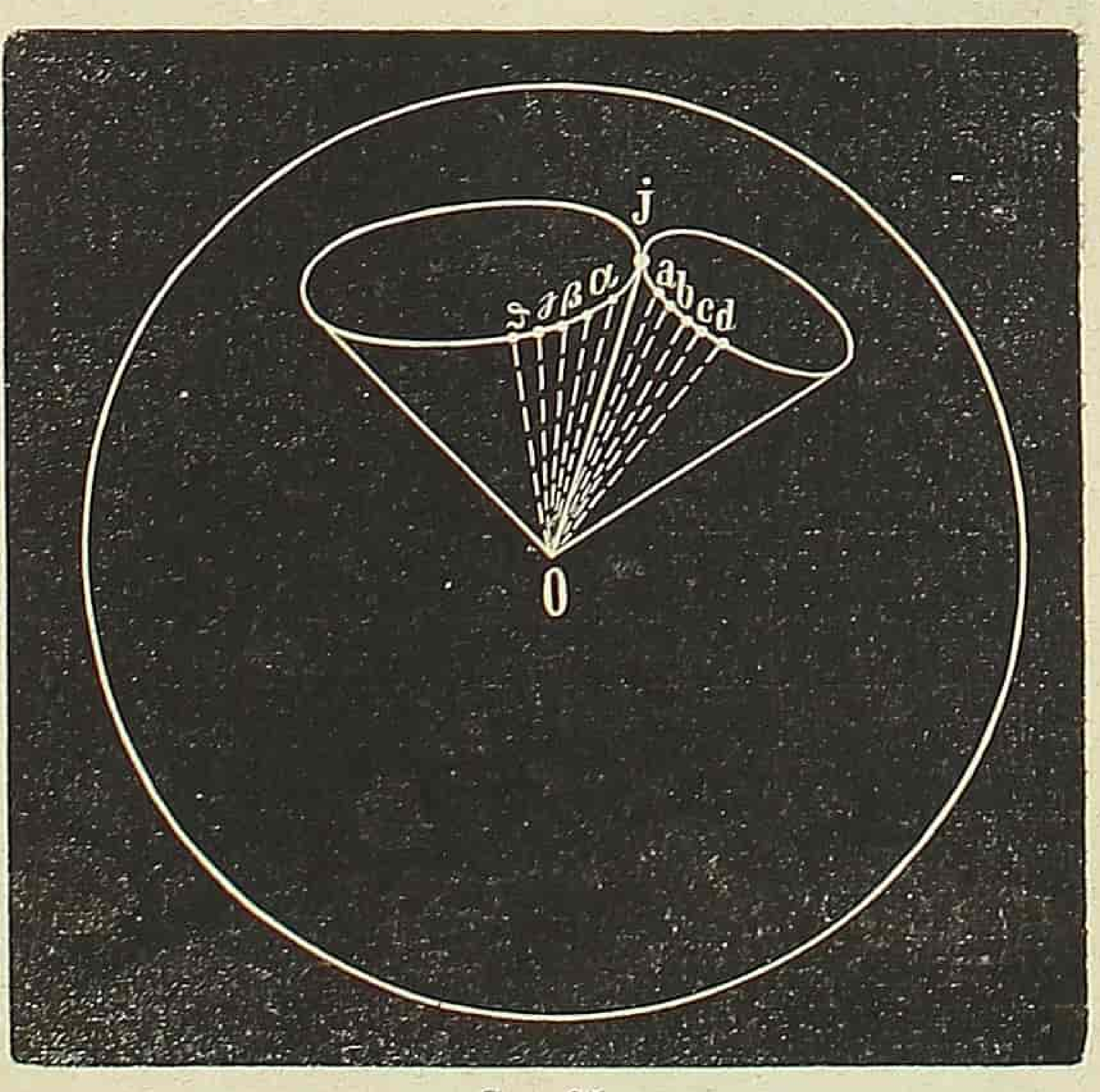
---

[1] Епициклоиде или су спољне или унутарње, потоме како се кретни ваљак буде котрљао по спољној или по унутарњој страни сталног ваљка. Ове последње, зову се јошт и хипоциклоиде.

сразмерне су одстојањима ових тачака од речене заједничке ивице. Ова два својства независе ни најмање од величине, или боље ширине страна призама, сљедствено вреде и за граничну вредност, којој се призме умањавањем страна приближавају т. је: и за ваљке. Дакле ири епициклоидном кретању, правци и отношења брзина у сваком тренутку, јесу иста, као кад би производница додира оба ваљка, била стална за вопросни тренутак. —

Непрекидно кретање неког тела, кога једна тачка остаје некретна.

121. Ми смо дознали, да је елементно кретање тела, око неке некретне тачке, обртање истог тела, око тренутне осе, која пролази кроз некретну тачку. Но као што ова тренутна оса, заузима разне положаје у простору при кретању тела, а међутим пролази непрестано кроз некретну тачку, то она описује у простору неку коничну површину, које је врх некретна тачка. У исто време лако је видети, да ова тренутна оса обртања, може описати у самом телу такође само коничну површину истог врха. —

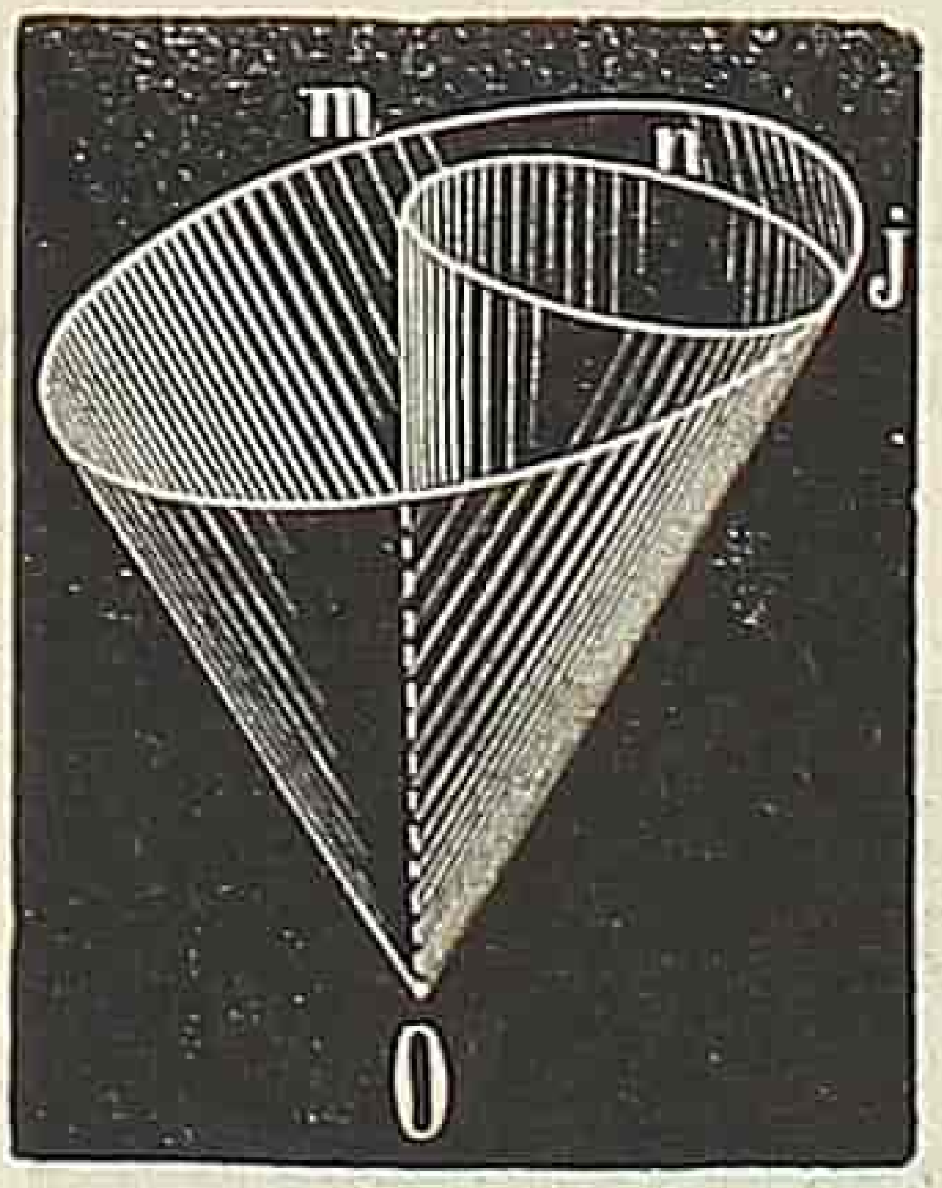


Сл. 65.

Нека је O овај заједнички врх, а $\overline{OJ}$ један положај тренутне осе (Сл. 65.) — Представимо себи, да смо из O као средишта а са полупречником $\overline{OJ}$ раван јединици, описали једну сферу, која пресеца две речене коничне површине по двема кривим пругама, које служе као основице ови површина. Од ове две криве пруге, прва (m) стална је у простору, а друга

(n) утврђена је у телу, и сљедствено креће се с њиме у простору.

Поделимо време t, за које се тело креће, на безбројно мале једнаке елементе dt, и означимо на сталној пруги (m) положаје α, β, γ . . . . у којима се пол J налази, на крају сваког елементног времена dt. — Нека су $\overset{\frown}{Ja}$, $\overset{\frown}{ab}$, $\overset{\frown}{bc}$ . . . . луци на другој кривој пруги (n), који су једнаки са одговарајућим луцима пруге (m). Очевидно је да у првом тренутку, кад се тело обрће око $\overline{JO}$, његова тачка a сложиће се са тачком α у простору, да у сљедујућем тренутку, тело обртајући се око $\overline{O\alpha}$, његова тачка b пасће на тачку β у простору и т. д. од једног тренутка до другог. Из тога сљедује: да две вопросне криве пруге, па сљедствено и две коничне површине, узајмно се додирају, и као што су луци $\overset{\frown}{Ja}$, и $\overset{\frown}{J\alpha}$ једнаки међу собом, тако исто као и луци $\overset{\frown}{ab}$ и $\overset{\frown}{\alpha\beta}$, $\overset{\frown}{bc}$ и $\overset{\frown}{\beta\gamma}$ . . . . . то се може рећи: Да се свако непрекидно кретање неког тела, око неке сталне тачке, може произвести котрљањем без клизања неког кретног, са телом чврсто сајуженог конуса, по другом сталном конусу. Оба ова конуса имајући некретну тачку за заједнички врх.[1]



Сл. 66.

Може се десити, да се кретни конус котрља по унутарњој страни сталог конуса у простору, као што ова слика (66.) показује.

Овде још имамо само то додати, да свака тачка тела, налази се на површини једне сфере, и ако би се налазила на површини кретног конуса, онда она описује криву пругу, која се зове сферна епициклоида, и то кад су основице конуса, крузи. — При овом кретању као и у случају ваљчаног котрљања, брзине у једном истом тренутку, јесу све равноодстојне са једном истом равнином, која је управна на тренутну осу обртања, а брзине тачака налазећи се у једној

---

[1] Ово правило поставио је први Poinsot.

истој равнини, која пролази кроз тренутну осу обртања, јесу управне на ову равнину. —

Непрекидно кретање тела, које се ма како у простору креће.

122. Ако сматрамо тренутну осу обртања и клизања тела, за сваки елеменат времена, онда је лако видити, да скуп свију положаја, које ова оса постепено заузима у простору, образује једну правилну витоперну површину, а скуп свију положаја, које иста оса постепено заузима у самом телу, образује другу правилну витоперну површину. Потоме непрекидно кретање тела, можемо сматрати као да је произведено котрљањем ове површине, са којом је тело чврсто сајужено, по првој површини, и једновременим клизањем по дужини производнице, у којој се ове две површине додирају.

И то је све, што смо у опште имали рећи, о кретању једног тела.

Слагање једновремени кретања неког чврстог тела.

123. Ми смо досад испитивали разна проста кретања чврстог тела, и видили смо, да се сва ова проста кретања за неко безкрајно мало време своде: или на напредно кретање, или на обртање, или на последку на кретање, које је подобно шрафном кретању. Даље смо видили, како можемо себи представити непрекидна (континуална) кретања, која се састоје из постепени ови елементни кретања. — Остаје нам сада да испитамокако се слажу једновремена кретања чврсти тела. —

Пре свега потребно је да определимо, шта се разуме под слагањем кретања тела.

124. Рецимо да смо кретање неког тела однели на три ма које координатне осе. Положај тела у сваком тренутку определићемо као што је познато његовим координатама у смотрењу ових оса. — Но ако би се и саме осе кретале, онда знамо да се кретање тела у односу ови кретни оса, зове релативно или привидно кретање, које се разликује

од његовог абсолутног кретања у простору. Потоме може се казати, као да се тело налази у двојаком једновременом кретању, од којих једно је релативно, као што напред рекосмо, а друго је тако звано привлачно кретање т. је: оно, које би тело имало, кад би чврсто са кретним осама сајужено било. Лако је сад схватити, да прави, или као што се обично каже абсолутни положај тела, после ма ког времена кретања, можемо определити, ако за то време сматрамо само кретање оса, предпостављајући да тело заузима један исти положај према тим осама, затим предпоставимо да су осе некретне, а да се тело за исто време тако креће, како ће на крају овог времена заузети свој релативни положај, у ком се мора налазити. — Могло би се и обратно урадити, т. је: узети да се најпре тело за вопросно време креће, сматрајући осе као некретне, затим сматрати кретање, које осе морају за исто време имати, остављајући тело у истом релативном положају.

Ако би напред поменута два кретања тела позната била, онда можемо конструктивно определити абсолутну брзину ма које његове тачке, јер знамо, да је ова брзина по правцу и величини, диагонала паралелограма, кога су стране, позната релативна и привлачна брзина. — Но у место што би тим начином определавали брзину, за сваку тачку тела посебно, млого ће простије бити, ако определимо абсолутно његово кретање, т. је: таково, по коме би свака од његови тачака, управо имала ону брзину, коју би засебно определили. Ако би хтели из познате абсолутне и привлачне брзине да определимо релативну брзину тела, задатак остаје сасвим исти, јер релативна брзина једне тачке, добија се, слагајући абсолутну брзину са брзином, која би равна и противположена била привлачној брзини. Дакле, релативно кретање тела определићемо, ако сложимо његово абсолутно кретање са кретањем, које би равно и противположено било привлачном кретању. — Ми ћемо сада да испитамо, како се слажу ова једновремена кретања тела, у сваком могућем случају. —

Ради тога, ми ћемо најпре испитати, како се слажу једновремена елементна кретања, па кад то будемо дознали, онда ћемо моћи лако отуда извести слагање једновремени непрекидни (континуални) кретања, па ма какве природе ова била.

Слагање једновремени елементни кретања тела.

I. Слагање и разлагање напредни кретања.

125. Ако се неко тело налази у двојаком елементном напредовању, онда ће се свака његова тачка кретати по дијагонали паралелограма, кога су стране, безкрајно мали путови протрчани тачком, у сљед сваког од ова два елементна кретања. Но сви овако конструисани паралелограми, за разне тачке тела, имају одговарајуће стране једнаке и равноодстојне, дакле ће и њиове диагонале бити једнаке и равноодстојне. Из тога сљедује, да ће резултирајуће кретање тела, добивено слагањем ови композантни кретања, бити такође напредно кретање, а брзина његова биће по правцу и величини представљена диагоналол паралелограма, кога су стране, брзине композантни кретања.

Ово правило вреди ма какав био број напредни кретања, која имамо сложити, и у место паралелограма, имаћемо полигон брзина, дакле сва напредна кретања могу се заменути само једним. —

Обратно неко напредно кретање, можемо разложити на три друга, равноодстојна са трима ортогоналним или косим осама.

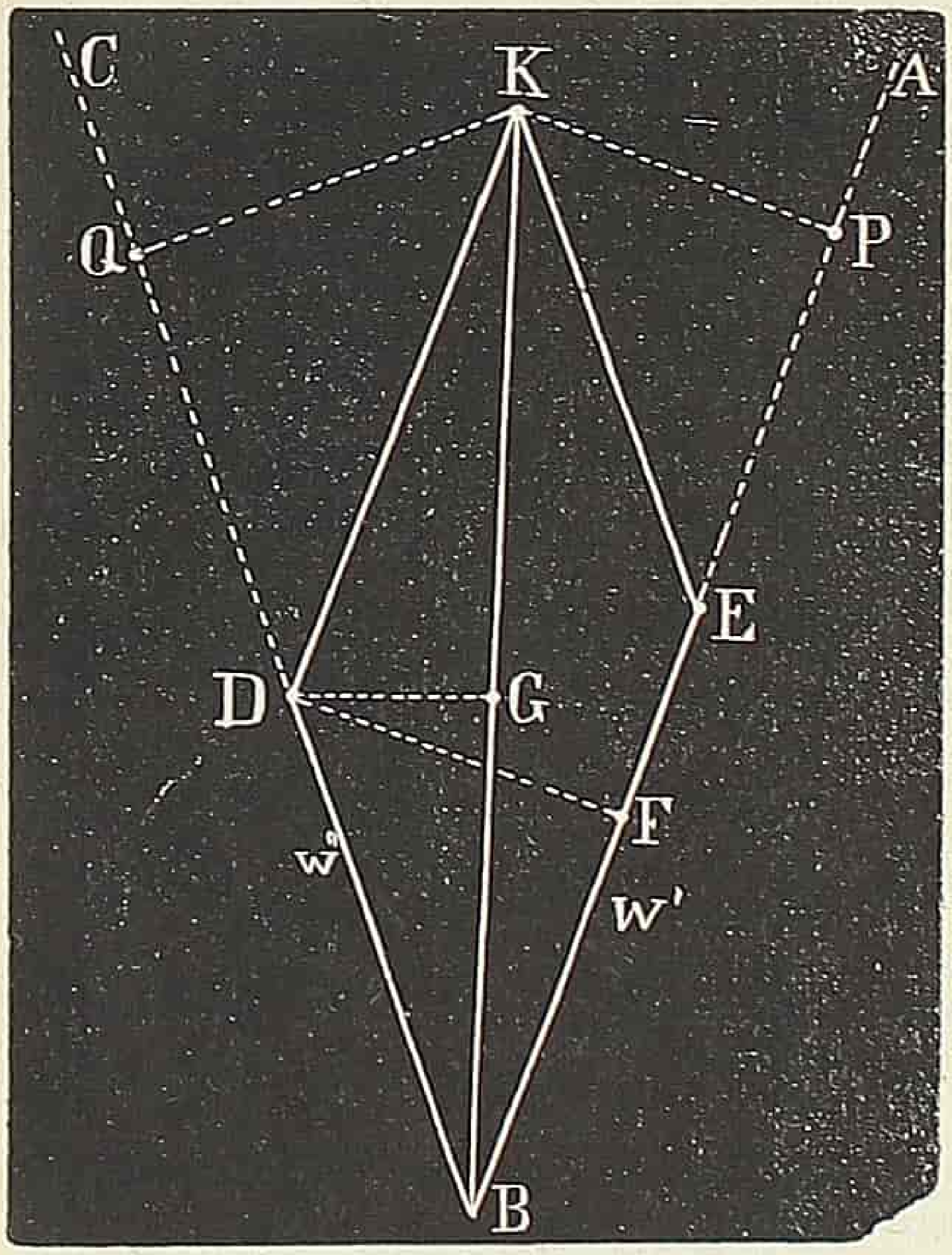
Тако исто ако би имали да сложимо три напредна кретања, којих брзине неби се налазиле у једној истој равнини, онда у место полигона добићемо паралелипипед брзина. У кратко, сва правила, која смо дознали за слагање и разлагање кретања једне тачке, вреде и за слагање и разлагање напредни кретања тела.

Слагање и разлагање обртања.

126. Рецимо сада да у место напредног релативног и привлачног кретања, имамо релативно и привлачно обртање, и испитајмо како се овакова два кретања, могу једним заменути.

Узмимо најпре да се осе, како релативног тако и привлачног обртања, налазе у једној истој равнини.

Слагање два обртања, којих се осе пресецају у једној тачки



Сл. 67.

127. Представимо себи, да се неко тело налази у двојаком једновременом елементном обртању око две осе $\overline{AB}$, и $\overline{CB}$, које се у тачки B пресецају, (Сл. 67.) т. је: да се тело обрће око осе $\overline{AB}$, са угловном брзином w', а међутим осе $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$ са неком трећом правом, управном у B на равнину ABC, служе као систем сравнивања, који се и сам око осе $\overline{CB}$, са угловном брзином w'' обрће.

Да би сада ова два обртања сложили, или што исто значи, да би определили абсолутно обртање тела, имамо пре свега приметити, да тачка B, која се може узети кав чврсто сајужена са кретним телом, нема никакву брзину, потоме вопросно сложено кретање биће обртање око осе, која пролази кроз ову тачку B (види № 111). — Да би определили правац ове осе, треба да изнађемо још једну тачку, које је брзина 0 (нула).

Ради тога узмимо на правим пругама $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$, почевши од тачке B, дужине $\overline{BE}$ и $\overline{BD}$, но тако да ове буду сразмерне угловним брзинама w' и w''. — Сем тога, представимо себи, да постављајући се у B, и гледајући час на $\overline{BE}$, час на $\overline{BD}$, видимо да су горе­речена обртања таквог правца, као што су сказаљке на каквом саату. —

Пошто је то тако, ако конструишемо над правима $\overline{BE}$ и $\overline{BD}$ паралелограм $BEKD$, онда можемо лако дознати, да је диагонала $\overline{BK}$ овог паралелограма, тражена оса резултирајућег обртања, и заиста:

Тачка K у сљед обртања око $\overline{AB}$ за време dt; налазила би се над равнином ABC за $w'\overline{KP}dt$, а у сљед обртања око $\overline{CB}$, а за исто време, налазила би се изпод равнине ABC за $w''\overline{KQ}dt$. Но триугли KPE и KDQ јесу подобни, и због тога $\frac{KP}{KQ} = \frac{\overline{KE}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{BD}}{BE} = \frac{w''}{w'}$ отуда

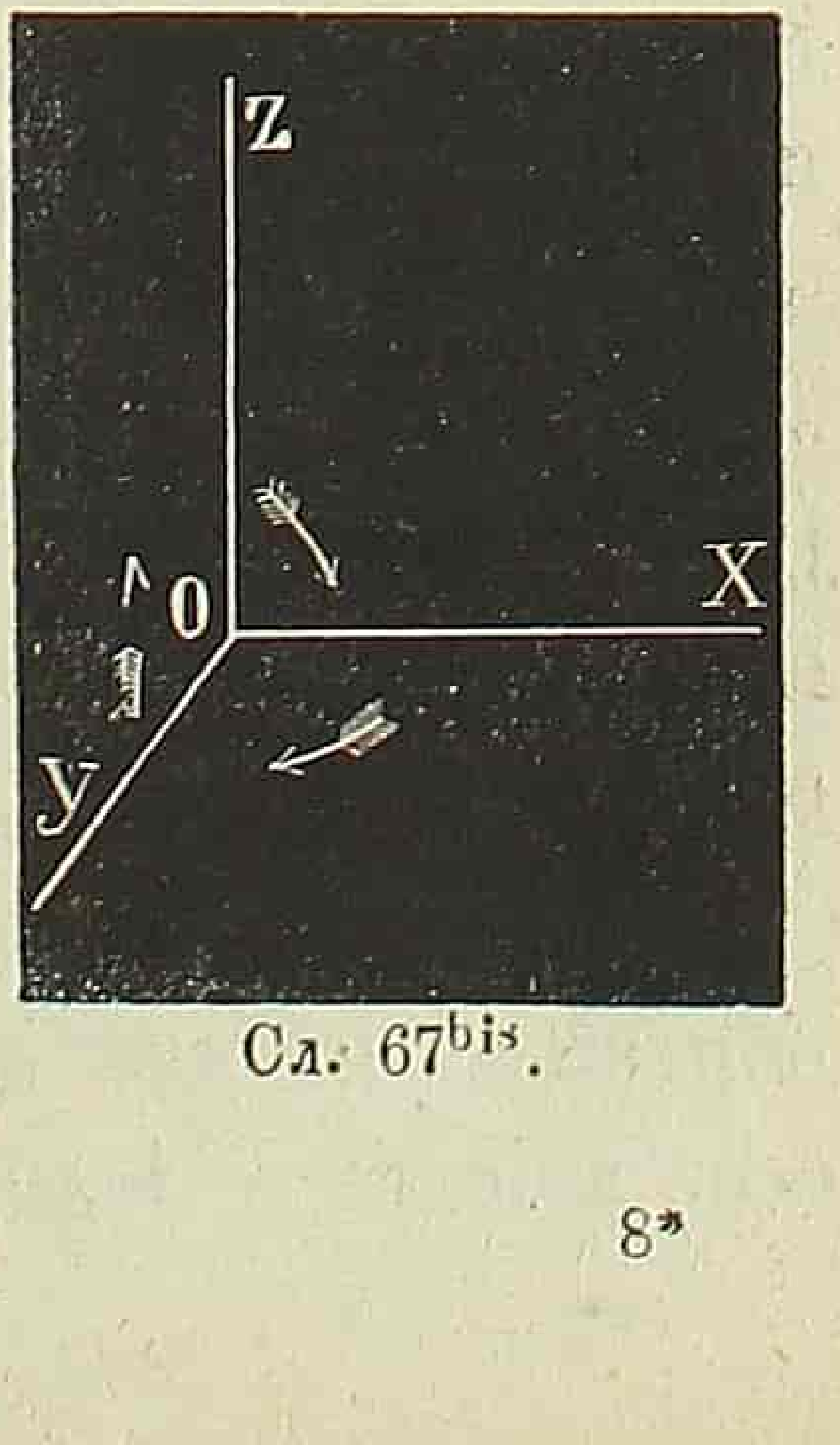
$$w'\overline{KP} = w''\overline{KQ}.$$

Што ће рећи да су једновремена обртања тачке K, једнака међу свбом, и као што су оба управљена управно на равнину ABC и у противном правцу, то тачка K остаје стална за

Геометричка представа обртања.

Да би какво обртање подпуно опредељено било, треба да је позната оса, око које обртање бива, угловна брзина w, и напоследску правац обртања. — Угловна брзина представља се често у механики извесном дужином по повољној некој размери, и ова дужина пренешена је по правцу осе тако, да једна проста права пруга н. пр. $\overline{OP}$ представља у исто време и осу и величину (брзину) обртања. — Ова иста права пруга, може означавати јошт и правац обртања, ако условимо, да кад се поставимо у крајњу тачку P. O———P, сматрану као север, па управимо свој поглед на тачку O, сматрану као подне, онда видимо, да обртање бива од лева на десно, као што се нам кретање сунца чини. — Овај је правац исти, који видимо при кретању сказаљака какивог часовника; при завртању каквог шрафа и т. д.

По овом услову, ако би сматрали три ортогоналне кординатне осе, као осе обртања, онда обртање око $\overline{OZ}$ биће управљено од $\overline{OX}$ према $\overline{OY}$ и т. д. као што је стрелицама означено. Сл. 67^{bis}.



Сл. 67^{bis}.

(Овај правац обртања, зове се у астрономији пра́во — директно — обртање).

сво време dt. Из тога сљедује, да је права $\overline{BK}$, оса елементног резултирајућег обртања тела.

Да би определили угловну брзину овог резултирајућег обртања, имамо приметити, да ће тачка D, налазећи се на оси $\overline{CB}$ и обртајући се око $\overline{AB}$, учинити за време dt, пут $w'\overline{DF}dt$. Но ако сматрамо да је тачка D, учинила овај пут у сљед резултирајућег обртања око осе $\overline{BK}$, онда је његова вредност $w\overline{DG}dt$, потоме мора бити:

$$w'\overline{DF}dt = w\overline{DG}\,.\,dt \qquad \text{одкуда}$$

$$\frac{w}{w'} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DG}}$$

Но почем су триугли BEK и BDK једнаки, то су и њиове двогубе површине једнаке т. ј.

$$\overline{BE}\,.\,\overline{FD} = \overline{BK}\,.\,\overline{DG} \qquad \text{отуда}$$

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{BE}} \qquad \text{сљедствено}$$

$$\frac{w}{w'} = \frac{\overline{BK}}{\overline{BE}}.$$

Отуда сљедује, да ако би композантне угловне брзине w' и w'' биле представљене правим пругама $\overline{BE}$, и $\overline{BD}$, којима су сразмерне, а у исто време ове пруге представљају и правце оса обртања, као и правце сами обртања, онда ће диагонала $\overline{BK}$ паралелограма $BEKD$, представљати осу резултирајућег обртања, а тако исто и величину резултирајуће угловне брзине, или краће резултанту w; правац пак овог резултирајућег обртања биће исти, као и композантни обртања. —

Ова конструкција, којом опредељујемо резултирајуће обртање, из два једновремена обртања неког тела око две осе, које се у једној тачки пресецају, зове се паралелограм обртања, (parallélogramme des rotations) и као што је конструкција овог паралелограма сасвим подобна паралелограму брзина, то можемо поставити ово:

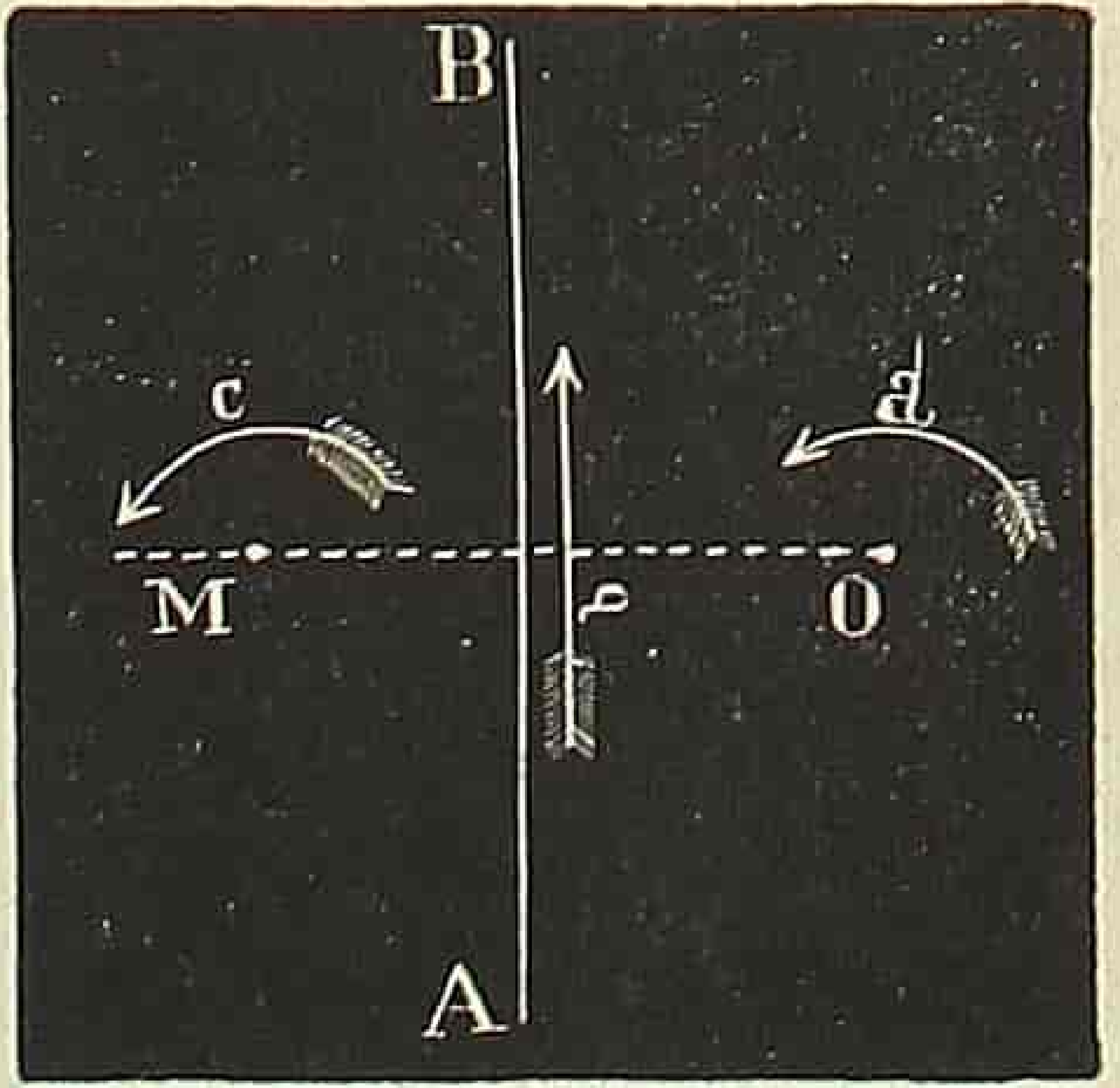
Правило. Кад год се има да сложе више једновремени елеметни обртања неког тела око оса, које све пролазе кроз једну исту тачку, онда треба тако исто радити, као кад би се имала да изнађе резултанта од више једновремени брзина неке тачке, т. ј. угловну брзину сваког композантног обртања треба представити по удесној некој размери, правом пругом, и ову праву пругу пренети по одговарајућој оси обртања почињући од тачке пресецања оса. Овако добивене разне праве пруге, сматрати као да су једновремене брзине неке тачке, и конструкцијом полигона брзина, определити њину резултанту. — Ова резултанта означаваће правац осе траженог резултирајућег обртања, а тако исто и величину његове угловне брзине. — Ова конструкција, у овом случају зове се полигон обртања (polygone des rotations).

Ако се осе три композантна обртања не би налазиле у једној истој равнини, онда у место полигона обртања треба употребити конструкцију паралелипипеда брзина, која се у овом случају зове паралелипипед обртања. (parallélipipede des rotations).

Слагање једног напредног са једним обртним кретањем.

128. Сматрајмо неко тело, које се напредно креће, а у исто време обрће око неке осе, управне на правац напредовања. *(то је толико исто као кад би однели обртање тела, на неке координатне осе, које се напредно крећу, да би сагласни били са дефиницијом релат. кратања).*

Нека је O (Сл. 68) пројекција осе, око које се тело у правцу стрелице a, обрће, и нека је $\overline{AB}$ правац напредног кретања, означен стрелицом b. Означимо



Сл. 68.

даље са w, угловну брзину обртања, а са v, брзину напредовања. — Потоме биће wdt уго, за који се тело око осе O у времену dt обрнуло, а vdt биће пут, који је оно за исто време dt учинило у правцу $\overline{AB}$, у сљед напредовања.

Спустимо из O управну на $\overline{AB}$ и узмимо на овој управној такову тачку M, да је:

$$v = w\overline{OM} \ldots\ldots (\alpha)$$

Сад у сљед обртања око O тачка M за време dt протрчаће пут $w\overline{OM}dt$, и то изпод $\overline{OM}$ и управно на ову праву, а усљед напредног кретања, иста тачка M, за исто време dt учиниће пут vdt над правом $\overline{OM}$. — Но као што су ове дне количине због изназа (α) једнаке а противположене, то тачка M остаће некретна. — Отуда можемо одма закључити, да је резултирајуће кретање тела, обртање око осе, која је кроз M равноодстојно са осом O повучена. — Ова права, као што је познато, зове се тренутна оса обртања. —

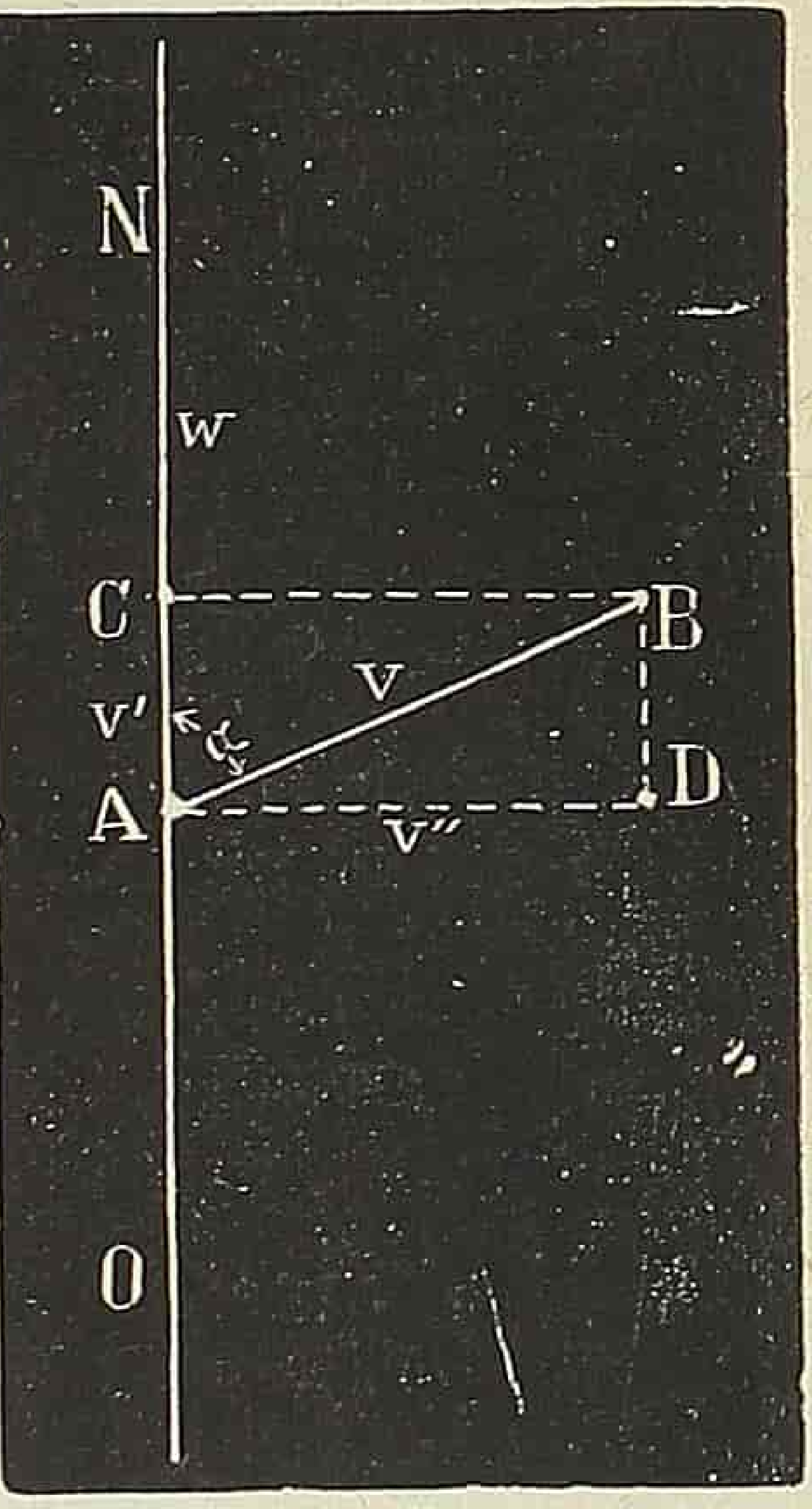
Да би определили угловну брзину резултирајућег обртања, имамо приметити, да тачка O у сљед напредног кретања за време dt пролази пут vdt; а у сљед композантног обртања, остаје некретна. Цео дакле премештај тачке O биће vdt, и ако овај премештај сматрамо, као да је произведен у сљед резултирајућег обртања, онда делећи vdt са $\overline{OM}$, добићемо уго описан за време dt, у сљед овог резул. обртања. — Но

$$\frac{vdt}{\overline{OM}} = wdt.$$

Отуда сљедује, да је угловна брзина резултирајућег обртања равна w. Правац пак овог обртања означен је стрелицом c, т. ј. исти је као и композантног обртања.

129. Ако оса $\overline{ON}$, око које се тело обрће, не би била управна, на правац напредног кретања $\overline{AB}$, (Сл. 69) онда треба ово последње кратање разложити на друга два; $\overline{AC}$, и $\overline{AD}$, тако да је једно равноодстојно, а друго управно на

осу обртања. Затим треба ово последње напредно кретање сложити са обртањем, чиме по горереченом добијамо резултирајуће обртање, око осе равноодстојне са осом композантног обртања, и равно овом обртању.



Сл. 69.

После тога остаје нам јошт обртање и напредно кретање по правцу осе обртања. Но ми знамо, да је оваково кретање тела, подобно шрафном кретању.

Код овог шрафног кретања, ако сматрамо ма коју тачку *B*, која је за r удаљена од тренутне осе обртања и клизања, и ако је u, абсолутна брзина ове тачке, v_1 брзина напредног кретања по оси обртања и клизања, w угловна брзина обртања, онда су v_1 и wr композанте абсолутне брзине u; и као што су ове композанте управне једна на другу, то је њина резултанта $u = \sqrt{v^2_1 + w^2 r^2}$.

Ова резултанта u, налази се у тангенцијалној равнини, повученој кроз тачку *B* на ваљак, који би постао обртањем једне производнице око осе обртања и клизања, и кога је полупречник r.

Лако је сватити, да је резултанта, једна иста за све тачке тела, које се у једнаком одстојању налазе од тренутне осе обртања и клизања, и да се ова резултанта увећава са увећавањем овог одстојања. — Сем тога све тачке тела, које се налазе на самој оси, имају најмању брзину. —

Ако би хтели да определимо висину (корак, — pas) једног обрта напред поменутог привидног шрафа, онда предпостављајући да је кретање једномерно, и означавајући са t употребљено време за један обрт, имаћемо:

$$h = v_1 t = v \cos \alpha t, \text{ и } 2\pi = wt, \text{ одкуда} \ldots\ldots$$

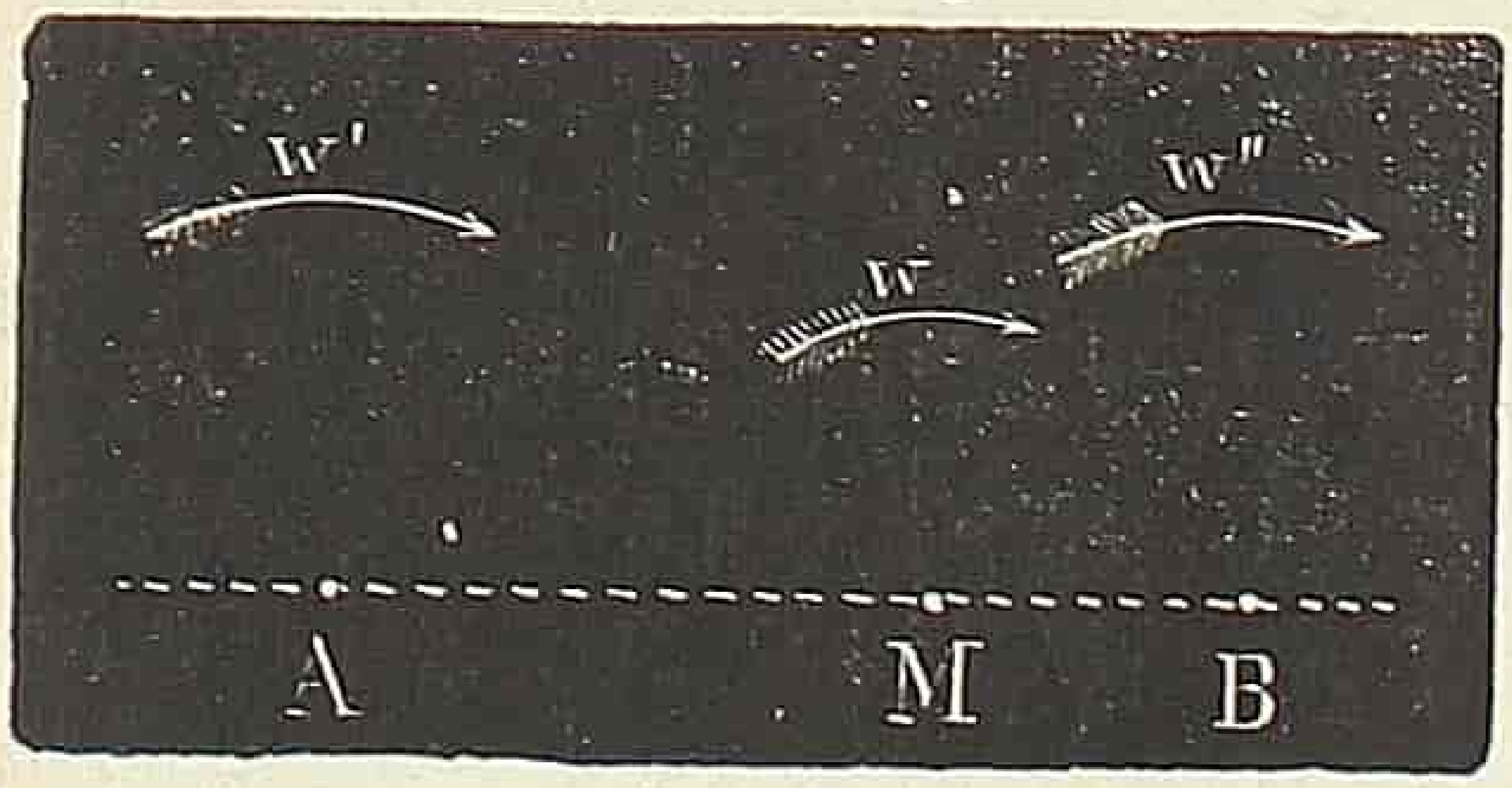
$$h = \frac{2\pi v \cos \alpha}{w}$$

Остаје нам јошт овде приметити што се оваковог кретања тиче, да тачке тела, које се налазе у једном тренутку на тренутној оси обртања, неморају бити у другом тренутку на истој оси. Положај ове тренутне осе у простору, брзине v и w, и одстојање r, једне исте тачке од поменуте осе, у опште менљиве су са временом. (мењају се са временом).

Слагање обртања око равноодстојни оса.

130. Кад се неко тело једновремено обрће око две равноодстојне осе, онда је увиђавно, да се две одговарајуће композантне брзине једне исте тачке, морају налазити у равнини управној на ове осе (№ 109), дакле брзине свију тачака тела, равноодстојне су са овом равнином, потоме резултирајуће кретање тела своди се на обртање, око неке тренутне осе равноодстојне са датим осама. — Овде имамо разликовати два случаја:

I случај. Ако су обртања тела око оса пројектирани у A и B (Сл. 70) једног истог правца, као што је у слики стрелицама a и b означено, и ако су w' и w'' угловне брзине око ових оса, онда су абсолутне брзине свију тачака тела, које се налазе у равнини оса, управне на ову равнину, као и њине композанте. — (Од којих једна је привлачна, а друга релативна брзина). Ове абсолутне брзине равне су нули за све оне тачке тела, налазеће се на правој равноодстојној са осама A и B, која је пројектирана у M и која задовољава услов



Сл. 70.

$$w'\overline{AM} = w''\overline{BM}.$$

И заиста, тачка M у сљед обртања око осе A за време dt; налазила би се изпод $\overline{AB}$ за $w'\overline{AM}dt$, а у сљед обртања око осе B, иста тачка налазила би се над $\overline{AB}$ за $w''\overline{BM}dt$. — Сад почем су ова два једновремена обртања тачке M, због горњег израза једнака и противположена, то је очевидно, да ће она остати некретна. Дакле је у M пројектирана права, заиста тренутна оса обртања.

Да би определили резултирајућу угловну брзину тела око осе M, имамо приметити, да је абсолутна брзина ма које његове тачке удаљење за p од ове осе, резултанта од брзина $w'p'$ и $w''p''$ означавајући са p' и p'' одстојања исте тачке од оса A и B. — Ако сад узмемо да се вопросна тачка налази најпре у A, (гди је њена привлачна брзина нула) а затим у B, (гди је њена релативна брзина нула) и ако означимо са w тражену угловну брзину, имаћемо:

$$w \,.\, \overline{AM} = w'\overline{AB} \qquad \text{и}$$

$$w \,.\, \overline{BM} = w''\overline{AB} \qquad \text{отуда}$$

$$w\,(\overline{AM}) + BM) = \overline{AB}\,(w' + w'') \qquad \text{и}$$

дакле $\quad w = w' + w'' \quad$ због $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{BM}.$

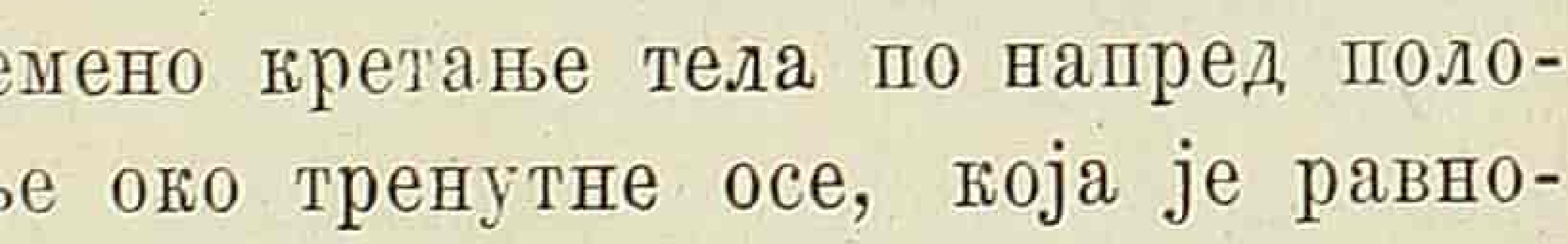
Из свега напред реченог можемо ова закључења извести:

1-во. Да је едновремено кретање тела по напред положеним условима, обртање око тренутне осе, која је равноодстојна са осама композантни обртања, пролази кроз тачку M, и налази се у равнини поменути оса.

2-го. Да ова оса M дели одстојање између дати оса A, и B, на два дела преокренуто сразмерна угловним брзинама w' и w'', и резултирајуће обртање истог је правца као и композантна обртања, и

3-ће. Резултирајућа угловна брзина равна је сбиру композантни угловни брзина.

II случај. Ако су композантна обртања противног правца, као што је означено стрелицама a и b, и ако је $w' > w''$, онда су композанте брзина свију тачака тела, између оса A и B, управљене на ниже, напротив изван ових оса и са стране мање угловне брзине, једна од две композантне брзине над-



Сл. 71.

влађује ону другу, а са стране веће угловне брзине, брзина је равна нули за све тачке тела, које се налазе на оси *M* равноодстојној са осама *A* и *B*, и која задовољава једначину

$$w'\overline{AM} = w''\overline{MB}.$$

По примедби, коју у предходећем случају наведосмо, имамо:

$$w\,.\,\overline{AM} = w''\overline{AB} \qquad \text{и}$$

$$w\overline{MB} = w'\overline{AB} \qquad \text{отуда}$$

$$w\,(\overline{MB} - \overline{AM}) = \overline{AB}\,(w' - w'') \qquad \text{и дакле}$$

$$w = w' - w'' \qquad \text{јер је } \overline{AB} = \overline{MB} - \overline{AM}.$$

Дакле и у овом случају, резултирајуће је кретање тела, обртање око осе *M*, која је равноодстојна са осама *A* и *B* композантни обртања, и која се налази у истој равнини, а изван међу-одстојања ових оса, са стране оног композантног обртања, кога је угловна брзина већа.

Одстојања ове осе *M*, од оса *A* и *B*; стоје у преокренутој сразмери угловни брзина w' и w''. — Ово резултирајуће обртање истог је правца, као и композантно обртање веће угловне срзине, и резултирајућа угловна брзина w, равна је разлики композантни угловни брзина.

Особити случај два равноодстојна једнака и противположена обртања.

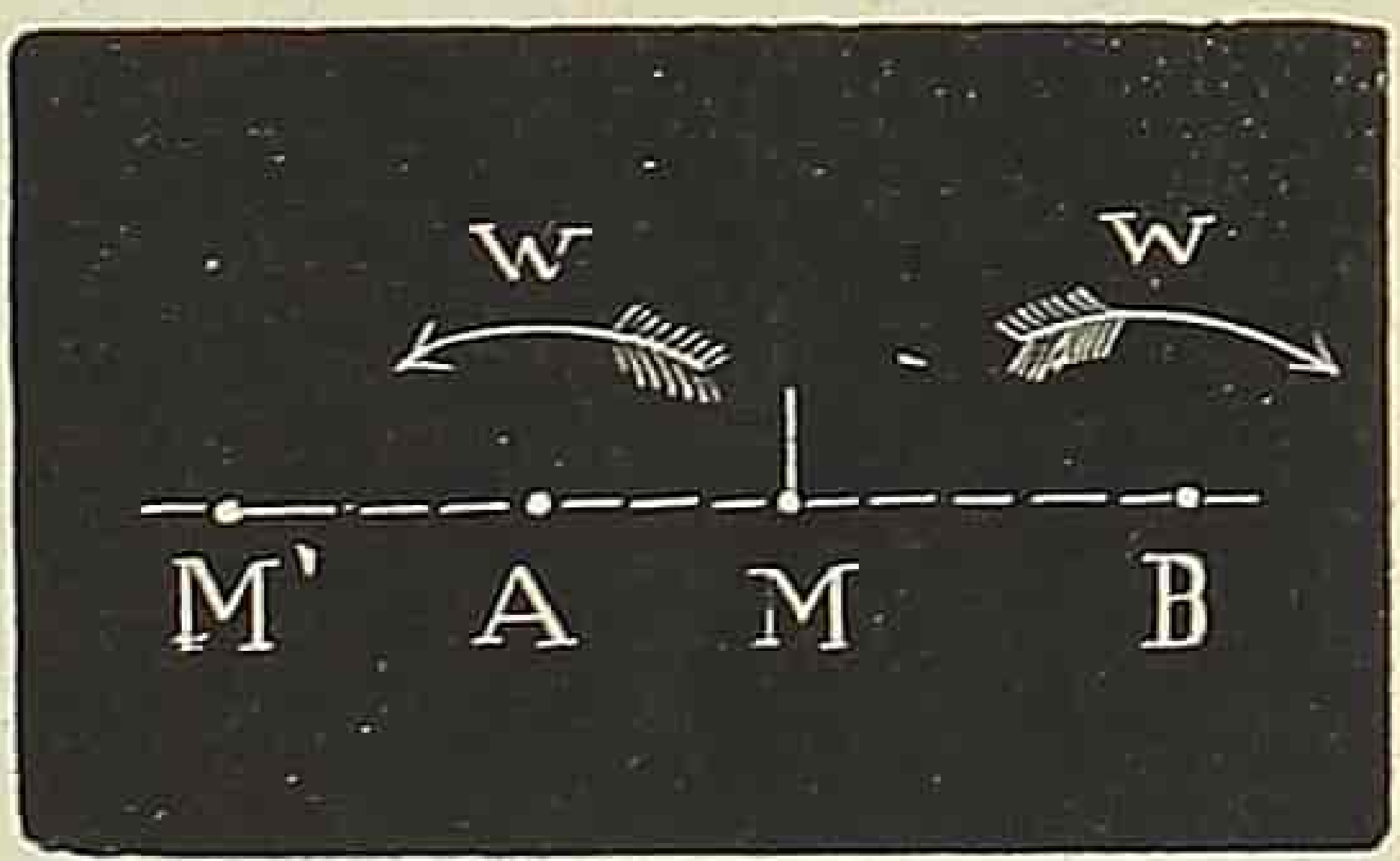
132. Из једначине $w'\overline{AM} = w''\overline{MB} = w''\,(\overline{MA} + \overline{AB})$ имаћемо:

$$\overline{AM} = \overline{AB}\,\frac{w''}{w' - w''}; \qquad \text{а}$$

$$\overline{MB} = \overline{AB}\,\frac{w'}{w' - w''}$$

Ако сад кажемо да се w' и w'' врло мало међу собом разликују, онда ће угловна брзина $w = w' - w''$ резултирајућег обртања бити врло мала. Осим тога, оса овог обртања удаљаваће се све више и више од две дате осе, чим се w' буде већма приближавало w''. Напоследку кад буде $w' = w''$ онда ће бити $w = o$, и резултирајуће кретање тела, биће обртање око осе, која се у истој равнини и у безкрајном одстојању од дати оса налази, јер је у овом случају $\overline{AM} = \infty$ а то ће рећи: да је резултирајуће кретање тела, напредно кретање, у правцу управном на равнину оса, и заиста:

Нека су A, и B, (Сл. 72) осе композантни обртања, а w заједничка угловна брзина. Ако сад узмемо ма коју тачку M тела између оса A, и B, и у њиној равнини, онда ће се ова тачка M, у сљед обртања око осе B, за време dt налазити над равнином оса, за $w\,.\,\overline{MB}dt$, и у правцу управном на ову равнину, а у сљед обртања око осе A, учиниће у истом правцу пут $w\overline{AM}dt$; дакле цео учињени пут тачком M у сљед ова два обртања биће: $wdt\,(\overline{AM} + \overline{MB}) = wdt\overline{AB}$, што ће рећи: да пут, који тачка M пролази за време dt, независи ни најмање од њеног положаја, који заузима између оса. — Тако исто, ако би сматрали неку тачку M' тела, изван оса у њиној равнини, онда ће ова тачка, обртајући се око осе B за време dt, бити над равнином за $w\overline{M'B}dt$, а обртајући се око A, налазиће се изпод равнине за $w\overline{M'A}dt$; цео њен пут биће дакле $wdt\,(\overline{BM'} - \overline{M'A}) = wdt\,\overline{AB}$ као и за тачку M. Лако је сада сватити, да је абсолутно кретање тела по напред реченом услову, заиста напредно кретање по правцу управном на равнину оса композантни обртања, и да је брзина овог кретања, равна заједничкој угловној брзини w, помноженој са одстојањем AB између оса. —



Сл. 72

Овакова два обртања, као што су напред наведена, образују тако звану спрегу обртања, и она има, осим горњег својства још и друга, која ћемо ми мало доцније изпитати.

Слагање ма коликог броја равноодстојни обртања.

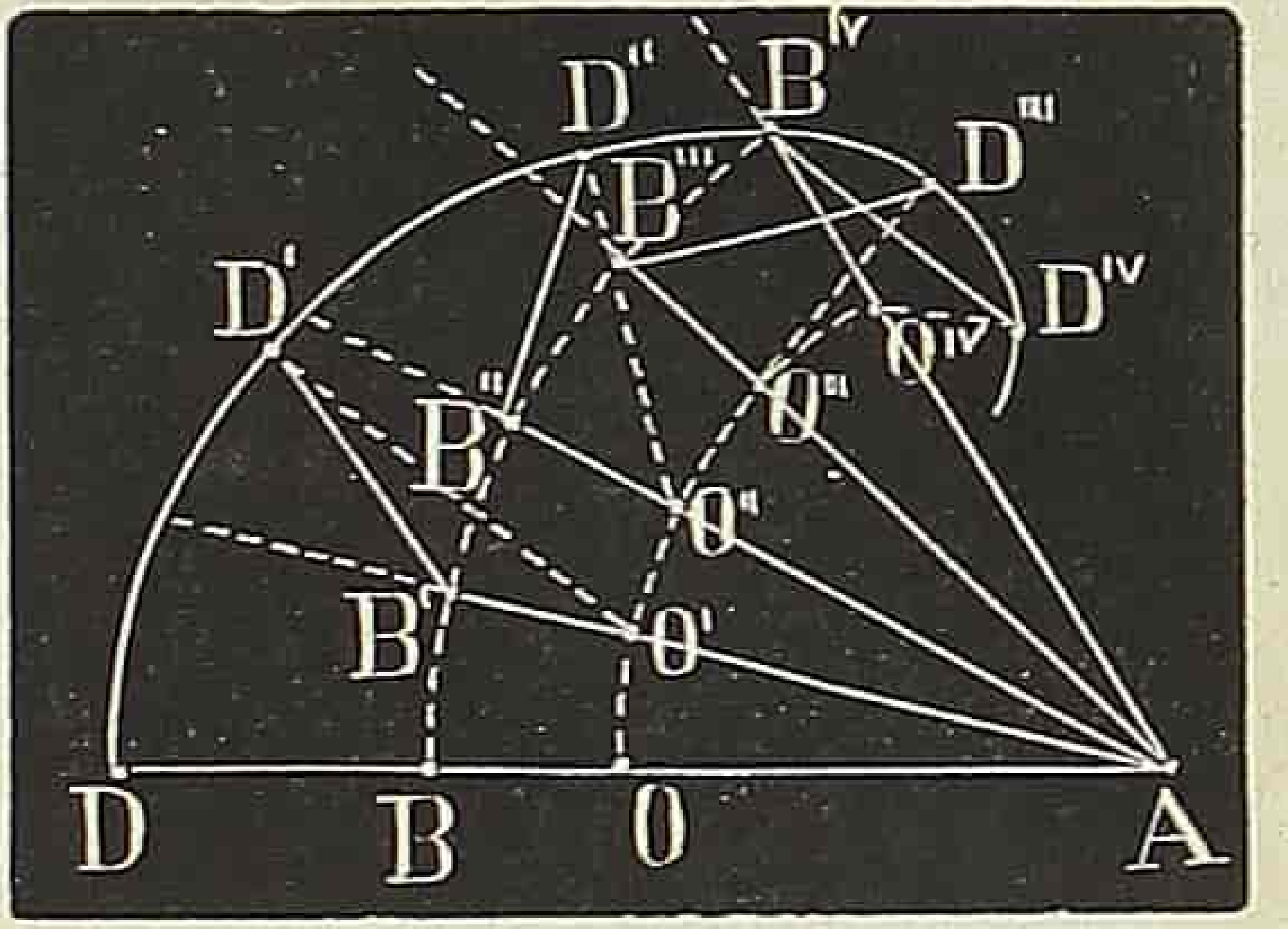
Кад се неко тело једновремено обрће око више равноодстојни оса, и у истом правцу, онда резултирајуће кретање тела, можемо определити; слагајући постепено по напред постављеним основима, дата обртања. — Тако на прилику, треба најпре сложити два од дати обртања, отуда добивено резултирајуће обртање сложити са трећим датим, затим ово друго резултирајуће обртање сложити са четвртим датим и т. д. Тим начином добићемо напоследку једно резултирајуће обртање, око осе, равноодстојне са осама композантни обртања, и истог правца као и ова, а угловна брзина овог резулт. обртања, биће равна сбиру угловни брзина композантни обртања. —

Ако би нека од дати композантни обртања била једног, а остала противположеног превца, онда треба најпре изнаћи резултирајуће обртање од свију композантни обртања једног, а затим оног другог правца, отуда добивена два почастна резултирајућа обртања сложити, и тим начином добићемо тражено резултирајуће кретање тела, које ће бити или напредно кретање или обртање, потоме како буду угловне брзине, последња два резултирајућа обртања, једнаке или неједнаке. —

Приметба о тренутној оси резултирајућег обртања. — Познато је да слагањем два непрекидна напредна кретања неког тела, добијамо такође непрекидно напредно кретање. Но, изузевши случај спреге, кад слажемо два непрекидна обртања, којих су осе равноодстојне, или се стичу у једној тачки, онда добијамо известни ред једно за друго сљедећи тренутни обртања око неке кретне осе. — Ово долази отуда, што се тренутна оса абсолутног обртања, у сваком тренутку налази у равнини, која се мења (креће), и у којој је стална оса обртања, система сравњивања, и оса релативног обртања. —

Да би све напред речено боље објаснили, узмимо овај:

Пример, Нека права $\overline{AB}$ (Сл. 73) обрће се у својој равнини са сталном угловном брзином w, око тачке A, међутим друга права $\overline{BD}$ обрће се једномерно са угловном брзином w' око кретне тачке B тако, да кад права $\overline{AB}$ узме положај $\overline{AB'}$, права $\overline{BD}$ налази се у $\overline{B'D'}$ образујући са продужењем праве $\overline{AB'}$ уго α, који стоји са углом $B'AB$ у сталном односу $\frac{w'}{w}$. — При том кретању, тачка D описује криву пругу $DD'D''$ ..... тако да њене нормале пролазе кроз тренутна средишта обртања $O'O''O'''$ ..... Абсолутна угловна брзина праве $\overline{BD}$, у њеним постепеним положајима, непрестано је $w + w_1$ т. ј. са оволиком се брзином права $\overline{BD}$ обрће око мењливи тренутни средишта. Брзина тачке D мења се сразмерно одстојањима $\overline{OD}$ $\overline{O'D'}$ $\overline{O''D''}$ .....



Сл. 73.

Ако би обртања w и w' била једнака и противна правца, онда би се права $\overline{BD}$ кретала равноодстојно са њсним првобитним положајем тако, да тачка B остане непрестано у периферији $BB'B''$ .... круга. — Заједничка брзина свију тачака ове праве, била би $w\overline{AB}$. —

Спреге обртања

(Couples de rotations)

134. Ми смо казали № 132, да два равноодстоја, једнака, и противног правца обртања, образују спрегу обртања, која има ова својства.

1-во. Свака спрега обртања одговара напредном кретању, управном на равнину спреге, као што смо то и доказали. Брзина овог напредног кретања, равна је производу из заједничке угловне брзине, оба спрегу образујућа обртања, и растојања њиови оса. Овај производ $w\overline{AB}$ зове се момент спреге.[1]

2-го. Сваку спрегу обртања можемо премештати ма како у њеној равнини, или у ма којој другој равноодстојној равнини, и у овој окретати како оћемо. И заиста све овако добивене спреге, одговарају једном истом напредном кретању, сљедствено оне су међу собом једнаке.

3-ће. Тако исто и из истог узрока, можемо повољно располагати са величином угловне брзине w, или са величином растојања оса $\overline{AB} = D$, под тим само условом, да момент спреге остане неповређен.

4-то. Обратно, ма какво напредно кретање, можемо свагда заменути са једном спрегом обртања, која се има налазити у равнини управној на правац брзине напредовања, међутим ова равнина може пролазити кроз повољну тачку у простору. — Сем тога, у овој равнини може се повољно узети правац обртања спреге, тако исто може се повољно да узме једна од две количине w и $\overline{AB} = D$, опредељујући ону другу једначином

$$w \,.\, D = v.$$

135. *Употреба спреге обртања.* Појам напредног кретања врло је прост и јасан, и потоме не би требало да говоримо о замени оваковог кретања са спрегом обртања, као кретањем, које се даје теже представити и схватити. — Употреба спреге обртања у Кинематики, може да се узме као каква досетка умствовања, за простије решење извесни неки задатака.

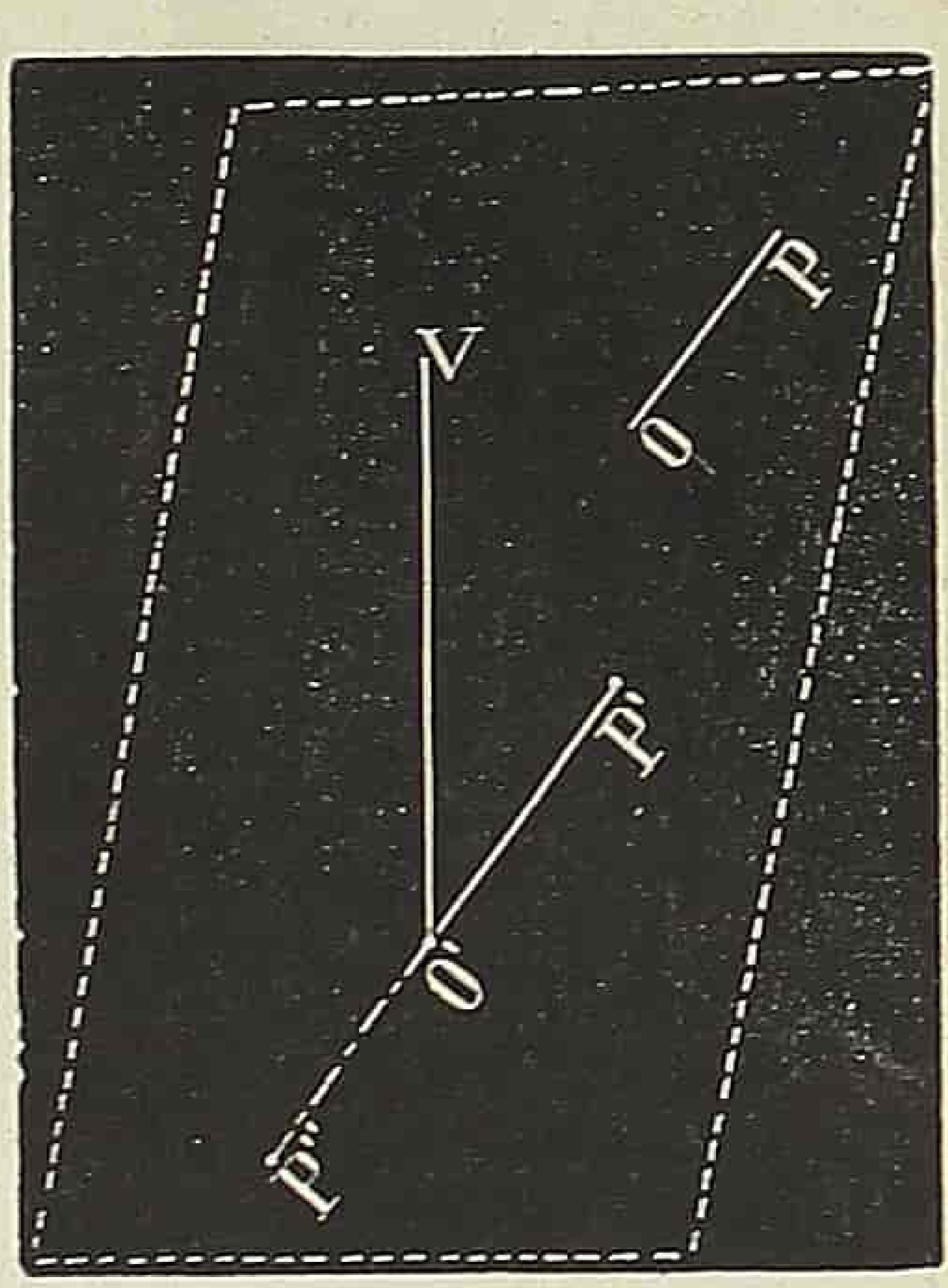
Премештај неког обртања, равноодстојно са његовим првобитним положајем.

136. На својству спрега обртања, може се ма какво обртање н. пр. $\overline{OP}$ (Сл. 74) да замене са другим једнаким обр-

---

[1] Дужина $\overline{AB} = D$, или растојање између оса обртања, зове се крак спрегине кретке (bras de levier du couple). Ми ћемо доцније дознати, од куд долази овај назив, који је из статике узет.

тањем, кога би оса пролазила кроз ма коју повољну тачку O' у простору, и са једним напредним кретањем, управним на равнину OPO', и заиста, нека је w угловна брзина обртања око OP. Ако сад овом обртању, додамо друга два кроз O' повучена и противположена, којих су осе $O'P'$, и $O'P''$, равноодстојне са $\overline{OP}$, а угловне брзине равне брзини w; увиђавно је, да тиме нисмо никакву промену произвели у кретању тела. — Но ако је обртање око $O'P$ истог правца као и око $\overline{OP}$, онда сљедује да остала два обртања, т. ј. око OP, и $O'P''$, образују једну спрегу, која се своди на напродно кретање $\overline{O'V}$, управно на равнину POO', и кога је брзина, равна угловној брзини w, помноженој са растојањем оса OP, и $O'P'$, што смо имали доказати.



Сл. 74.

Потоме ми можемо свагда, без преиначења брзине абсолутни кретања, заменути ма колики број обртања, око ма какви оса:

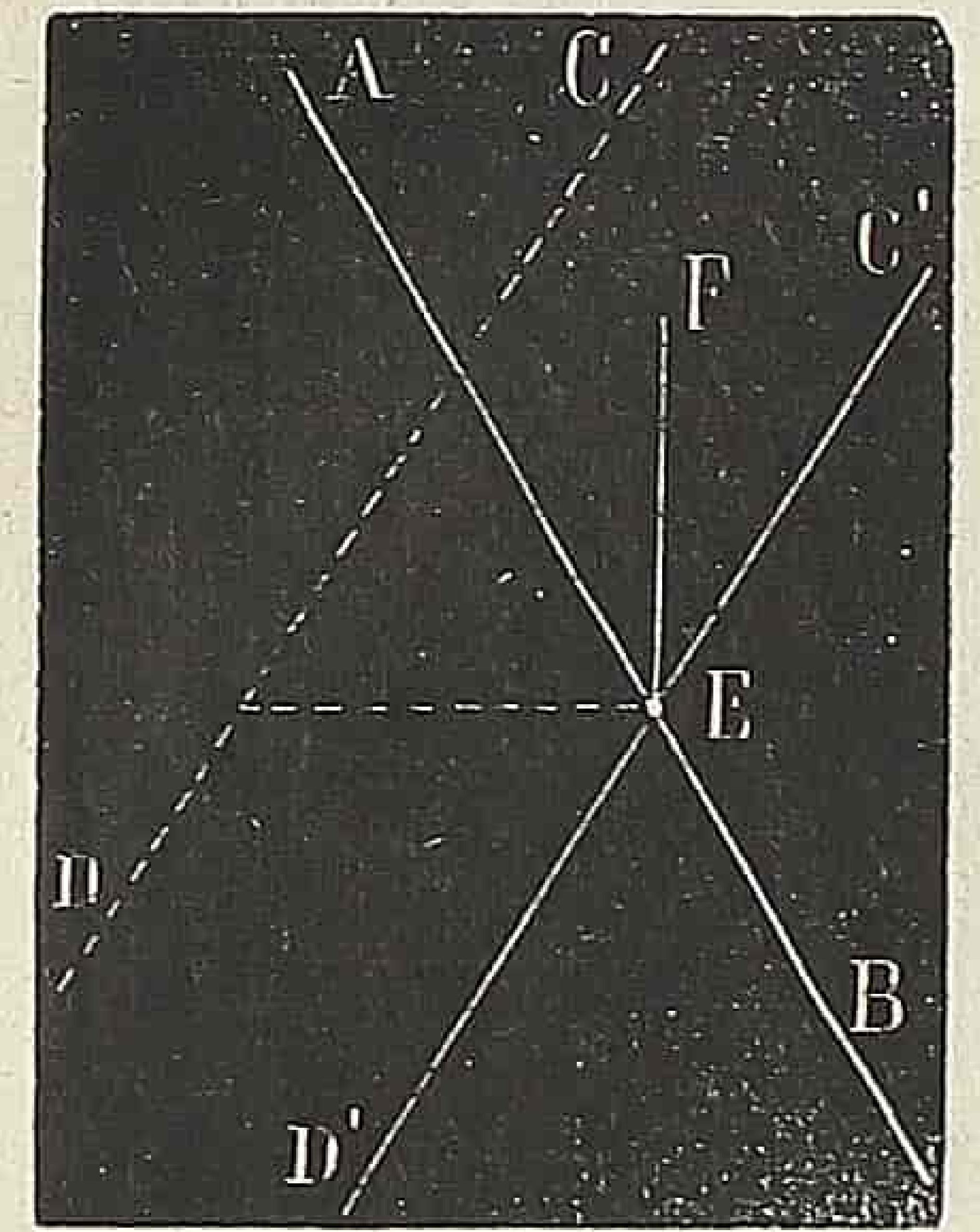
1-во. Са толико одговарајуће једнаки, и равноодстојни обртања и истог правца, колико је дати обртања. — Сва пак ова обртања, којих осе пролазе кроз повољно узету неку тачку, могу се затим сложити само у једно обртање, као што ћемо то ниже видети, и

2-го Са толико исто напредни кретања, која се такође могу сложити само у једно напредно кретање.

Слагање два обртања око оса, које се неналазе у једној истој равнини.

137. Нека су $\overline{AB}$, и $\overline{CD}$, (Сл. 75) осе два једновремена елементна обртања неког тела. Предпоставимо да се ове осе неналазе у једној истој равнини. Кроз ма коју тачку E, праве $\overline{AB}$, повуцимо $\overline{C'D'}$ равноодстојно, са $\overline{CD}$. То учинивши, ми

можемо по напред реченом (№ 136), заменути обртање око $\overline{CD}$ са обртањем око $\overline{C'D'}$, и напредним кретањем по правцу $\overline{EF}$, управном на равнину $CDC'D'$. Потоме имали би сада да сложимо међу собом три елементна кретања, т. ј. два обртања око $\overline{AB}$, и $C'D'$, и напредно кретање по правцу $\overline{EF}$.



Сл. 75.

Ово слагање извршићемо овако: ми ћемо најпре сложити два поменута обртања, око AB и $C'D'$, средством паралелограма обртања, затим ћемо отуда добијено резултирајуће обртање, сложити са напредним кретањем по правцу $\overline{EF}$ (№ 129), и тим начином добићемо без сваке сумње шрафно кретање, јер $\overline{EF}$, управна на равнину $CDC'D'$, неможе бити управна и на осу резултирајућег обртања, која се налази у равнини AEC'. —

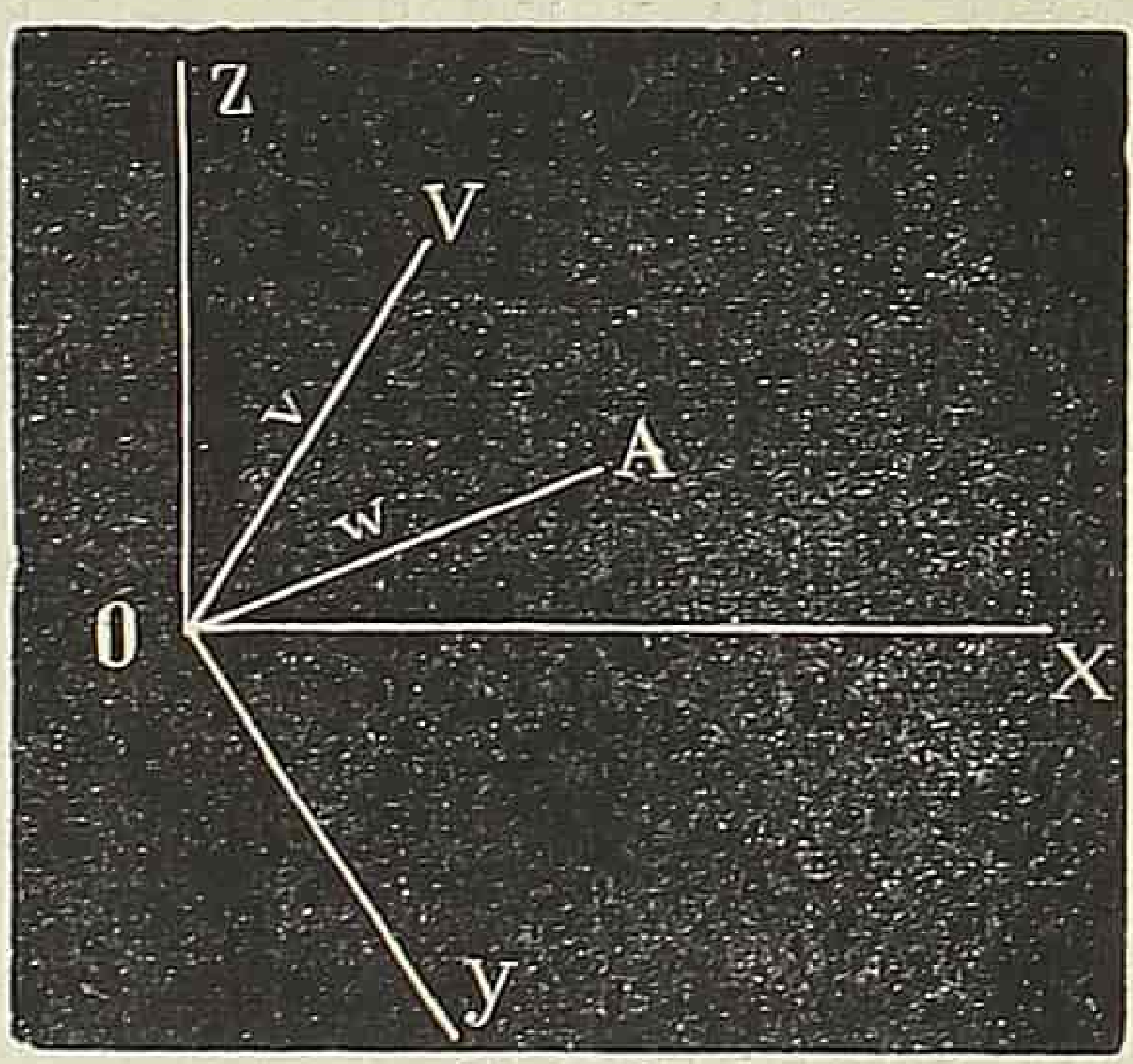
Слагање ма какви кретања тела.

138. Ми смо дознали (№ 114), да се ма какво елементно кретање тела може да произведе, обртањем истога тела око неке осе, и напредним кретењем по правцу ове осе. — На основу том и на основу реченога под № 136, у стању смо сложити више ма какви једновремени елементни кретања неког тела, и то овако:

Све осе датих обртања преместе се тако, да пролазе кроз повољну тачку O (№ 136), и сад се сва обртања сложе само у једно. — Тако исто треба сложити у једно, како сва дата напредна кретања, тако и она, која су постала премештајем обртања у O. — Тим начином добићемо само једно резултирајуће обртање, и једно напредно кретање; која кретања кад сложимо по познатом, имаћемо резултирајуће кретање тела, које ће у опште шрафно кретање бити, јер је оваковим кретањем представљено свако елементно кретање тела, које се ма како у простору креће.

Разлагање ма каквог елементног кретања неког тела, на три напредна кретања, равноодстојна са трима у једној тачки пресецајућим се осама, и на три обртања, око ових оса.

139. Представимо себи да смо кретање тела однели на три координатне осе $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, и $\overline{OZ}$ (Сл. 76) и сматрајмо једну његову тачку, која се у почетку вопросног елементног кретања, слаже са почетком O, координатни оса. По познатом (№ 112, 113, 114), ми можемо разложити ово елементно кретање тела, на напредно кретање....... које је једнако и равноодстојно са кретањем $\overline{OV}$ сматране тачке, и на обртање оке осе $\overline{OA}$, која пролази кроз ову тачку. — Напредно кретање може се свагда разложити на три друга напредна кретања, управљена по правцима оса $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ и $\overline{OZ}$ (№ 50, 125), а тако исто и обртање око осе пролазеће кроз O, може да се разложи на три обртања, око исти оса (№ 127). Дакле свако елеметно кретање тела може да се разложи на три напредна кретања, равноодстојна са трима повољно узетим осама, и на три обртања око ових оса.



Сл. 76.

Ако би координатне осе биле ортогоналне, и ако означимо са v брзину напредног кретања, а са w брзину обртања око осе кроз O пролазеће, имаћемо по познатом, три композантна напредовања:

$$\ldots\ldots v_x = v \cos(vx); \quad v_y = v \cos(vy) \quad \text{и} \quad v_z = v \cos(vz)$$

и три композантна обртања:

$$w_x = w \cos(wx), \quad w_y = w \cos(wy) \quad \text{и} \quad w_z = w \cos(vz);,$$

Потоме абсолутна брзина ма које тачке M тела, која је удаљена за p, од осе $\overline{OA}$, а за x, y, и z, од оса $\overline{OX}$,

$\overline{OY}$, и $\overline{OZ}$, биће резултанта две брзине v и pw, од којих pw управна је на равнину MOA; а тако исто и резултанта шест брзина v_x, v_y, v_z, w_x, w_y и w_z, од којих прве три, равноодстојне су са осама $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, и $\overline{OZ}$, а друге три, управне на равнине MOX, MOY, и MOZ.

Слагање акцелерација при релативном кретању.

140. При релативном кретању, ако би се имали обазирати и на мењање правца кретни ортогонални оса, односно којих се неко тело релативно креће, онда слагање акцелерација разликује се од слагања брзина. И заиста, знамо да тоталну асцелерацију можемо определити, ако разложимо брзину v', коју имамо на крају времена dt, на две друге, од којих једна је v у почетку овог времена, а друга је Jdt (№ 75). — Да би пак могли употребити ову конструкцију и код релативног кретања, имамо приметити, да се брзина v_r односи на почетни положај, а брзина v'_r мора бити однешена на крајњи т. ј. последњи положај кретни оса, потоме безкрајно мала промена у правцима оса, мења и уго безкрајно мали, који образују међу собом брзине v_r и v_r', сљедствено мења се како правац тако и величина праве $J_r dt$, која сајужава крајње тачке ових брзина; дакле тотална релативна акцелерација, фукција је ове промене, и задатак о слагању акцелерација постаје одма сложенији (тежи), чим кретне осе немају просто напредно кретање.

Из тог узрока, ми ћемо овде испитати, како се слажу акцелерације само у два случаја и то:

1-во. Кад се координатне осе, као систем сравњивања, напредно крећу; и 2-го. Кад се једномерно обрћу око неке праве.

I Случај. Слагање акцелерација кад се систем сравњивања напредно креће.

141. Ми ћемо овде предходно јошт једанпут да напоменемо сљедећа три позната правила:

I. При сваком кретању, тетивка протрчаног пута у безкрајно малом времену Θ, резултанта је количине $v\Theta$, пренешене по тангенти, и количине $\frac{1}{2}J\Theta$, пренешене (узете) по правцу тоталне акцелерације.

II. Тетивка ма каквог абсолутног премештаја, резултанта је тетивке релативног и тетивке привлачног кретања; и

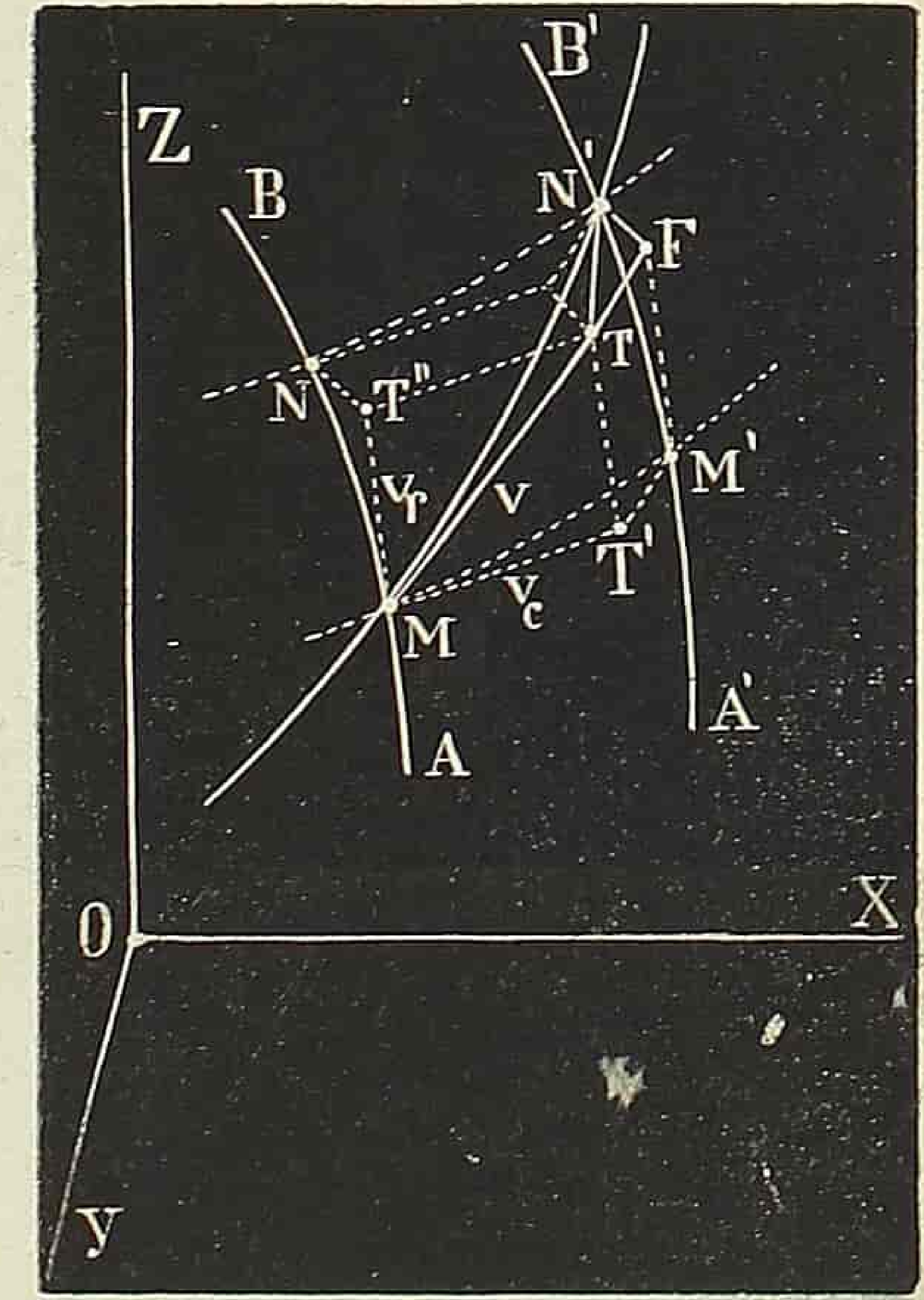
III. Абсолутна брзина неке тачке, резултанта је релативне и привлачне брзине.

Пошто је то тако, узмимо опет наш кривопружни триуго $MM'N'$ (Сл. 77) и нека је:

$$\overline{MT} = vdt, \qquad \overline{TN'} = \tfrac{1}{2}J\overline{dt^2}$$

$$\overline{MT'} = v_{\text{е}}dt, \qquad \overline{T'M'} = \tfrac{1}{1}J_{\text{е}}\overline{dt^2}$$

$$\overline{MT''} = v_{\text{г}}dt, \qquad \overline{TF} = \tfrac{1}{2}J_{\text{г}}\overline{dt^2}.$$



Сл. 77.

По правилу паралелограма брзина $\overline{T'T} = \overline{M'F}$, сем тога ове две права равноодстојне су међусобом зато, што је привлачно кретање, напредно кретање, сљедствено релативни пут $\widehat{AB}$ премештао се равноодстојно са својим првобитним положајем.

Отуда сљедује, да је и $\overline{TF}$ равно и равноодстојно са $\overline{T'M'}$, дакле права пруга, која по правцу и величини представља количину $\frac{1}{2}J\overline{dt^2}$, резултанта је прави пруга, које тако исто представљају $\frac{1}{2}J_{\text{е}}\overline{dt^2}$, и $\frac{1}{2}J_{\text{г}}\overline{dt^2}$. Отуда ово:

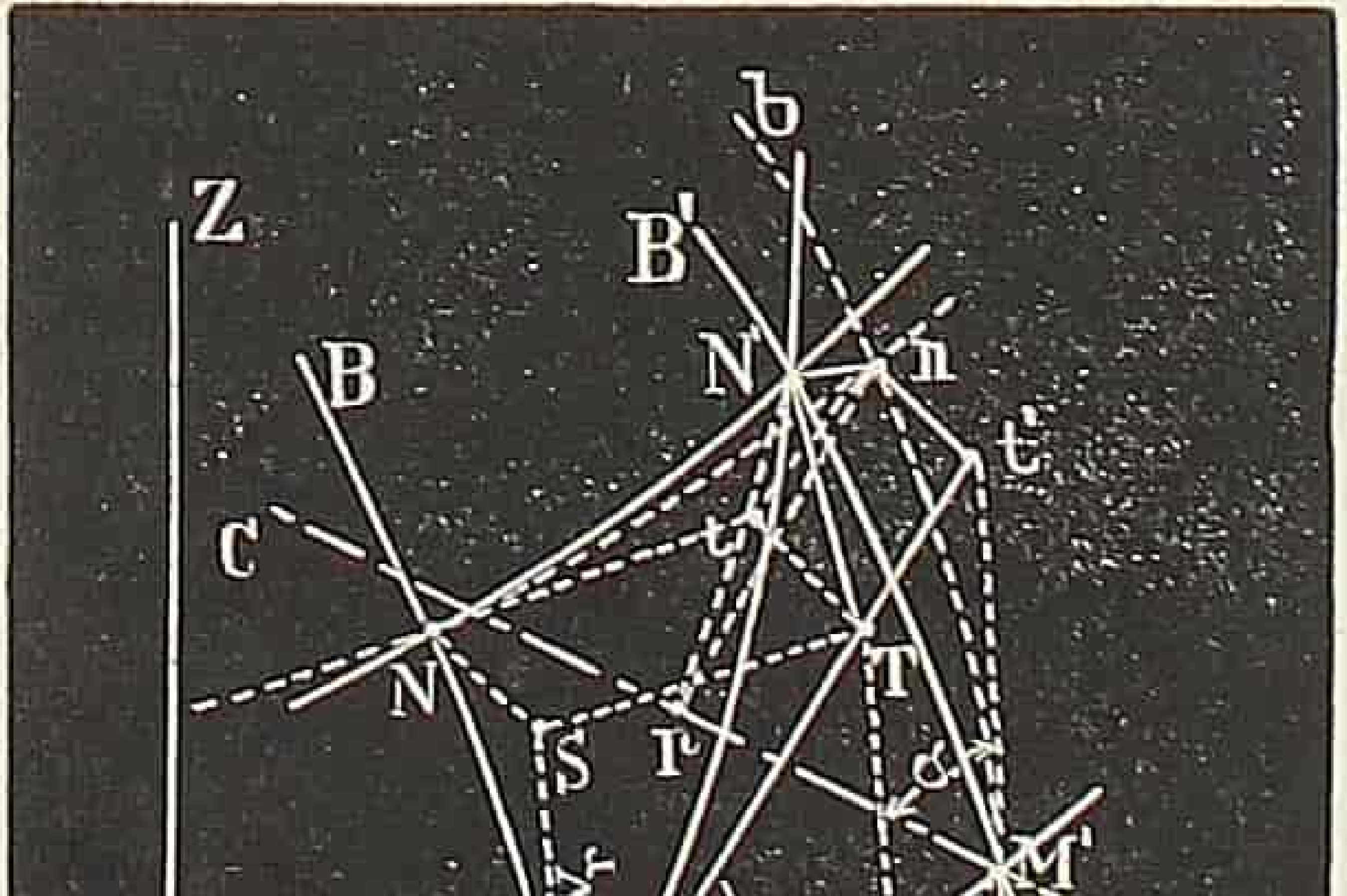
Правило. *Кад год је привлачно кретање, напредно кретање, онда је тотална акцелерација једне кретне тачке, резултанта од тоталне релативне и привлачне акцелерације,* Тако исто:

Кад год је привлачно кретање, напредно кретање, онда је тотална релативни акцелерација, резултанта од тоталне *абсолутне акцелерације, и тоталне привлачне акцелерације, узете у противположеном правцу.*

142. Ако би се неко тело, једновремено у више праваца кретало, и ако разна композантна кретања, која се узимљу као привлачна кретања, буду сва напредна кретања, онда је лако сватити, да се тотална акцелерација резултирајућег кретања може да определи, слагајући тоталне акцелерације разни композантни кретања, по правилу полигона брзина: дакле у овом случају, сва правила, која се односе на слагање брзина, могу се применити и на слагање акцелерација.

II Случај. Слагање акцелерација кад се систем сравњивања обрће.

143. Испитајмо сада, како можемо определити тоталну акцелерацију абсолутног кретања неке тачке, кад се координатне осе XYZ, на које се односи њено релативно кретање, ма како у простору крећу, дакле кад привлачно кретање није више напредно кретање.



Сл. 78.

Сматрајмо опет два положаја AB и $A'B'$ (Сл. 78), релативног пута кретне тачке на крају времена t, и $t + dt$, и рецимо да се она, у истим тренутцима, налази у тачкама M, и N, овог релативног пута.

Нека су v, v_e, и v_r, абсолутна, привлачна, и релативна брзина тачке M.

Знамо да криву пругу AB, можемо преместити у $A'B'$, ако јој најпре дамо напредно кретање, које би равно било безкрајно малом премештају MM' тачке M, а затим је обрнемо око неке кроз тачку M' пролазеће осе $\overline{CD}$ (№ 112). Нека је ab положај, који би заузела крива AB на крају времене $t + dt$; кад би се по напред реченом само напредно кретала. При таквом кретању, тачка N да би дошла у N', протрчаће најпре пут Nn, раван и равноодстојан са $\widehat{MM'}$, у сљед напредног кретања, затим лук $\widehat{nN'}$ круга, у сљед обртања око осе $\overline{CD}$.

Повуцимо у M тангенту на иут MM', који описује ова тачка, сматрана као чврсто сајужена са кретним координатним осама, а тако исто и тангенту на релативни пут AB кретне тачке, затим пренесимо по овим тангентама дужине $\overline{MR}$, и $\overline{MS}$, тако да је:

$$\overline{MR} = v_e dt; \qquad \overline{MS} = v_r dt.$$

Дијагонала $\overline{MT}$ паралелограма конструисаног, над правима $\overline{MR}$, и $\overline{MS}$, биће подобно изражена, т. ј.

$$\overline{MT} = vdt.$$

Сем тога, ова дијагонала биће тангента у M, на абсолутни пут кретне тачке. Отуда сљедује, да ако сајузимо тачку T, са тачком N', у којој се кретна тачка заиста на крају врмена $t + dt$ налази, онда тотална акцелерација абсолутног кретања, биће управљена по правцу $\overline{TN'}$, и величина ове акцелерације, означавајући је са J, биће (№ 74 прав. V).

$$J = \frac{2\,\overline{TN'}}{dt^2}.$$

Но ако конструишемо паралелограм над правима $\overline{TR}$ и $\overline{RM'}$, па четврту тачку t' овог паралелограма сајузимо са n; онда ћемо добити полигон $Ft'nN'$, који је закључен правом $\overline{TN'}$, дакле ова права, резултанта је од прави $\overline{Tt'}$, $\overline{t'n}$ и nN'. Сем тога лако је видети да је:

$$\overline{Tt'} = \text{и} \parallel \overline{RM'} = \tfrac{1}{2} J_e dt^2.$$

$$\overline{t'n} = \text{и} \parallel \overline{Tt} \text{ и} \parallel \overline{NS} = \tfrac{1}{2} J_r \overline{dt^2}.$$

Што се тиче праве $\overline{nN'}$, имамо приметити да ако означимо са J_g неку трећу тако звану допунителну акцелерацију, онда ће на сваки начин бити:

$$\overline{nN'} = \frac{1}{2} J_g \overline{dt^2}.$$

Из свега тога можемо у опште извести, да се абсолутна тотална акцелерација $J = \frac{2\overline{TN'}}{dt^2}$, мора сматрати као резултанта од релативне тоталне акцеларије $J_r = \frac{2\overline{t'n}}{dt^2}$, привлачне тоталне акцелерације $J_e = \frac{2\overline{Tt'}}{dt^2}$, и неке допунителне акцелерације, које је правац означен правом $\overline{nN'}$, и које је величина:

$$J_g = \frac{2\overline{nN'}}{dt^2}$$

144. Вредност ове допунителне акцелерације, ми ћемо тачно да определимо само за случај, кад се координатне осе, једномерно са угловном брзином w, обрћу око осе $\overline{CD}$, као што смо у почетку ове теорије напоменули.

У име тога, нека је p подножије управне спуштене из n на праву $\overline{CD}$. Лако је видети да је:

$$\overline{nN'} = \overline{wdt}\,\overline{np}.$$

Ако још означимо са α уго, образован правом $\overline{CD}$ са правцем елеметног премештаја $\overline{M'n}$, при релативном кретању, биће

$\overline{np} = \overline{M'n}\, sin\,\alpha = vr\, dt\, sin\,\alpha$, имаћемо дакле

$\overline{nN'} = wv_r\, \overline{dt^2}\, sin\,\alpha$, и отуда

$$J_g = \frac{2\overline{nN'}}{\overline{dt^2}} = 2wv_r\, sin\,\alpha.$$

Сем тога ова трећа композантна акцелерација, управљена је управно на равнину, која пролази кроз $\overline{CD}$, и елеменат $\overline{M'n}$ релативног пута, [тангенту у M' повучену на релативни пут ab] и у правцу од n према N! —.

Из свега напред реченог можемо у опште казати: да, кад се абсолутно кретање неке тачке опредељује слагањем једног привлачног и једног релативног кретања, онда абсолутну тоталну акцелерацију овог кретања, можемо овако изнаћи: Предпостави се да је елементно привлачно кретање координатни оса, у неком сматраном тренутку, разложено на једно обртање око тренутне осе, која пролази кроз тачку, у којој се налази кретна тачка у вопросном тренутку, и на напредно кретање, које би равно било кретању исте тачке сматране као чврсто сајужене са кретним осама; затим се определи угловна брзина w, вопросног елементног обртања, као и уго α; који образује поменута тренутна оса са правцем релативне брзине v, кретне тачке, напоследку сложе се по правилу полигона брзина ове три акцелерације:

1-во. Привлачна акцелерација J_e т: је: она акцелерација, коју би имала кретна тачка, кад би чврсто сајужена била са кретним осама.

2-го. Релативна акцелерација, т: је: она акцелерација, коју има кретна тачка у смотрењу кретни оса, и на последку.

3-ће. Акцелерација, која је равна $2wv_r \sin \alpha$, и која је управљена управно на равнину пролазећу кроз релативну, брзину v_r и кроз тренутну осу обртања кретни координатни оса, узимајући ову акцелерацију у правцу, у коме се крајна тачка праве, која представља релативну брзину, обрће око речене тренутне осе. — Тим начином изнађена резултанта, биће тотална акцелерација абсолутног кретања сматране кретне тачке. —

145. *Центрифугална акцелерација.* — Овде имамо додати, да за случај, кад се систем сравњивања [координатне осе] једномерно обрће, онда привлачна акцелерација, за неку тачку, која је за r удаљена од осе обртања, своди се на центрипетну акцелерацију, које је вредност w^2r; дакле ова ак-

целерација, узета у противположеном правцу, биће центрифугална, од исте вредности w^2r. — Отуда се изводи ово:

Правило. *Кад је привлачно кретање, једномерно обртање око неке сталне осе, онда релативна акцелерација, резултанта је од абсолутне, центрифугалне, и једне треће акцелерације, која се зове сложена центрифугална акцелерација.*

Ова последња, равна јв двогубом производу из релативне брзиие, угловне брзине кретни оса, и синуса угла, који је образован релативном брзином и осом, око које се обрће систем сравњивања.

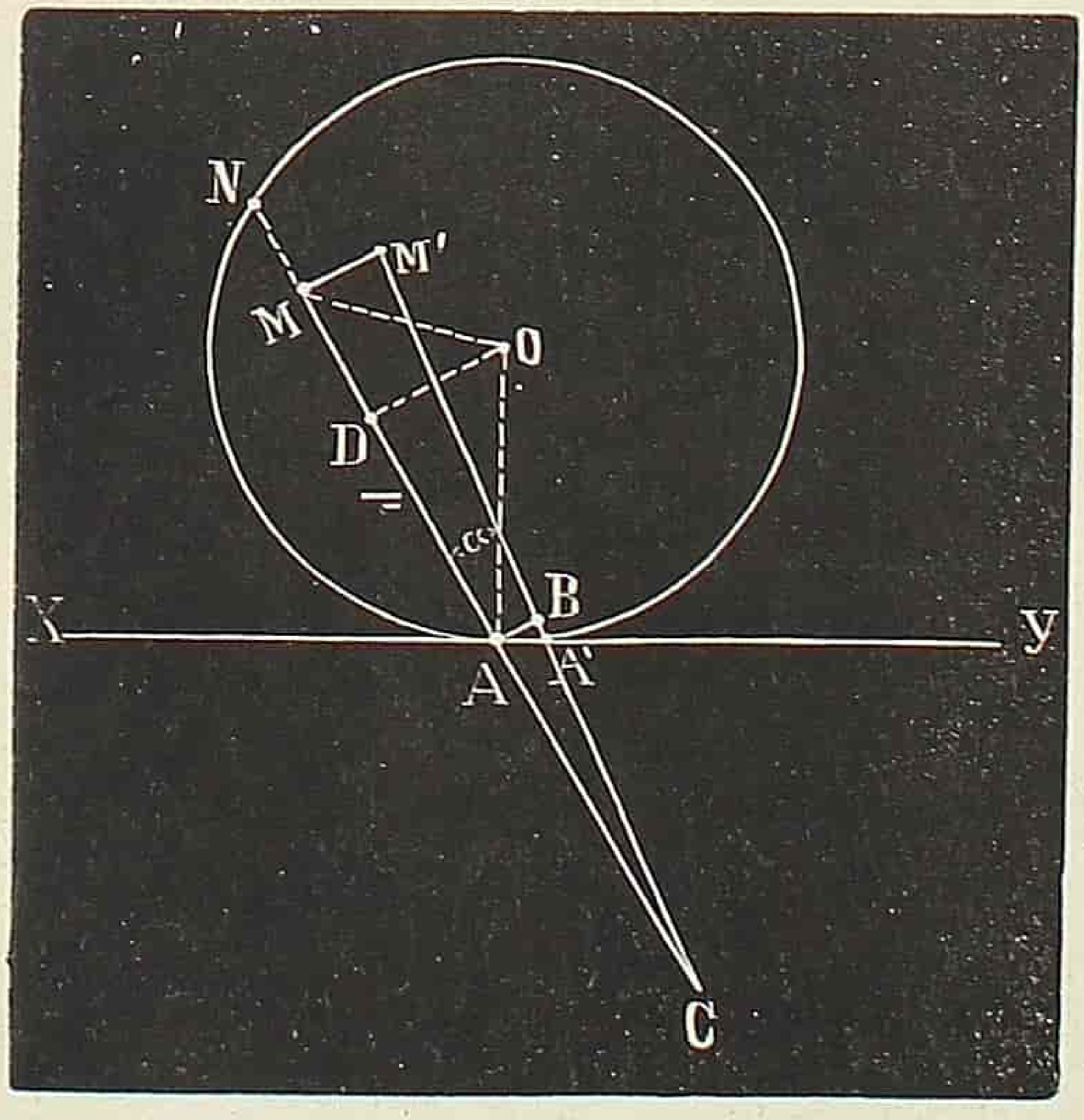
Ово правило познато је под именом правило Coriolis.

Лако је видети, да сложена центрифугална акцелерација постаје $= o$ у ова три случаја:

1-во Кад је $w = o$; 2-го кад је $v_r = o$ и напослетку 3-ће Кад је $siu\ \alpha = sin\ [\overline{wv_r}] = o$, т: је: кад је тангента повучена на релативни пут, равноодстојна са осом обртања система сравњивања.

146. За боље објаснење целе напред изложене теорије, о слагању акцелерација при релавном кретању, узмимо овај пример. —

Да се определи тотална акцелерација тачке M чврсто сајужене са кругом O (Сл. 79), који се једномерно котрља по правој $\overline{XY}$.



Сл. 79.

Решење. Да би круг прешао из једног у други, у безкрајно малом одстојању налазећи се положај, то ће се он обрнути око тачке додира A, као тренутног средишта обртања. Нека је w угловна брзина овог тренутног обртања круга. Ова је брзина стална по предпоставки. Означимо са r полупречник $\overline{OA}$, са p одстојање $\overline{AM}$, тачке M од тренутног средишта обртања, и са α уго MAO. — Ако јошт кажемо да је v брзина тачке M, онда ће бити.

$$v = pw$$

За време dt тачка M описаће извесни лук —

$$\overset{\frown}{MM'} = pw\ \overline{dt}.$$

За исто време, тачка O (средиште круга) протрчаће пут $rwdt$, и као што ће се тачка A, за толико исто преместити као и O, то отуда сљедује, да је одстојање, између два једно за друго одма сљедећа положаја тачке додира т: је:

$$\overline{AA'} = rwdt.$$

Две праве $\overline{MA}$, и $\overline{M'A'}$ јесу две једно до друго врло близу налазеће се нормале пута, који тачка M описује, дакле пресек C ових нормала, биће средиште кривине, а $\overline{MC} = \varrho$ полупречник кривине овог пута.

Ако из тачке C као средишта а са полупречником $\overline{CA}$, опишемо безкрајно мали лук $\overset{\frown}{AB}$, онда из безкрајно мали триуглова $MM'C$ и ABC, који се могу узети као подобни, имамо ову једначину.

$$\frac{\varrho}{\varrho - p} = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{AA'} \cos \alpha} = \frac{pwdt}{rw \cos \alpha dt}$$ и отуда

полупречник кривине $\varrho = \dfrac{p^2}{p - r\cos\alpha}$ [1]

Потоме биће 1-во Тангенциална акцелерација тачке M,

$$\frac{dv}{dt} = w \frac{dp}{dt} = w \frac{\overline{BA'}}{dt} = w^2 r \sin\alpha = w^2 \overline{OD}$$

2-го. Центрипетна акцелерација исте тачке M.

$$\frac{v^2}{\varrho} = w^2 (p - r\cos\alpha) = w^2\ \overline{MO}$$

---

[1] Ако би тачка M била у перифериј кретног круга, н. пр. у H онда је $r\cos\alpha = \frac{1}{2} p$ и $\varrho = 2p$, полупречник кривине циклоиде. —

Отуда је лако закључити, да је тотална акцелерација тачке *M*, управљена по правцу $\overline{MO}$, и да је њена вредност $w^2\overline{MO}$.

До исти резултата могли смо и на сљедећи начин доћи:

Лако је видети, да котрљање круга по правој $\overline{XY}$, одговара обртању са угловном брзином w, око тачке *O*, и правопружном једномером напредном кретању ове тачке *O*, равноодстојно са правом $\overline{XY}$, кога је кретања брзина rw.

Сматрајући сад ово последње кретање као привлачно, а оно прво, као релативно, тоталну акцелерацију кретне тачке *M*, можемо определити слагањем тотални акцелерација ови композантни кретања [№ 141]. Но акцелерација привлачног кретања, равна је нули, јер је ово правопружно и једномерно: дакле тотална акцелерација резултирајућег кретања, своди се на акцелерацију обртног кретања око тачке *O*. Вредност пак ове акцелерације тачке *M*, у њеном једномерном обртању око *O*, равна је квадрату брзине $w\overline{OM}$ подељеном са полупречником $\overline{OM}$ круга, који тачка описује; дакле она је $= w^2\overline{OM}$, иста вредност као и горе.

Релативна кретања тела

147. *Релативно кретање два тела.* Знајући абсолутно кретање два тела која се ма како у простору крећу, може се поставити питање: како се опредељује релативно кретање једног тела према оном другом, или што је исто односно три координатне осе, које би чврсто сајужене биле са овим другим телом. —

Решење овог задатка, кога је употреба врло честа у штудирању махина, сљедује непосредно из познате већ теорије о слагању кретања.

И заиста, представимо себи два тела *M*, и *N*, која се ма како крећу. Јасно је да се вопросно релативно кретање неће ни у чему променути, ако би дали обојим телима ма какво заједничко кретање. — Узмимо да је ово заједничко кретање, у сваком тренутку равно и противположено кретању тела *M*.

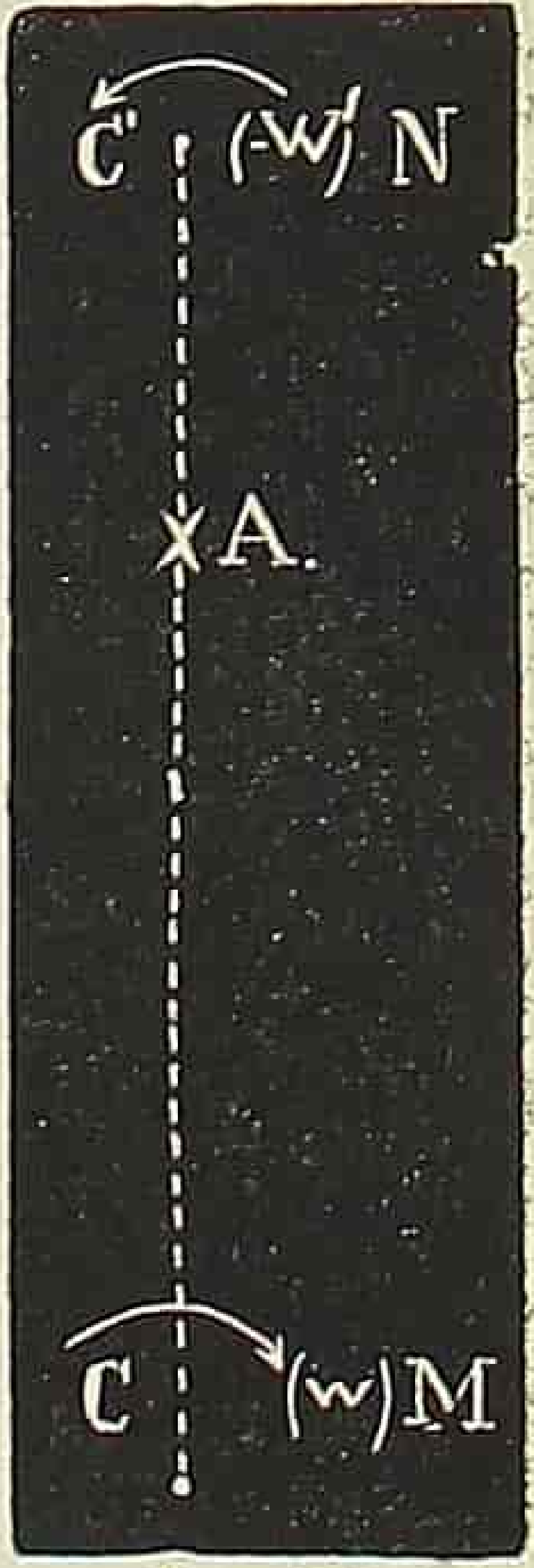
Ако је то тако, онда ће тело M остати у покоју, и сад абсолутно кретање тела N, биће управо тражено релативно кретање. — Ово кретање определићемо, као што је лако схватити, ако сложимо по досад познатим правилима собствено кретање тела N, са кретањем које би равно и противположено било кретању тела M, или кретању координатни оса чврсто сајужени са телом M. —

Тако исто лако је видети, да је релативна брзина тела N, у ма ком тренутку, резултанта од његове абсолутне брзине, и брзине која би равна и противположена била брзини тела M.

Приметба. Све ово вреди и за релативну брзину неке тачке односно ма какви координатни оса, које се ма како у простору крсћу.

Ради бољег објаснења ове опште теорије, узмимо један пример.

Представимо себи да се два тела M, и N (Сл. 80) обрћу у противположеном правцу са угловним брзинама w и $-w'$, око две сталне равноодстојне осе пројектиране у C и C' Тражи се да се определи релативно кретање тела M, односно тела N.



Сл. 80.

Решење. По предходећој теорији, треба сложити обртање w, са обртањем које би равно и противположено било обртању $-w'$. — Но као што су ова два композантна обртања истог правца, због тога што су дата обртања противположеног правца то ће по № 130 — резултанта W ови композантни обртања бити $W = w + w'$, а оса овог резултирајућег обртања, као тренутна оса релативног обртања, биће опредељена, ако поделимо $\overline{CC}$, у тачки A, на два дела преокренуто сразмерна угловним брзинама w и w'. —

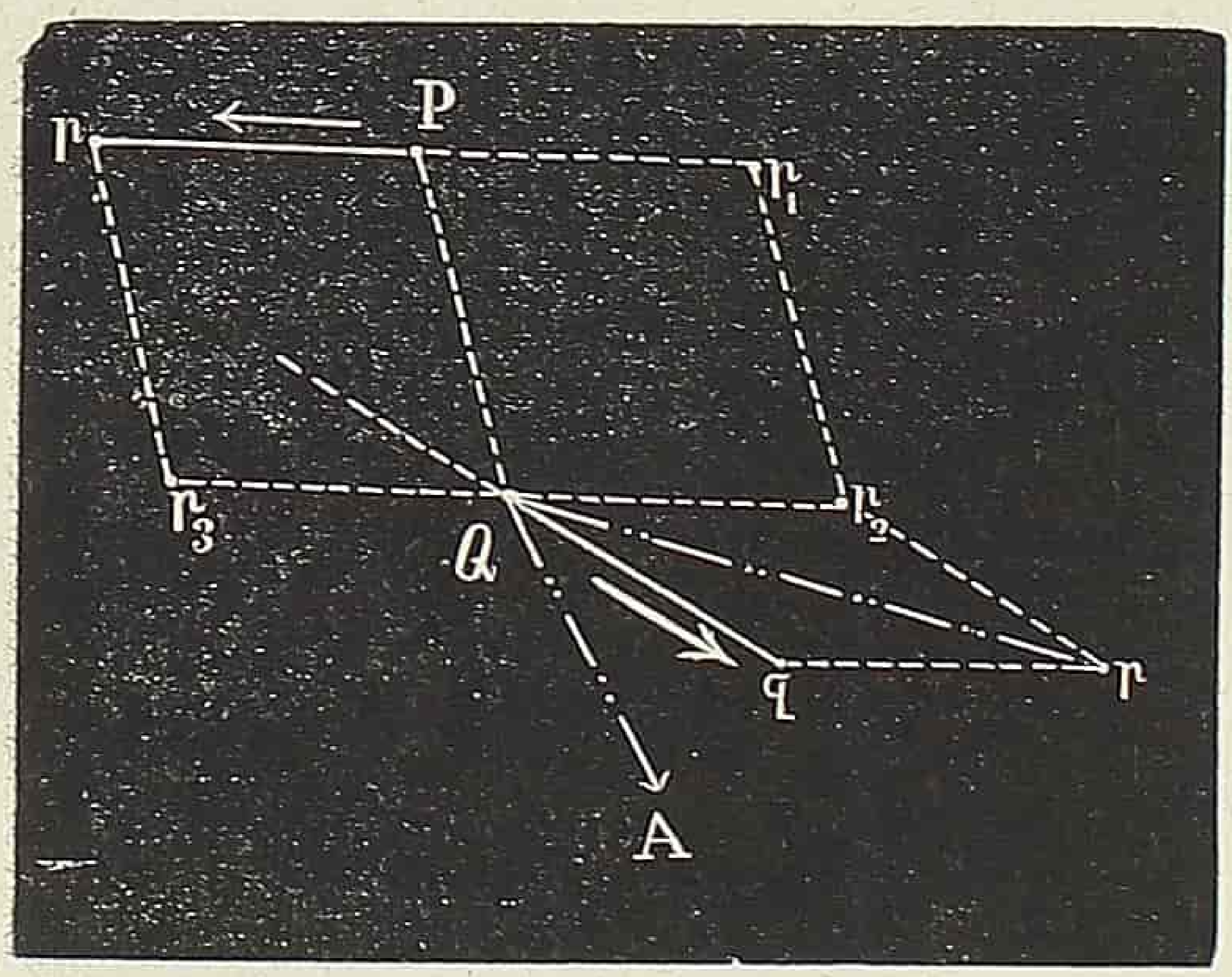
Кретање тела N, односно тела M, биће такође обртање око осе A. Ово је обртање равно и противположено горенађеном резултирајућем обртању.

Сљедство. — Ако би отношење $\frac{w}{w,}$ било стално, онда ће оса A определена по напред реченом правилу, бити стална у простору.[1]

Напред изложену теорију о релативном кретању тела, употребићемо ми доцније на решење више задатака, који се тичу махина. —

2-ги. Пример. Два тела обрћу се једномерно око две осе, које се неналазе у једној истој равнини: Тражи се да се определи релативно кретање једног тела према оном другом.

Решење: Нека су $\overline{Pp}$ и $\overline{Qq}$ осе, Сл: α; а w, и w', угловне брзине два тела. Повуцимо најкраће одстојање $\overline{PQ} = h$ између ове две осе. — Да би определили релативно кретање другог тела, треба да сложимо његово обртање $\overline{Qq}$ са обртањем Pp,; које би равно и против положено било обртању Pp. — Ради тога, узмимо два противположена обртања Qp_2 и Qp_3, којих је абсолутна вредност равна обртању Pp. — Тражено релативно кретање, неће се тиме ни у чему променити. — Но обртања Qq и Qp_2 сложена дају обртање Qr, сем тога остаје јошт спрега $(p_1\ p_3)$, која одговара напредном кретању $\overline{QA}$, управном на равнину PQp_2.



Сл. α.

Дакле тражено релативно кретање састоји се у обртању Qr и напредном кретању $\overline{QA}$, кога је брзина $v = wh$.

Теорија котрљања и клизања тела.

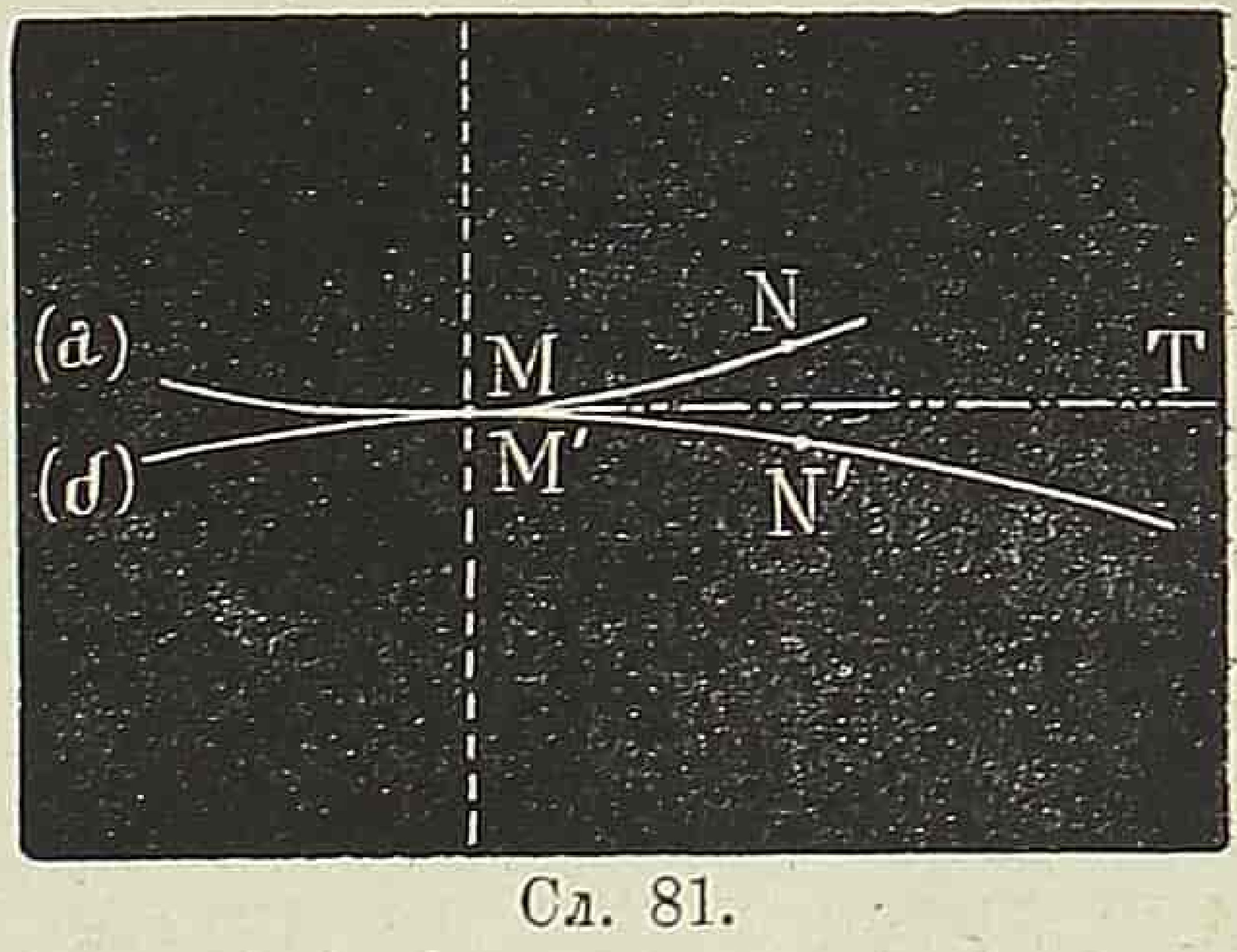
148. Кад смо испитивали непрекидно (континуално) кретање неке слике у њеној равнини, и неког тела у простору,

---

[1] Но она опет заслужује име тренутне осе, јер је она само у релативном кретању, оса обртања, и потоме релативно није стална. —

онда смо се упознали са котрљањем једне криве пруге по другој кривој пруги, и једне површине по другој површини, и ма да смо лако сватили у чему се састоји ово котрљање, ми ћемо га опет овде тачно да определимо, како би могли добро сватити природу оваковог кретања у свима могућим случајима. —

149. Ако се нека крива пруга *a*, тако по другој кривој *b* креће [Сл. 81,] да су обе непрестано тангенте једна другој, или што исто значи, да обе имају у тачки додира, у сваком тренутку исту тангенту, а сем тога да тачка додира, пролази у исто време једнаке луке по обојим пругама, онда се каже, да се крива пруга *a*, просто котрља по кривој *b*. — Последњи услов може се и овако изрећи: да се разни луци као н. пр. $\widehat{MN}$ криве пруге *a*, постепено слажу са луцима $\widehat{M'N'}$ исте дужине, криве пруге *b*. —



Сл. 81.

150. Ако се два тела тако једно према другом крећу, да се површине ових тела непрестано у једној тачки додирају, онда тачка додира, креће се у опште по свакој од ових површина.

Сматрајмо геометричко место постепени положаја, које тачка додира заузима на површини првог тела, а тако исто и геометричко место њени положаја, које постепено заузима на површини оног другот тела. Ако се сад при кретању тела, прва од ове две криве пруге, котрља по оној другој по напред поменутим условима, онда се каже, да је кретање првог тела по другом просто котрљање.

151. Два тела могу се у више тачака додирати. — Ако би сада имали неки извесни број тачака додира, које су одвојене једна од друге, онда ћемо добити котрљање једног тела по другом за све оне тачке додира, за које су горемоменути услови котрљања испуњени.

Ако би се тела у безбројно млого тачака додирала, које скупа образују тако звану пругу додира, онда се каже да се једно тело котрља по другом, у целом пространству ове пруге додира, ако су нижеозначени услови испуњени.

Представимо себи да смо повукли ма какву криву пругу *c*, на површини првог тела, но тако да ова крива пресеца пругу додира у разним њеним положајима, које постепено заузима на првом телу. — Представимо даље, да смо означили на површини другог тела све тачке, у којима крива пруга *c*, постепено додира ову површину. — Скуп свију ових тачака образоваће другу криву пругу *d*; на површин овог другог тела. Ако се сада при кретању тела, пруга *c* котрља по пруги *d*., онда ће се и тело на коме је пруга *c* означена, котрљати по оном другом телу, и то по целој дужини њиове пруге додира. —

152. Дефиниција, коју овде постависмо о котрљању једне криве пруге по другој, или једног тела по другом, за разне случаје, који се могу десити; неусловљава никојим начином, да једна од кривих пруга, или једно од два тела, буде у покоју. — Котрљање је абсолутно, ако је једна од кривих пруга, или једно од тела, некретно; а релативно, ако се обе криве пруге, или оба тела једновремено у простору крећу. Међутим релативно котрљање може да се сведе на абсолутно по истим правилима, која смо поставили за свођење (редуцирање) ма каквог релативног кретања на абсолутно кретање. (№ 147).

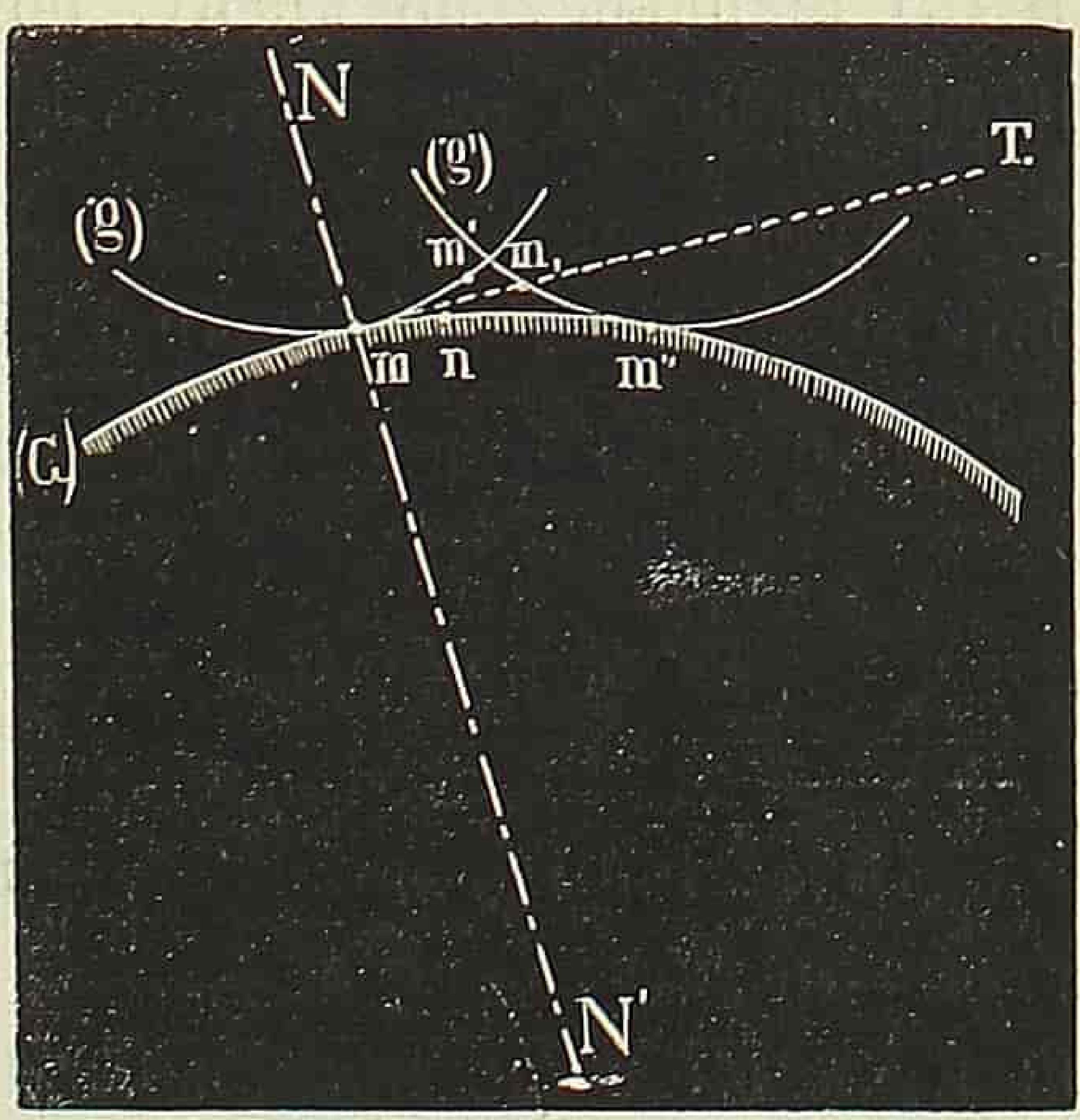
153. Кад се нека кретна пруга котрља по другој, било да ове пруге постоје саме за себе, било да су означене на површини два тела, од којих једно се креће по оном другом, онда је лако видети, да тачка додира двеју криви пруга, сматрана на кретној пруги, налази се за безкрајно мало време у покоју, или што је исто, брзина тачке додира једног тела према оном другом, равна је нули, дакле елементно кретање криве пруге, или тела коме ова пруга принадлежи, мора бити обртање око тренутне осе, која пролази кроз тачку додира *M* (Сл. 81). Отуда сљедује, да кад неко кретно тело додира непрестано неко некретно у више тачака,

онда ће кретање првог тела по другом, бити котрљање за све тачке додира. Елементно кретање тела у сваком тренутку биће обртање око тренутне осе, која пролази кроз разне тачке додира са некретним телом, и сљедствено све ове тачке морају се налазити у правој пруги. —

154. Ако кретно тело додира некретно у безбројно млого тачака, које скупа образују пругу додира, онда се само може прво тело по другом да котрља, дуж целе ове пруге додира, ако је она права пруга. — Да би се тим начином кретно тело могло непрекидно (континуално) котрљати по некретном, за неко извесно време, дуж целе пруге додира, нуждно је, да површине ова два тела буду тако зване правилне површине (surfaces reglées) као што је н. пр. котрљање једног ваљка по другом, једног конуса по другом и т. д.

155. Ако се два тела непрестано само у једној тачки додирају, но тако да се једна иста тачка једног тела постепено слаже, са разним тачкама површине оног другог тела, онда се каже: да је кретање првог тела по другом, *просто клизање.* Лук ds описан за време dt, тачком првог тела, по површини оног другог, зове се елементни лук клизања. — Количник $\frac{ds}{dt,}$ брзина је клизања [vitesse de glissement] на крају времена dt. — Клизање је абсолутно или релативно, потоме како се буде само једно од два тела у простору кретало, или се оба крећу. Ми ћемо овде испитивати само абсолутно клизање, јер релативно клизање може се свагда довести, да буде абсолутно, на основу правила под № 147. —

156. Ако би оба геометричка места тачака додира два тела, имали једну исту тангенту у појединим тачкама додира, но луци $mm' = ds$ и $mm'' = ds'$ [Сл. 82] који одговарају једном истом времену dt, не би били једнаки, онда



Сл. 82.

ће кретање једног тела по оном другом у опште, бити смешано т. ј: састоја ће се у исто време из котрљања и клизања. И заиста, нека нам (G) представља геометричко место тачака додира некретног тела, а (g) геометричко место исти тачака додира кретног тела. Нека је даље m тачка додира у сматраном тренутку, а m' и m'' тачке, које би се морале слагати на крају једног елементног кретања. — Ово елементно кретање може се у опште сматрати као да је сложено из котрљања и клизања, јер геометричко место (g) може да се премести из првог свог положаја у други, ако се буде најпре котрљало по геометричком месту (G) дотле, док се тачка m, несложи са таковом тачком n, да је $\overset{\frown}{mn} = \overset{\frown}{mm'}$, а затим ако се клиза до тачке m''. Дужина лука $\overset{\frown}{nm}$, величина је елементног клизања за време dt; и ова величина равна је разлики $ds' - ds$ а тако исто равна је и одстојању $\overset{\frown}{m'm''}$ или mm_1 јер су одстојања тачака m' и m_1 од криве пруге G, безкрајно мала другог реда, [која се могу пренебрегнути]. Из свега тога може се поставити ово:

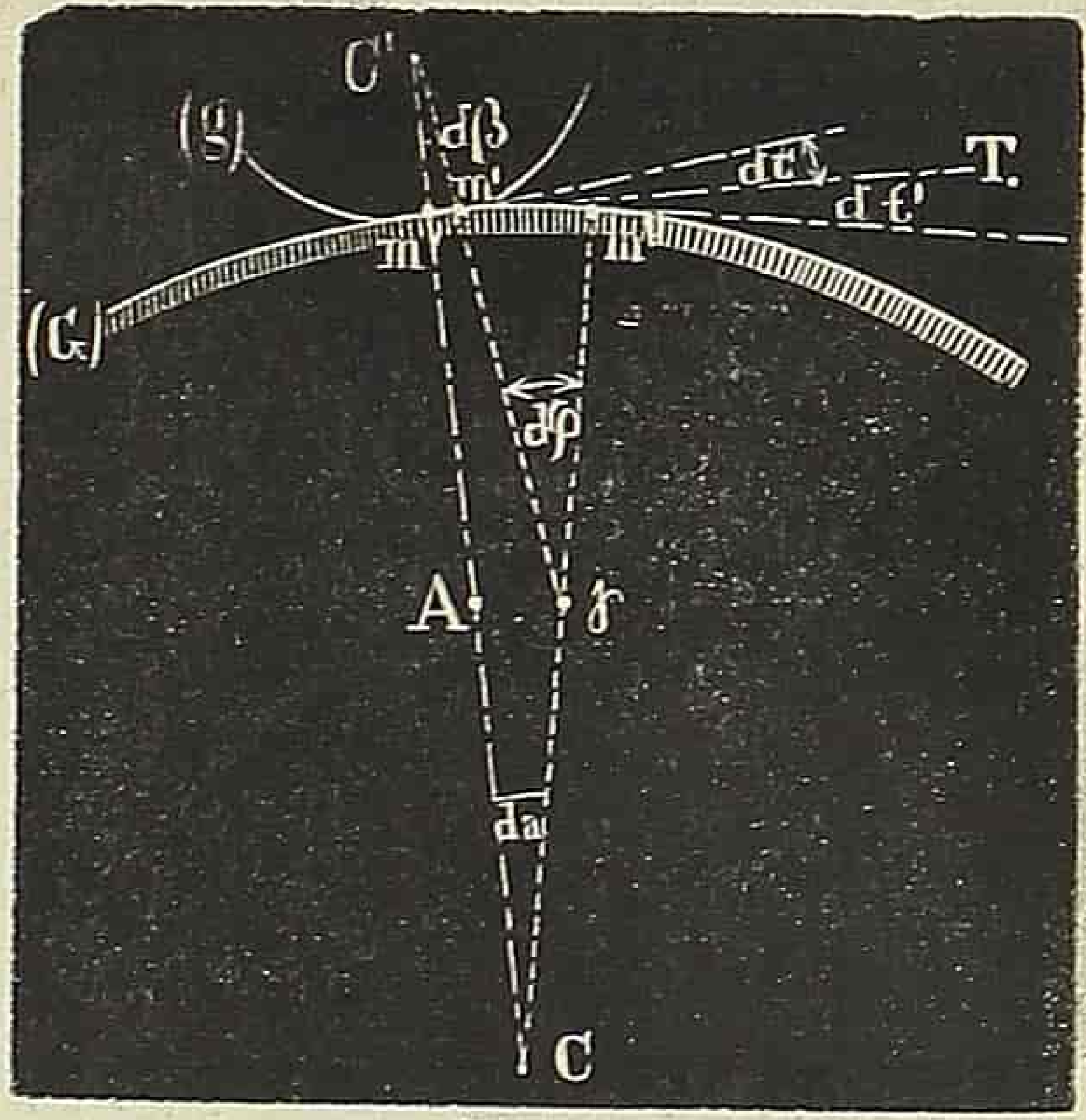
Правило: *Величина елементног клизања, равна је одстојању, које раздваја на крају времена* dt, *две тачке, које су се у почетку овог времена слагале.*

Ово правило вреди и онда, кад се обе криве пруге (G) и (g) једновремено крећу, јер величина лука клизања, зависи јединствено од релативног кретања ови криви пруга.

Ако поделимо лук $\overline{nm''} = ds' - ds$ са dt, количник ће бити брзина клизања. Правац ове брзине биће управљен по $\overline{nm''}$ или $\overline{mm'}$, т. је: у граници по заједничкој тангенти $\overline{m\mathrm{T}}$.

Конструкција тренутног средишта обртања.

157. Напред поменуто елементно кретање, које разложисмо на котрљање и клизање [т. ј: на обртање око тачке m, и на напредно кретање $m\mathrm{T}$] може се такође произвести, као што је познато, простим обртањем око неког тренутног



Сл. 83.

средишта A [Сл. 83] које се налази у извесној тачки заједничке нормале $\overline{CC'}$. Ово тренутно средиште обртања можемо лако определити, кад су нам позната средишта кривина кривих пруга (G), и (g), и отношење лукова $\overset{\frown}{mm'}$, и $\overset{\frown}{mm''}$, јер је оно граница, којој се приближава пресечна тачка γ, две нормале $\overline{C'm'}$ и $\overline{C'm''}$. — Уго обртања $d\varphi$ раван је сбиру углова $(d\alpha + d\beta)$ нормала, са заједничком нормалом $\overline{CC'}$. Но као што је $> d\alpha = > d\tau'$ [т.је: углу тангената повучени у крајним тачкама лука mm''] а $> d\beta = > d\tau'$, то ће бити:

$$d\varphi = d\tau + d\tau'.$$

158. *Рачунање лука клизања.* Из саме слике лако је видити да је израз лука $m'm''$.

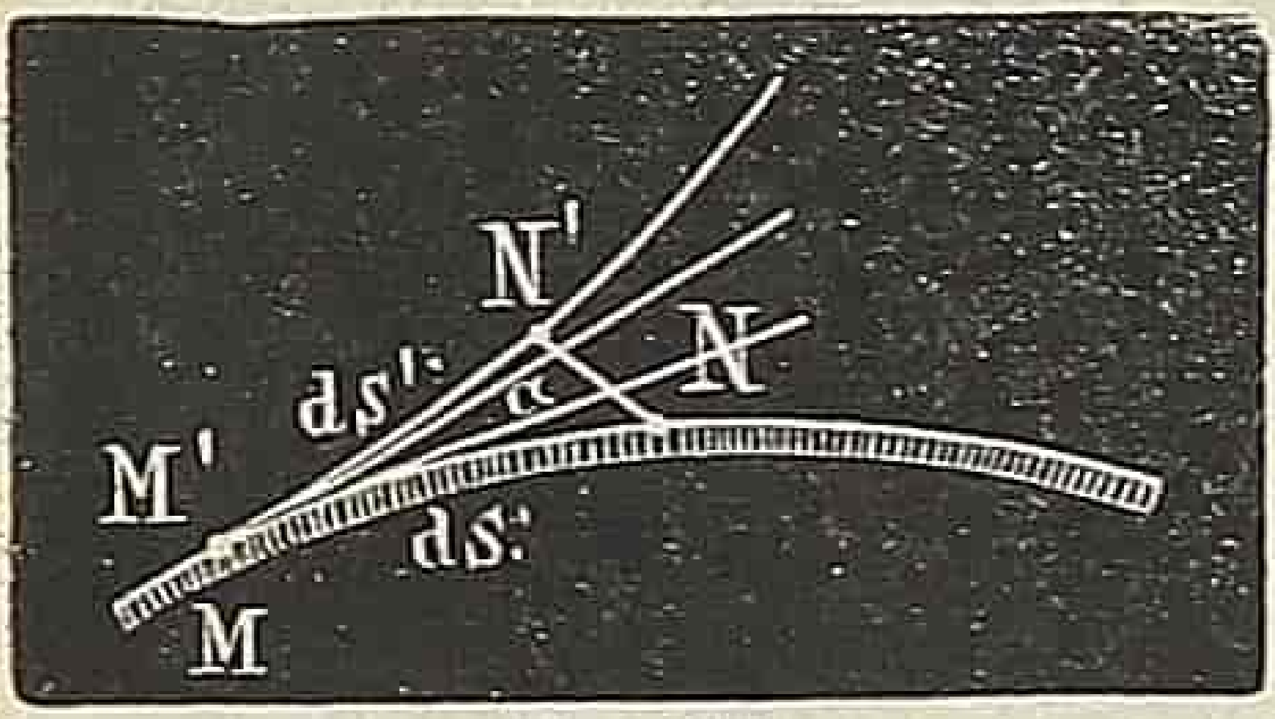
$$r\,(d\tau + d\tau') = r d\varphi.$$

Означавајући са r, одстојање тренутног средишта обртања од тачке m. — Ако би кретање било *просто клизање*, онда један од углова $d\tau$, $d\tau'$, мора бити раван нули, но оба ова угла немогу у исто време бити нула, дакле клизање може само онда бити $= o$ кад је $r = o$. Отуда ово:

Правило. *Кад се две криве пруге, једна по другој тако крећу, да се непрестано додирају, онда да би клизање нула било, потребно је а и довољно је, да се њина тачка додира слаже са тренутним средиштем релативног обртања.*

Напротив котрљање је нулла, и кретање је просто клизање 1-во. Кад се неменљива тачка додира налази на кретној кривој пруги, и 2-го. Кад се ова тачка налази на сталној кривој пруги.[1] —

159. Ако оба геометричка места, тачака додира два тела, не би имали једну исту тангенту, онда ће кретање једне криве пруге (једног геометричког места) по другој бити тако звано, *угловно смсшано клизање*. Лук је елементног клизања за време dt, одстојање $\overline{NN'}$, (Слика 84) у почетку овог времена, између тачака N и N', које ће се слагати на крају истог времена. Овај дакле лук раван је .... $\sqrt{ds^2+ds_1{}^2-2dsds_1{}^2cos\,\alpha}$ означавајући са α; уго тангената у тачкама додира M и M'. Брзина клизања биће



Сл. 84.

$$v_g = \sqrt{\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{ds_1{}^2}{dt^2} - 2\frac{ds.ds_1}{dt^2}.\ cos\ \alpha}$$

т. ј. функција угла α, и брзина, са којима се тачка додира релативно креће по обојим кривим пругама.

У овом последњем изразу садржани су као особити случаји, предходећи резултати, потоме како будемо имали $\alpha = o$; или $\alpha = o$ и $\frac{ds}{dt} = \frac{ds_1}{dt}$, или $\frac{ds}{dt} = o$ или на последку $\frac{ds}{dt} = o$ и $\frac{ds_1}{dt} = o$. —.

Ми ћемо сада ради бољег објаснења напред изложене теорије, да разрешимо неколико на махине односећи се задатака. —

---

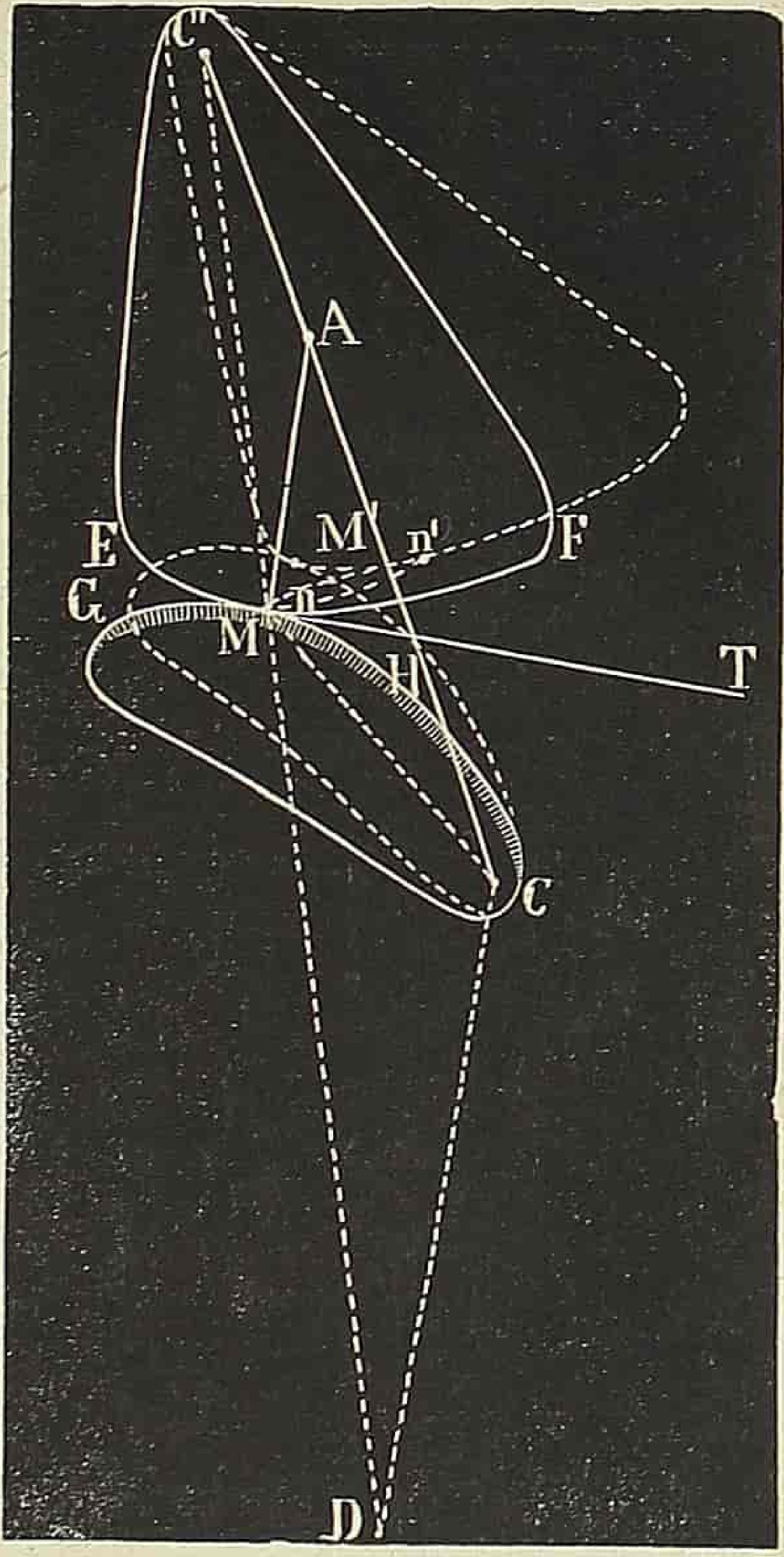
[1] Из тога сљедују ова два правила:

1-во. Правило. Кад нека крива пруга клиза по каквој сталној пруги, која свагда додира кретну пругу у једној тачки, онда нормала у овој тачки, котрља се по еволути (dèveloppèe) сталне криве пруге.

2-го. Правило. Кад се нека крива пруга креће, додирајући непрестано сталну пругу у једној тачки, еволвента кретне пруге котрља се по сталној нормали у тачки додира. —

1-ви Задатак. Два тела EFC', и GHC, обрћу се око две сталне равноодстојне осе, пројектиране у C, и C', и при том обртању непрестано се додирају. Тражи се да се определи: 1-во. Отношење угловни брзина w, и w', ова два тела, у тренутку кад буду заузимала неки дати положај. 2-го. Отношење између ових брзина, и брзине v_g њиног релативног клизања.

Решење. Нека је M, тачка додира два вопросна тела у неком извесном тренутку. За безкрајно мало време dt, оба тела обрнуће се око својих оса C и C' за врло мало, и рецимо да ће на крају овог времена, тачка додира бити M'; тачке пак, које су се у M слагале, налази ће се у n, и n', описујући за време dt безкрајно мале луке $\overset{\frown}{Mn}$ и $\overset{\frown}{Mn'}$ око средишта C и C'. Ове луке можемо сматрати као праве пруге, управне на $\overline{MC}$ и $\overline{MC'}$. — По напред изложеној теорији, величина клизања биће, безкрајно мало одстојање $\overset{\frown}{nn'}$ кога је правац у граници, равноодстојан са тангентом $\overline{MT}$, дакле управан на нормалу $\overline{MA}$. —



Сл. 85.

Пошто је то тако; ако сматрамо безкрајно мали триуго Mnn', имаћемо:

$$\overline{Mn} = ds = wdt.\ \overline{CM}.$$
$$\overline{Mn'} = ds' = w'dt.\ \overline{C'M}.$$
$$\overline{nn}' = dS = v_g.dt$$

Но ако кроз тачку C, повучемо равноодстојну $\overline{CD}$ са $\overline{MA}$, и ову продужимо до пресецања у D са CM, онда ће бити; $\triangle\ MCD \backsim \triangle\ Mnn'$ и дакле:

$$\frac{\overline{Mn}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{Mn'}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{nn'}}{\overline{CD}}$$ или

$$\frac{w dt.\, \overline{CM}}{\overline{CM}} = \frac{w' dt\ \overline{C'M}}{\overline{MD}} = \frac{v_g dt.}{\overline{CD}}$$ отуда

$$\frac{w}{w'} = \frac{C'M}{MD},$$ но и $\triangle\ C'MA \infty \triangle\ CDC$ дакле

$$\frac{C'M}{MD} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{CA}},$$ потоме

$$\frac{w}{w'} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{CA}}$$ што ће рећи: да

су угловне брзине w, и w', преокренуто сразмерне одстојањама оса од пресечне тачке A, нормале $\overline{MA}$, са правом $\overline{CC'}$, и тиме је прво питање задатка решено.

Даље имамо $v_g = w.\, \overline{CD}.$

но као што је $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'A}+\overline{AC'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AC'}}$ дакле

$$\overline{CD} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AC'}}(\overline{CA} + \overline{AC'}),$$ осим тога

$$\left.\begin{array}{l} w\,\overline{CA'} = w'\,\overline{C'A} \\ w\,\overline{C'A} = w\,\overline{C'A} \end{array}\right\}$$ потоме $w\ (\overline{CA} + \overline{C'A}) = \overline{C'A}\,(w + w')$ и

$$\frac{\overline{CA}+\overline{C'A}}{\overline{C'A}} = \frac{w+w'}{w}$$ то отуда сљедује да је: $v_g = w.\overline{MA}.\ \frac{w+w'}{w} = \overline{MA'}\ (w + w')$

а тим је и друго питање зад: решено. —

Сљедство. Да клизање буде нула, треба да је:

$\overline{MA} = o$ т: је: да се тачка додира две криве пруге напази у правој $\overline{CC'}$. — Да би пак отношење угловни брзина w, и w', било стално, потребно је а и довољно је, да заједничка нормала две криве пруге, пресеца праву $\overline{CC'}$ у некој сталној тачки. — Отуда сљедује да и дужине $\overline{CM}$, и $\overline{C'M}$, морају бити сталне, и сљедствено криве пруге, описане тачком M, око средишта C, и C', јесу два круга, којих су полупречници r, и r', определени овим једначинама.

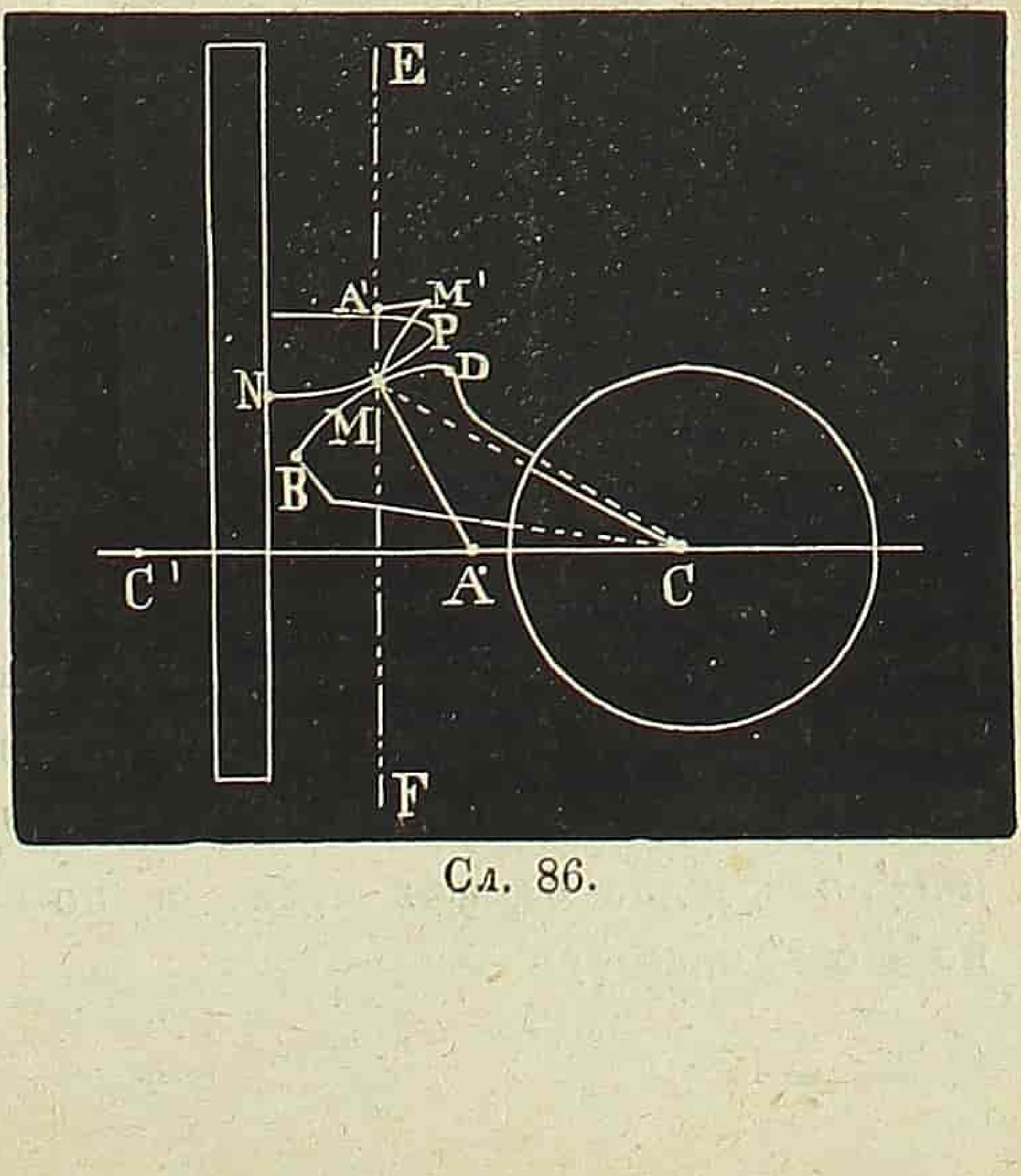
$$r + r' = CC'; \qquad \frac{r}{r'} = \frac{w'}{w}$$

Примедба. Предходећи резултати могу се као сљедство, непосредно извести из теорије релативног кретања два тела. И заиста, лако је дознати, да је релативно кретање једног тела односно другог, тренутно обртање $W = w + w'$ (види № 147 пример. Сл. 80) и тренутна оса овог обртања налази се у некој тачки праве CC'. — Сем тога, пошто оба тела непрестају додирати се, то се тренутно средиште обртања налази и на заједничкој нормали, повученој у тачки M. дакле ово тренутно средиште обртања биће у пресечној тачки A, праве CC', и нормале повучене у M. Кад је тачка A, тако определена онда знамо,

да је: $$\frac{w}{w'} = \frac{\overline{C'A}}{CA}$$ осим тога

брзина клизања биће $v_g = \overline{MA}.\ W = \overline{MA}\ (w + w')$ као што напред нађосмо. —

2-ги. Задатак. Једно од два тела обрће се око осе у C, са угловном брзином w, а друго тело креће се са брзином v, напредно и управно на осу обртања по правцу $\overline{FE}$, сљедствено равноодстојно са равнином Слике (Слика 86.)



Сл. 86.

Нека су BMD, и NMP, пресеци површина вопросни тела са равнином слике, а M тачка додира ових пресека у почетку времена dt. — Рецимо да ће се тачке поменути пресека, које се у M слажу, налазити на крају времена dt у M', и A', по томе биће.

$$\overline{MM'} = wdt\,\overline{MC};\ \overline{MA'} = vdt,\ \overline{A'M'} = v_g\,dt.$$

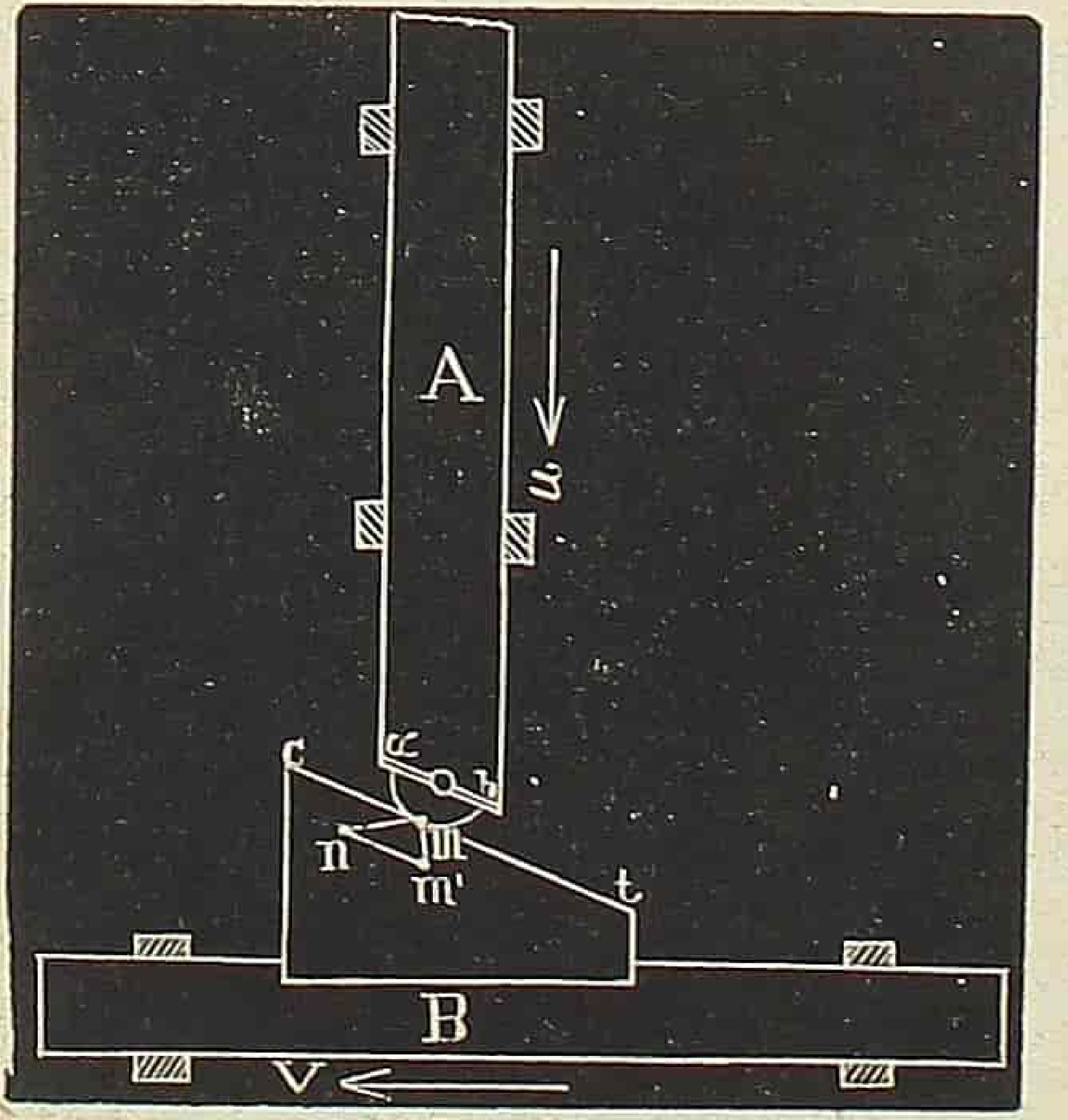
Означавајући као и у предходећем задатку са v_g брзину клизања. Повуцимо у M заједничку нормалу $\overline{MA}$. Ова нормала биће управна на $\overline{A'M'}$; ако јошт повучемо кроз C управну $\overline{CA}$, на правац $\overline{FE}$, брзине v; онда ће $\triangle$ MCA у граници бити подобан $\triangle$ $MM'A'$, имаћемо дакле.

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{MA}} \text{ или } \frac{w'\,\overline{MC}}{\overline{MC}} = \frac{v}{\overline{CA}} = \frac{v_g}{\overline{MA'}}, \text{ отуда}$$

$$v = w\,\overline{CA};\ \text{и}\ v_g = w\,\overline{MA}$$

Ове исте резултате могли смо извести из једначина $w\,\overline{CA} = w'\,\overline{C'A}$, и $v_g = \overline{MA}\,(w + w')$, предходећег задатка примећавајући 1-во. Да $w'\,\overline{C'A}$, као брзина тачке A, сматране као чврсто сајужене са телом C', постаје v, и 2-го да се w' приближава својој граничној вредности $= o$ кад се $\overline{C'A}$ безкрајно увећава. —

3-ћи. Задатак. Узмимо сада случај, у коме се два тела при непрестаном додиру напредно крећу, по правцима који су у слики (87), са стрелицама означени. Рецимо да смо кроз тачку m, додира оба тела, положили равнину равноодстојну са правцима оба напредна кретања, и нека су amb, cmt, одговарајуће додирајуће се пресечне пруге оба тела, са поменутом равнином. Нека су на последку u, и v, одговарајуће брзине. — Рецимо да ће се тачка m тела



Сл. 87.

Примедба. Једначине $w\,\overline{CA} = w'\,\overline{C'A}$, и $v = w\,\overline{CA}$, које овде нађосмо, исте су као и једначине, које смо нашли за прва два примера тренутни средишта обртања [№ 108 прим: 3 и 4.] О томе се можемо лако уверити, ако представимо себи, да тачке A, и B, које се обрћу око O, и O', или једна од њих креће се по правој $\overline{MN}$, јесу средишта два круга која се додирају. —

A, на крају времена dt, налазити у m'; а иста тачка m, сматрана као да принадлежи телу B, рецимо да ће се налазити у n, на крају истог времена dt. — Потоме имаћемо:

$$\overline{mm'} = udt, \quad \overline{mn} = vdt.$$

Две тачке m' и n, кад су врло близу једна другој, налазиће се у правој пруги равноодстојној са тангентом $\overline{mt}$. — Ако још означимо по обичају са v_g брзину клизања оба тела. биће:

$$\overline{m'n} = v_g\, dt$$

Ако краткости ради означимо са t правац тангенте, онда из свега напред-реченог сљедује:

$\frac{u}{\overline{mm'}} = \frac{v}{\overline{mn}} = \frac{v_g}{\overline{m'n}}; \ \overline{mm'} : \overline{mn} = \sin\ (\overline{vt})$:[1] $\sin\ (u\ \ t)$

отуда $\overline{mm'} = \frac{\overline{mn} \sin\ (\overline{vt})}{\sin\ ut}$ и сад замењујући равна место равни, имаћемо:

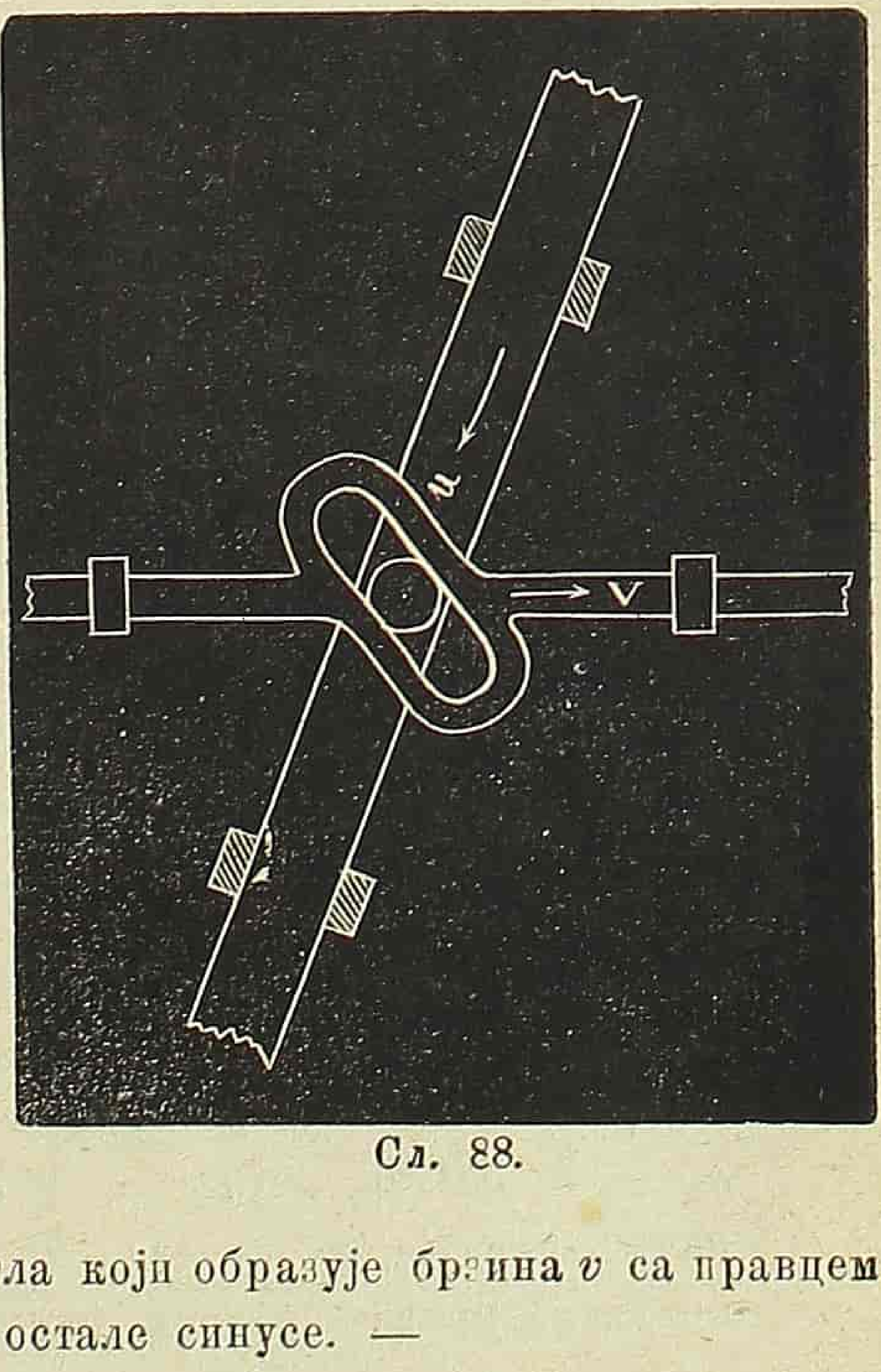
$\frac{u \sin\ (u\ t)}{\overline{mn}. \sin\ (vt)} = \frac{v}{\overline{nm}}$ дакле $\frac{u}{\sin\ (vt)} = \frac{v}{\sin\ (ut)} =$ као што је лако дознати $\frac{v_g}{\sin\ (vu)}$

Прим: 1-во. Све ове резултате, могли смо непосредно извести из теорије о слагању брзина, сматрајући једну од брзина u, v; као привлачну, другу, као абсолутну, а v_g по правцу тангенте као релативну брзину.

Прим: 2-го. У предходећој слики, брзине u; и v; налазе се под правим углом, дакле је $\sin\ (vu) = 1$ и потоме

$$v_g = \frac{u}{\sin\ (vt} = \frac{v}{\sin\ (ut)}.$$

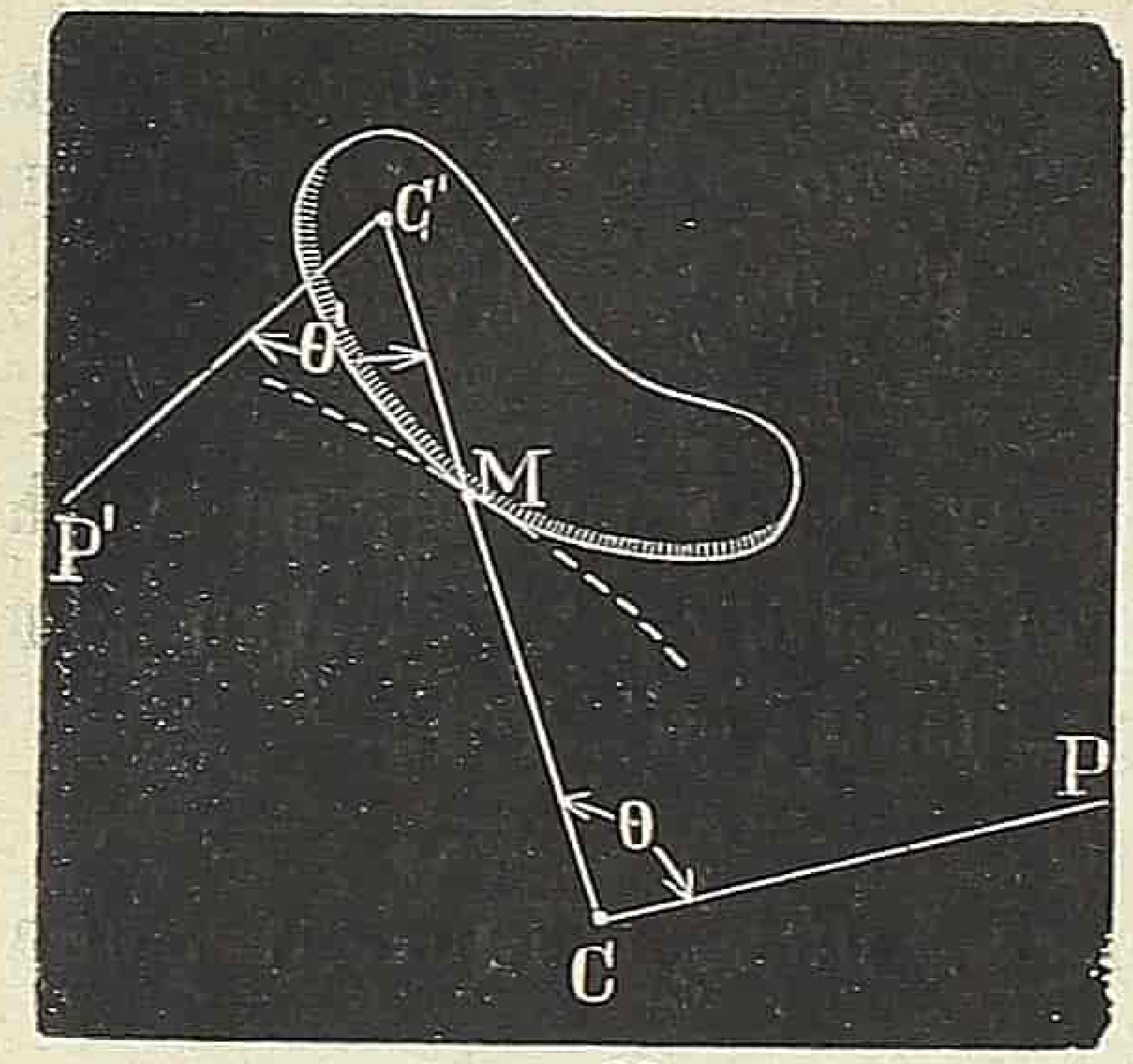
Но ове брзине могу бити и под косим (оштрим) углом, као што слика (88) показује.



Сл. 88.

---

[1] $\sin\ (vt)$ треба разумети $\sin$ угла који образује брзина v са правцем тангенте $\overline{mt}$, тако исто и за остале синусе. —



Сл. 89.

4-ти. Задатак. — Дата је крива пруга C' (Сл. 89) да се определи, 1-во. Пруга C. тако, да клизање буде нулла; и 2-го мењиво отношење једновремени брзина два зубца.

Аналитично решење овог задатка:

Поставимо $\overline{CC'} = a$; $\overline{CM} = r$, $\overline{C'M} = r'$ и нека су Θ и Θ' угли, које образују радиуси вектори r, и r', са двема осама $\overline{CP}$ и $\overline{C'P'}$ чврсто сајуженим са средиштем C и C'. Пошто крива пруга $(r\Theta)$ мора додирати у тачки M пругу $(r'\Theta')$, то постоје ове једначине:

$$r + r' = a \ldots . (1); \qquad r. \frac{d\Theta}{dr} = r' \frac{d\Theta'}{dr'}\,[1] \ldots .. (2).$$

Но као што из једначине под (1) имамо

$$dr = - dr' \ldots .. (3).$$

То једначина под (2) своди се на

$$rd\Theta = - r'd\Theta'.\,[2] \ldots (4).$$

И ово је диференциална једначина тражене пруге. Кад је једном веђ познато r, као функција од r', онда је отношење брзина

$$m = \frac{r}{r'} \ldots . (5)$$

5-ти. Задатак. Дато је мењиво отношење брзина, да се определе две криве пруге C, и C', тако да клизање буде равно нули.

---

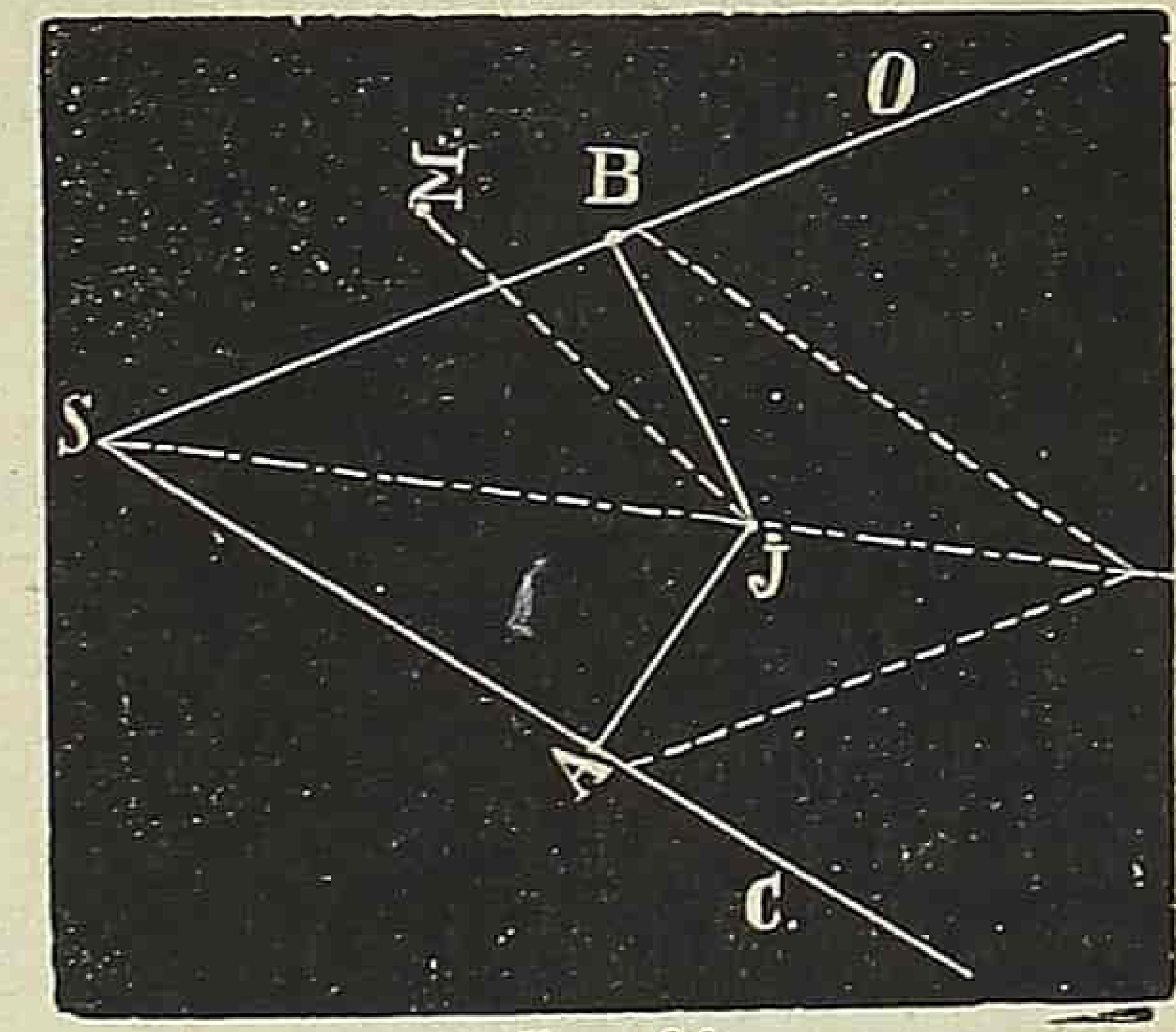
[1] Види у диференцијалном рачуну израз тангенте однешене на поларе координате. —

[2] Можемо се лако уверити, да је кретање, просто котрљање; и заиста $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{dr'^2 + r'^2 \, d\theta'^2} = ds'$. Из ове једначине сљедује, да су луци протрчани једновремено тачком додира по двема кривим пругама, једнаки. —

Аналитично решење овог обратног задатка , сљедује из горњи једначина под (1) (4) и (5).

У опште узме се, да је кретање једног тела једномерно, и да је познат закон по коме се има друго тело кретати: потоме познато је и m; као функција времена или угла Θ, који се сразмерно времену мења. —

6-ти. Задатак. Два додирајућа се чврста тела A и B (Слика 90) обрћу се око две сталне осе, које се у једној тачки S пресецају, да се определи: 1-во. Отношење угловни брзина w, и w', ова два тела у тренутку кад заузимају неки дати положај, и 2-го отношење између ови брзина и брзине v_g њиовог релативног клизања.



Сл· 90.

Решење. Нека су $\overline{SC}$, и $\overline{SO}$, осе обртања вопросни тела, M заједничка тачка додира, $\overline{MJ}$ заједничка нормала, која продире равнину CSO у тачки J. Ако би се тачка J. налазила између страна угла CSO, као што је у слики означено, онда ће се тела обртати у противположеном правцу једно другоме. — Даље ако узмемо кретање тела A као релативно, према кретању тела B, онда је лако видети да је ово релативно кретање просто тренутно обртање. — Угловна брзина W овог обртања, резултанта је абсолутног обртања w, тела A, и привлачног обртања w', које треба узети у противном правцу; дакле оса овог релатавног обртања налазиће се у равнини CSO, и биће диагонала паралелограма, кога би стране по правцима $\overline{SC}$, и $\overline{SO}$, биле сразмерне брзинама w, и w'. Сем тога, оба тела додирајући се непрестано, тренутна оса релативног обртања, налазиће се са нормалом $\overline{MJ}$, у истој равнини, дакле биће управљена по правцу $\overline{SJ}$. Ако дакле из J, спустимо управне $\overline{JA}$, и $\overline{JB}$, на $\overline{SC}$, и $\overline{SO}$, онда ћемо имати једначину:

$$w\ \overline{AJ} = w'\ \overline{BJ}.$$

Ова једначина показује нам, да ако би тачку J сматрали у датом тренутку као сајужену, било са телом A, било са телом B, онда ће она имати једну исту брзину. — Означававајући са α, и β, угле JSC, и JSO, имаћемо резултанту:

$$W = w \cos \alpha + w' \cos \beta.$$

Што се тиче брзине клизања v_g, то је она иста коју има тачка M, при кретању једног тела односно оног другог; ако дакле означимо са p, одстојање тачке M од осе SJ, онда ће бити:

$$v_g = pW = p \, (w \cos \alpha + w' \cos \beta). \text{ —}$$

7-ми. Задатак. Два тела, од којих једно се обрће, а друго напредно креће, равноодстојно са осом обртања првог тела, тражи се да се определи: 1-во. Отношење брзина ова два тела; и 2-го. Отношење између ови брзина и брзине њиовог релативног клизања. —

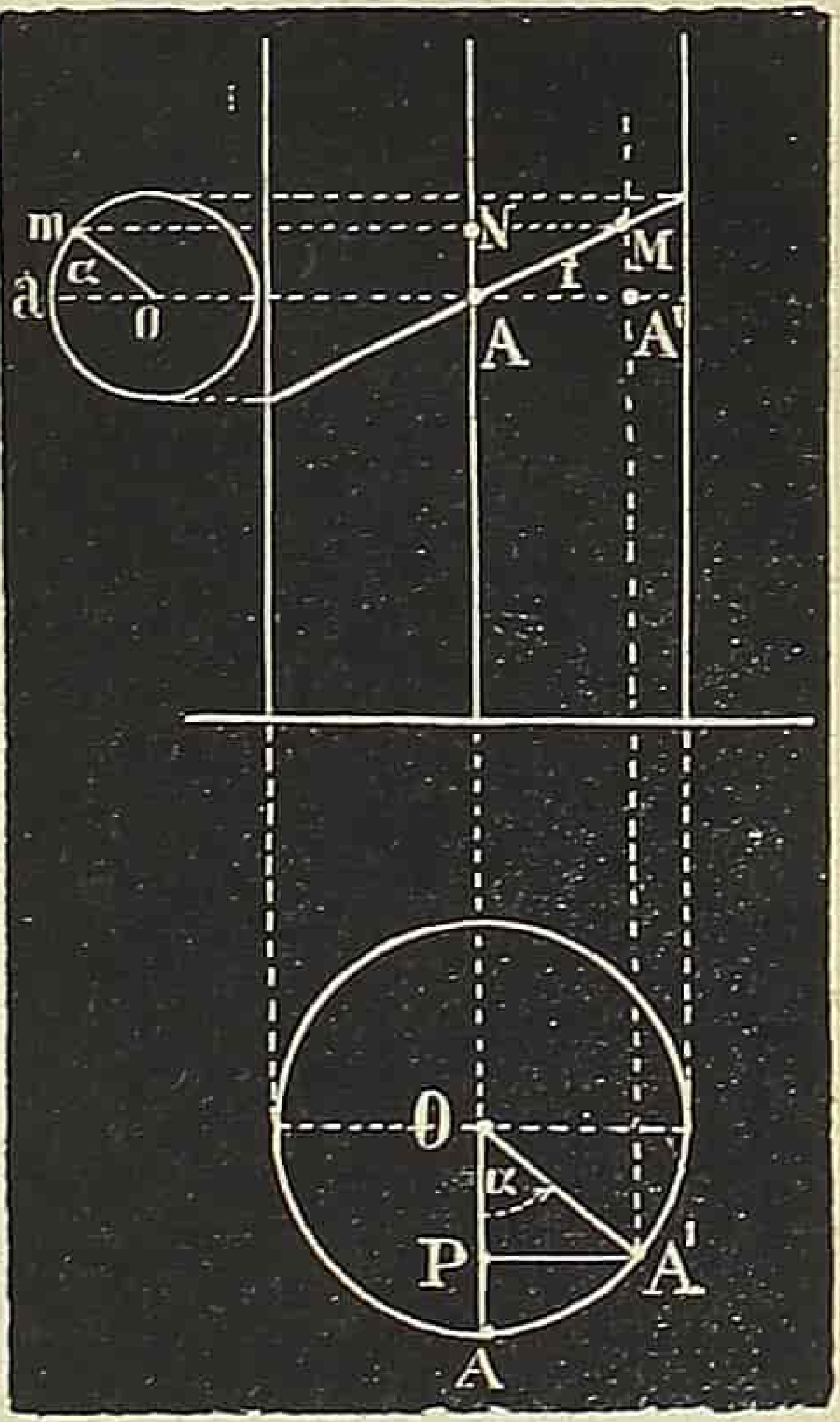
Решење. Пре свега имамо напоменути, да најпростији пример горепоменути кретања, даје нам шраф и његова матрица, било да се матрица просто обрће а шраф да се напредно креће, равноодстојно са његовом осом, било да се шраф просто обрће око своје осе, а да се матрица напредно креће равноодстојно са овом осом.

Даљеваља напоменути, да код сваког шрафа имамо сматрати: 1-во. Ваљак око кога је завојак обмотан. 2-го. Квадратни или триугли пресек завојка. 3-ће. Корак т: је: пут, који је протрчала, после учињеног једног целог обрта, нека кретња тачка на завојку, равноодстојно са осом, налазећи се непрестано у сталном одстојању од ове осе. 4-то. Број разни завојака [величина корака подељена са овим бројем, даје одстојање од средине до средине, равноодстојно са осом шрафа два суседна завојка]. Напоследку 5-то. Правац обртања шрафа на десно или на лево.

Узмимо у опште да нека тачка напредно кретајућег се тела, клиза по телу, које се обрће. Ова тачка описаће на обртајућем се телу криву пругу, и ова пруга налазиће се на површини ваљка кружне основице. Од форме ове пруге зависи отношење, које постоји између брзине напредно кретајућег се тела, и угловне брзине тела које се обрће. — Да ове две брзине буду једномерне, крива пруга мора бити тако звана завојница или шрафна пруга (hélice), које је корак раван протрчаном путу напредно кретајућег се тела, за време док је друго тело учинило један обрт, и ово се заиста код шрафа и дешава. —

Ако би крива пруга удаљена за r од осе обртања, била ма која друга, а не шрафна пруга, то означујући са w, угловну брзину обртајућег се тела, у тренутку, кад нека тачка M напредно кретајућег се тела, заузима на овој кривој пруги положај A (Сл. 91) са i уго образован тангентом ове криве, и равнином управном на осу обртања, можемо лако из ови дата определити брзину v, напредно кретајућег се тела у вопросном тренутку, а тако исто и брзину v_g клизања, и заиста имаћемо,

$$v = rw\, tang i\,; \text{ и } v_g = \frac{v}{sin i} = \frac{rw}{cos i}.$$



Сл. 91.

Ако би крива пруга била елипса, онда непрекидно просто обртање једног тела у истом правцу, произвело би нијање (нијално кретање mouvement d' oscillation) оног другог тела. Нека је i уго, образован равнином криве пруге, и равнином управном на осу обртања, коју ћемо ми овде узети, да је вертикална ради лакшег схваћања. — У извесном неком тренутку тачка, која клиза по вопросној кривој пруги, налазиће се у A т: је: у крају њеног хоризонталног пречника. На крају извесног времена, ваљак ће се обрнути за уго $\alpha = AOA'$; друго тело попеће се на висину $\overline{AN} = \overline{A'M} = \overline{AP}\, tang i = \overline{AO} sin\, \alpha\, tang i$; *отуда можемо закључити: да ова клизајућа тачка* напредно кретајућег се тела, има исту ортогоналну пројекцију на некој вартикалној, као нека тачка m, која би се кретала по периферији вертикалног круга полупречника $\overline{oa} = \overline{OA}\, tang i$ са истом брзином, коју имају све тачке, које се налазе на обртајућем се телу, у истом одстојању $\overline{OA}\, tang i$, од његове осе обртања. — Ако би обртање било једномерно, онда нијално кретање напредно кретајућег се тела, биће оно исто, које смо навели под № 26; као пример мењљивог кретања. —

КРАЈ I. ДЕЛА.

II. ДЕО.

Примена Кинематике на махине.

Општи појмови о махинама, и о преносу или преиначењу кретања.

160. Пошто смо се упознали са главним правилама о кретању како једне тачке, тако и тела, а поглавито како се опредељују брзине разни његови тачака, то ћемо сада да предузмемо изучавање једновремени кретања, и определење брзина више чврсти тела, која су тако међусобом спојена, да кад се једно од њих креће, онда се морају и сва остала једновремено кретати. — Ова наша испитивања односиће се поглавито на она тела, која долазе у састав разни махина. —

Махине сматране са кинематичког гледишта

161 Једно или више међусобом спојени тела, по извесним неким правилима, зове се у опште махина.

162. Свака је махина опредељена да изврши неки извесни механички посао, и при саставу њеном, морају се свагда две, од махине са свим независне ствари у обзир узети. Ове две ствари јесу: 1-во. Извесна сила — снага, — која се у меканики зове мотор (motor) и 2-го. Посао који се хоће да изврши. — Махина је посредница, која олакшава мотору, да предпостављени посао изврши.

163. Свака махина састоји се из три главна дела: Први је део онај, на који непосредно ради снага моторна, и који ћемо ми, док се удеснија реч не нађе назвати: Примаоц (recépteur). — Његова је конструкција по природи моторне

снаге, која се мисли употребити, разна; тако н. пр. примаоц биће проста ручка (manivelle), ако се мисли да употреби снага човека; воденично коло (боље хидрауличко коло) ако се хоће да употреби сила какве текуће воде; Клип (piston), ако се употребљује као сила, разтегљивост паре и т. д.

У други део спада алат (outil ou opérateur) који је у непосредном додиру са материом, која се израђује; тако н. пр. за ковање гвожђа, биће чекић; за млење брашна, биће воденични камен и т. д.

Практично познавање алата за сваки занат, предмет је особите студије. — Теорија, како примаоца мотарне силе, тако и алата, основана је на општим динамичким начелима и законима.

На последку трећи део састављају тела, или боље меканизми, који се постављају између примаоца моторне силе и алата, и који служе за пренос кретања. (transmission de mouvoment) — Ови меканизми морају се тако саставити и удесити, да пренешено кретање од примаоца на алате, одговара послу који се има извршити.

164. Ми ћемо у овом другом делу Кинематике изучавати поглавито меканизме, који служе за пренос кретања, и ово наше изучавање, — чисто геометричко — осниваће се изкључно на правилима, коіа су у I-вом делу изложена. — По томе овај други део, може се означити под именом употребљена, а онај први, под именом чиста — теоретична — кинематика.

Приметба. Ми смо на једном месту напоменули и овде само пофторавамо, да би се јако преварили, ако би мислили, да се могу изнаћи и саставити махине за неку предпостављену цел, без обзира на снагу, која ће махину или боље њене органе покретати. Но испитивање отношења, између брзина разни тачака органа махински, спада више у обим геометрије, и ова отношења независе ни најмање од узрока, који би произвели или одржавали кретање вопросни органа, по томе дакле, могуће је предходно изучавати меканизме за пренос кретања, чисто са геометричког гледишта, без обзира на моторну силу, или одпор, који би се имао савладати; међутим меканика о силама, моћи ће свагда поставити свој veto односно кретања, нарочито они органа махински, који су без њеног саучешћа начињени. —

165. Кад се као махина узме само једно кретно тело, које се ослања на неки ослонац, као што је на прилику кретка (levier — hebel — дизаљка) онда решење свију питања, која би се код оваке махине могла поставити, и која спадају у обим кинематике, састоји се у непосредној употреби правила, која смо у првом делу изложили.

166. Нека махина, или само неки њен део, може бити састављен из два кретна тела, која могу међусобом на разне начине спојена бити, од којих у практики најобичнија су слодећа три случаја:

1. Кад се два тела напредно право-пружно крећу.

2. Кад се само једно тело напредно правопружно креће, а друго се обрће око неке сталне осе, и

3. Кад се оба тела обрћу, свако око неке сталне осе.

Ове осе могу бити или равноодстојне, или да се пресецају у једној тачки, или напоследку, могу се неналазити у једној истој равнини. — Отуда три рода сајужавања — спајања — два тела.

167. Нека махина, или само неки њен део, може бити састављен из три чврста тела, од којих једно служи за спој она друга два.

Наноследку у састав махине може доћи и такво тело, којс се превија; као што је: ланац, конопац, или каиш; даље каква течност као н. пр. вода, која би служила за спој два чврста тела.

168. Кретања разни органа неке махине, могу бити или непрекидна, и свагда у једном истом правцу, или прекидна и таква, да се правац брзине најмањс једног органа периодично мења, (тело се креће тамо амо.)

Ова разна кретања, сматрана два и два, могу се поделити у следећи пет класа.

1. Два кружна непрекидна, или једно-времено прекидна кретања.

2. Једно кружно и једно право-пружно непрекидно, или једно-времено прекидно кретање.

3. Два право-пружна кретања.

4. Два кружна кретања, једно непрекидно, а друго прекидно и

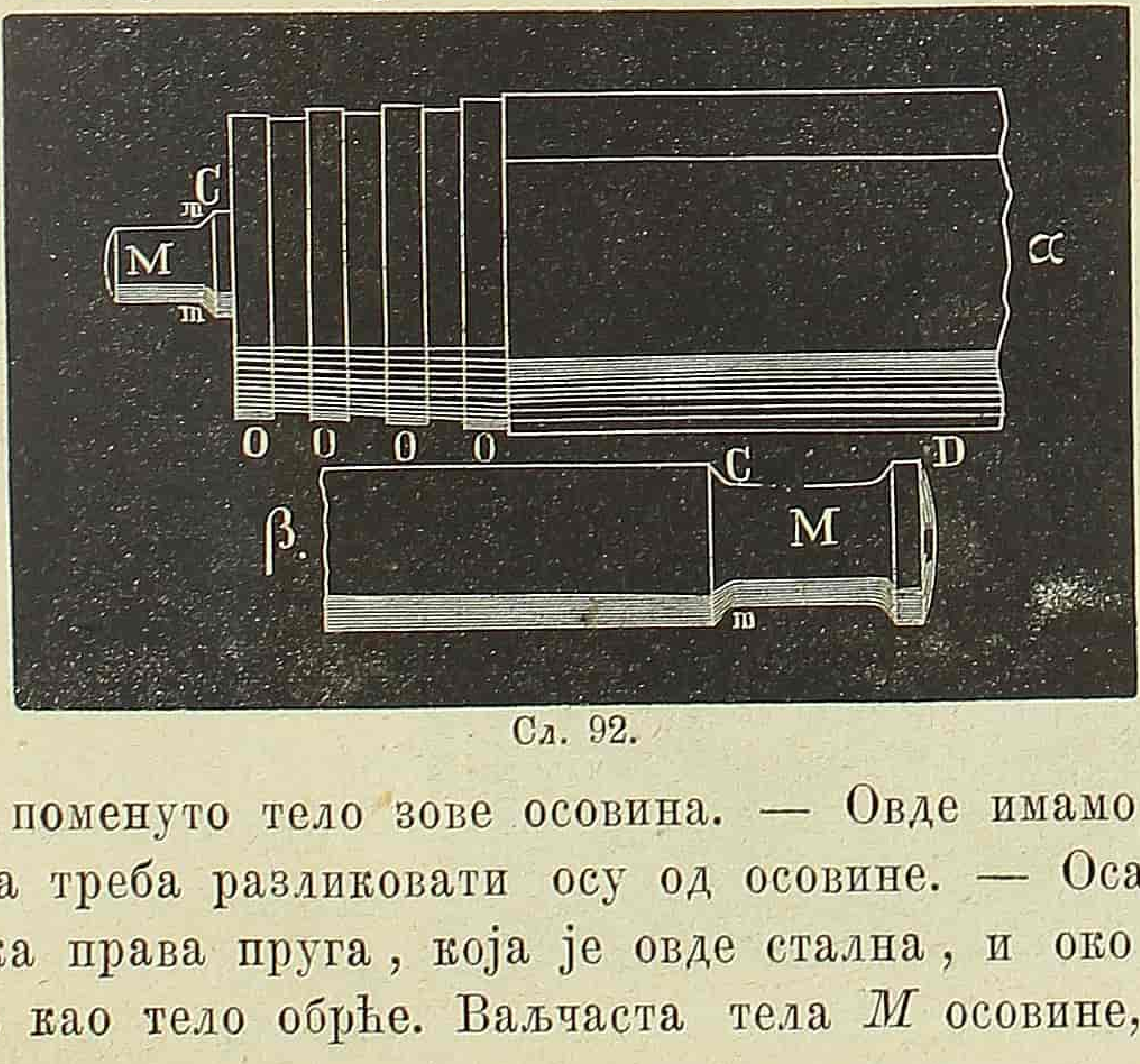
5. Једно кружно непрекидно, и право-пружно прекидно кретање.

Код свију ових кретања, отношење брзина два тела, може бити стално или менљиво.

У овоме реду ми ћемо изучавати и у кратко описати најобичније механизме, и који се највише употребљују за пренос кретања. Но пре тога нужно ће бити, да се у опште упознамо са оним органима махинским, који служе за осигурање правца кружног или право-пружног кретања.

Средства за осигурање правца кружног, или право-пружног кретања неки махински органа.

169. Кад хоћемо да се какво махинско тело обрће, онда га обично утврђујемо на друго тело, у крајевима кога утврђена су друга ваљчаста тела, која се обрћу у сталним подпорама. Кад је оса обртања хоризонтална Сл. 92. онда се



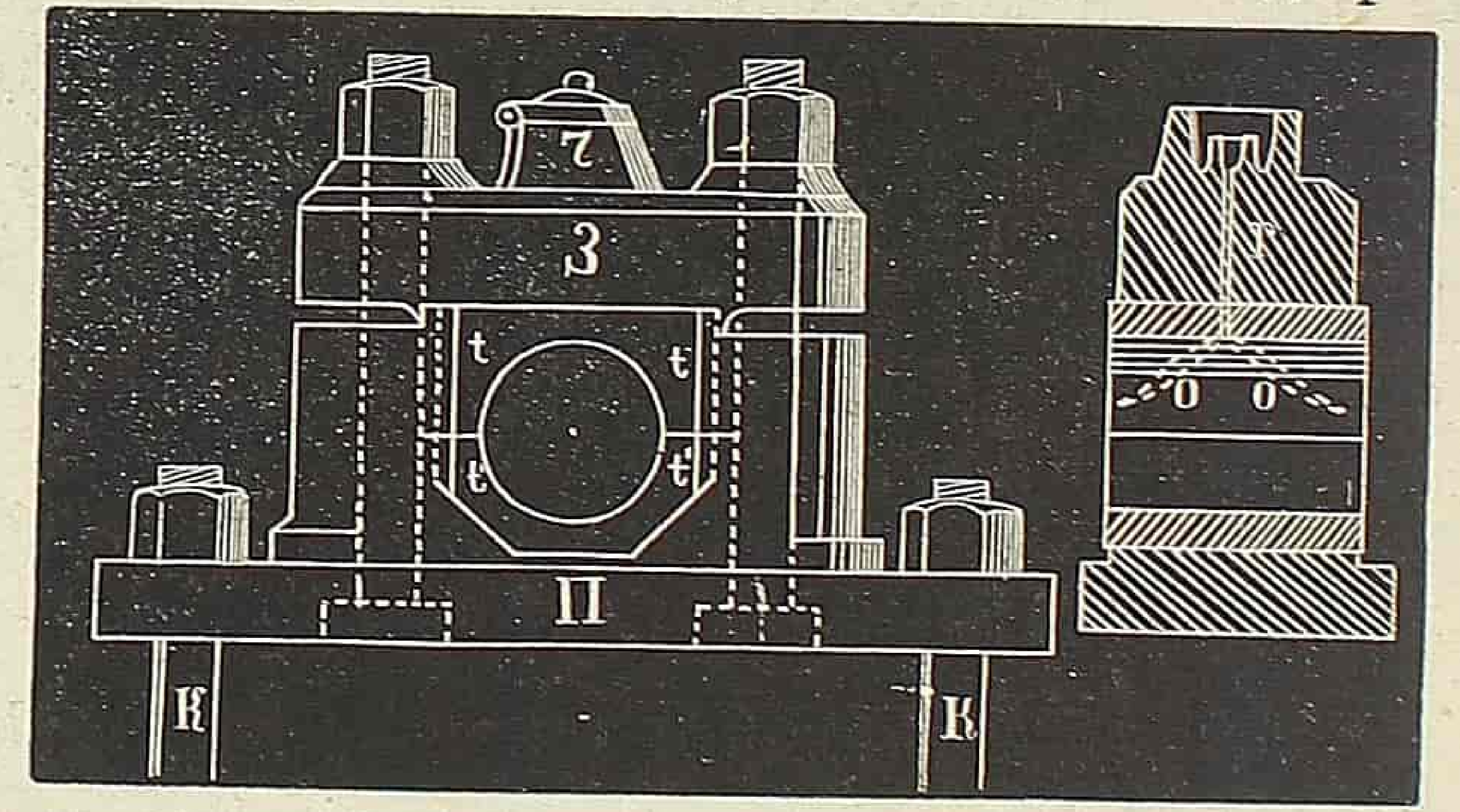
Сл. 92.

напред поменуто тело зове осовина. — Овде имамо приметити, да треба разликовати осу од осовине. — Оса је геометричка права пруга, која је овде стална, и око које се осовина као тело обрће. Ваљчаста тела *M* осовине, зову се чепови (tourillons) који најмање на једном крају имају рамена *C*, која предупређују да се осовина по правцу осе може покретати. Рамена су спојена са ваљчастим делом чепова, конкавним грлићем *m*.

Сл. *α*. представља један део древене осовине. *M* чеп *O* окови.

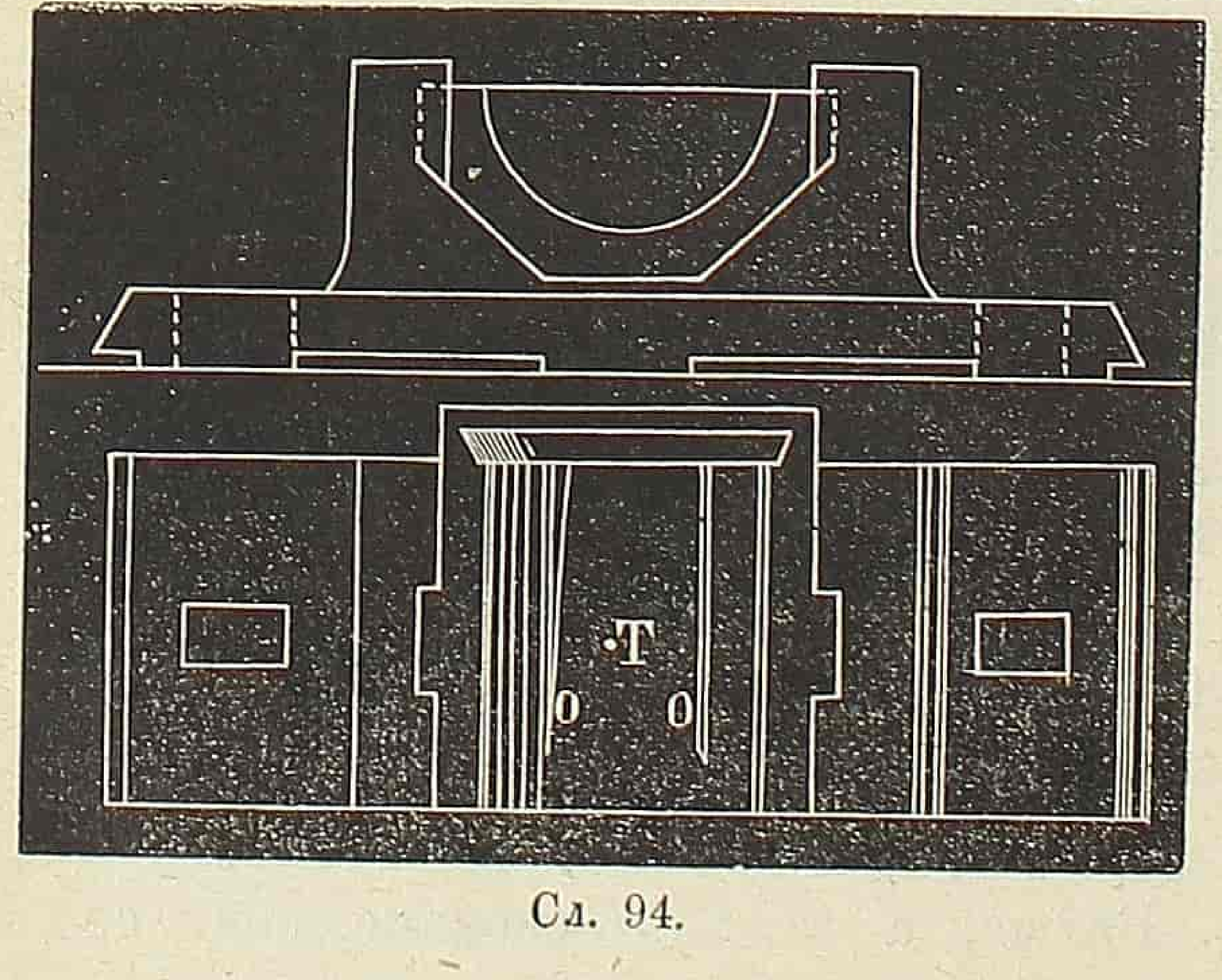
Сл. *β*. део гвоздене осовине *M* рукавац, *C* раме.

Подпоре. Главни је део једне подпоре, тако звани тулац. *t t'* (јастуче coussinet) Сл. 93. на ком непосредно лежи чеп осовине. Тулац се обично састоји из два дела од бронзе.



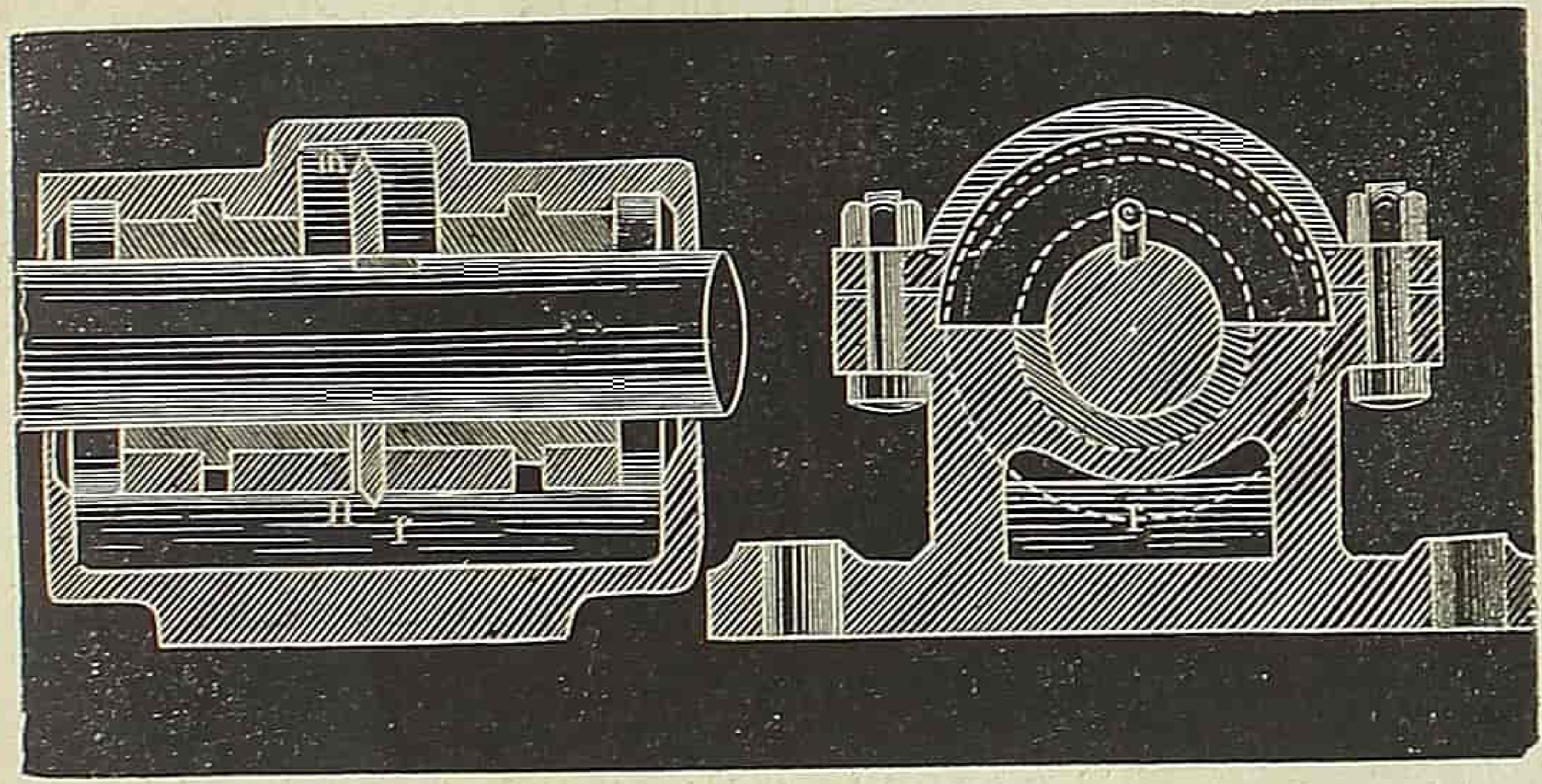
Сл. 93.

Један део *t't'* лежи одма на подлоги П, целе подпоре, а други *tt* горе сајужен са заклопцем З. — Страна тулца, о коју се одупире раме чепа, равна је. На врху заклопца З. налази се чашица *r*. која је непрестано пуна машћу за мазање. Ова се маст у сљед угрејања тулаца, топи и пролазећи кроз рупицу *r* заклопца, и горњег дела тулца, разлива се кроз завојне (хелисоидне) олуке *O'*,*O*; по свој унутарњој површини тулца. Сл. 94 представља једну подпору без заклопца. *T* тулац са олуцима *O*,*O*; по којима се маст разлива.



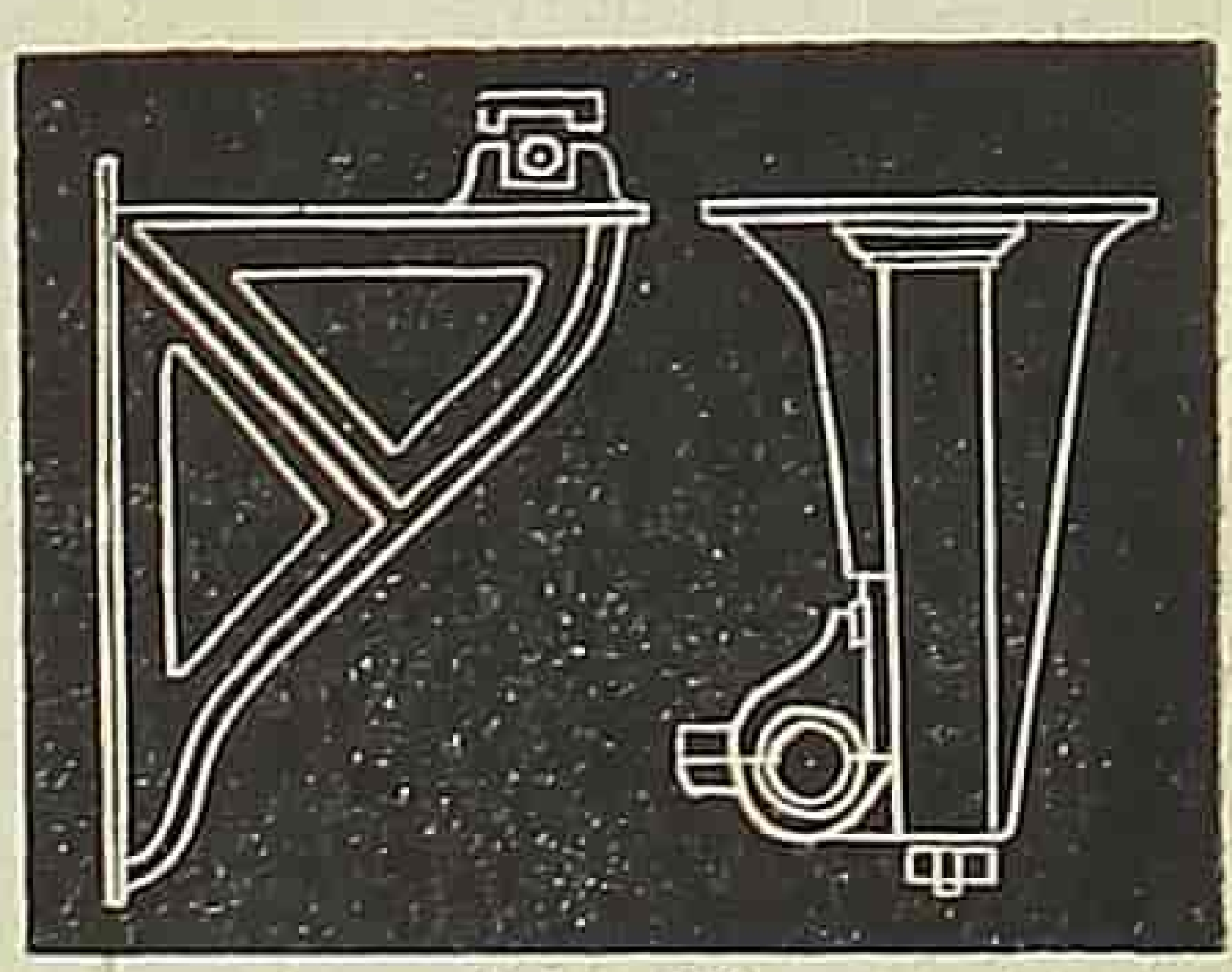
Сл. 94.

Код овог система подпора, мазање је неподпуно, зато се често употребљују подпоре представљене сликом 95. Код ових подпора, олај се налази у долњем резервоару r; и разлива се по површини



Сл. 95.

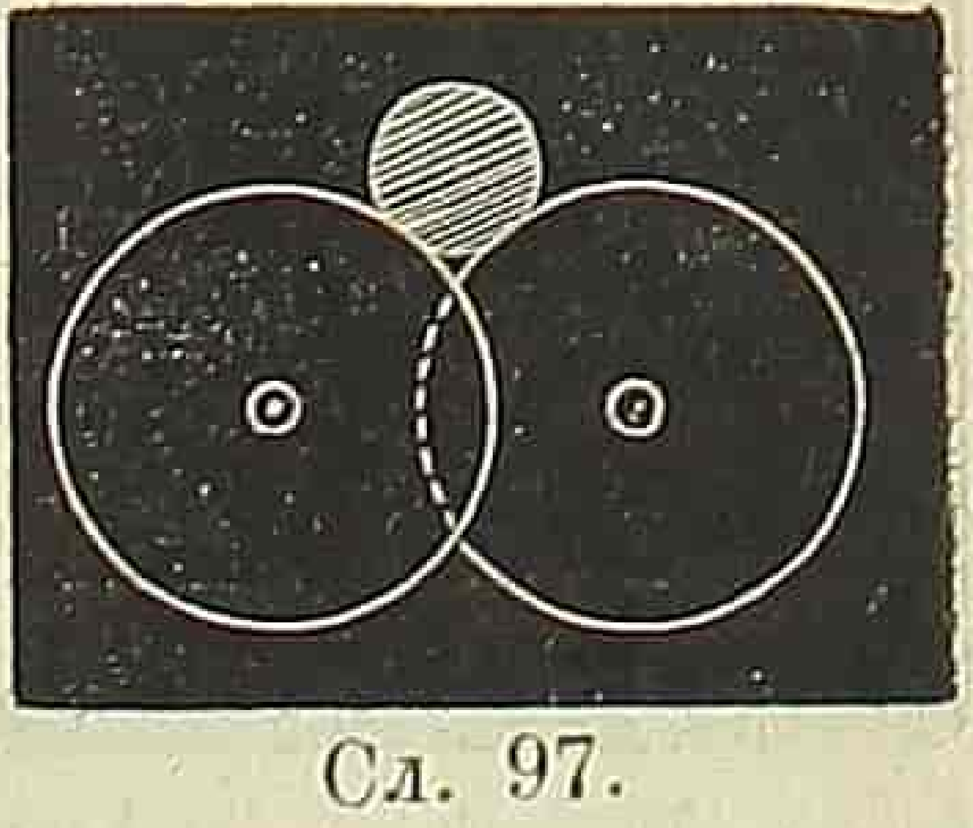
тулаца челичном плочицом mn, која је за рукавце утврђена. Резервоар је тако затворен, да се у њему олај неквари, нити је потребно да се често понавља.



Сл. 96.

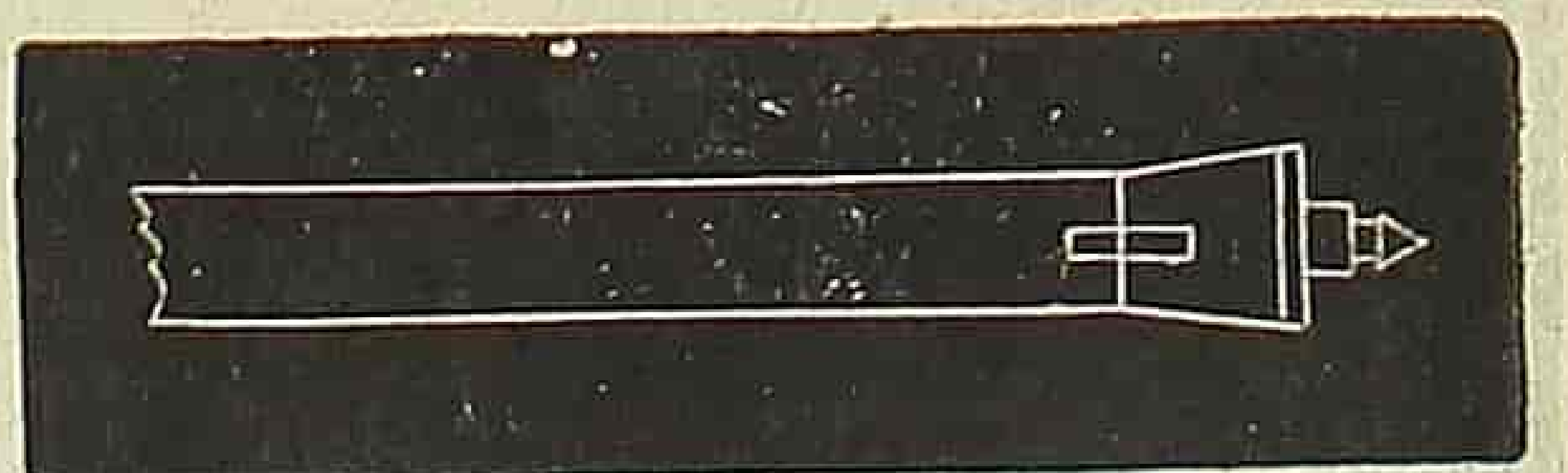
Све подпоре утврђене су са јаким шрафовима *K* Сл. 93. или на каквом јаком зиду или на другим подпорама тако званим столицама од ливеног гвожђа, као што слика 96 показује. —

170. у известним изузетним случајима, чепови хоризонталне осовине, леже на два котура Сл. 97, да би се тиме трење умалило, као што ћемо то, кад будемо у динамики о трењу говорили, боље објаснити.



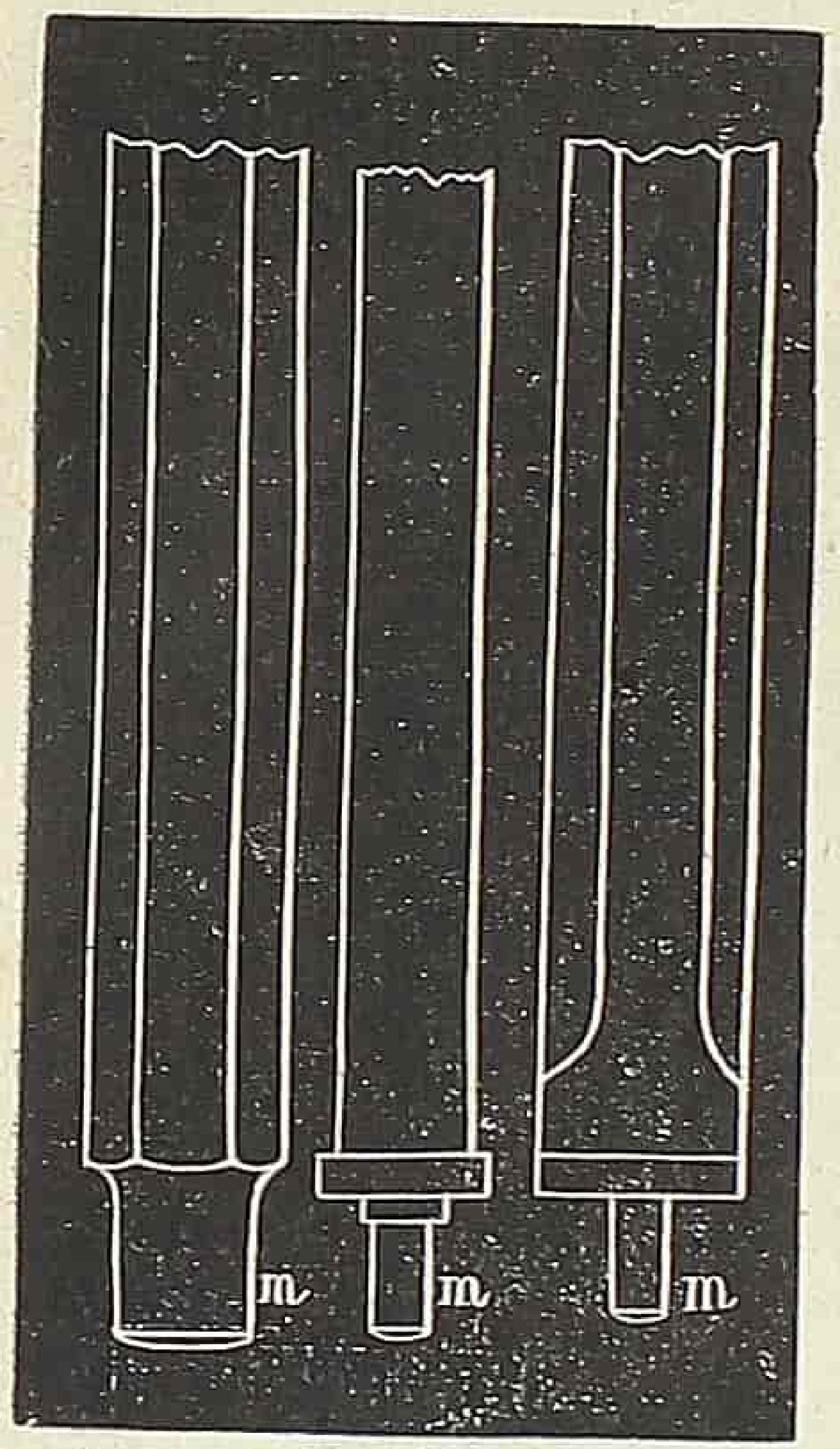
Сл. 97.

По који пут, крајеви хоризонталне осовине ослањају се на некретне коничне шиљке од гвожђа, који улазе у коничне рупе издубљене у крајевима обртне осовине, или обратно, конични шиљци утврђени су у крајевима осовине, а коничне рупе, у које шиљци улазе, налазе се на сталним подпорама. Сл. 98.



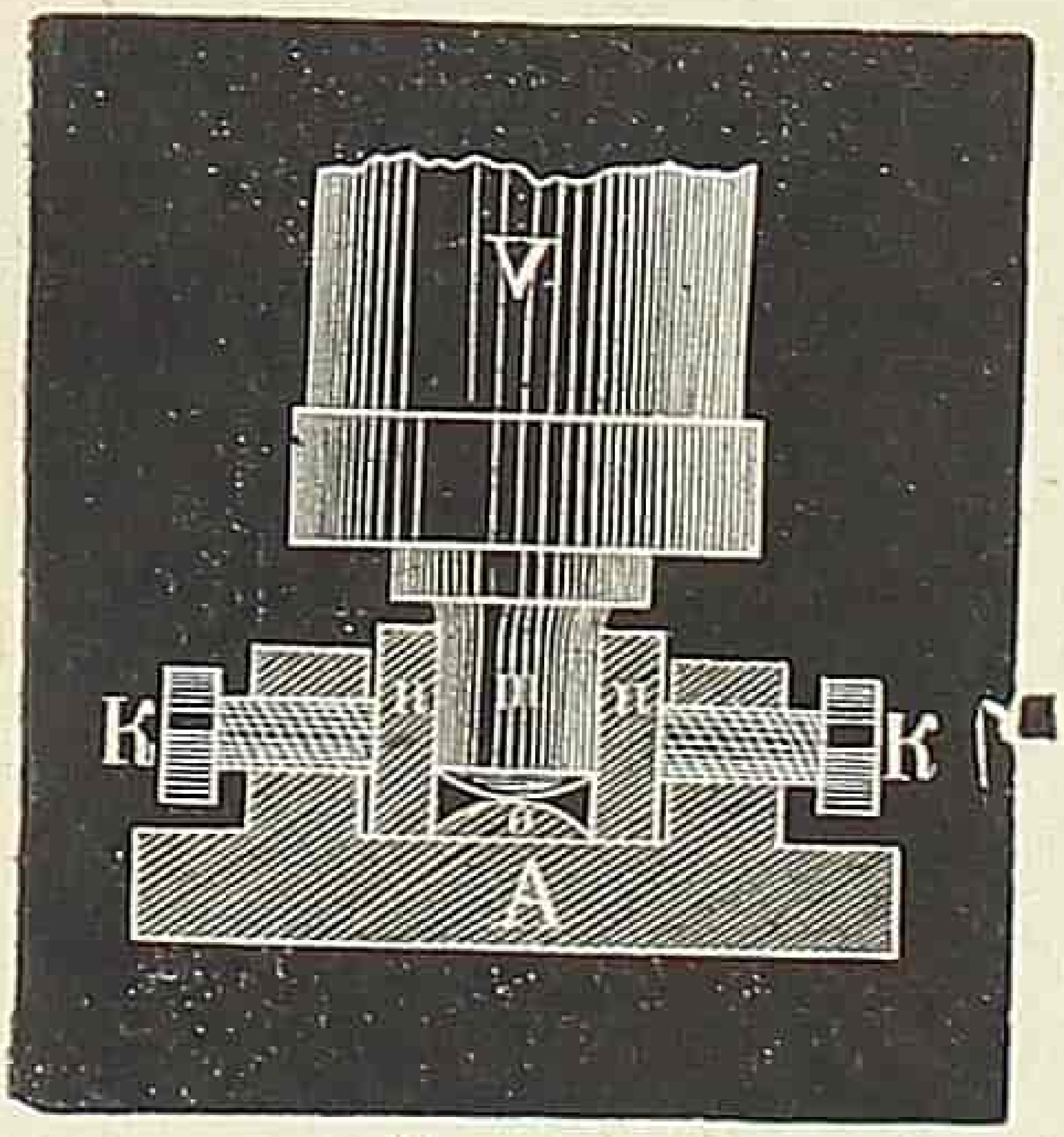
Сл. 98.

171. Кад се осовина обрће око вертикалне осе, онда се она зове вретено. Овакве вертикалне осовине или вретена представља



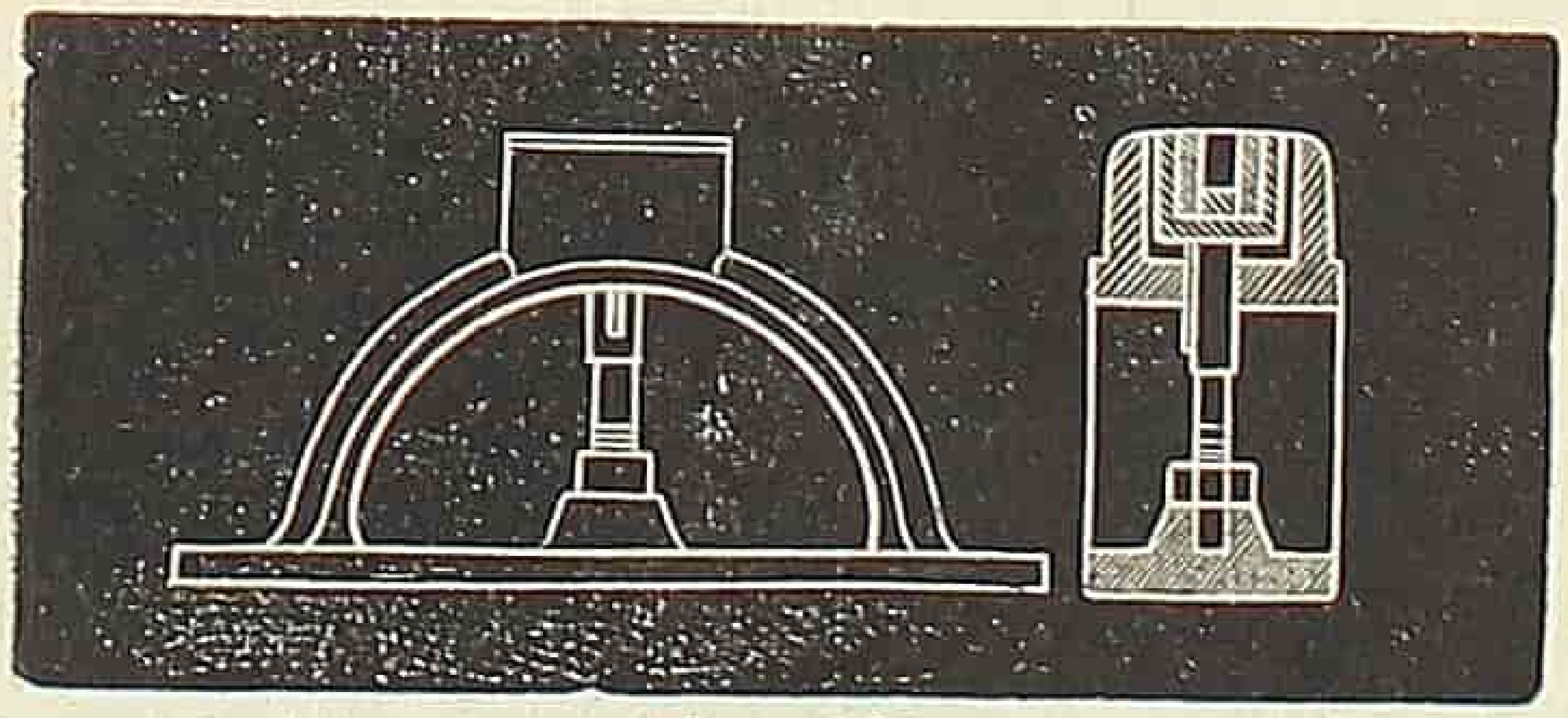
Сл. 99.

Сл. 99. На доњем крају вретена налази се шип *m* [pivot] који се обрће у једном чанку *n*, од бронзе. Овај чанак чврсто утврђен са четири шрафа *K*, на подлоги *A* Сл. 100, образује доњу подпору вретена. Цела ова подпора зове се особитим именом жабац [crapaudine]. На дну чанка налази се једно парче челика о, на које се пиво ослања, и које се може изменути, кад се изеде. По који пут чанак је тако на подлоги од ливеног гвожђа намештен, да се може лако и повољно уздизати и спуштати као што сл. 101 показује. — Овакве подпоре по већој части употребљују се у воденицама.



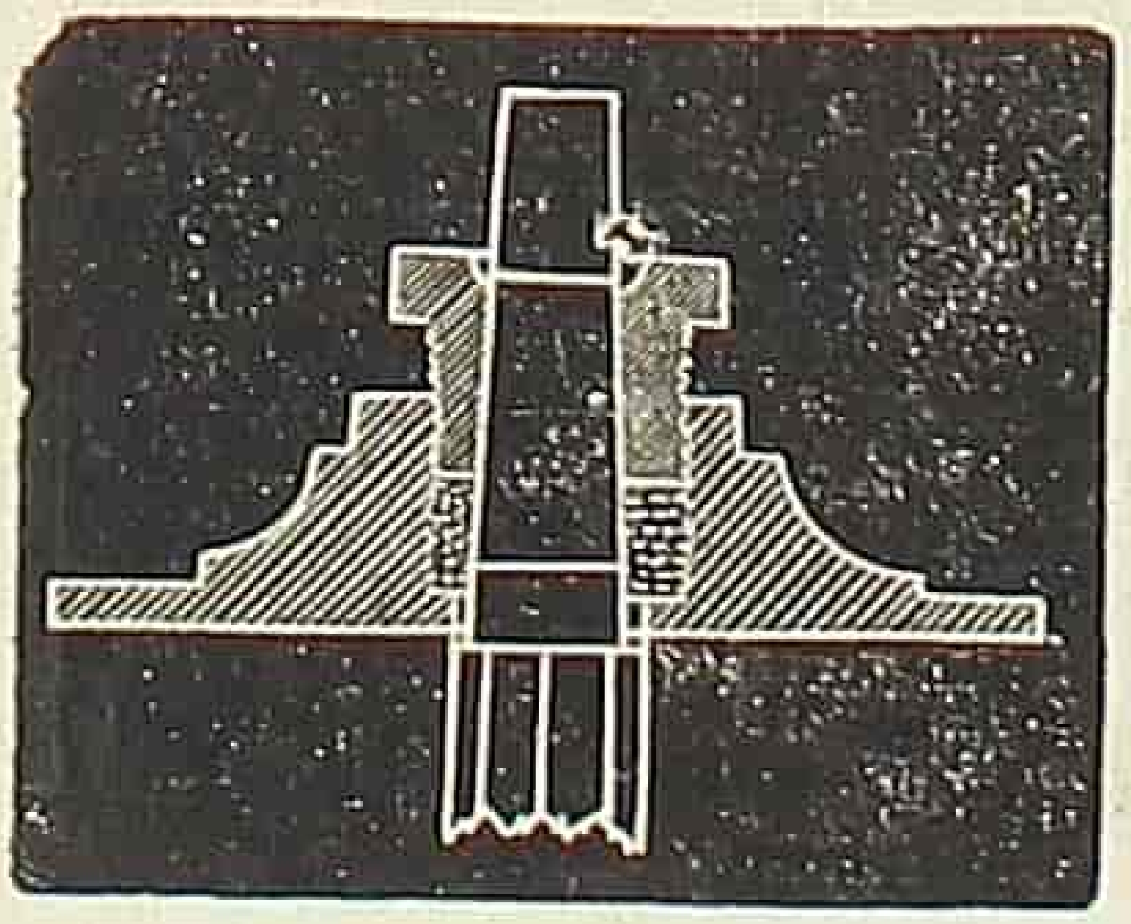
Сл. 100.

Да би се вретено налазило непрестано у вертикалном положају, то се оно на извесној својој висини обрће у једном сталном огрљку (collier), који служи као друга његова подпора. Сл. 102. Вретено је на овом месту подпуно заокругљено.



Сл. 101.

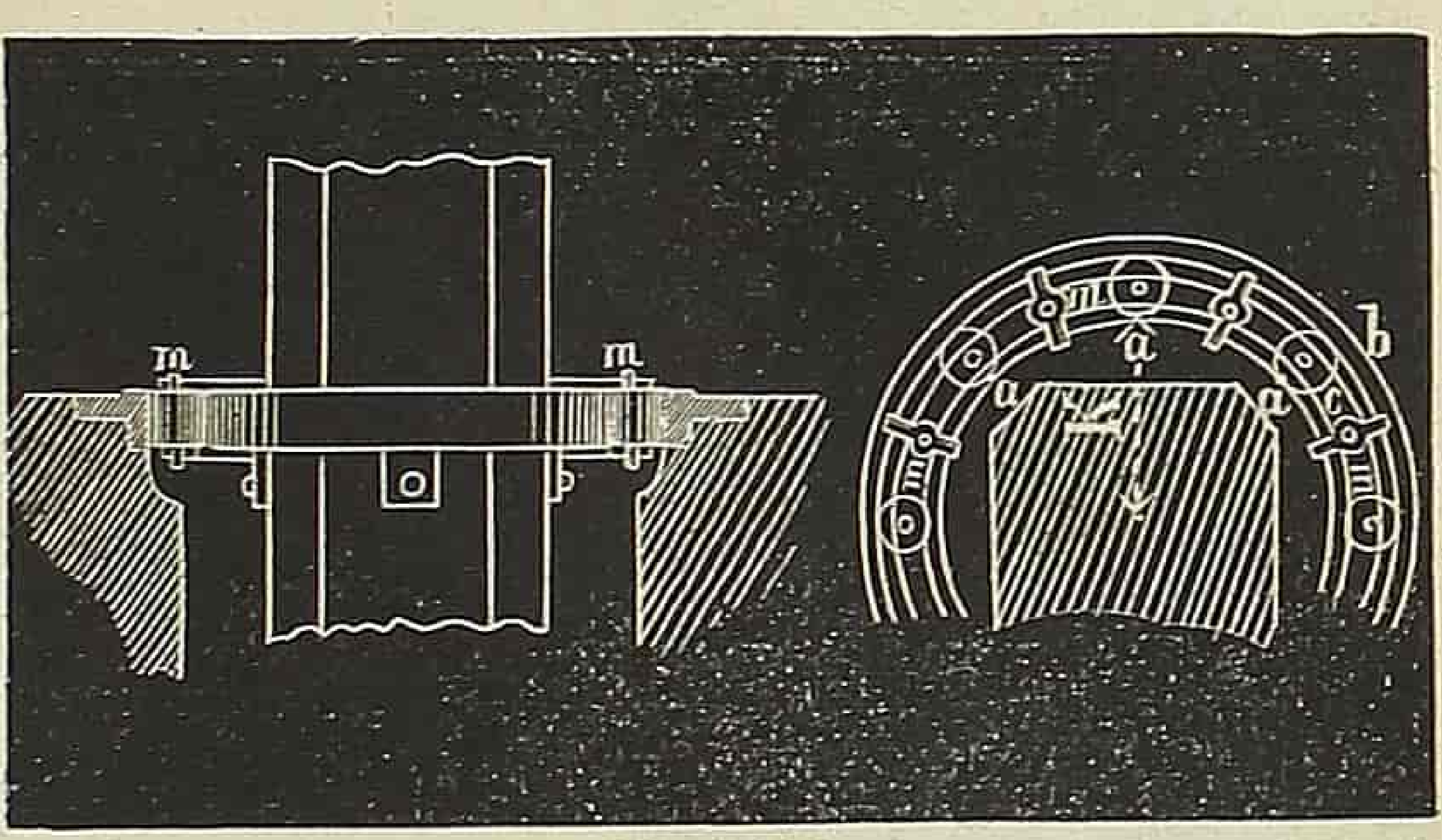
Кад је тисак између вретена и огрљка велики, онда се између њега и његове сталне подпоре намести један систем котурова (galets), којих су осе утврђене на једној обртној гривни *mm*. . . Сл. 103.



Сл. 102.

Котури служе на то, да се трење умали. Они се једновремено котрљају и по округлој површини вретена *a*; и по утврђеном огрљку *b*, њихово кретање било абсолутно, било односно вретена *a*, можемо определити овако: Означимо са

R, и W, полупречник и угловну брзину вретена, са r; полупречник једног котура. Апсолутно кретање овог котура, обртање је око тренутног средишта b; нека је w угловна брзина овог обртања.



Сл. 103.

Ову брзину w можемо определити, оснивајући се на предпоставки, да се котур котрља по обртајућем се вретену, одкуда сљедује, да у тачки a, два додирајућа се тела, имају једнаке брзине, мора дакле бити:

$$2rw = RW.$$

и отуда кад је W дато, имамо

$$w = \frac{RW}{2r}$$

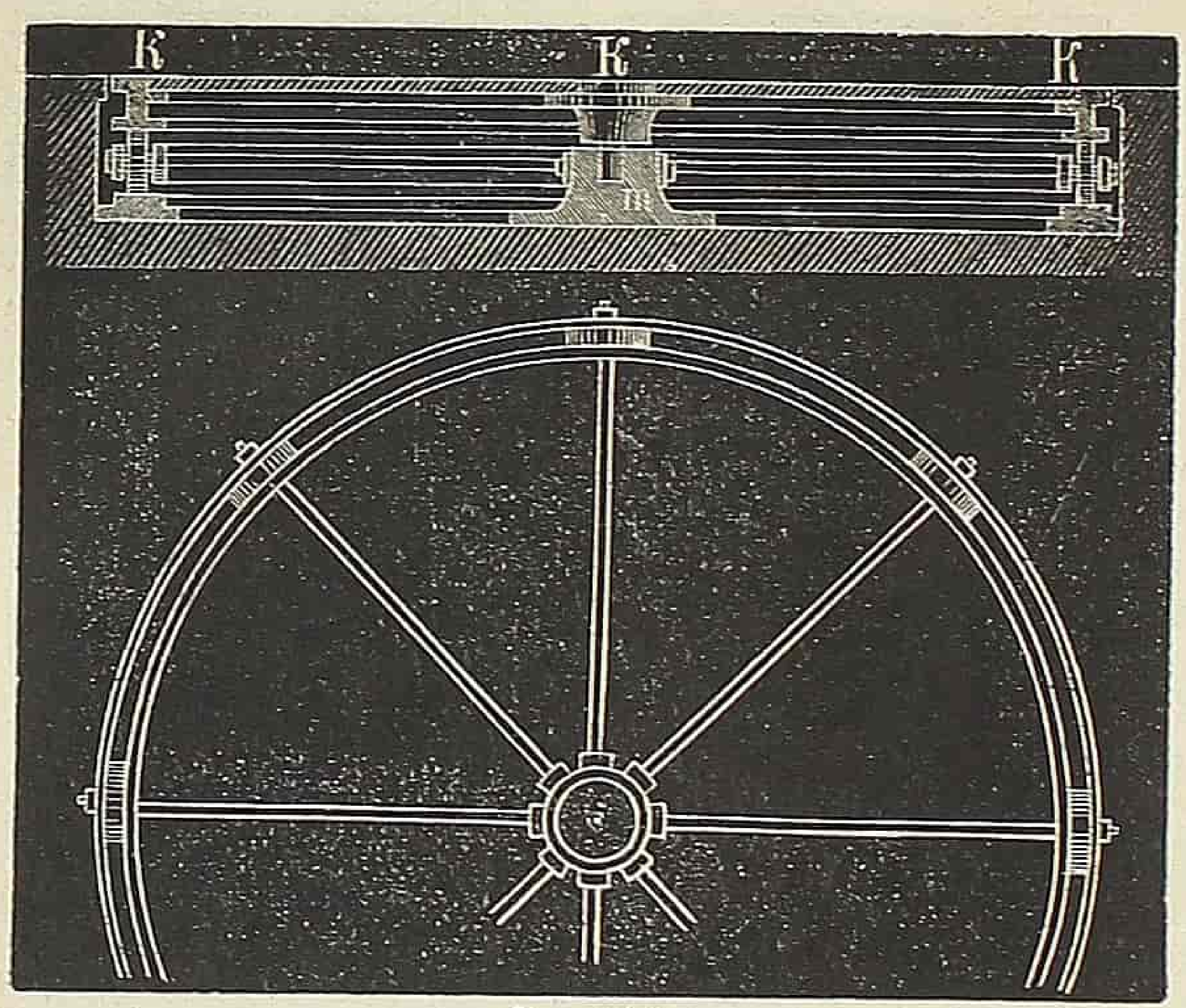
Гривна, на којој су котури, није стална као што напред приметисмо, већ се обрће око свог средишта. При том обртању она се ослања на друге котуре са хоризонталним осама, који се котрљају по утврђеној хоризонталној равнини. — Овај други систем котурова, зато се употребљује, да би се избегло велико трење, између доње стране гривне, и хоризонталне равнине. — [1]

---

[1] Из горереченог сљедује, да брзина средишта c; једног котура равна је wr; ова вредност подељена са полупречником гривне даће нам њену угловну брзину.

$$w' = \frac{rw}{R+r} = \frac{RW}{2(R+r)}$$

Углова брзина гривне скоро је равна половини угловне брзине вретена, јер полупречник овог вретена, свагда је доста велики према полупречнику r котура. —



Сл. 104.

172. Обртно коло. У жељезничким станицама праве се обртна кола, као што Сл. 104 показује, и служе за превод вагона и локомотива са једног коловоза на други. — Ово обртно коло [Plaque tournante] наводимо ми овде само као особити пример обртног кретања неког тела око вертикалне осе. Пиво *m*, вретена на коме је коло *KK* утврђено, обрће се у сталној подпори. Овде нема горњег огрљка као друге подпоре, због тога што је вретено кратко. Но да не би се коло под великим теретом преломило, подупрето је у својим крајевима једним системом котурова, којих су осе сајужене једном кретном гривном (обручем) као у предходећем случају.

Котури су конични а не ваљчасти због тога, да би се избегло клизање између додирајући се површина. И заиста ако би котури били ваљчасти, онда разни управни пресеци на осе котурова биће сви једнаки, и потом при кружном обрту кола, морали би се ови пресеци развијати на неједнаким периферијама овога обртног кола, и некретни подпора, сљедствено породило би се клизање између додирајући се површина, како горе тако и доле. Конични котурови имају свој врх у *A* у оси обртања пивоа, и котрљају се с' једне стране

Сл. 105.

по површини *n*, утврђеног конуса, кога се врх налази у истој тачки *A* Сл. 105 а са друге стране, по доњој страни *m* кола, која је такође конична и са истим врхом. — Ако задржимо иста означења као и у предходећем примеру, онда ћемо добити отношење између брзине котурова и обртног кола, изражавајући да је брзина тачке, сматране као тачке котура, равна брзини одговарајуће тачке кола; имаћемо дакле

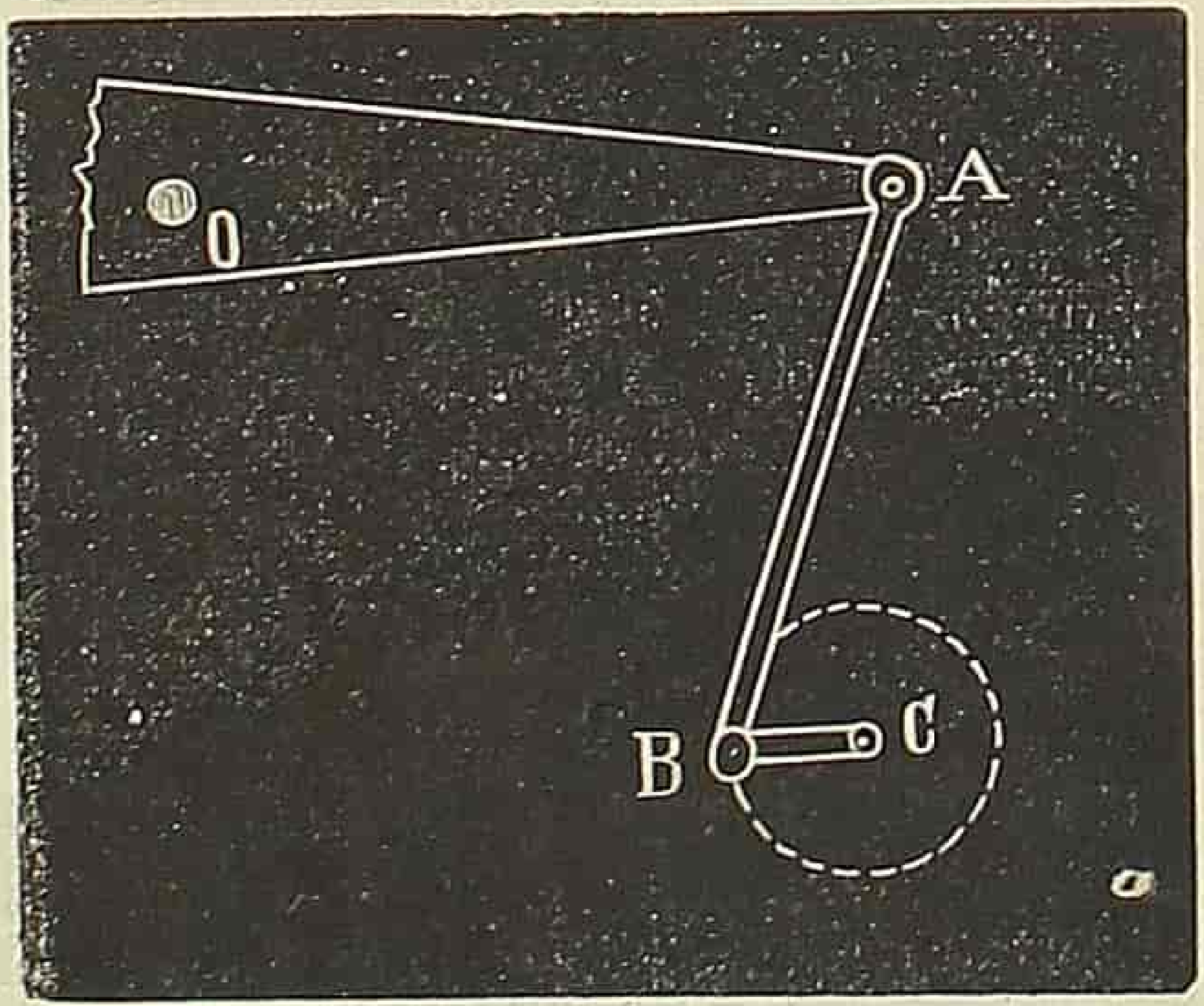
$$RW = 2rw$$

У овом примеру угловна брзина кретне гривне, која сајужава осе котурова биће тачно

$$w' = \frac{W}{2}$$

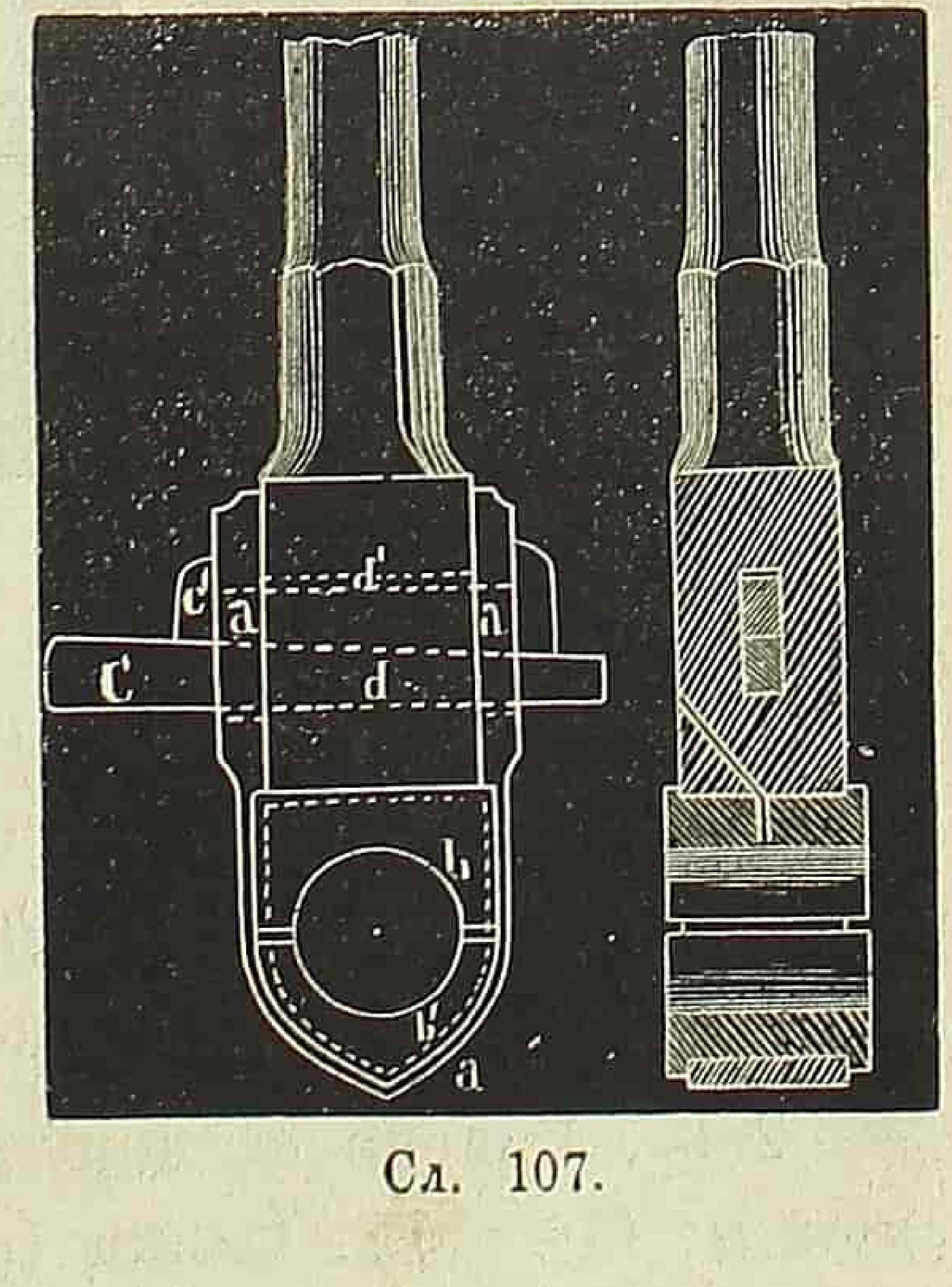
Дакле гривна учини један полу-обрт, док коло цео обрт. —

173. Кретне шарнирне артикулације [articulations mobiles à charniére]. — Често се деси, да се два тела, сајужена у виду шарнире, оба једновремену крећу. Сајуз је произведен једним чепом, који се обрће у кретним глатким и брижљиво мазаним тулцима. — Као пример оваковог сајуза навесћемо овде машку, која је сајужена са ручком и нијаљком. Сл: 106. *AB* машка, *BC* ручка, *AO* нијаљк. [Balancier]

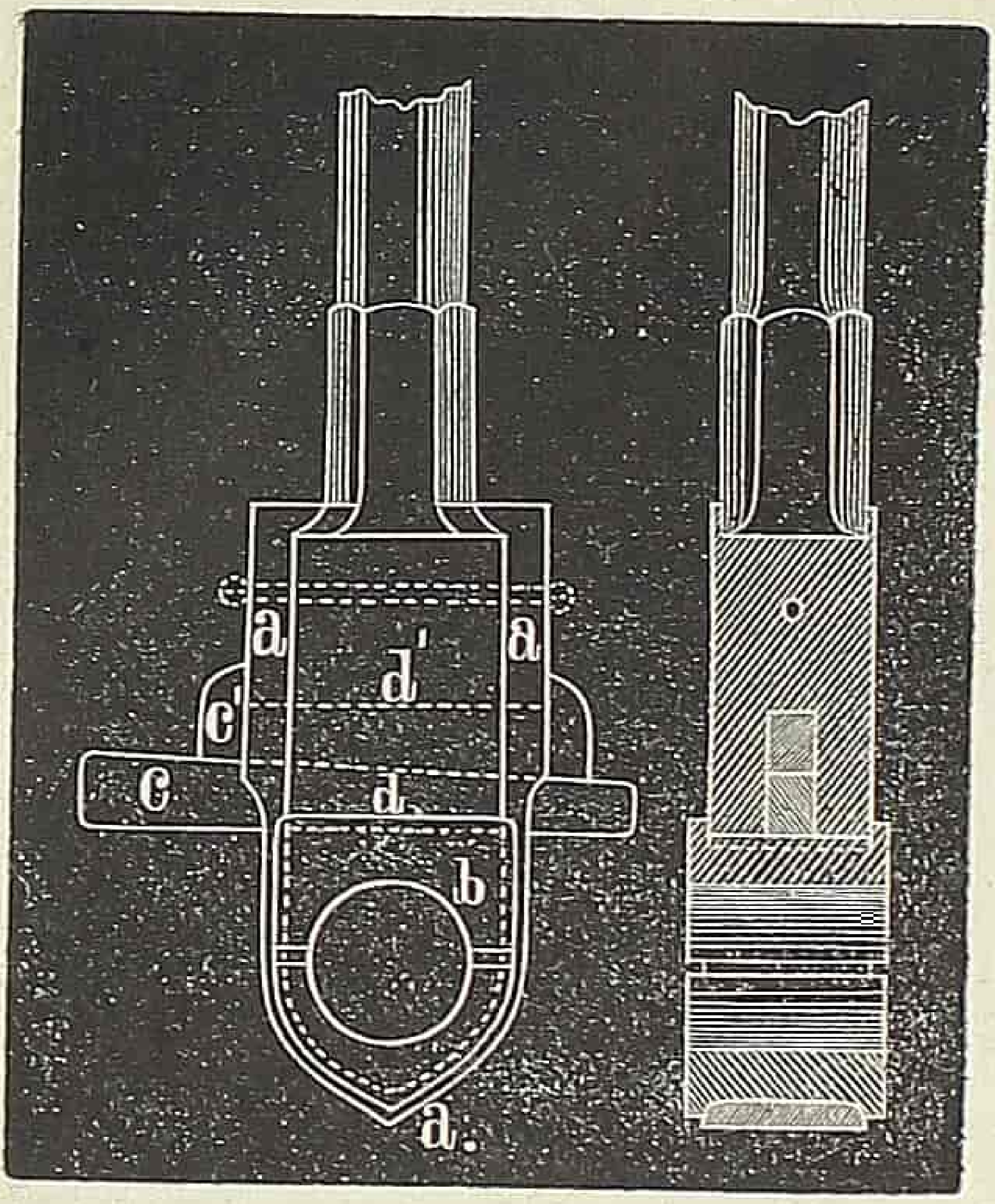


Сл. 106.

Свака глава машке састоји се обично из једне гвоздене стеге ааа, која обувата оба дела *b* и *b'* једног тулца (coussinet). Сл. 107. Стезање производи се са два противположена клизна *c* и *c'* као што слика показује. Додирајуће се стране клинова, нагибају се према својим противположеним странама под истим углом, тако да су ове противположене стране *d* и *d'* равноодстојне. На оба краја клина *c'*, налази се по један кљун, који предупређује да се стране стеге једна од друге удале.



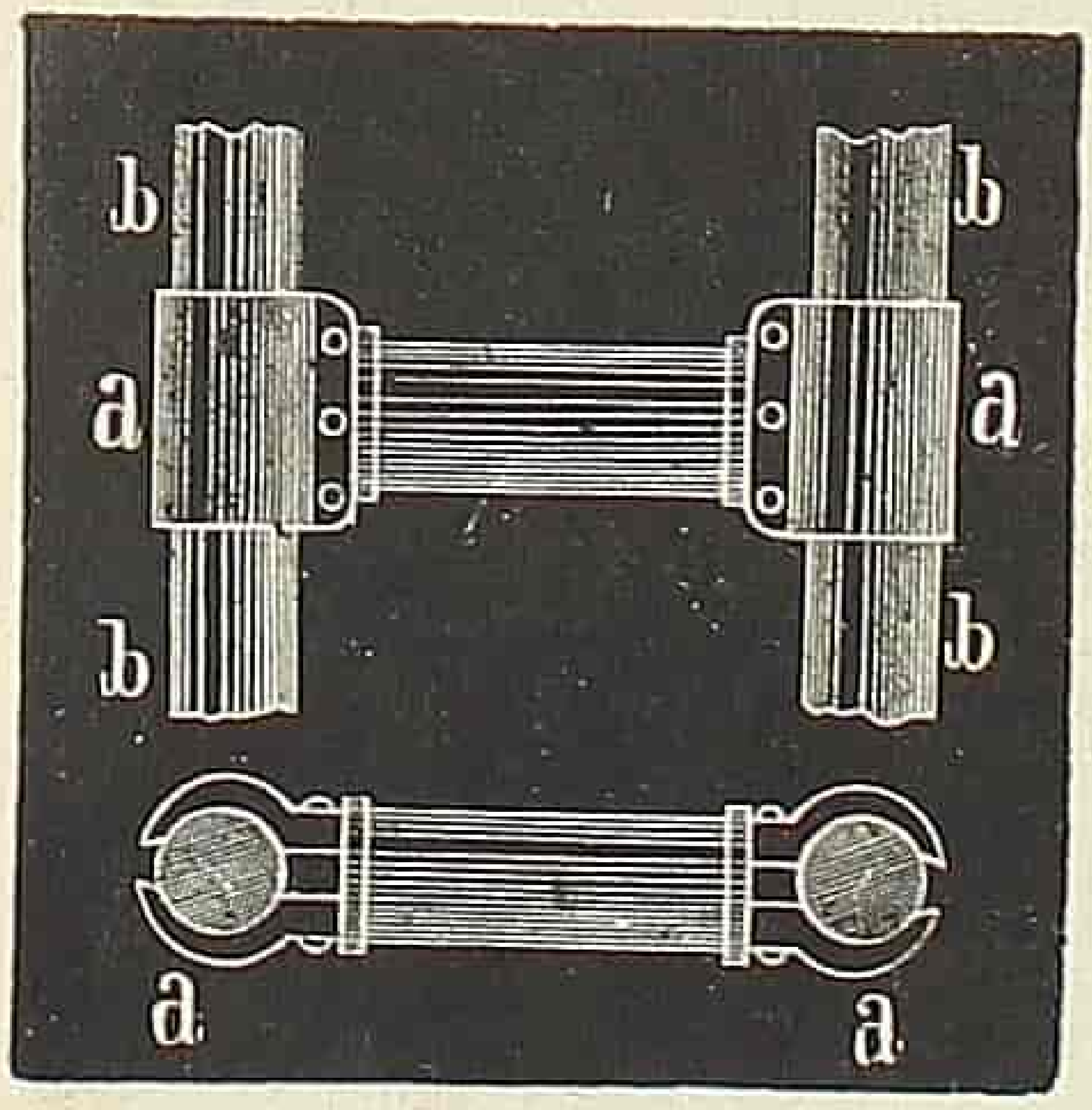
Сл. 107.



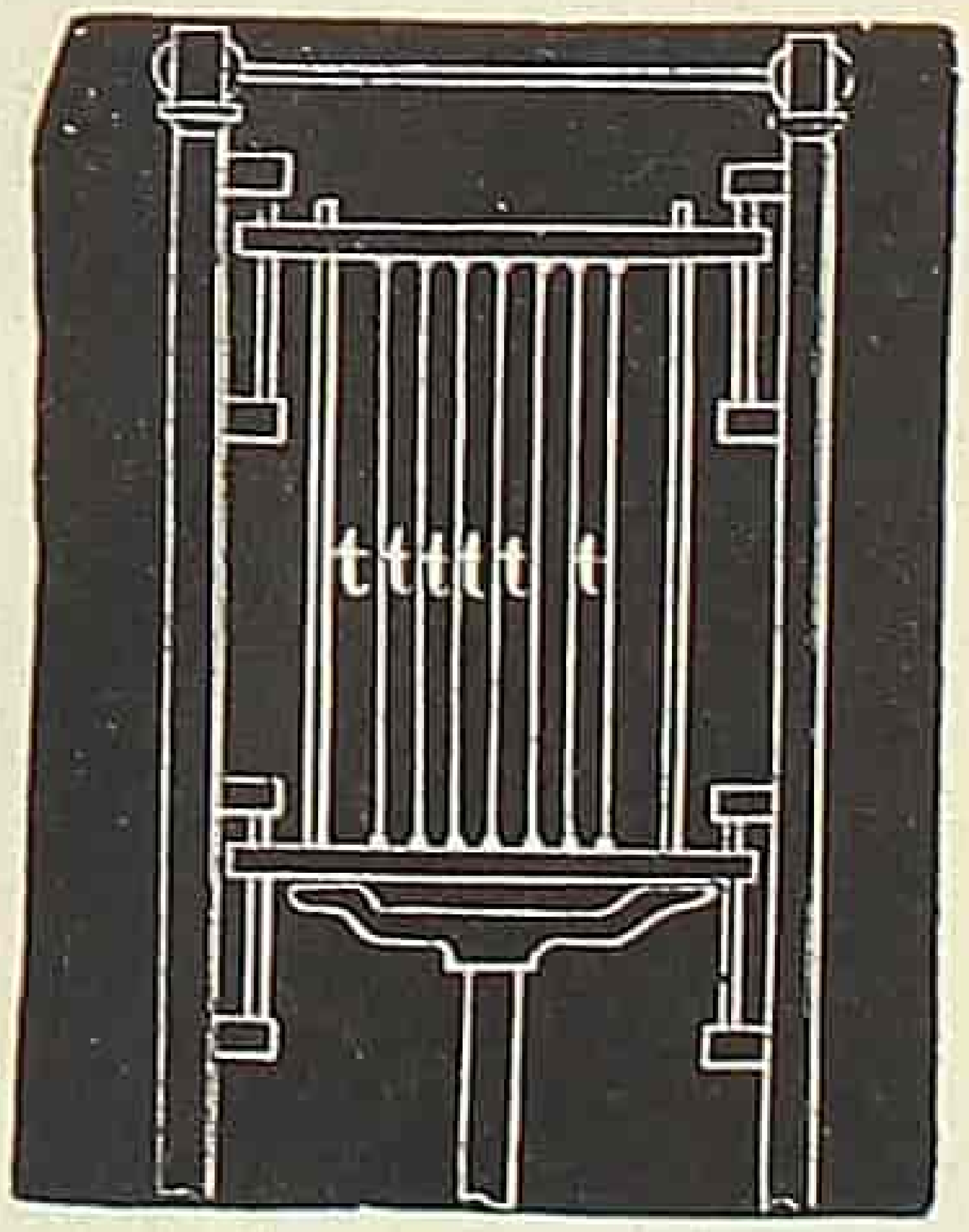
Сл. 108.

У практики главе машке праве се обично на два разна начина. По једном, стеге су помичне Сл. 107 а по другом сталне Сл. 108. — Код првог начина, кад се стегну клинови, онда машка постаје краћа ма то и најмање било, а код другог начина, стезањем клинова машка постаје дужа т. је. средиште артикулације удаљава се. У првом случају клин *c*, покреће клин *c'*, а овај стегу, и тако се оба дела тулца један другом приближавају, у другом случају клин *c*, дејствује непосредно на део тулца. —

Вође правопружног кретања.



Сл. 109.



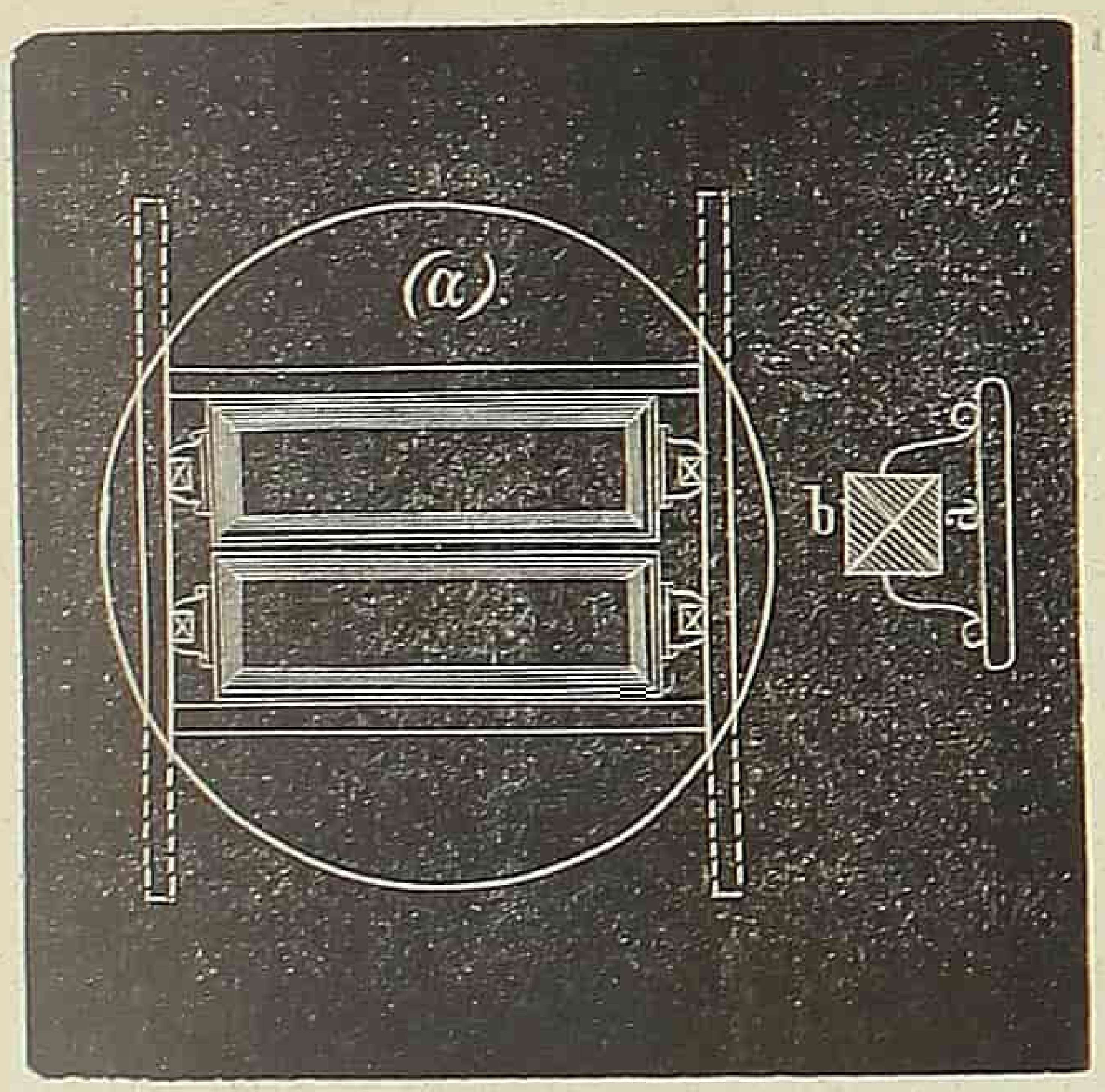
Сл. 110.

174. Велики је број система меканизма, који служе за осигурање правопружног кретања каквог тела. — Од ових система, ми ћемо овде у кратко прегледати само оне, који се најчешће употребљују.

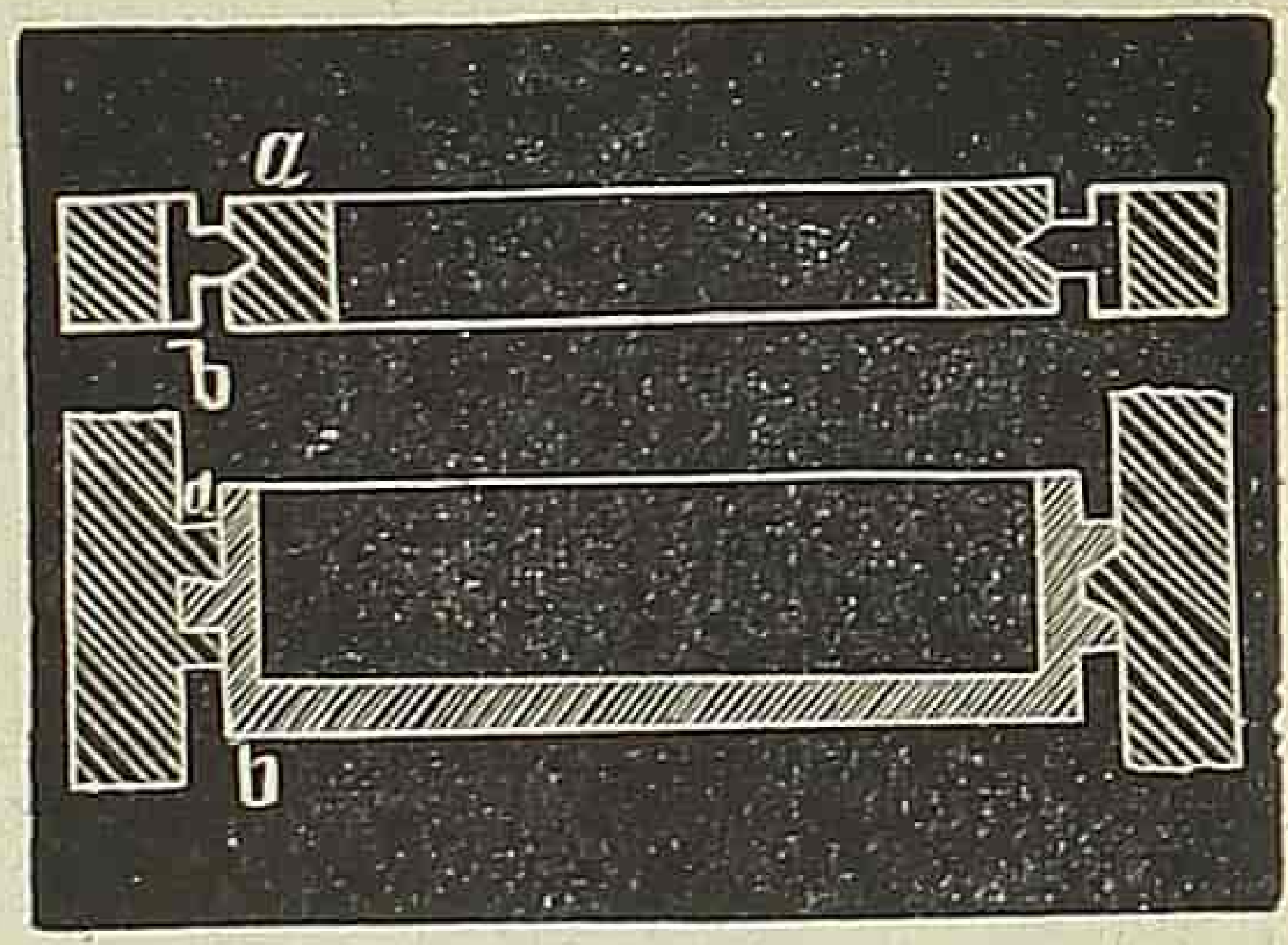
1-во. Окца *a a* Сл. 109, и 110, која клизају по дужини *b b* утврђени држака. — Слика 110 представља рам вертикални тестера. Вертикално кретање тестера *t*, лако је сватити из саме слике без даљег описа. —

2-го. Гривне *a*, које клизају по вертикалним управљачима *b*; Сл. 111. Слика (*α*) представља хоризонталну пројекцију сандучића и једног бунара, из кога се угљен вади.

3-ће. Слика 112 представља један систем осигурања правопружнот кретања, који ћемо ми овде док се удеснија реч ненађе, назвати: Жљеб са језичком [Rainure et languette] *a* жљеб, *b* језичак.

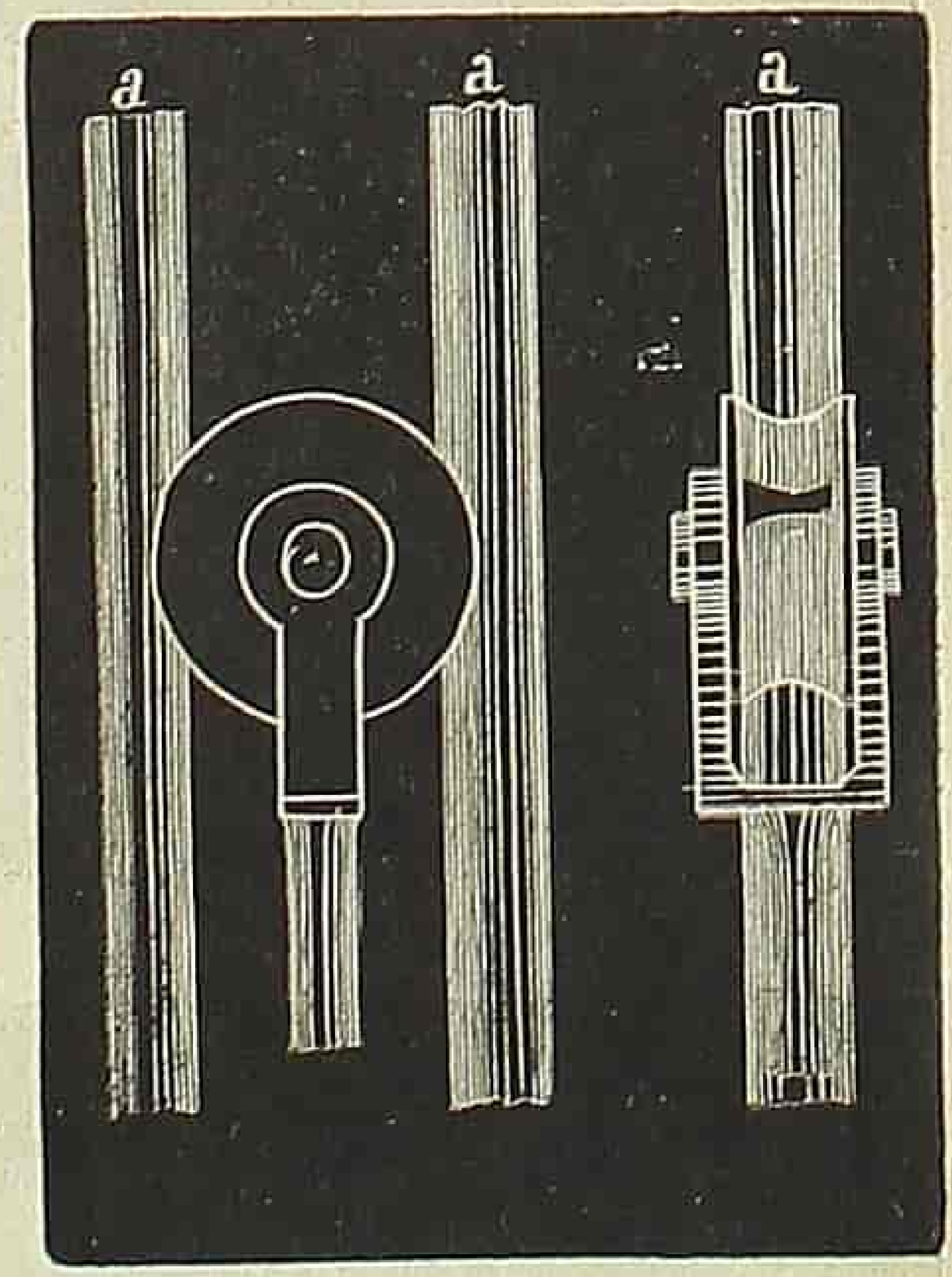


Сл. 111.



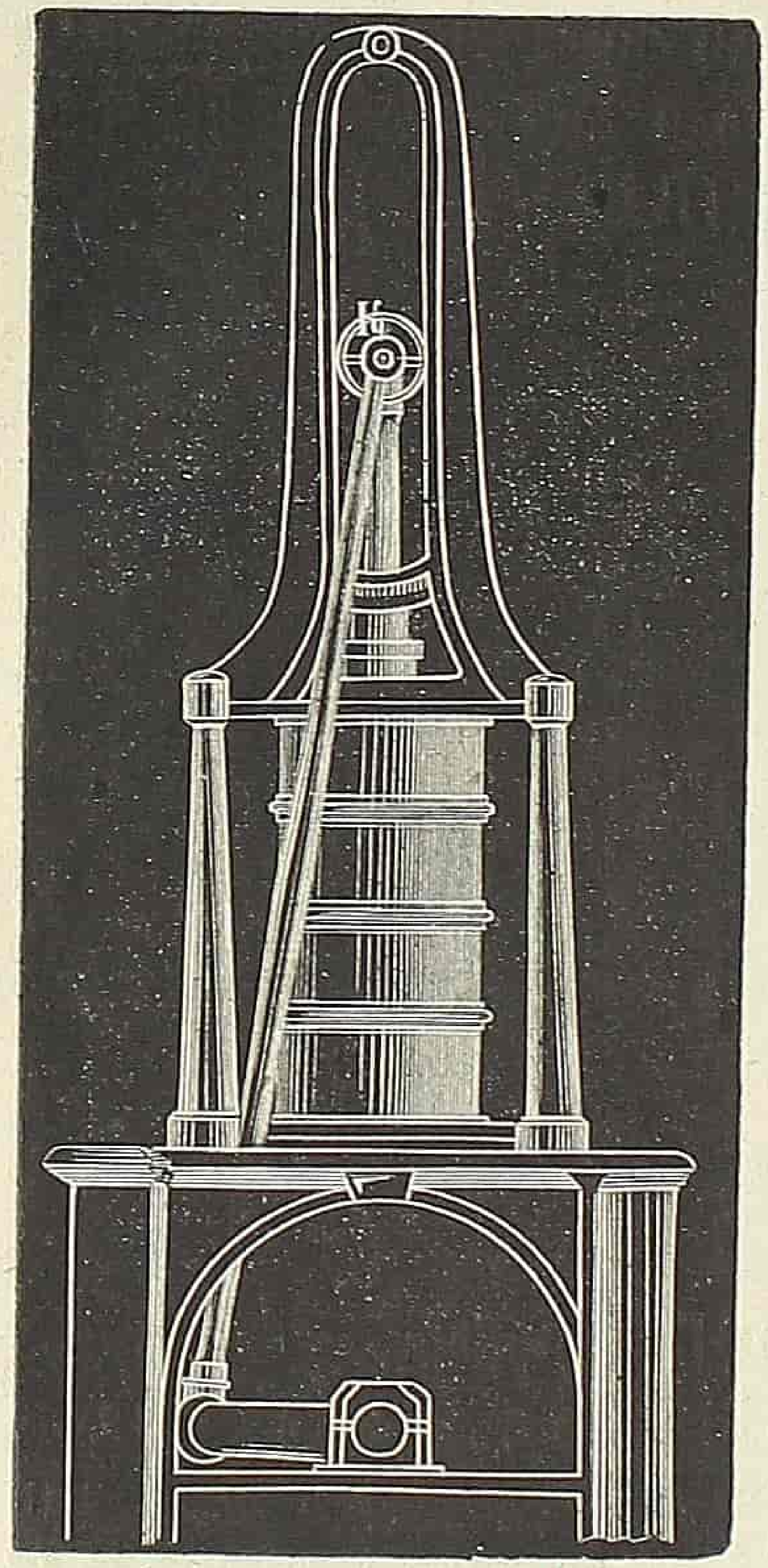
Сл. 112.

4-то. Котур са гркљаном [жљсбом], који се котрља између два ваљчаста управљача *a*, *a* Сл. 113. — Да би се избегло клизање, употребљава се овај систем кадкад кол вертикални парни махина, за осигурање правопружног вертикалног кретања држке клипа [piston — види слику 113^a једне вертикалне парне махине.] — Котур *K* котрља се час по једном час по другом вертикалном управљачу, потоме како држка тежи да скрене на десно или лево. — Незгоде овог система јесу ове:



Сл. .

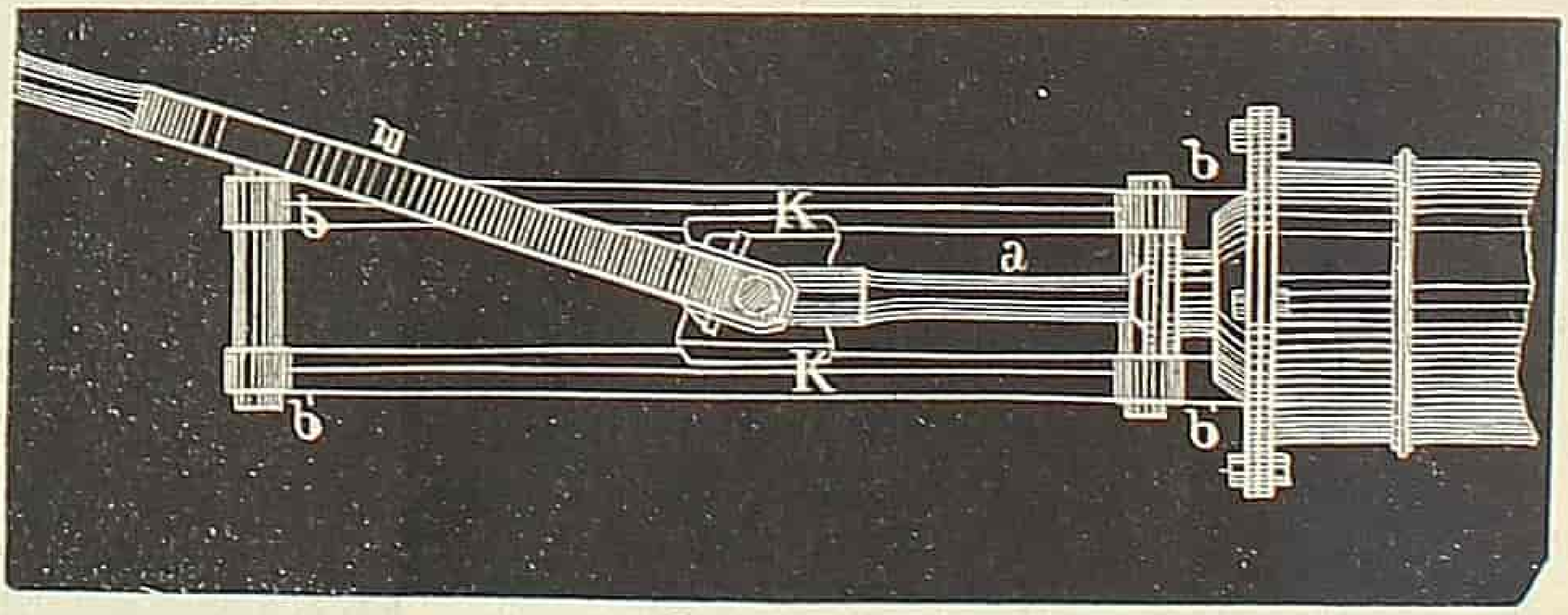
У тренутку кад се правац држке мења, пораћа се скоро свагда клизање, које се са најмањом неправилношћу котура увећава. У слeд тога котур на скоро постане угнут тако, да се неможе више по управљачима правилно да котрља, због тога овај систем неможе се препоручити, и будући је тако рећи немогућно, да се клизање избегне, то је боље да се употребе широки брижљиво мазани клизавци, као што



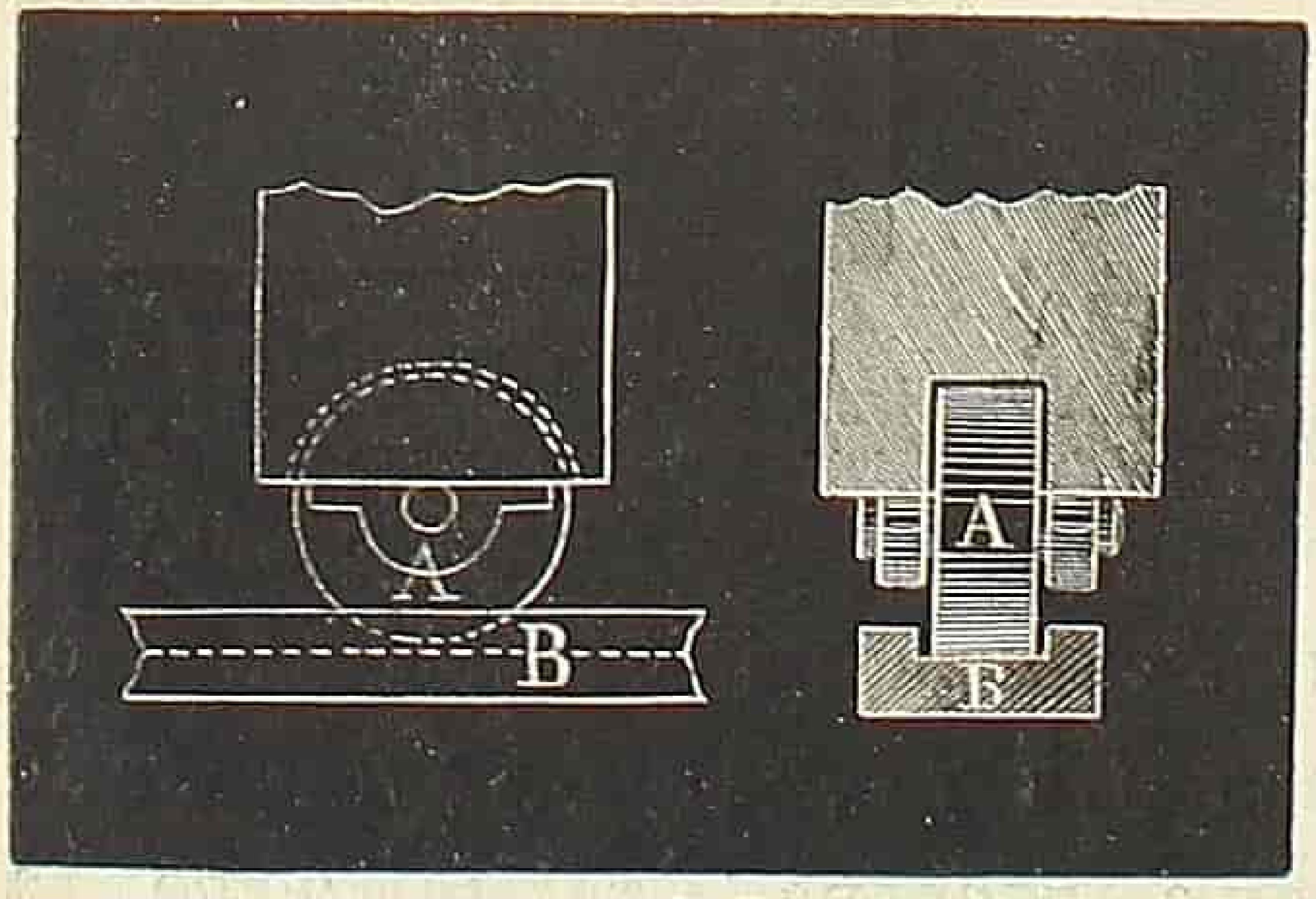
Сл. 113.

на страни слика 114 показује; који се правилно крећу, него котури са неизвесним котрљањем.

5-то. Клизавци. За управљање дршке *а* клипа, у хоризонталном правцу, употребљују се код парни хоризонтални махина по већој части тако звани клизавци, [glissiéres] *КК* Сл: 114, који клизају са широким стопалама по хоризонталним управљачима *ъъ ъ'ъ'*. Са сваке стране дршке, налази се по један клизавац. Дршка је сајужена са машком *т*, у виду шарнире. Кад су клизавци у вертикалној равнини дршке, онда је машка на свом крају, који је сајужен са дршком, ракљаста, као што слика представља.



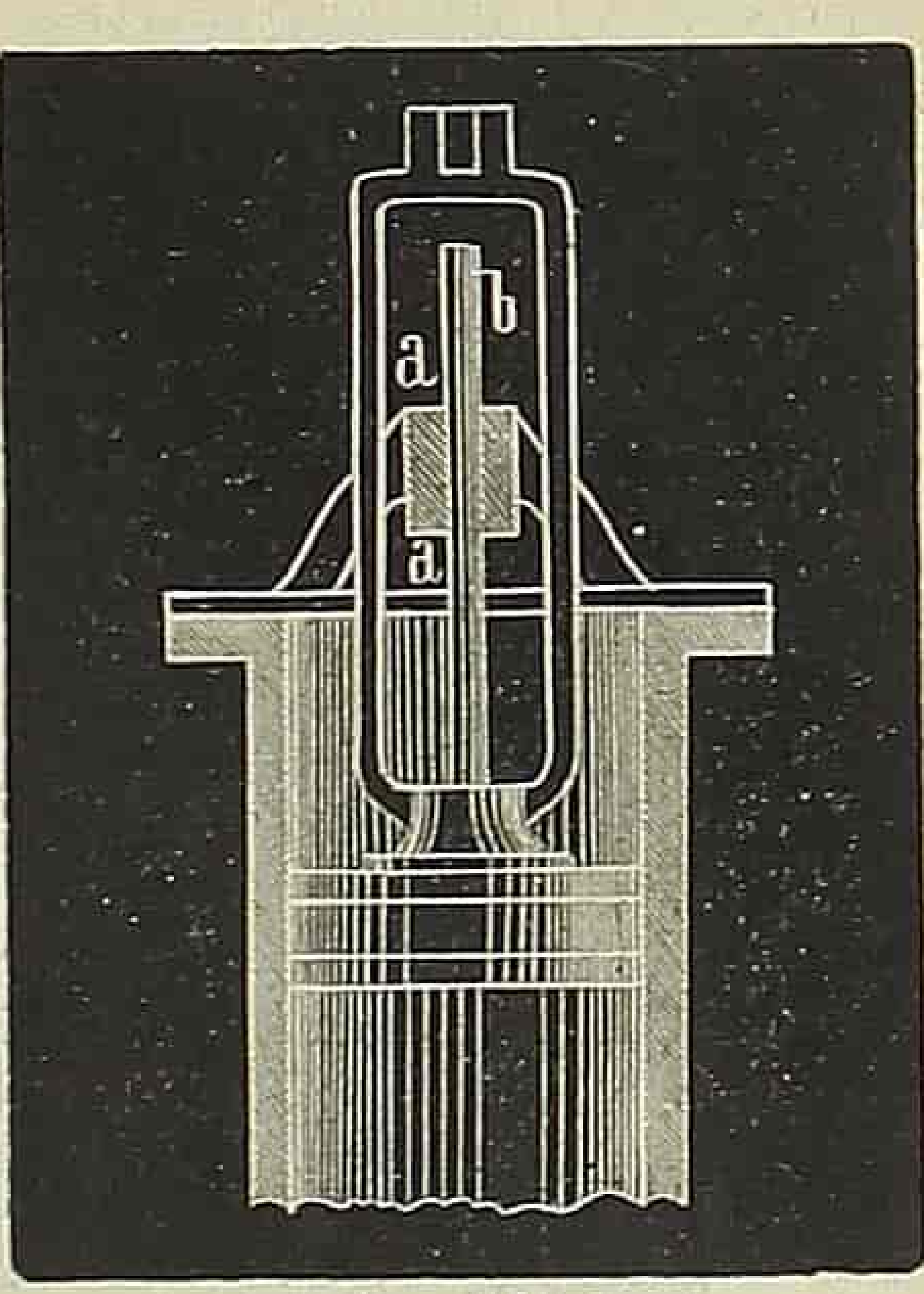
Сл. 114.



Сл. 115.

6-то. Ваљчасти котур *А*. који се котрља по сталном жљебу (издубљењу) *В*. Сл: 115. —

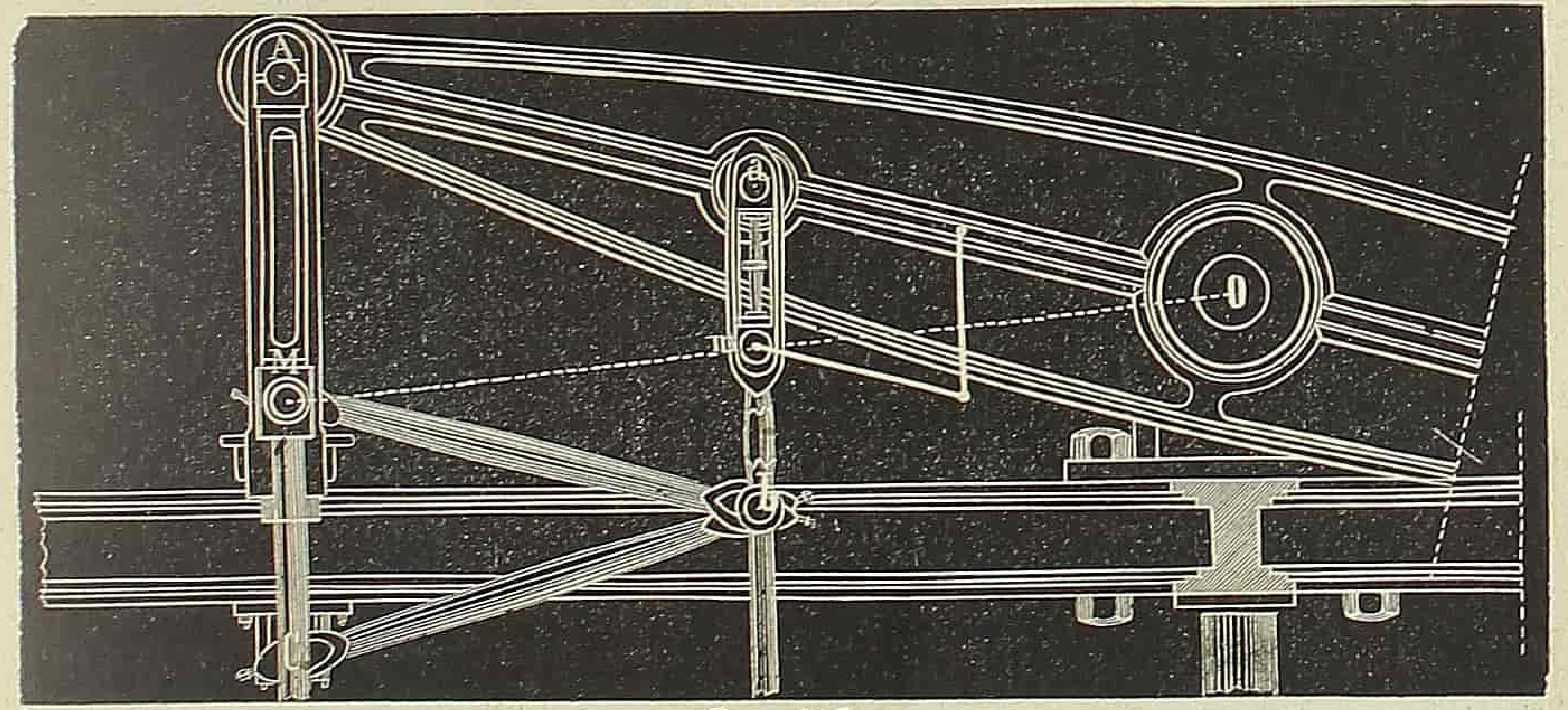
7-мо. Кретна дршка *ъ*, која пролази кроз утврђени тулац *аа*, као што слика 116 једне помпе за пожар, показује.



Сл. 116.

Напоследку.

8-мо. Паралелограм *Watt-a.* — Код парни махина са нијаљком [balancier], дршка клипа [piston] треба да се креће по правој пруги, и ради тога употребљује се извесни меканизам, познат под именом паралелограм *Watt-a*. Тела, која овај паралелограм састављају, сајужена су међу собом у виду зглавка или шарнире, као што слика 117 показује. $\overline{AO}$ нијаљка, *AMba*, паралелограм. Истина је да се употребом овог меканизма, дршка $\overline{MC}$ клипа, само приближно у правој пруги креће, но ова приближност за практику је довољна, ако се паралелограм као што ваља употреби.

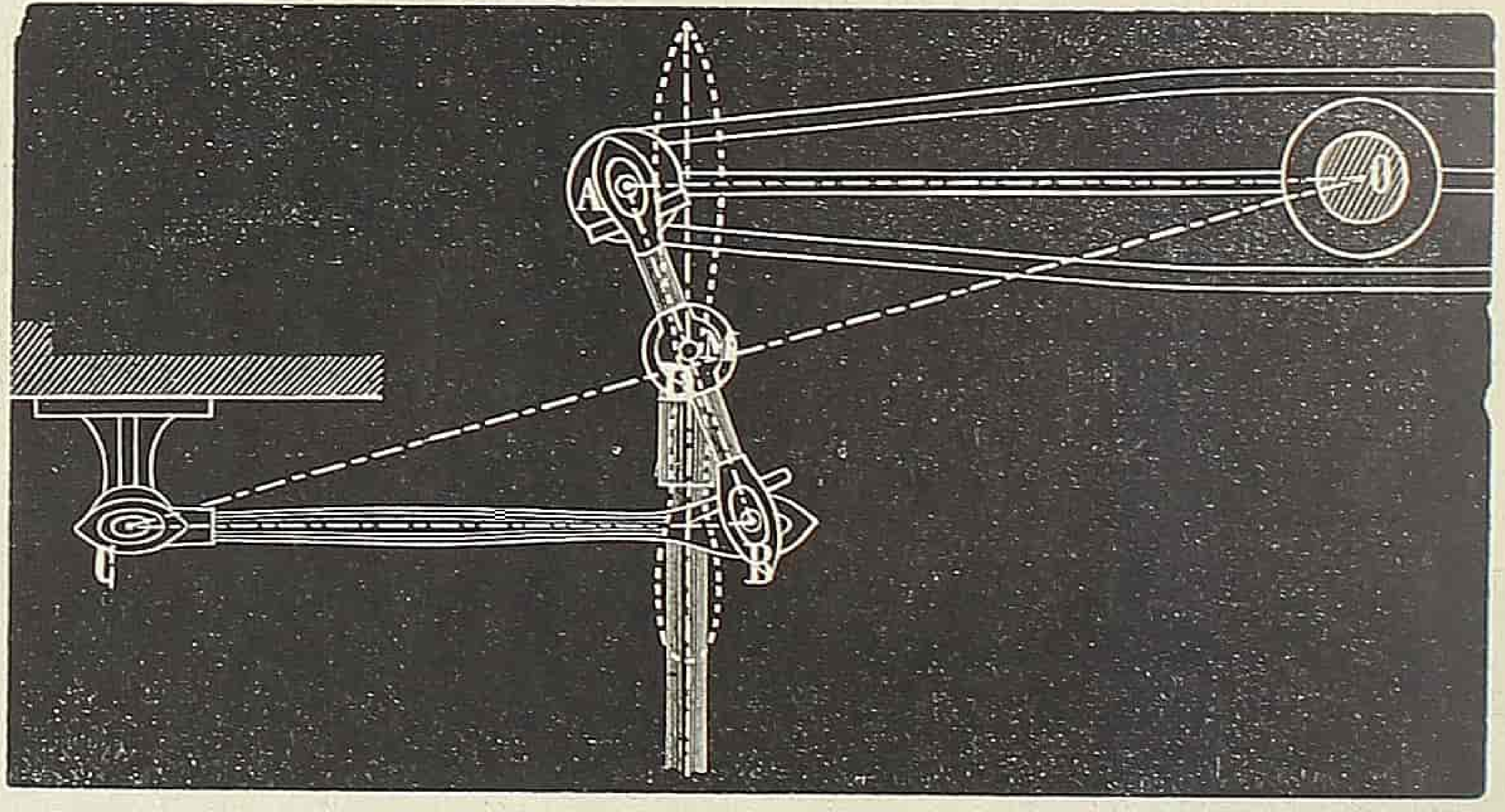


Сл. 117.

Да би лакше схватили геометричку теорију овог меканизма, добро је да се предходно упознамо са нијаљком са уздицама или простим паралелограмом. —

175. *Нијаљка са уздицама,* — Нека је $\overline{AO}$ нијаљка (balancier), која се нија око сталне осе O. Нека је C друга стална оса равноодстојна са првом, око које се нија двоструки систем CB, који се зове уздица или супрот-нијаљка. Овај систем састоји се из два тела, подобна и симетрична према вертикалној равнини, која пролази кроз средину нијаљке.

AB је други двоструки систем од два симетричка тела, који сајужава нијаљку са супрот-нијаљком. — Ова свеза сајужена је у виду шарнире са нијаљком у *A* а са супрот-нијаљком у *B*.



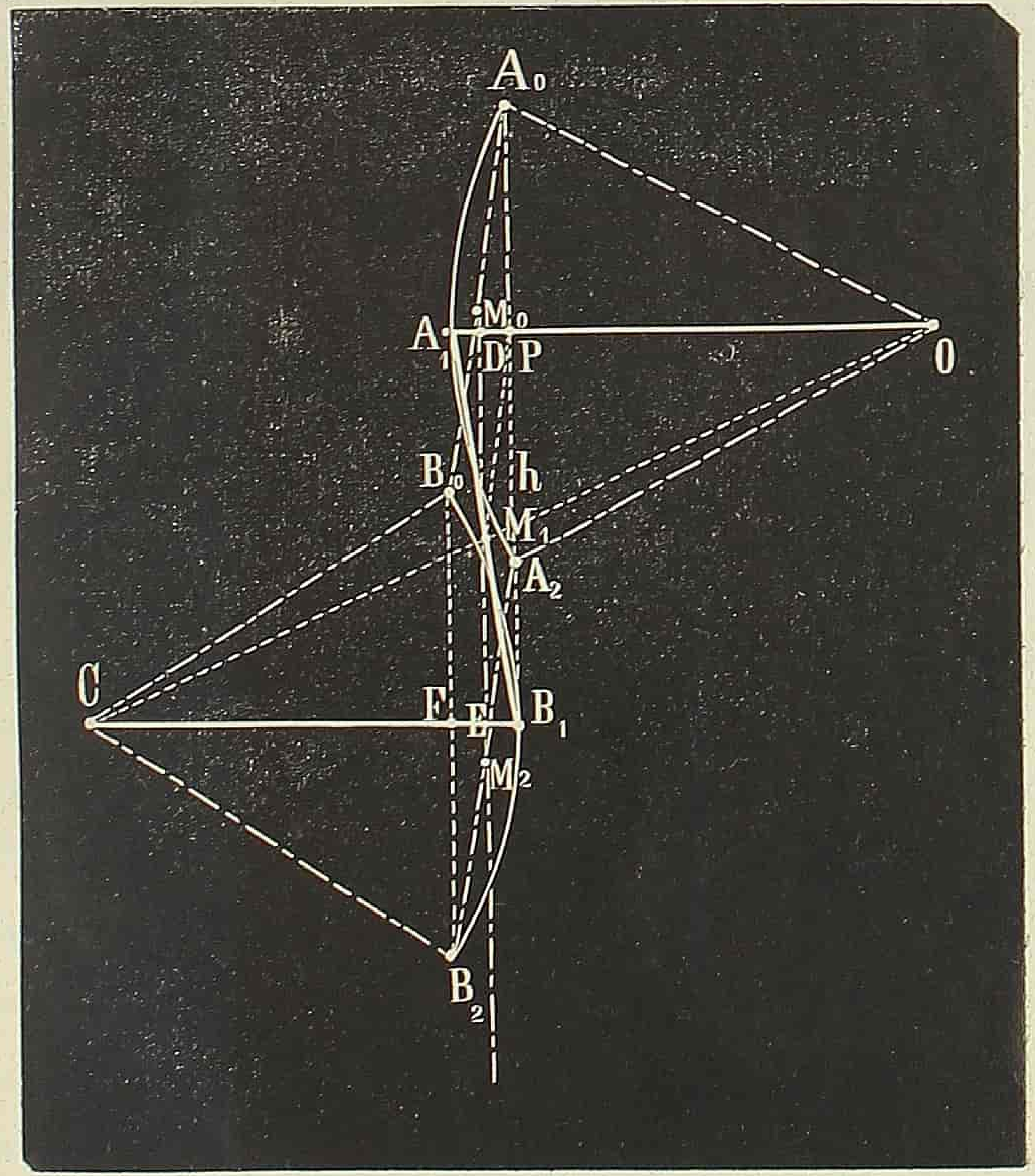
Сл. 118.

Напоследку у тачки *M*, и од прилике у средини *AB*, а између тела, која свезу образују, сајужен је такође у виду шарнире врх дршке клипа, који треба да се креће по правој пруги. — Из овог клатког описа, као и из саме слике лако је сватити, да кретање врха *M* дршке, може да се сматра, као кретање тачке *M*, налазеће се у правој пруги *AB* определене дужине. Две тачке *A*, и *B*, ове праве крећу се по против-положеним луцима кругова, описани у једној истој равнини из утврђени средишта *O* и *C*.

Узимајући праву *AB*, у свима могућим положајима, крива пруга, коју тачка *M* описује, подобна је броју 8. и тачка *D*, у којој се два лука ове криве крсте, налази се на правој $\overline{CO}$, која сајужава стална средишта. — У близини ове тачке *D*, сваки од поменута два лука или крака вопросне криве пруге, разликује се врло мало од праве пруге. —

176. Кад је познато средиште *O*, а тако исто и дужине $\overline{OA}$, $\overline{AM}$, и $\overline{MB}$ Сл: 119, онда можемо повољно узети у правој пруги три положаја, M_0 M_1; и M_2 тачке *M*, а затим определити средиште *C*, и полупречник $\overline{CB}$ тако, да тачка *M*

заиста пролази кроз ова три положаја, јер ова дата довољна су да определимо врло лако најпре три тачке A_0 A_1 и A_2 лука $\widehat{A_0A_2}$, затим тачке B_0, B_1 и B_2 и сљедствено средиште C лука $\widehat{B_0B_2}$. И заиста, из датог положаја M_0 тачке M; као средишта и са полупречником $\overline{MA}$ треба описати лук, чим ће се добити тачка A_0. Затим треба сајузити A_0 са M_0, и на продужењу узети $\overline{M_0B_0}$ равно датом $\overline{MB}$ чиме је тачка B_0 опредељена. На исти начин опрсделе се тачке B_1 и B_2 и средидиште круга, који пролази кроз B_0, B_1, и B_2, биће тражено средиште C.



Сл. 119.

177. У практики узима се права $\overline{M_0,M_2}$ равноодстојна са тетивком $\overline{A_0A_2}$, одкуда сљедује да је $\overline{M_0M_2} = \overline{A_0A_2} = \overline{B_0B_2}$ т. је. пут, који тачка M пролази тамо амо, раван је тетивкама лукова описани кретним тачкама A и B. Осим тога права $\overline{M_0M_2}$ узме се тако, да пролази кроз D, која се налази у по-

ловини висине $\overline{A_1P}$ лука $\overset{\frown}{A_0A_2}$, а тачка M да се налази у M_1, на истој правој у тренутку, кад се тачка A налази у свом средњем положају A_1. Отуда ова четири сљедства:

1-во. Тачка M_1, налази се у средини праве $\overline{M_0M_2}$, јер због тога што је $\overline{M_0M_2}$ управна у средини $\overline{A_1P}$, имамо да је $\overline{PM_1} = \overline{A_1M_1} = \overline{AM}$, дакле је слика $A_0M_0M_1P$ паралелограм, дакле $\overline{M_0M_1} = \overline{A_0P} = \frac{1}{2}\,\overline{A_0A_2} = \frac{1}{2}\,\overline{M_0M_2}$. Потоме половина пута тачке M, одговара половини нијања нијаљке, чиме се добија правилност у кретању. —

2 го. Угли између везе $\overline{AB}$ и дршке $\overline{M_0M_2}$, налазе се час с десне а час с леве стране, и могу свагда мали бити, чиме се умаљава трење при преносу кретања од нијаљке на дршку, и обратно.

3-ће. Ако, ради утврђења мисли, предпоставимо, да је $\overline{A_1O}$ хоризонтално, онда тачка B_1, која одговара тачки A_1, налази се испод ове тачке, а тако исто тачке B_0, и B_2, налазе се испод одговарајући тачака A_0, и A_2, дакле средњи положаји нијаљке и супрот-нијаљке равноодстојни су, отуда сљедује; да ако сматрамо тренутно средиште обртања везе $\overline{AB}$, онда ће тангента у M_1 криве пруге, коју кретна тачка M описује, бити управљена по правој $\overline{M_0M_2}$.

4-то. Ако продужимо праву $\overline{M_0M_2}$, онда ће она пролазити кроз средину E, висине FB, лука $B_0B_1B_2$, јер њена одстојања од тетивке $\overline{B_0B_2}$ и средине B_1 лука $\overset{\frown}{B_0B_2}$, јесу пројекције једнаки прави пруга $\overline{M_0B_0}$, и $\overline{M_1B_1}$ на полупречник $\overline{CB_1}$ са којим ове праве образују једнаке угле. —

Пошто је све то тако, ако би величина и положај угла A_0OA_2, као и дужине $\overline{AO}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$ биле дате, онда би лако могли определити тачку C, и дужину $\overline{AM}$, и то овако: Повуче се тетивка A_0A_2, и кроз средину D праве $\overline{A_1P}$, повуче се равноодстојна са овом тетивком, чим се добија неопредељена права, која пролази кроз $M_0M_1M_2$; затим се на страну опише један круг са полупречником $\overline{CB}$, и узимајући у овом кругу тетивку равну правој $\overline{A_0A_2}$, можемо лако определити дужину $\overline{FB_1}$; ако сада са једне и са друге стране праве $\overline{M_0M_2}$, узмемо одстојања равна $\frac{1}{2}$ B_1F, па повучемо две неопредељене праве равноодстојне са $\overline{M_0M_2}$, онда ће се у једној од ових равноодстојни налазити тачка B_1 а у другој, тачке B_0 и B_2. Напоследку описујући из A_0 A_1 и A_2 три лука са полупречником $\overline{AB}$, добићемо тачке B_0, B_1 и B_2 а кад су оне опредељене, онда можемо лако определити и средиште C. Сајужавајући тачку B_0 са A_0, права $\overline{A_0B_0}$ пресеца ће праву $\overline{M_0M_2}$ у тачки M_0 а тиме је дужина $\overline{A_0M_0}, = \overline{AM}$, опредељена. —

178. *Практичка правила.* Следећа правила постављена од *Watt-a* нису строго обавезна, но не треба се од њих млого удаљавати.

1-во. *Watt* је узимао $\overline{AM} = \overline{MB}$, т. је. он је сајужавао врх M дршке клипа, са средином везе $\overline{AB}$. Кад се овом услову дода јошт и услов да $\overline{M_0M_2}$, буде управна на $\overline{A_1O}$, и да пролази кроз средину D праве $\overline{A_1P}$, онда из тога сљедује, да се три тачке $A_0A_2B_1$ као и $A_1B_0B_2$ морају налазити у правој пруги, а осим тога да су полупречници $\overline{AO}$, и $\overline{CB}$, нијаљке и супрот-нијаљке једнаки. Почем је то тако онда се тачка M_1 криве пруге, коју описује M, налази на правој $\overline{CO}$, даље ова крива састоји се из две једнаке половине $\overset{\frown}{M_0M_1}$ и $\overset{\frown}{M_1M_2}$. —

2-го. *Watt* је умимао одстојање $\overline{OD} = \frac{3}{2}\ \overline{A_0A_2}$, сљедствено $2\,\overline{DO}$ т. је, одстојање између две праве повучене кроз O и C равноодстојно са $\overline{M_0M_2}$, равно је $3\,\overline{A_0A_2}$, потоме је $\overline{DO} = \frac{3}{2}\ \overline{A_0A_2} = 3\,\overline{A_0P}$. Ако означимо дакле са Θ уго A_0OA_1, имаћемо:

$\overline{DO} = \frac{1}{2}\ \overline{A_1P} + \overline{A_1O} \cos \Theta = \dfrac{\overline{A_1P} + 2\,\overline{A_1O} \cos \Theta}{2}$; но $\overline{A_1P} = \overline{A_1O} - \overline{A_1O} \cos \Theta$, дакле;

$\overline{DO} = \frac{1}{2}\ \overline{A_1O}\ (1 + \cos \Theta) = 3\ \overline{A_0P} = 3\ \overline{A_1O} \sin \Theta$, отуда

$$\tfrac{1}{2}(1 + \cos \Theta) = 3 \sin \Theta.$$

Ако сад у овом последњем изразу, узмемо у место $\cos \Theta$ његову вредност $\sqrt{1 - \sin_2 \Theta}$ онда по свршеном рачуну добићемо даје,

$$\frac{1}{\sin \Theta} = 3 + \frac{1}{12}. \qquad \text{или}$$

$\overline{A_1O} = (3 + \frac{1}{12})\ \overline{A_0P} = (3 + \frac{1}{12}) \frac{\overline{A_0A_2}}{2} = (\frac{3}{2} + \frac{1}{24})\ \overline{A_0A_2}$ што ће рећи: да је полупречник $\overline{A_1O}$ раван протрчаном путу дршке, помноженом са $\frac{3}{2} + \frac{1}{24} = \frac{37}{24}$. Отуда и из једначине $\overline{DO} = 3\ \overline{A_0P}$ налазимо:

$\overline{A_1D} = \overline{DP} = \overline{DO} - \overline{PO} = 3\overline{A_0P} - \overline{A_0O} \cos \Theta = 3\overline{A_0P} - \frac{37}{12}\overline{A_0P}$ $\sqrt{1 - \sin^2 \Theta} = \frac{1}{12}\ \overline{A_0P}$, или $\overline{A_1P} = \frac{1}{12}\ \overline{A_0A_2}$ т. је. висина лука равна је $\frac{1}{12}$ протрчаног пута $\overline{A_0A_2}$.

До исти резултата могли смо лакше овако доћи: Имамо

$\overline{OA_1} = \frac{37}{24}\ \overline{A_0A_2}$, $\overline{DO} = \frac{3}{2}\ \overline{A_0A_2} = \frac{36}{24}\ A_0A_2$, дакле $\overline{OA_1} - \overline{DO}$ $= \overline{A_1D} = \frac{1}{24}\ \overline{A_0A_1} = \frac{1}{12}\ \overline{A_0P}$.

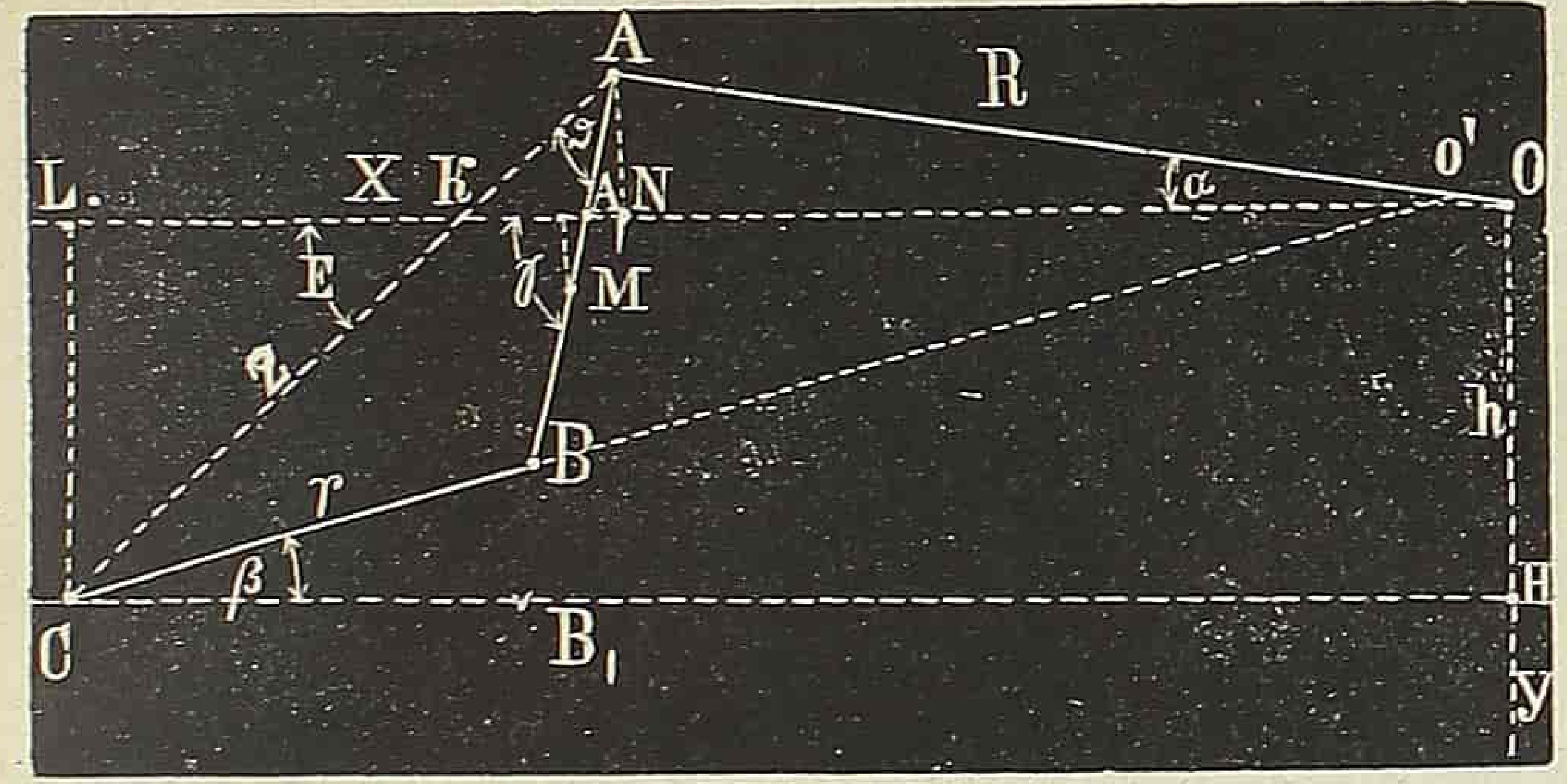
Из једначине $\dfrac{1}{\sin \Theta} = 3 + \frac{1}{12}$, налазимо да је

$$\Theta = 18_0\ 55'\ 28''$$

У практики нетреба прелазити 20^0.

3-ће. *Watt* је узимао дужину $\overline{AM}$ равну највише $\frac{1}{2}$, а најмање $\frac{3}{7}$, протрчаног пута $\overline{A_0A_2}$.

179. *Рачунање координата криве пруге, коју тачка M описује.* Нека је $\overline{OA_1}$ средњи а $\overline{OA}$, ма какав други положај нијаљке; мењљиви уго $AOA_1 = \alpha$, нека су даље $\overline{CB_1}$ и $\overline{CB}$ одговарајући положаји супрот-нијаљке, M тачка, која описује криву пругу, $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ две ортогоналне координатне осе, x и y кординате тачке M; Сл. 120.



Сл. 120.

Поставимо краткости ради $\overline{OA} = R$, $\overline{CB} = r$, $\overline{AB} = l$; $\overline{AM} = nl$, и дате количине или координате тачке C, т. је. $\overline{CH} = a$; и $\overline{OH} = h$.

Напоследку узмимо јошт четири помоћне менљиве количине, као што су: $> BA_1X = y$, $> CAB = \delta$; $> CKX = E$ и одстојање $\overline{CA} = z$; имаћемо:

$$x = R \cos \alpha + nl \cos \gamma \ldots\ldots (1) \quad \cos \tfrac{1}{2} \delta = \sqrt{\frac{(z+l+r)(z+l-r)}{4zl}} \ldots\ldots (4)^{(1)}$$

$$y = nl \sin \gamma - R \sin \alpha \ldots\ldots (2) \quad z = \frac{h + R \sin \alpha}{\sin E} \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$> \gamma = \delta + E \ldots\ldots\ldots (3) \quad tag\ E = \frac{h + R \sin \alpha}{a - R \cos \alpha.} \ldots\ldots (6).$$

---

[1] $r^2 = z^2 + l^2 - 2\, z\, l \cos d$; дакле $\cos d = \frac{z^2 + l^2 - r^2}{2\, zl}$, или

$$\cos d + 1 = \frac{z^2 + l^2 - r^2}{2\, zl} + 1 = \frac{(z+l)^2 - r^2}{2\, zl} = \frac{(z + l + r)\,(z + l - r)}{2\, zl.}$$

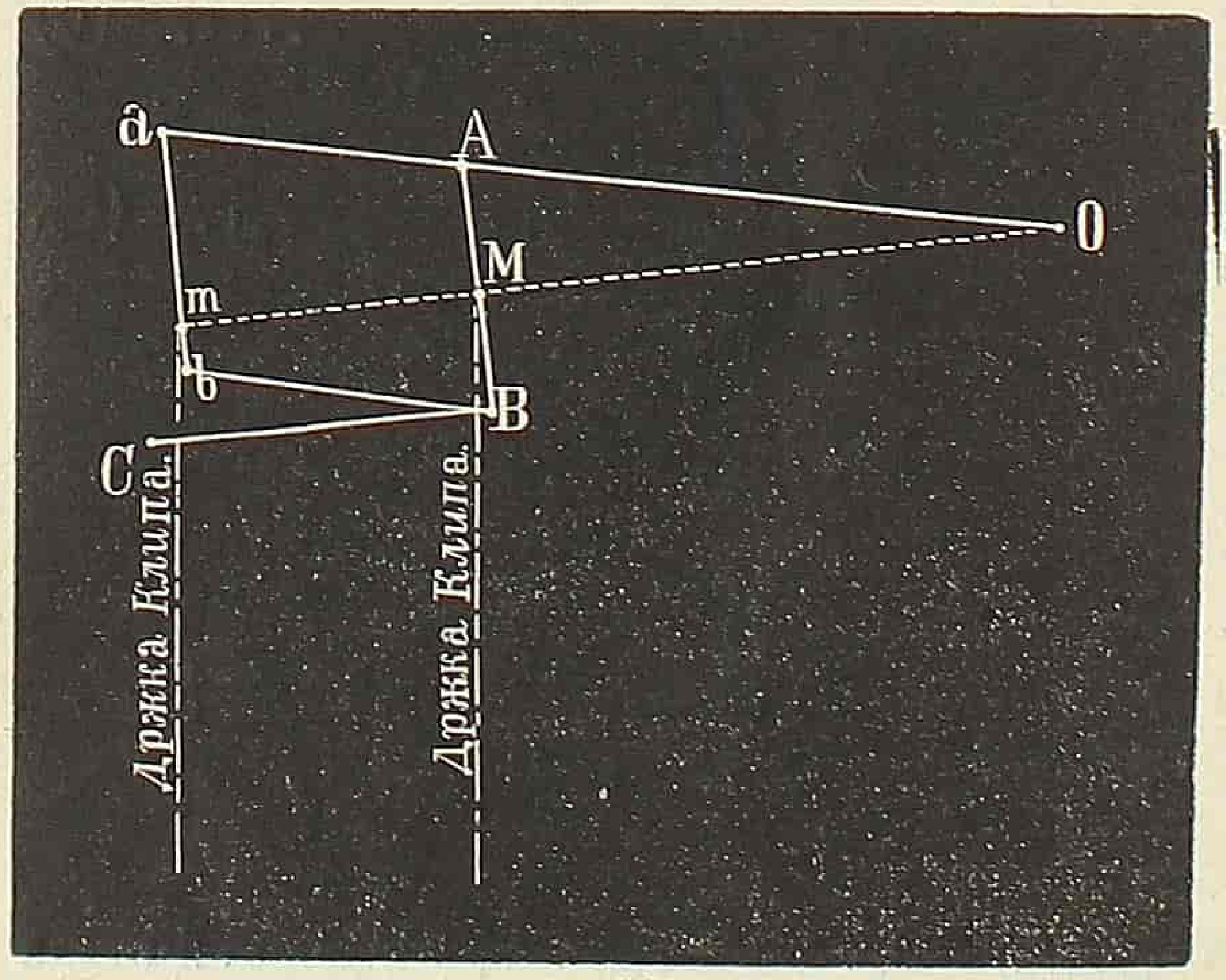
и као што је $\cos d + 1 = 2 \cos^2 \frac{1}{2} d$, то отуда сљедује $\cos \frac{1}{2} d = \sqrt{\frac{(z + l + r)\,(z + l - r)}{4\, zl.}}$ $\overline{OX} \parallel \overline{CH}$; $\overline{CK} \sin E = h$, $\overline{AK} \sin E = \overline{AN} =$ $= R \sin \alpha$, дакле $(\overline{CK + AK}) \sin E = z \sin E = h + R \sin a$. и отуда $z = \frac{h + R \sin a}{\sin E}$, даље $\overline{CK} \cos E = \overline{KL}$ $\overline{AK} \cos E = \overline{KN}$; дакле $(\overline{CK} + AK) \cos E = (KL + KN)$ т. је. $z \cos E = \overline{LN} = a -$ $R \cos \alpha$, отуда $z = \frac{a - R \cos \alpha}{\cos E}$ и потоме $tang\ E = \frac{h + R \sin \alpha.}{a - R \cos \alpha.}$

једначине, које служе да можемо израчунати x и y, кад је уго α дат.

Пример одговарајући правилима *Watt*-a. Узмимо $\overline{OA}$ као јединицу дужина, биће $R = r = 1$; $l =$ протрчаном путу $\overline{A_0A_2} = \frac{24}{27} = 0,648648\ .\ .\ .$, $n = \frac{1}{2}$, $\overline{A_1P} = f = \frac{1}{12}\,l = 0,054054$; $h = \sqrt{l^2 - f^2} = \sqrt{(l+f)\,(l-f)} = 0,646393$; и $a = 2 - f = 1,945945.\ .\ .\ .\ .$

У ма којој тачки вопросне криве пруге, можемо врло лако повући тангенту, оснивајући се на теорему о тренутном средишту обртања; [види овај теорем у првом делу кинематике. № 107]; лако је видити, да је тангента, која одговара средњем положају, вертикална. —

180. *Артикулирани паралелограм Watt-a.* — Овај паралелограм само је у нешто преиначени прости паралелограм, у тој цели да се умањи простор, који супрот-нијаљка заузима. У осталом геометричка својства оба ова паралелограма сасвим су једна иста, као што се о томе можемо лако уверити на сљедећи начин:



Сл. 121.

Нека је $\overline{Oa}$ нијаљка [balancier] која се нија око средишта O. $\overline{CB}$ супрот-нијаљка сајужена са нијаљком средством везе $\overline{AB}$ Сл. 121. — Ако је сада тачка M, везе, сајужена у виду шарнире са врхом дршке клипа, онда по теорији простог паралелограма, ова тачка у кретању нијаљке описаће познату криву пругу, која се за врло мало разликује од праве пруге. — Но ако над правом $\overline{Aa}$ конструишемо паралелограм $AabB$, кога су стране у тачкама A, a, b, и B у виду шарнире сајужене, и за тим кроз тачке M и O представимо повучену праву OMm, онда ћемо пресеком ове праве са страном ab, вопросног паралелограма добити тачку m, која ће при кретању нијаљке описати криву, сасвим подобну пруги, коју тачка M описује. И заиста у ма ком положају нијаљке, триуго AOM остаје подобан триуглу aOm, отуда имамо ову једначину $\frac{\overline{OM}}{\overline{Om}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{am}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{aO}}$ = сталној количини, јер је $\frac{\overline{AO}}{\overline{aO}}$ стално; дакле тачке O, M, и m, за време кретања налазиће се свагда у једној правој пруги, а одстојања $\overline{OM}$, и $\overline{Om}$, остаће у сталном међусобном отношењу, отуда сљедује, да ће крива пруга описана тачком M, бити подобна пруги, коју m описује, и отношење између величина ове две пруге, биће равно сталном отношењу $\frac{\overline{OA}}{\overline{Oa}}$. — Потоме имамо две тачке M, и m, које могу служити за сајуз две равноодстојне дршке, што обично код парни махина са нијаљком и бива. — Употребом овог артикулираног паралелограма, точка C налази се млого ближе самој махини, и тако се потребује мање простора за супрот-нијаљку. И за овај као и за прости паралелограм, могу се предходно узети три тачке M_0 M, M_2 у правој пруги, по којој се има дршка клипа кретати, а за тим определити по познатом средиште обртања супротнијаљке. —

Обично и из исти узрока, које смо навели код простог паралелограма, узима се и овде $\overline{M_0M_2}$ управно и у средини $\overline{A_1P}$, у овом случају биће $\overline{M_0M_1} = \overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\,\overline{A_0A_2}$.

Watt, проналазач овог паралелограма, поставио је ова практичка правила. —

Он је обично узимао: $\overline{OA} = \overline{Aa}$; и $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Отуда сљедује:

1-во. Да се тачка m, слаже са тачком b, т. је: са једним врхом паралелограма Сл. 122.

2-го. Да је крива пруга, коју описује тачка m, двапут већа од криве пруге описане тачком M.

3-ће. Сљедствено да права m_0m_2, пролази кроз тачку C и као што се M_1, налази у правој $\overline{CO}$, онда и m_1, средњи положај тачке m, мора се налазити у истој правој пруги дакле у C.

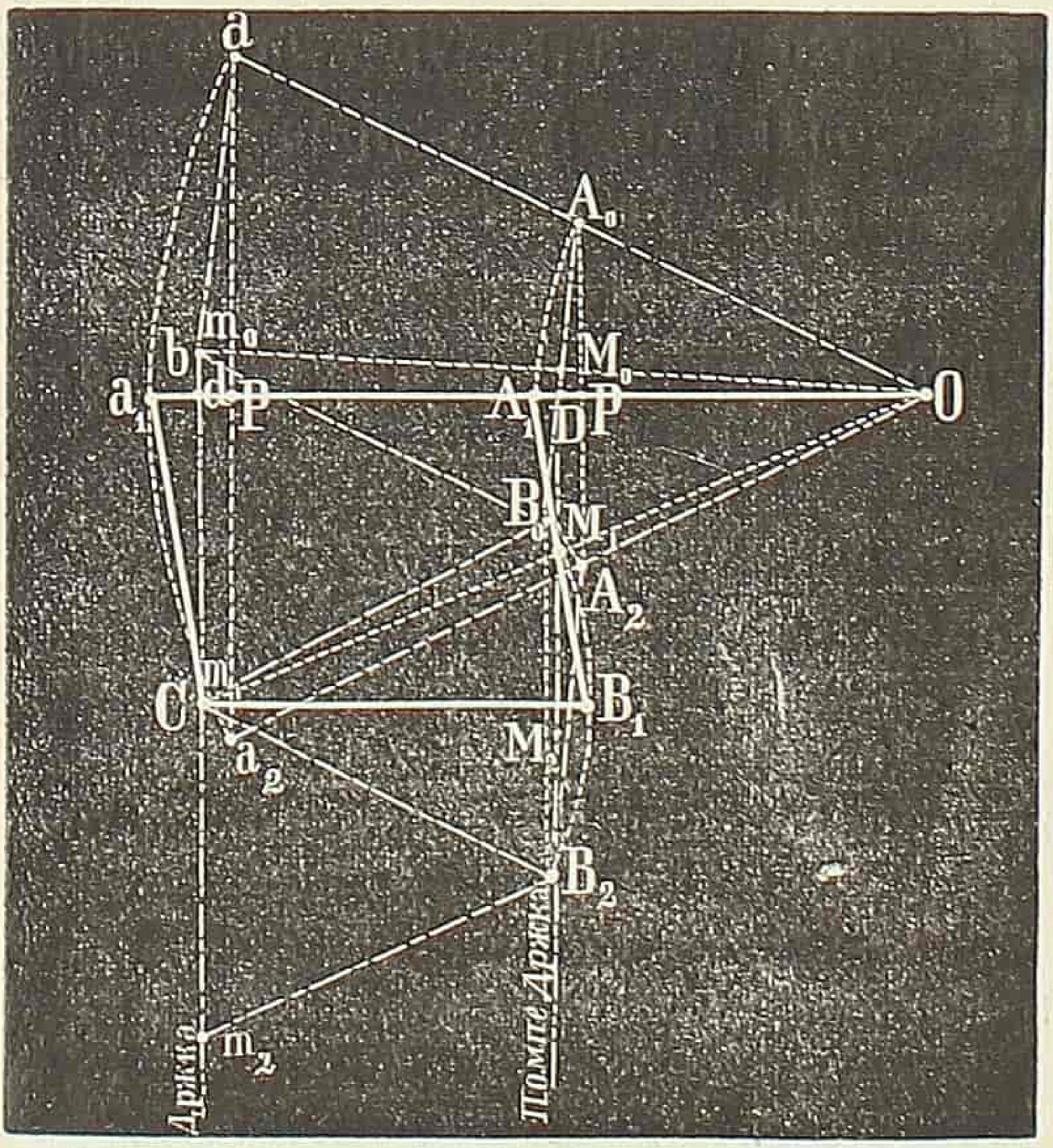
4-то Да протрчани пут $\overline{m_0m_2} = 2\,\overline{M_0M_2} = 2\,\overline{A_0A_2}$, износи $\frac{2}{3}$ одстојања између средишта O и праве m_0m_2. [$\overline{A_0A_2} = \frac{2}{3}\,\overline{DO} = \frac{1}{2}\,\overline{Od}$, дакле $\overline{m_0m_2} = 2.\,\frac{2}{3}\,\overline{DO} = 2.\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\overline{Od} = \frac{2}{3}\,\overline{Od}$.]

5-то. Да је полупречник $\overline{Oa}$ нијаљке, раван овом протрчаном путу, помноженом са ($\frac{3}{2} + \frac{1}{24}$), и напоследку;

6-то. Да је висина лука $a_0a_1a_2$ описаног артикулацијом a, равна $\frac{1}{12}$ од $\overline{a_0a_2}$ или $\overline{m_0m_2}$.

Приметба 1-ва. *АМЂа* Сл: 117 представља конструкцију једног оваковот паралелограма.

Прим: 2-га. На истим начелима основана је конструкција пантографа, т: је: справе за копирање разни цртежа, нарочито топографски планова и карата.



Сл. 122.

Пошто смо се овако упознали са главним органима махинским, који се употребљују за осигурање кружног и правопружног кретања поједини тела, ми ћемо сада да пређемо на изучавање они органа, који служе за пренос кретања. Од ових пак сматраћемо само оне, који се често у практики употребљују, и према њиној чешћој или ређој употреби ми ћемо се код њих више или мање и задржавати. —

Органи махински, који се употребљују за пренос кретања.

I Правац преноса сталан. — Отношење брзина стално.

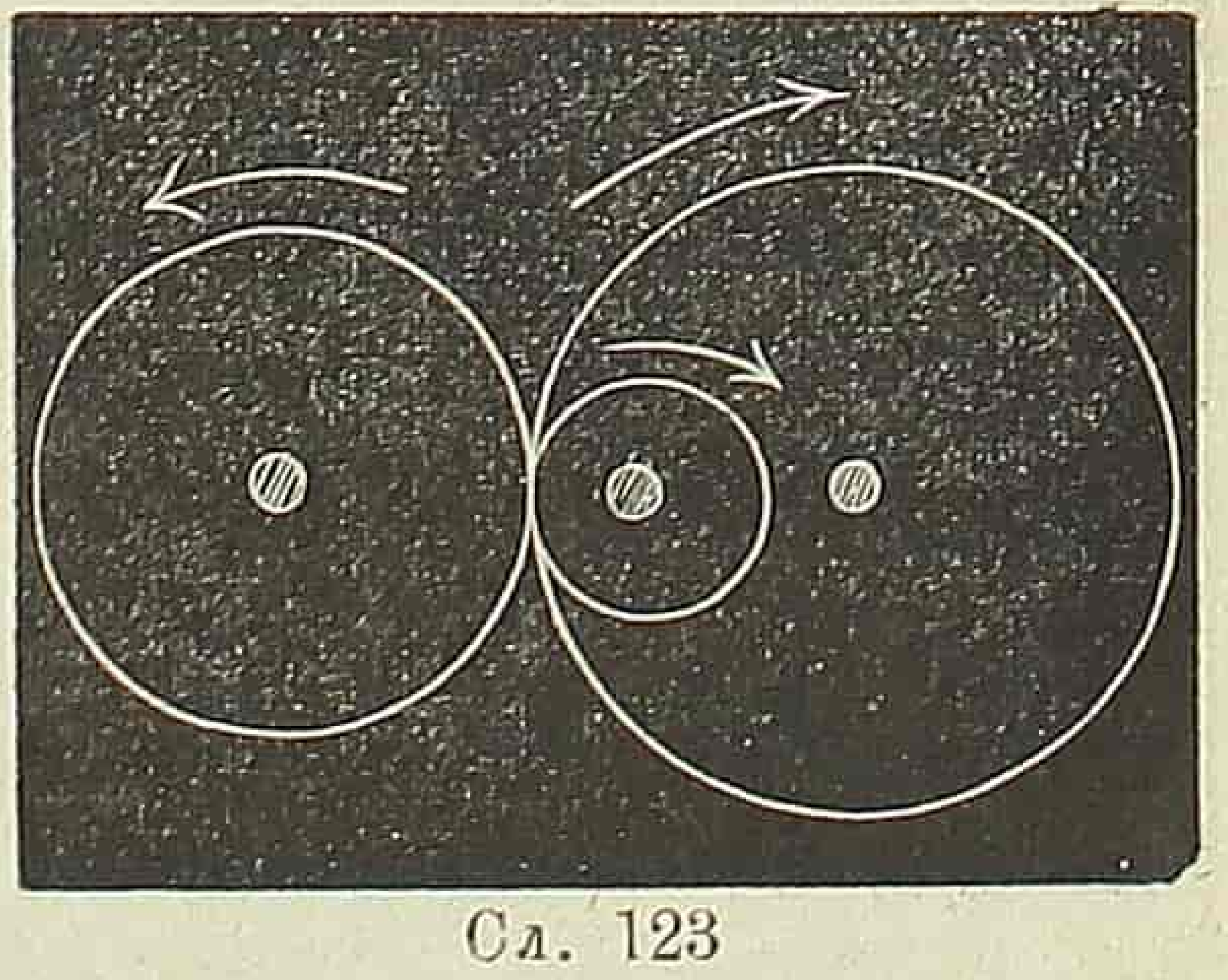
I. ПРЕНОС КРЕТАЊА ДОДИРОМ.

181. При преносу кретања додиром, разликују се обично ова три случаја: *А*, Кад су осе додирајући се тела равноодстојне. *В*; Кад се у једној тачки пресецају, и *С*; Кад се неналазе у једној истоі равнини.

А. — Осе равноодстојне. Геометрија показује нам, да има врло млого начина, које можемо употребити, па да добијемо стално отношење брзина, између две сталне и равноодстојне осовине. — Од ових разни начина ми ћемо испитати само сљедеће.

а; *Фрикциони ваљци.* Ако се постави тај услов да релативно кретање два додирајућа се тела, буде просто котрљање, онда је задатак о преносу кретања решен тако званим фрикционим ваљцима. Ево у чему се ови састоје:

Два ваљка кружне основице Сл. 123. узајмно се притискују, и кад се један од њих, у сљед каквог мотора обрће око своје осе, онда ће се ово обртање пренети и на други ваљак, но то само онда, кад је трење, које се порађа између додирајући се површина ваљака, веће од одпора, који се има савладати. — У овом случају оба ваљка, котрљаће се један по другом без клизања, обртајући се око својих осовина. —



Сл. 123

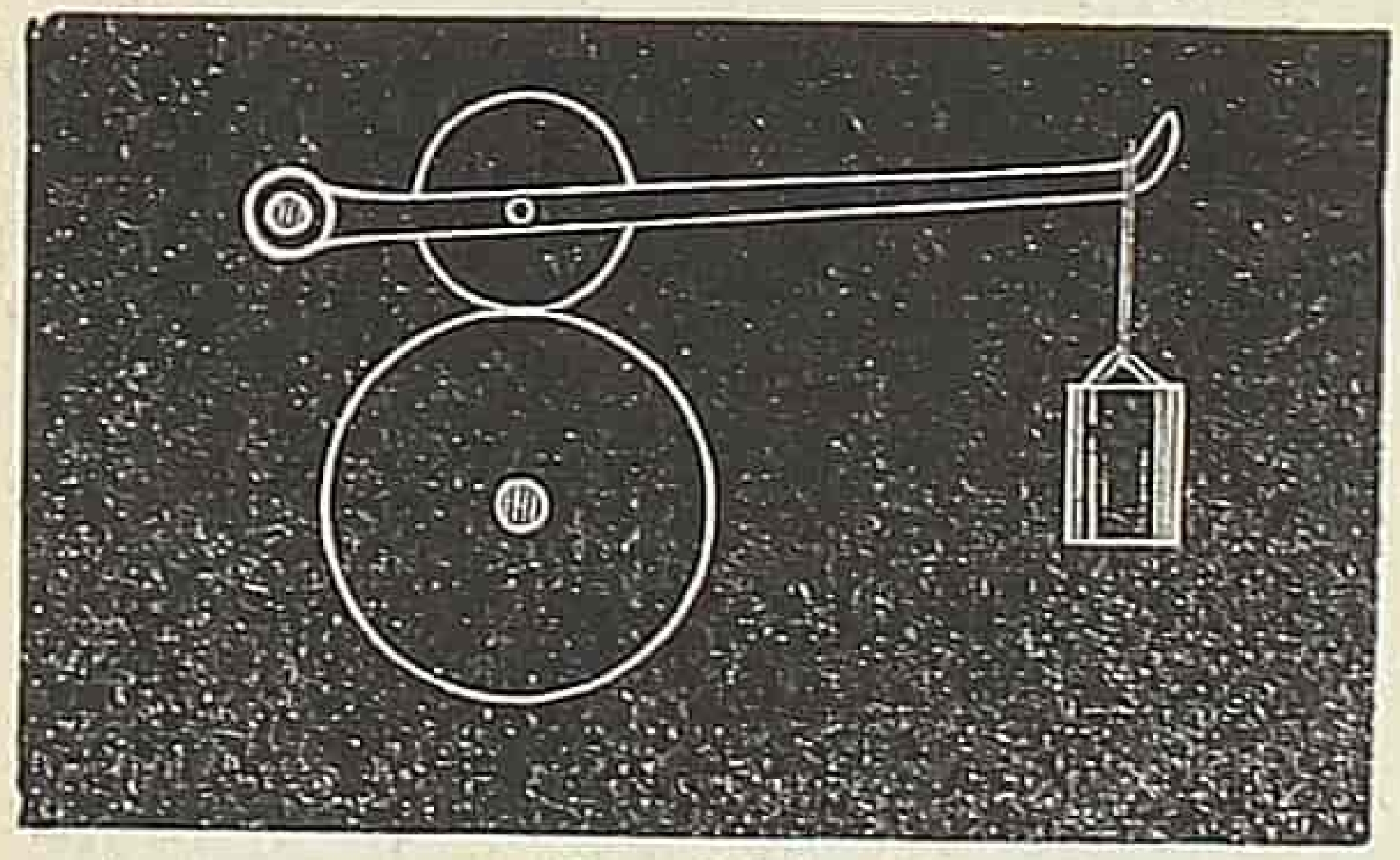
Ако би пак одпор био већи од поменутог трења, онда ће један ваљак по другом клизати, и тиме се зактевани пренос кретања не ће моћи произвести.

Ако означимо са r и r' полупречнике ваљака, а са w, и w', одговарајуће угловне брзине, онда ћемо по познатом имати ову једначину:

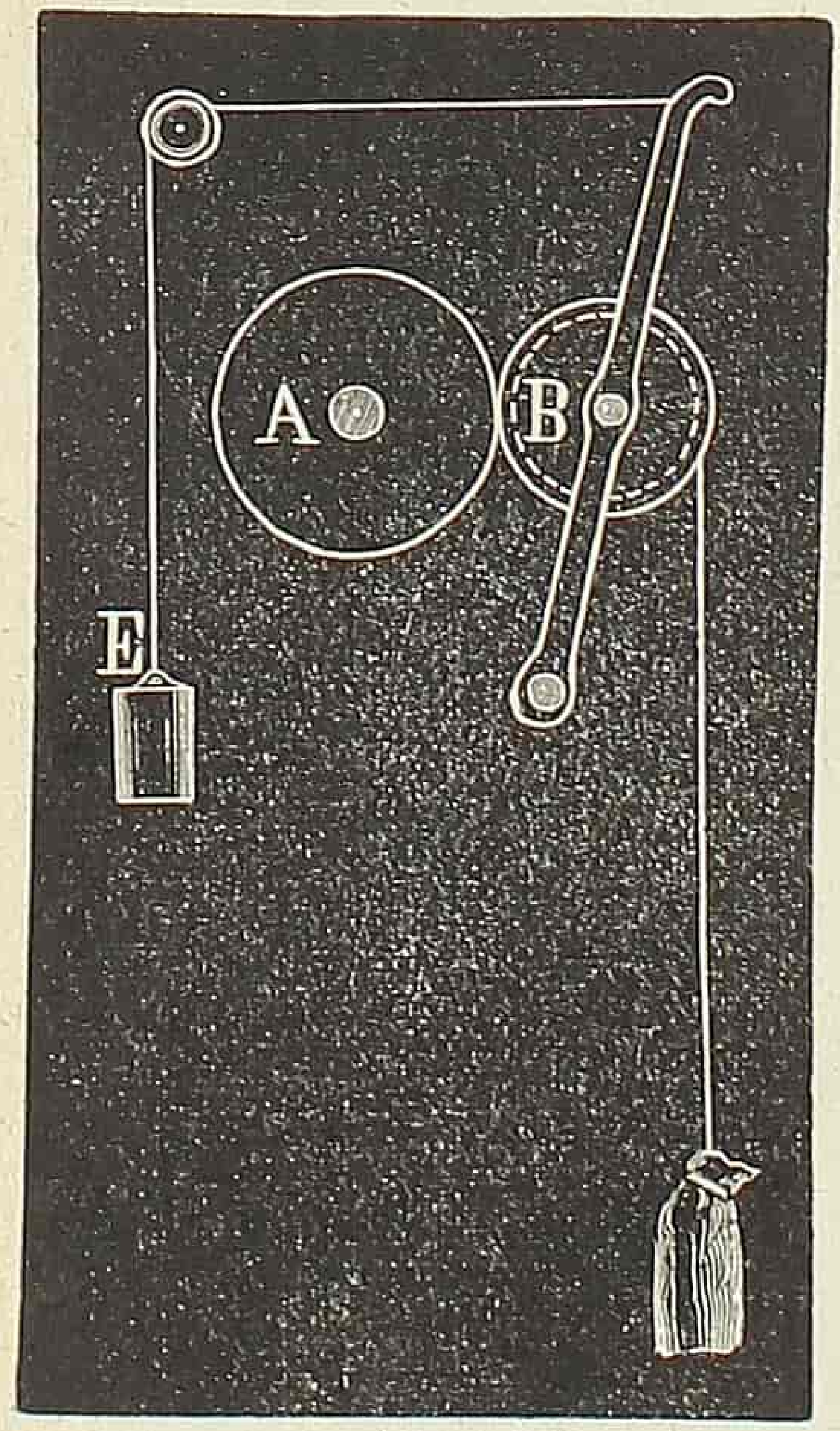
$$wr = wr'$$

којом можемо изнаћи заједничку брзину тачака додира оба ваљка. Ова једначина показује, да при преносу кретања средством фрикциони ваљака, угловне брзине стоје у преокренутом отношењу полупречника ови ваљака. — Лако је даље и то видити, да ће се ваљци обртати у противположеном правцу, ако се спољне додирају, напротив обртање биће истог правца, ако мањи ваљак притискује онај већи са унутарње стране. —

Да би се избегло клизање, употребљују се разни начини и средства. — Често је површина једног ваљка обложена каквом рапавом кожом. — У неким случајима, једна од осовина, на којој је ваљак утврђен, није абсолутно стална, већ је притиснута уз другу осовину тако званим федером (ressort), или каквом тежином као што Сл. 124 показује. — Слика 125 представља у главноме меканизам за дизање џакова у воденицама (млинама). — Ваљак *B* налази се у малом одстојању од ваљка *A*, кога махина непрекидно обрће око његове осовине. — Кад се конопац *E* удесно затегне, онда ваљак *B* дође у додир са ваљком *A*; У сљед тога ваљак *B* почне се обртати, и џак се диже, и кад се попео на зактевану висину, онда се конопац *E* попусти, и тиме пренос кретања од *A* на *B* престане. —



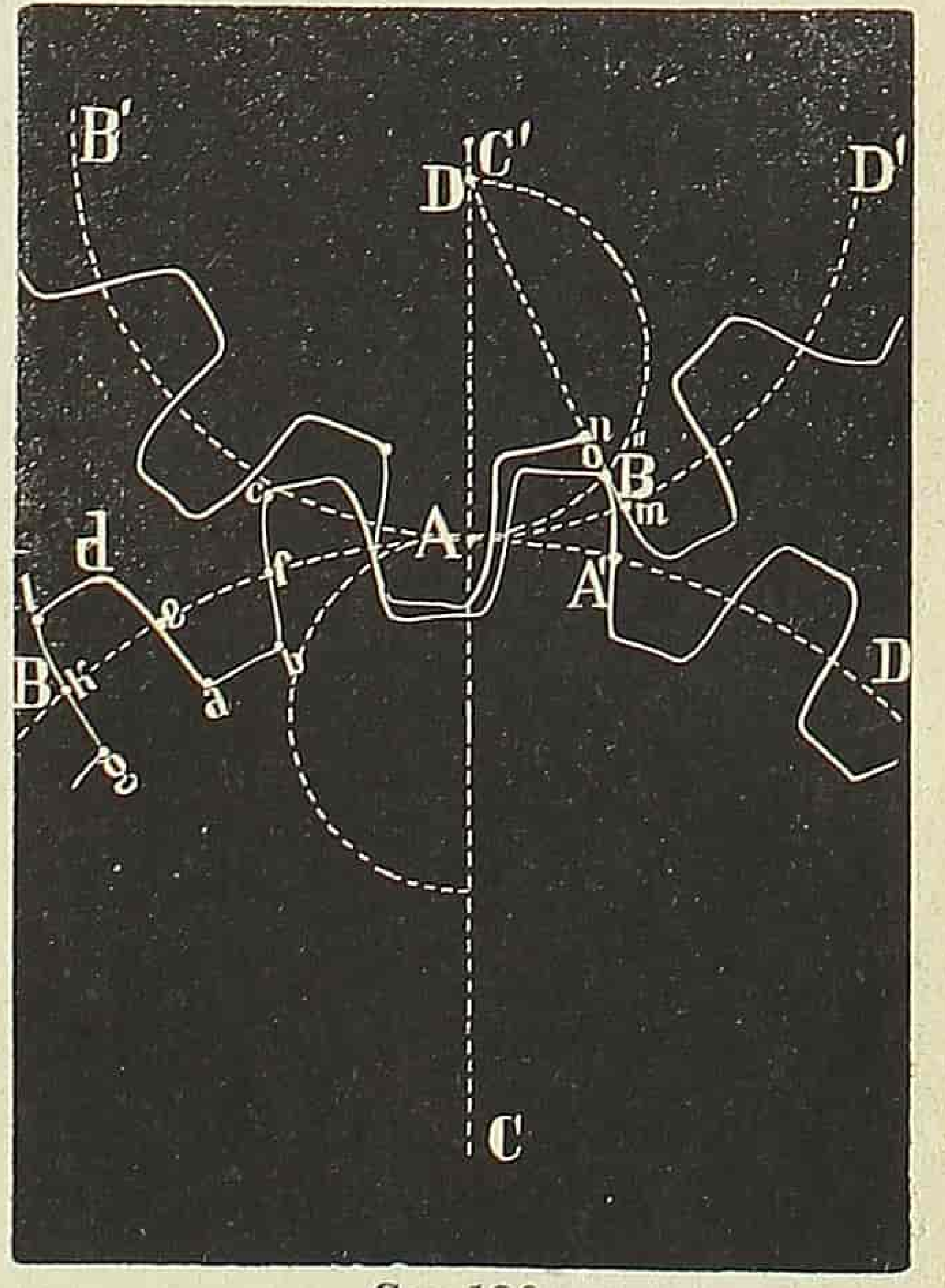
Сл. 124.



Сл. 125.

Фрикциони ваљци употребљују се врло редко, и само у неким особитим случајима, а то због тога, што није могуће уништити сасвим клизање између додирајући се површина, па потоме неможе се ни рачунати на тачност отношења, које се жели имати измеђ брзина. Осим тога, кад се оће да произведе пренос кретања са једног ваљка на други, кога је осовина јако обтерећена, дакле кад се има да савлада велики одпор, онда притисак једног ваљка на други, неће свагда бити доваљан, да би могао произвести обртање осовина, и један од ваљака обртајући се, клизаће по оном другом. — Ако се пак употребе средства, да се довољни тисак за пренос кретања добије, онда ће се тиме произвести и велико трење између подпора и чепова осовина, на којима су ваљци утврђени, а ово је у опште за свако кретање некористно, као што ћемо се о том у динамики уверити. —

182. *b. Зубчасти точкови.* [Engrenages]. У место фрикциони ваљака, употребљују се по већој части, и много пробитачније тако звани зубчасти точкови или краће зубчаници, снабдевени са зубима. — Зуби једног точка заватају за зубе оног дуугог тако, да кад се један точак обрће, онда се мора и онај други обртати, и тако је обртање пренешено средством ових точкова на одговарајуће осовине. Слика 126 представља један пар зубчасти точкова. —



Сл. 126.

Зуби точкова, који се обрћу око равноодстојни оса, обично су ограничени у оним странама, у којима се узајмно притискују, ваљчастим површинама, којих су производнице равноодстојне са поменутим осама; због тога овакови точкови зову се ваљчасти зубчаници. — Код ових точкова, зуби се обично тако праве, да кад се један точак једномерно обрће, онда се и онај други мора такође једномерно обртати, или другим речма; да отношење угловни брзина буде стално, па ма како се један од два точка обртао.

Да овај услов буде испуњен, и да точкови правилно заватају, зуби морају бити једнаки и једнако удаљени један од другог како на једном тако и на другом точку, тако да се на два једнака лука налази један исти број зуба. — Отуда сљедује, да се за зубчање точкова, мора предходно изнаћи такав лук, који би тачно извесни број пута садржан био у сваком од додирајући се кругрва. — Овај лук зове се корак зубчасти точкова, који мора бити један исти за оба точка да би могли правилно заватати.

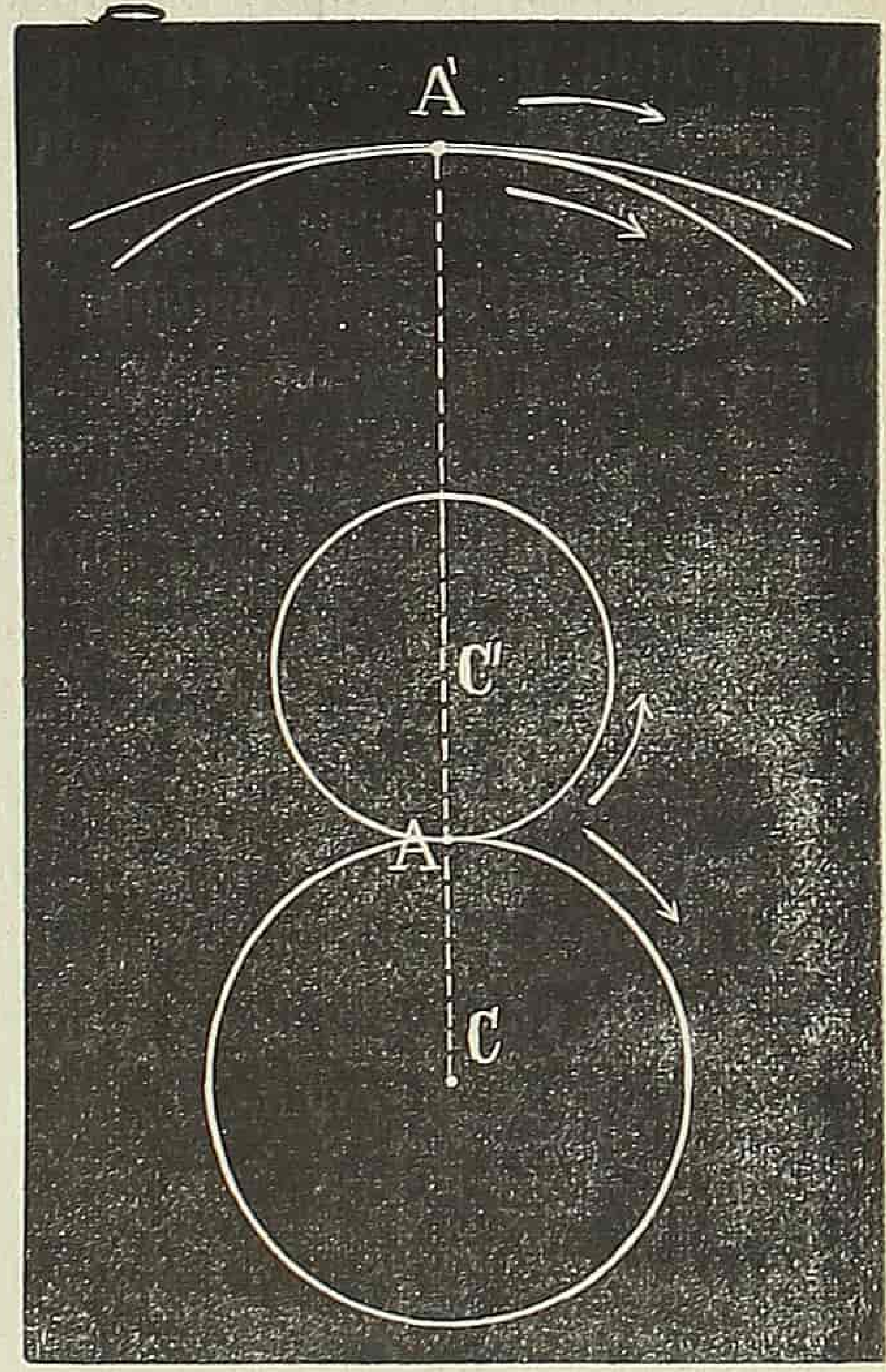
Корак је подељен на два једнака или неједнака дела, на један део долази зуб, а на други издублење између два зуба. — Што се тиче додирајући се кругова, који служе тако рећи као основ за зубчање точкова, они сасвим изчезавају, чим је зубчање извршено, но како ови крузи имају главну улогу у конструкцији зубчасти точкова, то се они зову првобитни или основни крузи. — Потоме у предходећој слики, BAD и $B'AD'$ јесу основни крузи; $adlg$ један зуб, а $abcd$ — удублење; лук kef *корак* је зубчаника. [Овај лук раван је одстојању два једно до друго налазећа се зуба, мереном од средине једног до средине другог зуба, по периферији основног круга.]

Дебљина зуба мери се по периферији основног круга, а ширина у правцу оса обртања.

Део $edlK$ зуба, који је изван основног круга, зове се фаза; а део $eKga$, који је унутра зове се фланка. — (бок). —

183. Кад оћемо да пренос кретања између две равноодстојне осовине произведемо ваљчастим зубчаницима, онда пре свега треба да определимо полупречнике основни кругова. — Ови полупречници, сразмерни броіевима зуба вопросни зубчаника, треба да буду преокренуто сразмерни угловним брзинама, или бројевима обрта, које желимо имати за једно исто време. — Задатак дакле, који прво имамо решити, састоји се у томе, да поделимо обично дату праву $\overline{CC'} = d$ на два такова дела, која ће стојати међусобом у неком датом отношењу. — Но као што је лако видити, овај задатак има два решења. Једним добијамо тачку A додира основни

кругова, која се налази између два средишта C, и C', слика 127, а другим тачку A', која је изван ових средишта.



Сл. 127.

Ако узмемо A за тачку додира основни кругова, онда се ови крузи један према другом налазе са спољне стране, и њиова су обртања противног правца. — Напротив ако узмемо A' за тачку додира, онда се мањи круг налази са унутарње стране оног већег, и оба се обрћу у истом правцу. Потоме имамо двојаке зубчасте точкове, једни се зову спољњи, а други унутарни. И једни и други употребљују се према правцу обртања осовина, кои се жели имати. —

184. Ако сматрамо тачку A, у којој се два основна круга C и C' додирају, и означимо са w и w' одговарајуће угловне брзине, онда лук протрчан тачком A, круга C, за време dt по познатом биће раван $w\overline{AC}\,dt$, а лук протрчан истом тачком, сматрајући је као тачку круга C', за исто време, биће $w'\overline{AC'}\,dt$, но ово су протрчани путови једном истом тачком за једно исто време, дакле они морају бити једнаки. Потоме зубчасти точкови морају се тако конструисати, да за једно исто време прођу кроз тачку додира једнаки луци од оба основна круга, отуда је лако закључити, да ће се за време обртања оба точка, основни крузи геометрично сматрани, котрљати један по другом. —

185. Ми напред рекосмо, да су код ваљчасти зубчаника, зуби ограничени скоро свагда ваљчастим површинама, којих су производнице равноодстојне са осама обртања точкова. Треба сада да видимо каква мора бити основица ови ваљчасти

површина т. је: профил [пресек управан на горепоменуте осе] зуба, који би задовољио све како практичке тако и геометричке услове вопросни зубчаника. —

186. Релативно кретање два точка истоветно је са релативним обртањем основни кругова, потоме горепостављени задатак са теоретичког гледишта, има безбројно млого решења. И заиста, ако би се обазирали само на то, да решење задатка задовољава геометричке услове, онда би се могла узети ма која крива пруга за профил зуба једног точка, котрљајући затим основни круг овог точка, по основном кругу оног другог, зуб вопросног профила, заузеће разне положаје, и тражени одговарајући профил зуба другог точка, мора додирати узети профил, у његовим разним положајима.

Графичко извршење овог решења олакшано је тиме, што је потребно а и довољно, да заједничка нормала, на два додирајућа се профила зуба, у ма ком њином положају, пролази кроз тачку додира два основна круга, па да отношење угловни брзина буде стално. —

Ми се овде нећемо упуштати у опредељивање профила зуба у опште, јер то има само своје теоретичне важности, него ћемо да наведемо оне начине, који се по највише у практики употребљују за ово опредељивање профила. — Узмимо да имамо определити профил зуба за.

а Спољне ваљчасте зубчанице.

187 Предходно имамо да определимо полупречнике основни кругова, а то ћемо овако учинити:

Нека су R, и R', ови полупречници
n број обрта, који мора учинити круг R', док круг R учини један обрт. имаћемо.

$$\underline{R = nR'}$$

Ако би сада дат би један полупречник, онда је други опредељен предходећом једначином.

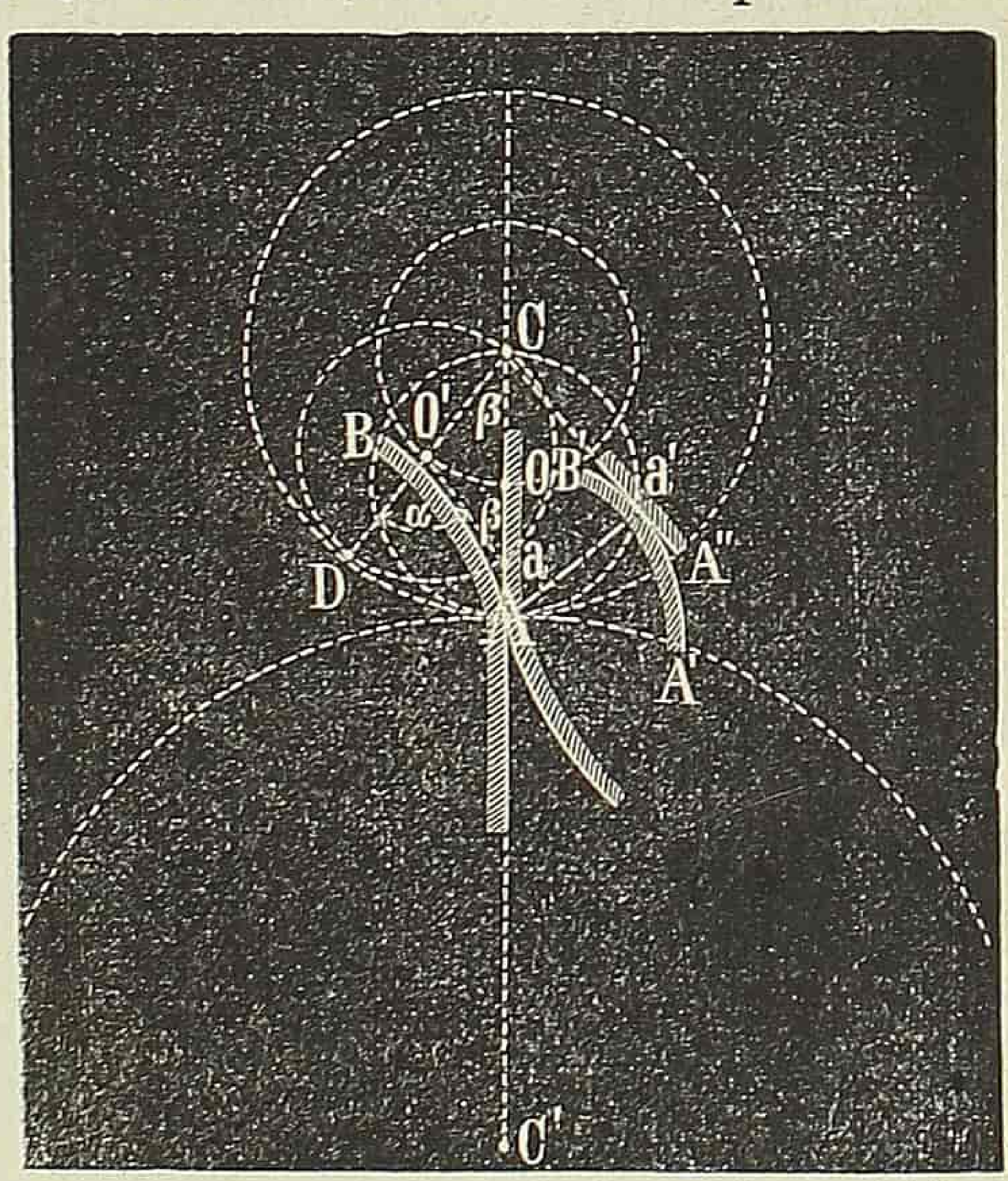
Ако је пак одстојање средишта два точка дато, онда означавајући ово одстојање са d, биће.

$$R + R' = d,$$

и потоме $$R = \frac{nd}{n+1}; \quad R' = \frac{d}{n+1}.$$

Опредељење профила зуба. Први практични начин.

188, Зубчаници, код којих је фланка профила зуба права пруга, а фаза епициклоида. — Оваковн зубчаници, највише се данас употребљује. Они имају то својство да су реципроки т. је: да могу узајмно један другог обртати. — Конструкција зуба оваковн точкова изводи се из сљедећи посматрања. —



Сл. 128.

Нека су C и C' средишта основни кругова Сл. 128 који се у таки A додирају. Опишимо са полупречником $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ над правом $\overline{AC}$ круг O, $[ABC \ldots.]$ и рецимо да се овај круг котрља по унутарњој страни круга C, но у исто време да се и круг C, котрља по кругу C', који ћемо овде предпоставити као да је сталан, тако да се сва три ова круга свагда у једној тачки додирају. — При том котрљању тачка A круга O, описаће односно круга C, једну епициклоиду, која се у овом случају своди на праву пругу управљену по $\overline{AC}$. И заиста, рецимо да је тачка O дошла у O', ако сајузимо O' са a, онда је увиђавно да је.

$$>\alpha = > 2\beta.$$

Осим тога зна се да је дужина лука $\widehat{AD} = \dfrac{\overline{AC}\pi.\beta}{180}$,

а лука $\widehat{Da} = \dfrac{\overline{AO}.\ \pi\alpha}{180}$, но као што је $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, то

отуда сљедује да је $arc\ \widehat{AD} = arc\ \widehat{Da}$, а то ће рећи: да ће се тачка A кретати по правој $\overline{AC}$.

Даље иста тачка A, описаће односно круга C' епициклоиду $\widehat{AB}$, и ми ћемо сада да докажемо, да се права $\overline{AC}$

и крива $\overset{\frown}{AB}$, могу узети за профим зуба код ваљчасти зубчаника. —

Ради тога рецимо да је епициклоида AB, у сљед обртања основни кругова дошља у $\overset{\frown}{A'B'}$, одговарајући положај праве $\overline{AC}$, определићемо, ако из C, повучемо тангенту на криву $\overset{\frown}{A'B'}$. — Тачка додира ове тангенте биће a', која се налази у периферији круга O, потоме имаћемо да је:

$$arc\ \overset{\frown}{AA''} = arc\ \overset{\frown}{A'a} = arc\ \overset{\frown}{AA'}.$$

Кад је то тако онда крива $\overset{\frown}{AB}$ може се узети за профил зуба точка C', а права $\overline{AC}$, за профил зуба точка C, кога би обртао точак C'. — [1]

Да би пак точкови били реципроки, треба продужити криву AB у круг C', по правој $\overline{AC'}$, и описати тангенциално на ову праву епициклоиду на исти начин као и $\overset{\frown}{AB}$.

Из свега тога можемо закључити.

Сл. 129.

1-во. Када се зуби крећу према правој $\overline{CC'}$, која сајужава средишта точкова Сл. 129, онда правопружни део $\overline{BD}$ зуба, кои се налази на точку C, потискује епициклоидни део $\overset{\frown}{BD'}$, зуба точка C'

2-го. Обратно бива, кад су зуби прешли праву $\overline{CC'}$,

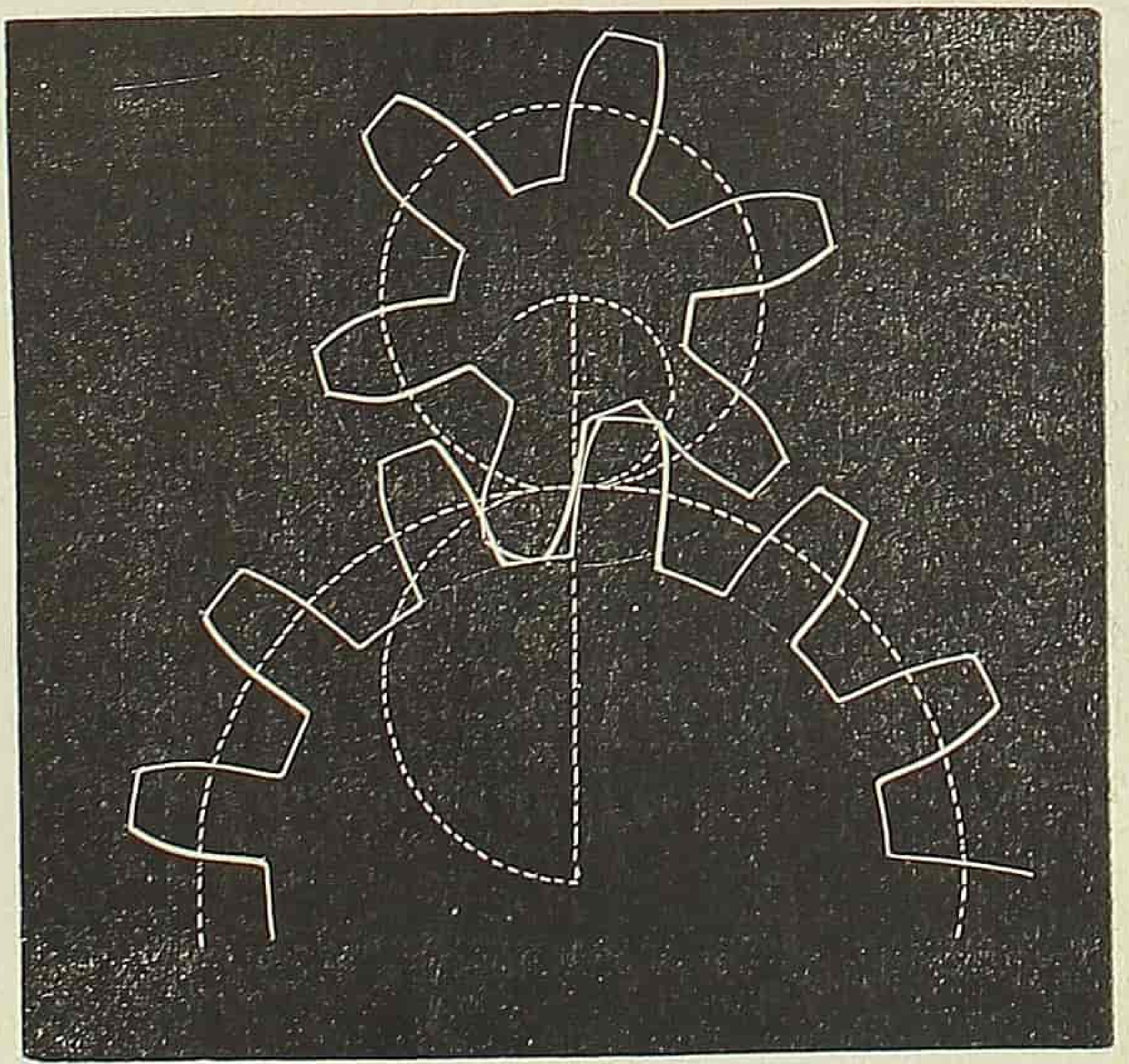
3-ће. Ако оћемо да додир два иста зуба почине пред правом $\overline{CC'}$, а да се свршава пошто пређе ову праву, онда треба да је сваки зуб састављен из једног правопружног дела $\overline{BD}$, кои се налази са уну-

---

[1] Из слике 128 лако је видити, да заједничка нормала додирајући се површина зуба, пролази непрестано кроз A. —.

тарње стране, и једног епициклоидног дела $\widehat{DE}$, кои се налази са спољне стране основног круга.

Овај епициклоидни део профила зуба, описан је кругом, кога је пречник раван полупречнику основног круга оног другог точка. Тако н. пр. у нашој слики, епициклоидни део $\widehat{DE}$, описан је кругом O', и ако се точкови обрћу у правцу као што стрелице показују, онда зуб BDE точка C, потискује његовим правопружним делом $\overline{BD}$ епициклоидни део $\widehat{BD'}$ зуба, који је на тачку C', Затим чим зуби пређу праву $\overline{CC'}$, онда обратно бива, т, ј: правопружни део $\overline{DE'}$ на точку C' бива потискиван епициклоидним делом $\overline{DE}$. — Лако је из тога сватити, да за време премештаја зуба из једног њиног положаја у други, њина геометричка тачка додира, описује у простору најпре лук $\widehat{AB}$ круга O, а затим лук $\widehat{Ae}$ круга O'.



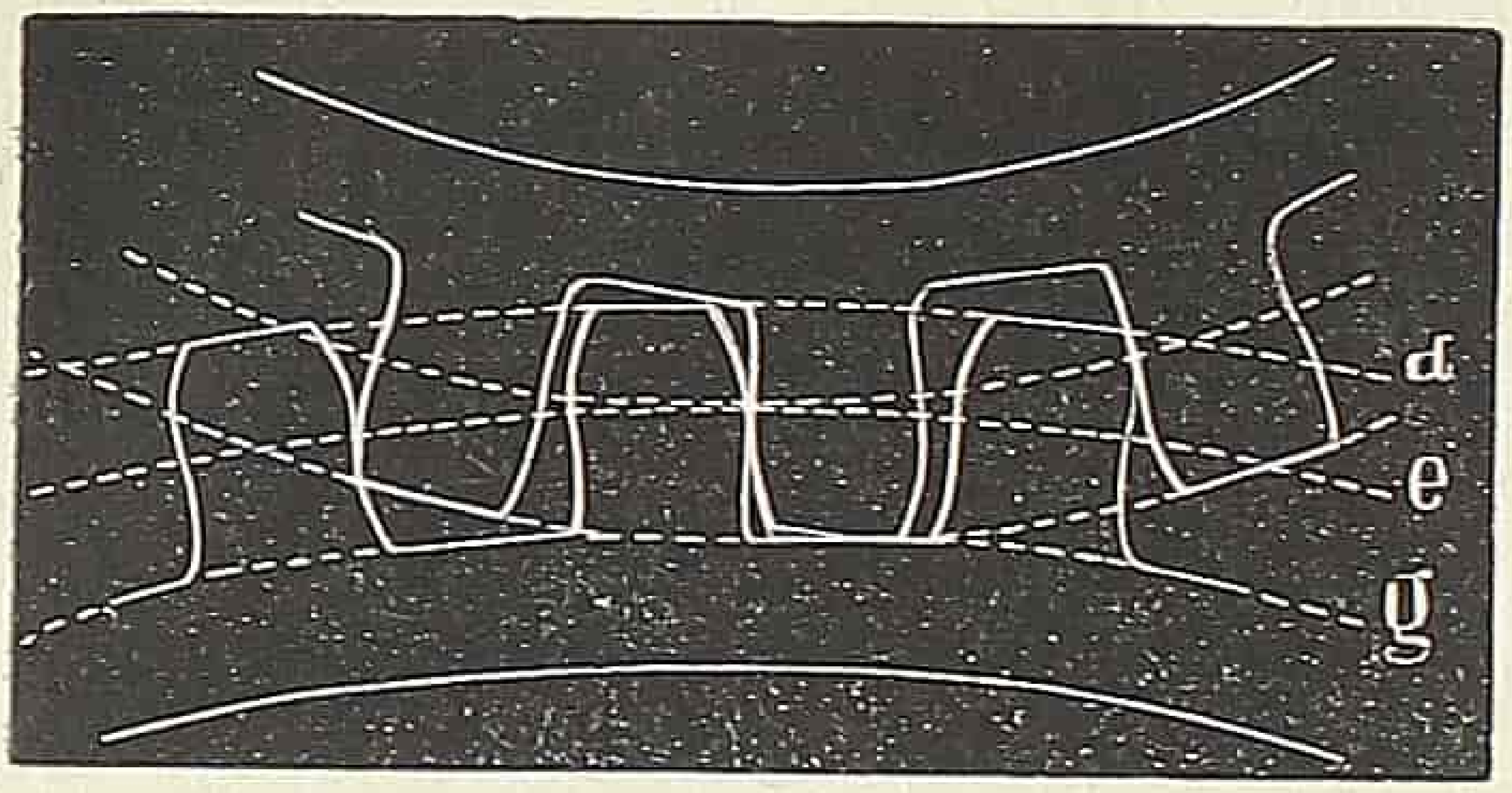
Сл. 130.

Зуби се обично начине симетрични, да би се могло произвести обртање точкова у оба правца, т. ј. десно и лево Сл. 130, затим узета величина зуба као и удубљења[1], у које зуб улази, ограничи се концентричним крузима, и све се ивице брижљиво заокруже Сл. 131.

---

[1] Део зуба изван основног круга, и одговарајуће удубљење опредељују се по извесним емпиричним правилима, о коима ћемо доцније гоговорити. Овде ћемо само да наведемо размере, које Willis препоручује. —.
—. Део зуба изван основни кругова . . . . . $de = \frac{3}{10}\ a$;
величина удубљења унутра исти кругова . . . . $\overline{eg} = \frac{4}{10}\ a$.
зазор на дну одубљења . . . . $\frac{1}{10}\ a$,

189 Зубчаници, коих се зуби састоје из равни и епициклоидни површина, имају тај недостатак, што, да би се могао изрезати шаблон (модел) за зуб једнег точка, нуждно је да се зна пречник основног круга оног другог точка, другим речма два точка морају бити начињена изкључно један за други, тако да један исти точак, неможе правилно заватати са друга два точка разни пречника. И као што је по кадкад нуждно да један исти точак обрће два или више други мањи точкова разни пречника, и као што се денас зубчасти точкови праве по већој части од ливеног гвожђа, то да би се избегла напредпоменута незгода, т. је; да неби принуђени били, да за сваки точак правимо модел (шаблон), треба узети такав профил зуба, како би се могло више точкова једног истог корака, два и два спарити тако, да обртање целог система буде правилно. Овај услов може се испунити на сљедећи начин —.



Сл. 131.

190. Зубчаници, код којих је како фланка тако и фаза профила зуба, епициклоидна пруга. —

Други практички начин. У кругу C', опишимо круг ма ког пречника $\overline{AD}$ Сл. 126 и узмимо за фазу профила зуба за точак C, епициклоиду $\overset{\frown}{A'B''}$, која би била описана једном тачком овог помоћног круга, кад би се по спољној страни основног круга C котрљао. Лако је разумети да фланка, која овом зубу одговара, биће

ширина зуба . , ...	$\frac{5}{11}$ a.
ширина удубљења	$\frac{6}{11}$ a.
зазор у правцу периферије основни кругова	$\frac{1}{11}$ a.

Ове размере зависе дакле од корака a, међутим нетреба мислити да кривина основни кругова нема никаквог учицаја на горенаведене размере: И заиста, Што је ова кривина већа, тим зуби брже престају да се додирају, из овог узрока део зуба изван основног круга код мањег точка, узима се нешто већи. Међутим могу се свагда геометрично определити границе нуждни делова зуба, као и теоретична форма удубљења. —

управо хипоциклоида $\overline{mn}$.[1] која би била описана једном тачком истог помоћног круга, кад би се по унутарњој страни основног круга C' котрљао. И заиста, може се лако доказати да је:

$$arc\ \widehat{AA'} = arc\ \widehat{Ao} = arc\ \widehat{Am}$$

и да нормала у тачки додира o; пролази непрестано кроз тачку A. —

Круг пречника $\overline{AD}$ сасвим је повољан, и нестои у никаквом отношењу са основним крузима. Он мора остати само један исти за све точкове, кои скупа састављају један систем зубчаника. — Осим тога нуждно је да пречник овог круга, буде мањи или највише раван најмањем полупречнику између свију основни кругова, како фланке зуба неби изпале конвексне. (изпупчане). И заиста, у овом случају зуби би имали на месту њиног спајања са точком, млого мању дебљину него на периферији основни кругова, и тако не би били довољно јаки. —

Правила односећа се на делове зуба изван основни кругова и на зазоре, иста су као и код предходећег система зубчаника. —

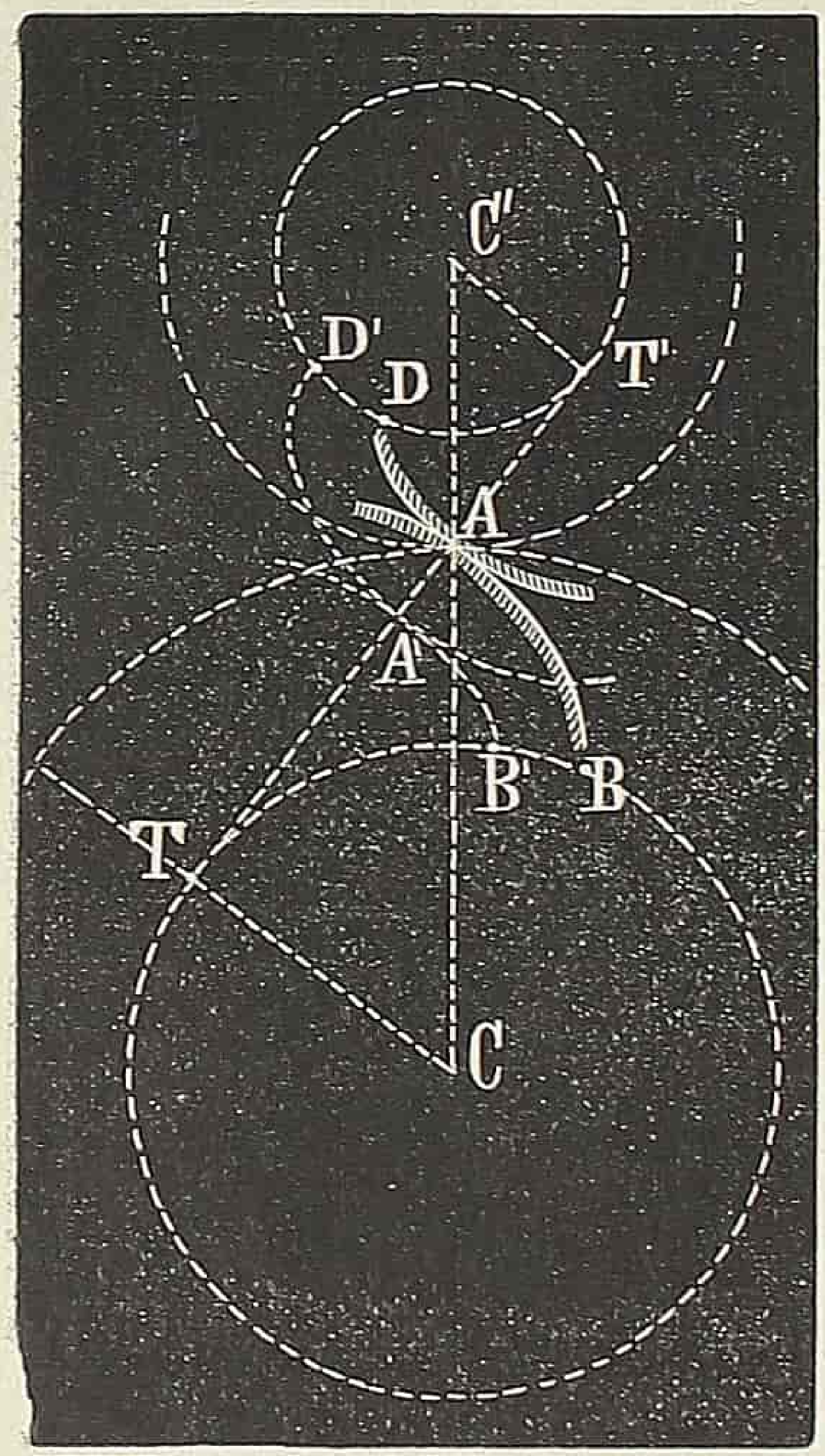
191. Зубчаници, код којих су профили зуба еволвенте основни кругова. —

Трећи практички начин. — Код овог система зубчаника, заједничка нормала, која мора свагда да пролази кроз тачку додира основни кругова, има још и то особито својство, да је стална у простору, другим речма, њен је нагиб према правој средишта CC', неменљив за сво време додира зуба. Ево како се опредељује профил зуба овог система.

192. Нека је TT', права повучена кроз A сл. 132 под удесним нагибом према $\overline{CC'}$. Из средишта C, и C', опишимо два круга, који би додирали праву $\overline{TT'}$. Полупречници $\overline{CT}$ и $\overline{C'T'}$ ових кругова, сразмерни су полупречницима основни кругова. — Кад је то тако, представимо себи да смо

---

[1] Код предходећег система зубчаника №. 188 ова је хипоциклоида, права пруга, и јединствено се у томе разликује ова траса зуба од предходеће. —



Сл. 132.

сваки део $\overline{TA}$ и $\overline{T'A}$ праве $\overline{TT'}$ обавили око одговарајући кругова. Тачка A описаће при свакомъ овом обавијању, једну еволвенту круга т. ј. $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AD}$; по томе лук $\overset{\frown}{TB}$, биће раван правој $\overline{TA}$, а лук $\overset{\frown}{T'D}$ правој $\overline{T'A}$.

Ако сада узмемо за профил зуба ове еволвенте $\overset{\frown}{AB}$, и $\overset{\frown}{AD}$, онда ће задатак бити решен. — И заиста, рецимо да се оба основна круга обрћу око својих средишта C, и C', — Стална права $\overline{TT'}$, биће нормала криве $\overset{\frown}{AB}$ у свима њеним положајима, тако н. пр. ако би крива $\overset{\frown}{AB}$ заузела положај $\overset{\frown}{A'B'}$, то ће ипак права $\overline{TT'}$ бити нормала криве $\overset{\frown}{A'B'}$, то исто вреди и за криву $\overset{\frown}{AD}$. —

Отуда можемо закључити, да ако би обе ове криве пруге у сваком тренутку пролазиле кроз једну тачку праве $\overline{TT'}$; онда ће се оне у овој тачки додирати, и заједничка нормала, задовољаваће напред положени двојаки услов; потоме ове криве пруге могу се узети за профил зуба зубчаника. — Осим тога имамо додати да су луци $\overset{\frown}{BB'}$, и $\overset{\frown}{DD'}$, равни дужини $\overline{AA'}$, која се налази на заједничкој нормали $\overline{TT'}$, између два положаја криви пруга $\overset{\frown}{AB}$, и $\overset{\frown}{AD}$, и као што су полупречници кругова $\overline{CT}$, и $\overline{C'T'}$, сразмерни полупречницима основни кругова, то су и луци описани једновремено тачком додира по периферји основни кругова, такође једнаки, а тим је на ново доказано, да су угловне брзине точкова (зубчаника) обратно сразмерне полупречницима основни кругова, а то је основ ваљчасти зубчаника. —

193. Зубчаници овог система, осим тога што су реци-

проки, и што је профил сваког зуба конструиран само од једне криве пруге, имају још и ове добре стране. 1. Дебљина зуба увећава се од врха до дна удубљења. 2. Један исти точак, може правилно захватати са више други точкова разни пречника. 3. Одстојање средишта точкова, може се мењати без да се тиме квари правилно захватање зуба. — Због овог последњег својства, не морамо се бринути о зазору при самој конструкцији точкова, осим тога цео састав овакви зубчаника можемо склопити и наместити, опредељујући потребно одстојање између осовина пробањем. —

Но поред ови добри страна, они имају и једну рђаву страну, а то је та, што је узајмно дејство зуба по правцу заједничке нормале управљено косо према правој, која сајужава средишта основни кругова, а то је шкодљиво са динамичког гледишта. — Код других система зубчаника, заједничка је нормала у тачки додира зуба најпре управна на праву средишта; мало по мало она постаје нагнута, но чим је заузела нешто знатнији нагиб, онда следећи пар зуба започиње своје дејство, и незгода, коју горе напоменусмо млого је умаљена. —

194. Профил зуба образован од кружних лукова. — *Четврти практички начин.* — Потребни део криве пруге, која образује профил једног зуба, у опште је доста мали тако да скоро нема никакви незгода, ако се нуждна крива пруга, замени ради лакше трасе, са једним или више лукова каквог удесно опредељеног круга, а може се рећи, да у радионицама, у којима се зубчасти точкови конструишу, профили зуба никада се другачије и не трасирају, — При томе главно је да се имају добра практичка правила за определење средишта и полупречника лукова, који ће се за профил зуба употребити.[1] —

Истина, може бити да би смешно било и захтевати, да профил зуба једног точка [нарочито кад је мали] буде тачно

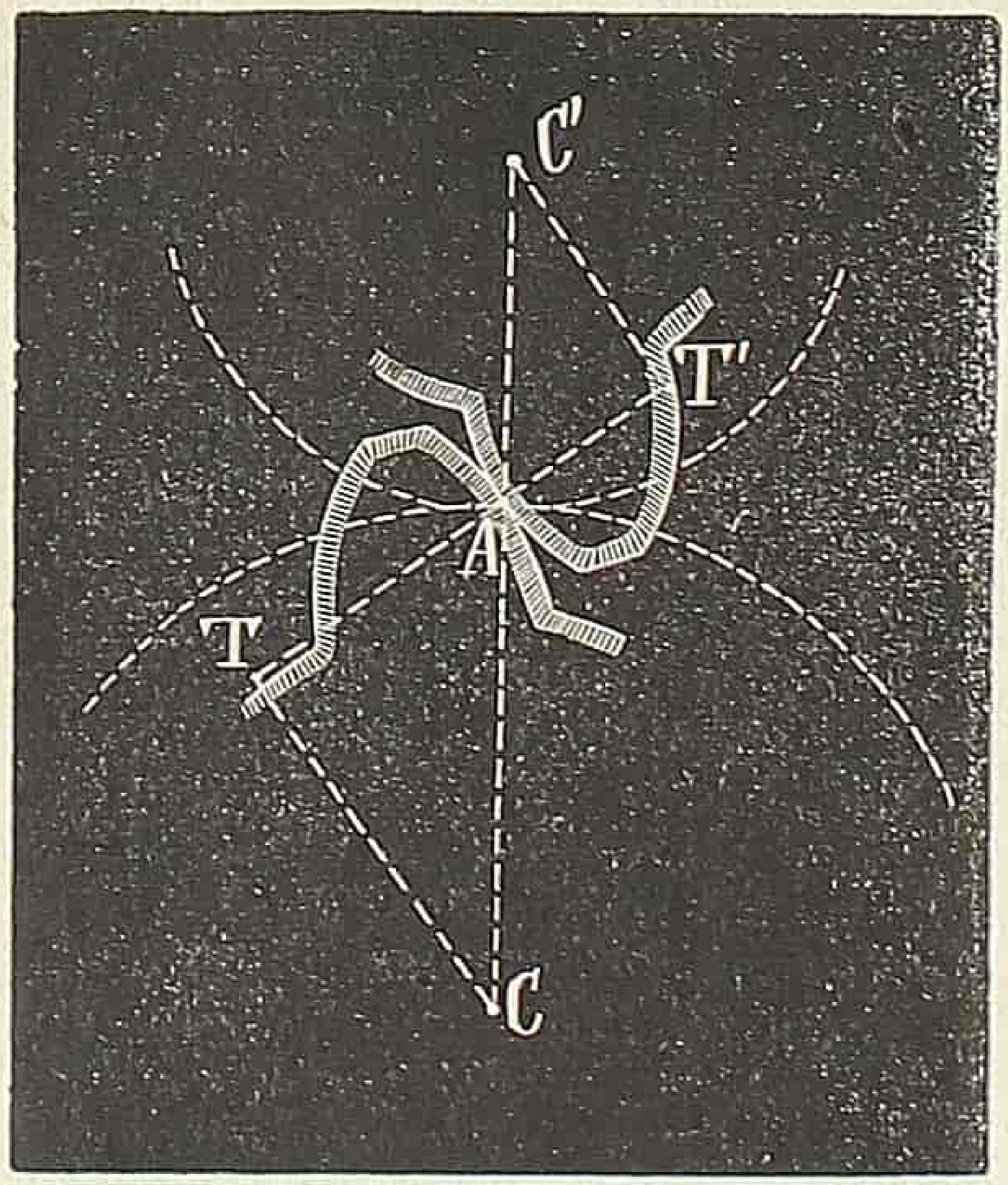
---

[1] Најбоља практика састоји се у том, да се тачно определи шаблон (модел) зуба, а за тим да се пробањем изнађе средиште и полупречник лука, који се најмање удаљава од теоретичне криве пруге. —

епициклоида или еволвента круга, но такође је истина, да се дешавају знатне незгоде, кад се овај профил знатно удаљава од профила, који одговара једномерном кретању. — Махина неправилно ради, производе се судари и потреси, а то је врло незгодно за сталност разни органа махине. —

Ми не ћемо овде да се упуштамо у теорију, о тражењу средишта и полупречника лукова, који се највише приближавају теоретичним профилима зуба, него ћемо просто да наведемо два начина, која за то Willis препоручује. —

195. *Профил зуба од једног само кружног лука.* — Кроз тачку додира A, основни кругова C, и C', Сл. 133, повуче се права TAT' у повољном правцу. Обично ова права образује са правом средишта $\overline{CC'}$ уго од 75. Из средишта C, спусти се управна $\overline{CT}$, на ову праву и T је средиште а $\overline{AT}$, полупречник лука, који се узима за профил зуба точка C. — Тако исто из C' спусти се управна $\overline{C'T'}$ на $\overline{TT'}$, и са полупречником $\overline{AT'}$, а из средишта T' опише се лук, који служи за профил зуба точка C'. Ова траса зуба у нешто је аналогична траси предходећег система. Она има своје добре и рђаве стране. По самој траси, сваки профил састоји се само из једног лука, и отношење између угловни брзина точкова, није строго стално, чим се тачка додира зуба мало удали од праве $\overline{CC'}$.



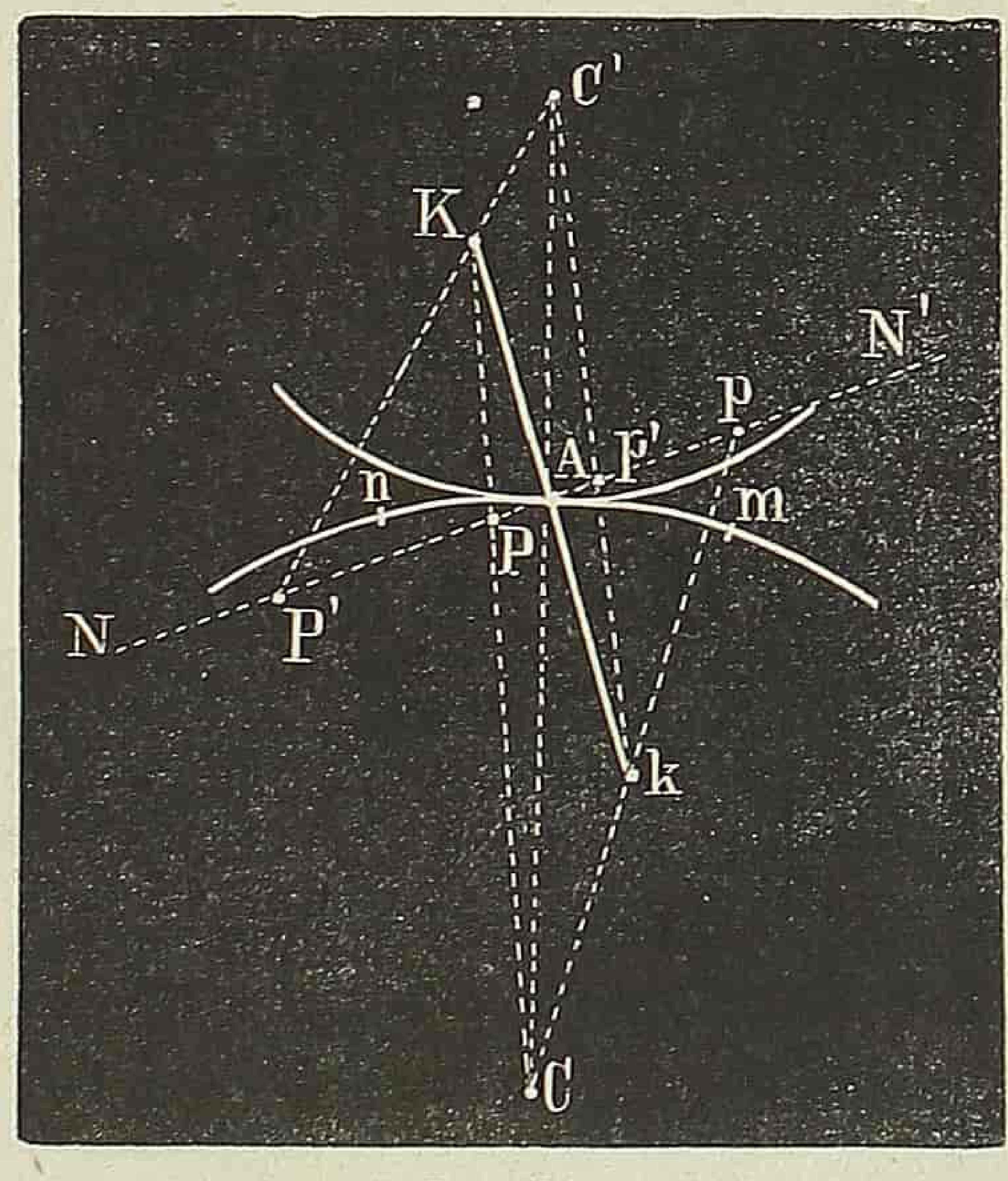
Сл. 133.

196. *Профил зуба од два кружна лука.* Ако се за сваки зуб употребе два кружна лука, која се налазе и са једне и са друге стране основног круга, онда ће се тиме добити много већа и за практику довољна тачност. Један од ова два лука служиће за профил фазе, а онај други, за профил фланке зуба.

Средишта као и полупречнике, са којима су ови луци описани, треба тако определити, да тачка дејствовања једног лука буде за нешто мало са једне, а оног другог лука, са друге стране праве, која сајужава средишта, и у истом одстојању од тачке додира *A*. — Ово одстојање, ако се хоће; може бити равно половини корака. Рецимо да имамо определити профил зуба за точак *C*. (Сл. 134). Узимајући као што то обично свагда бива, да је корак *a*, и број зуба *m*, дат, можемо лако определити полупречник основног круга $\overline{CA} = R$, и заиста лако је сватити да је

$$R = \frac{ma}{2\ \pi.}$$

Почем је то тако, сматрајмо, но само ради бољег схваћања конструкције, и онај други основни круг *C'*, и узмимо да имамо определити кружни лук, који образује профил зуба са спољне стране основног круга (фазу) *C*.



Сл. 134.

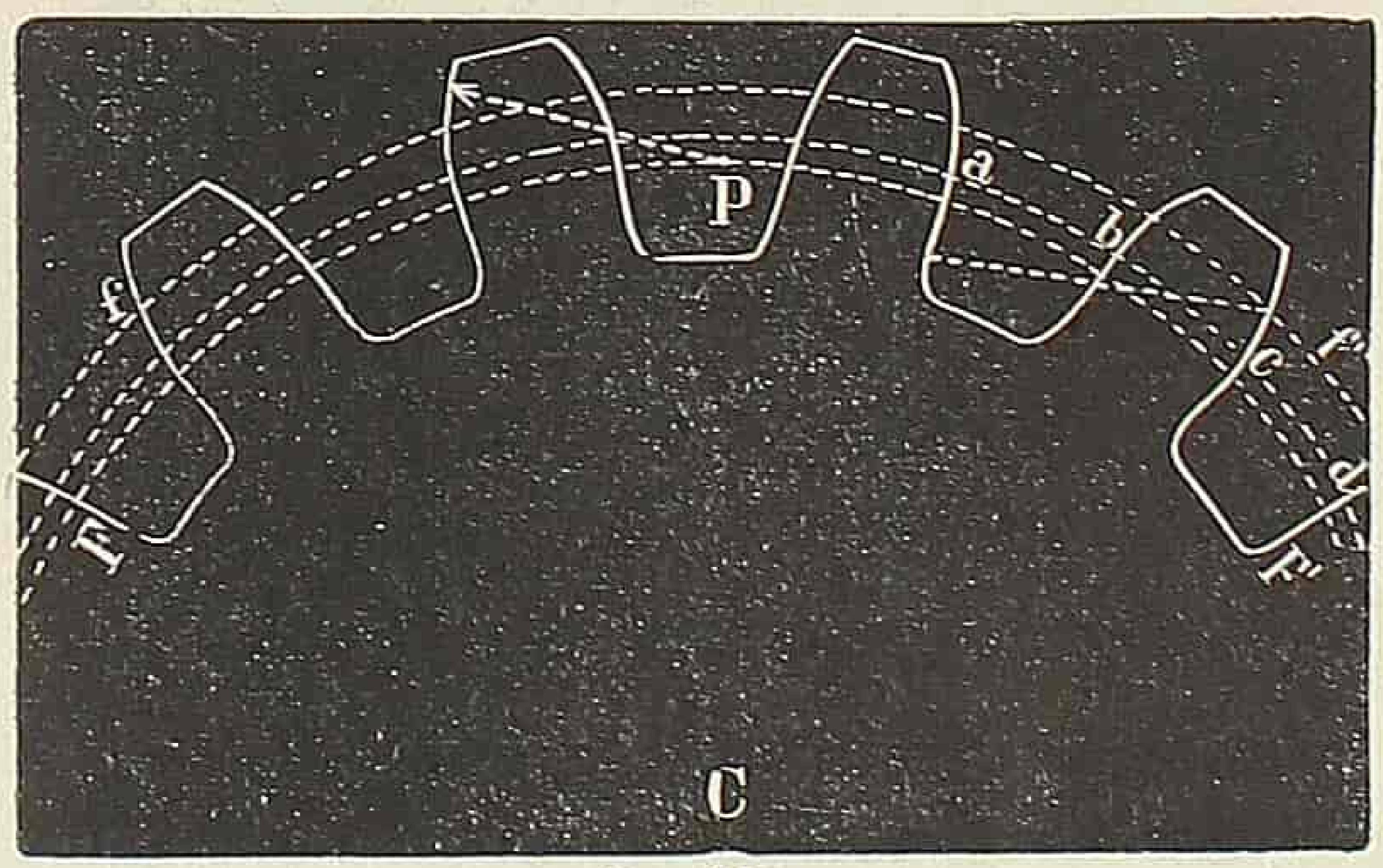
Ради тога сматрајмо зуб у тренутку, кад се налази у *m*, за половину корака од праве средишта. $\overline{CC'}$, и повучимо кроз *A* повољну праву $\overline{NN'}$, која ће представљати заједничку нормалу за сматрани положај зуба. — По Willis-у, ова права мора образовати са правом средишта уго од 75° —

Повучимо $\overline{AK}$, управно на $\overline{NN'}$, и сајузимо средишта *C*, и *C'*, са ма којом тачком *K* речене управне. Нека су *P*, и *P'*, тачке пресецања правих $\overline{CK}$, и $\overline{C'K}$, са нормалом $\overline{NN'}$. Ако сада из тачке *P*, као средишта, са полупречником $\overline{Pm}$, опишемо лук, онда ћемо тиме добити тражену фазу за зуб точка *C*. Лук описан из *P'*, као средишта, тангенциално на предходећи лук, и са унутарње стране основног круга *C'*, биће одговарајућа фланка. —

Ако сматрамо зуб у положају n, за половину корака иза праве средишта, онда можемо подобним начином определити фланку зуба точка C. — Ради тога треба сајузити средишта C и C' са точком k, која се налази у продужењу праве $\overline{AK}$; p ће бити средиште лука за фланку зуба точка C, а p' средиште лука за фазу зуба точка C'. —

Укратко профил потребног дела једног зуба, састоја ће се из два кружна лука: један описан из средишта P. са полупречником $\overline{Pm}$ и са спољне стране основног круга, други описан из средишта p, са полупречником $\overline{pn}$, и са унутарње стране истог круга. —

Ово је само предходна помоћна траса, и пошто је она извршена, онда се предузме коначна траса профила зуба на овај начин: Из средишта C, а са полупречницима $\overline{CP}$, и $\overline{Cp}$, опишу се два круга. Ови крузи јесу геометрична места свију средишта лукова за фазе и фланке зуба. Сл. 135. — Затим пошто су означене тачке зуба по периферији основног круга, узимајући у рачун и зазор између зуба и удубљења, онда се са шестаром, кога је отвор раван $\overline{Pm}$, означе тачке a, b, c, d; и за сваку од ових тачака определи се одговарајућа централна тачка, која се мора налазити па периферији FF'. Кад су овако описане све фазе зуба, онда се промени отвор шестара, и опишу се на исти начин све фланке. — Овде имамо приметити, да положај тачака P, и p, из којих је опредељен профил зуба точка (C), сасвим је независан од полупречника точка (C').



Сл. 135

Највећа дужина праве $\overline{AK}$ биће, кад је $\overline{CK}$ равноодстојна са $\overline{NN'}$, и као што фланка зуба неможе никад бити конвексна, то је ова највећа дужина, нека функција полупречника најмањег точка. —

За олакшицу конструктера Willis је израчунао једну таблицу, у којој су дужине $\overline{AP}$ и $\overline{Ap}$ израчуњене као функције корака и броја зуба, потоме код ових таблица неморају се конструктивно поменуте дужине опредељавати. Ево један извод од Willis-ови таблица, где је корак дат у сантиметрима, а остали су бројеви милиметри. — Ова таблица неможе се употребити за точкове, који имају мање од 12 зуба. За овај случај мора се употребити напред изложени начин конструкције. —

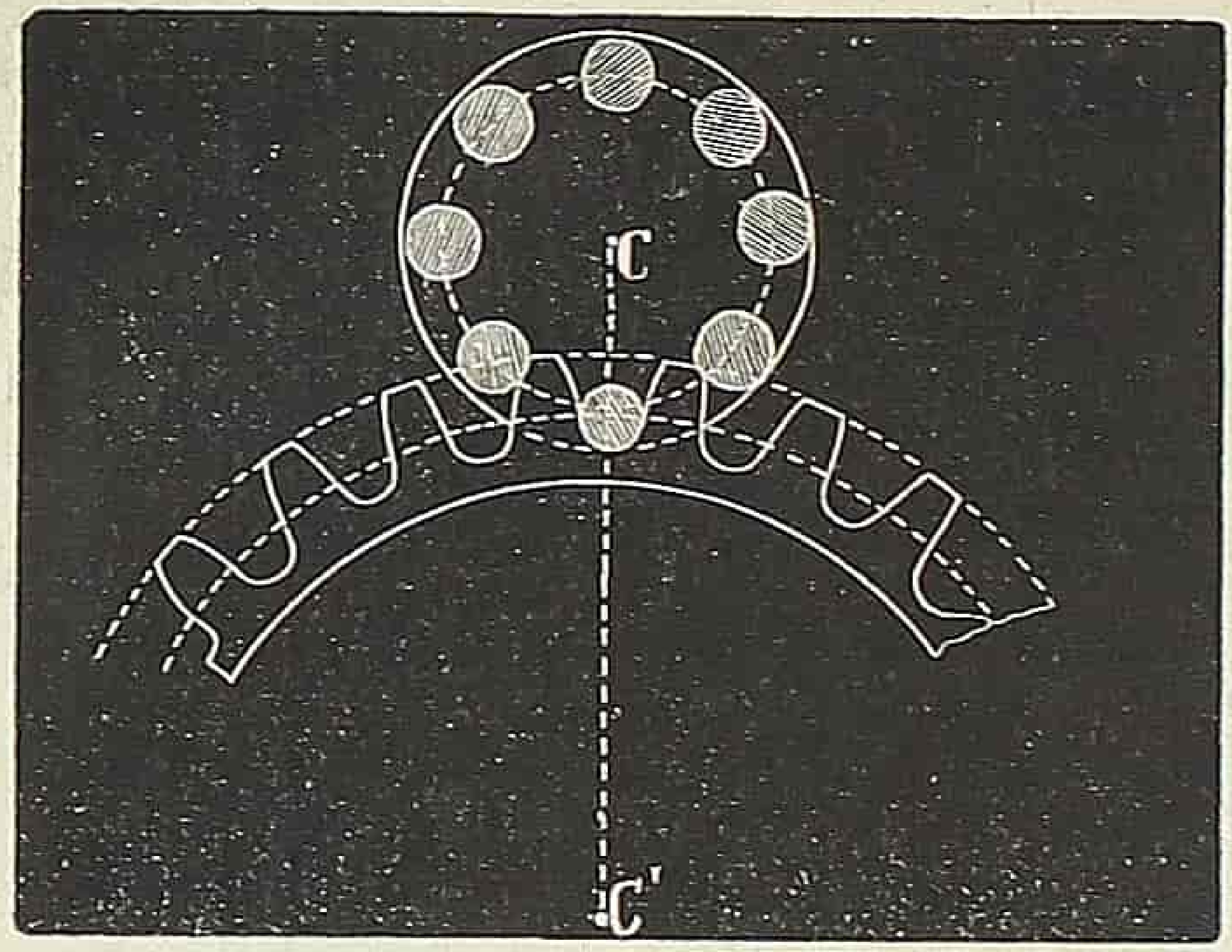
БРОЈ ЗУБА	Корак у сантиметрима										
	1	$1^1/_4$	$1^1/_2$	$1^3/_4$	2	$2^1/_4$	$2^1/_2$	3	4	5	6
13	64	80	96	112	129	144	160	193	257	321	386
14	34	43	52	60	69	78	87	104	139	173	208
15	24	31	37	43	49	55	62	74	99	123	148
16	20	25	29	34	40	44	50	59	79	99	119
17	17	21	29	29	34	37	42	50	67	84	101
18	15	18	22	26	30	33	37	45	59	74	89
20	12	15	18	21	25	28	31	37	49	62	74
22	11	13	16	19	22	24	27	33	43	54	65
24	10	12	15	17	20	22	25	30	40	49	59
26	9	11	13	16	18	20	23	27	37	46	55
30	8	10	12	14	17	18	21	25	33	41	49
40	7	9	11	12	15	16	18	21	28	35	42
60	6	8	10	11	13	14	15	19	25	31	37
80	6	7	9	10	12	13	14	17	23	29	35
100	5	7	8	10	11	12	14	17	22	28	34
150	5	6	8	9	10	12	13	16	21	27	32
Кремаљера	5	6	7	8	10	11	12	15	20	25	30
12	2,5	3	3,5	4,5	5,0	5,5	6	7	10	12	15
15	„	„	4	5	5,5	6	7	8	11	14	17
20	3	3	4,5	5,5	6	7	8	9	12	15	18
30	3,5	3,5	5	6	7	8	9	10	14	18	21
40	4	4	5,5	6,5	8	8,5	9,5	11	15	19	23
60	„	„	6	7	8.5	9	10	12	16	20	25
80	4,5	4,5	6,5	7,5	9	9,5	11	13	17	21	26
100	„	„	„	„	„	10	„	13,5	18	22	27
150	„	„	7	7	9,5	10,5	11,5	14	19	23	28
Кремаљера	5	5	7,5	7,5	10	10	12	15	20	25	30

При рачунању ове таблице, уго NAC узет је од 75^0; што се пак тиче дужине $\overline{AK}$, ова стоји као што напред рекосмо, у сајузу са полупречником најмањег основног круга. Ако је R овај полупречник онда је:

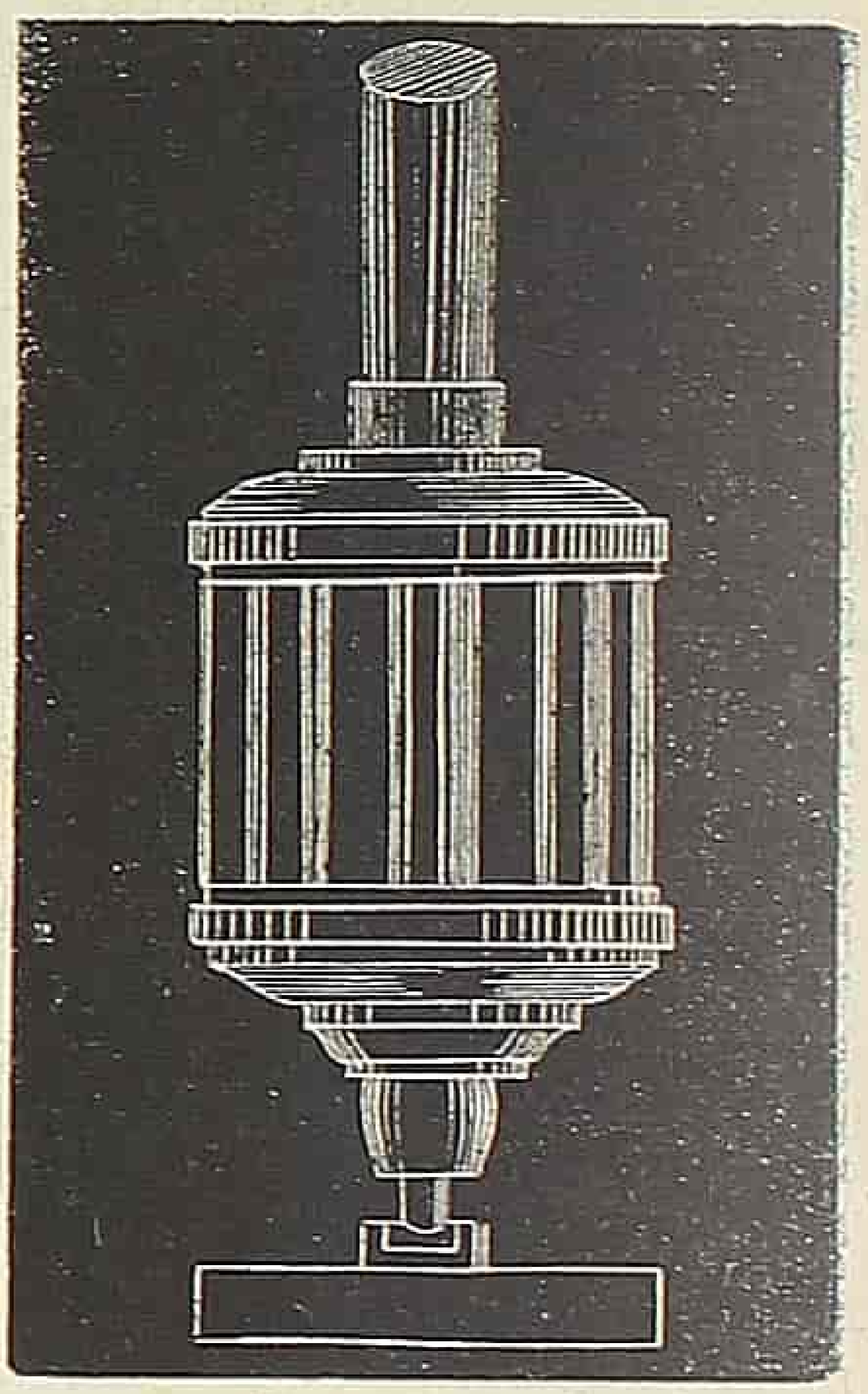
$$\overline{AK} = R\ sin\ 75^0.$$

За дати корак Willis је узео за најмањи точак 12 зуба. Ако означимо са a, овај корак биће:

$$2\ R\ \pi = 12\ \text{а, и отуда}\ \overline{AK} = \frac{6\ sin\ 75^0}{\pi}\ A.$$

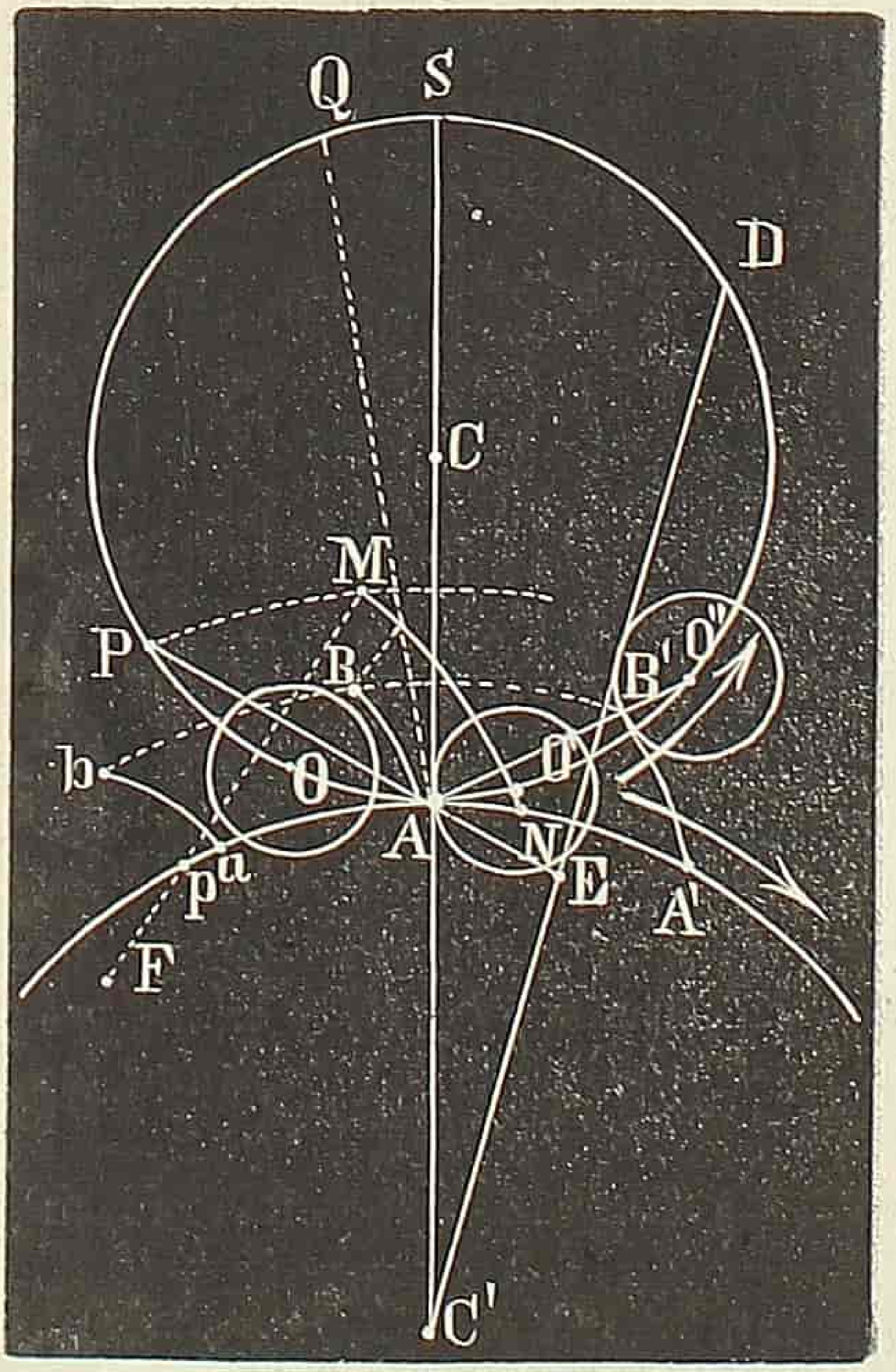


Сл. 136.



Сл. 136.^{a}

197, Зубчаник са ваљчастим паоцима. *Пети практички начин.* [Engrenage à lanterne ou a fuseaux cylindriques]. Код овакови зубчаника, зуби једног точка замењени су са ваљчастим паоцима. Управни пресек или профил овог паока је круг, кога се средиште налази у периферији основног круга *C*. Сл. 136.^{a} представља јасно без описа, вертикални изглед једног оваковог точка. —



Сл. 137.

Да би определили профил зуба точка *C'*, рецимо да се оба точка обрћу у правцу стрелица Сл. 137. — Узмимо три једно за друго сљедећа положаја једног истог паока. — Нека је *o* први положај пред тачком додира *A* основни кругова. *O'* други положај, у коме периферија његовог пресека пролази кроз *A*, а *O''* трећи положај истог паока. —

Ако сада узмемо да је точак *C*, вођен точком *C'*, док паок прелази из *O'*, у *O''*, онда треба да је точак *C'*, снабдевен са зубом, кога би профил $\overset{\frown}{AB}$ додирао у A, круг O', и кад овај профил заузме положај $\widehat{A'B'}$, онда да додира круг O'', у тачки B', која се налази у правој $\overline{AO''}$. Тачка A' опредељена је условом, да је лук $\widehat{AA'}$ круга C', раван луку $\overline{O'O''}$ круга C, јер док тачка O' круга C, опише лук $\widehat{O'O''}$, тачка A круга C', описаће лук исте дужине. —

Лако је сватити да на овај начин можемо толико тачака криве $\widehat{AB}$ определити, колико оћемо, сматрајући разне положаје једног истог паока изван праве $\overline{CC'}$.

Но исту пругу можемо лакше на овај начин конструисати. Ми знамо, да ће релативно кретање точкова бити онакво какво би имали, кад би представили себи, да је један од основни кругова сталан, а други да се котрља по њему без клизања, у противном правцу правог кретања. [Види обртање око ‖ни оса № 130]. — Потоме док се круг C на коме су паоци, котрља на лево по кругу C', средиште O', описаће епициклоидни лук $\widehat{O'M}$, отуда можемо лако определити криву $\widehat{AB}$. —

Епициклоида $\widehat{O'M}$, може се графички да определи: На кругу C', који додира у A, круг C, означи се почетна тачка N, узимајући лук $\widehat{AN} =$ луку $\widehat{AO'}$. Затим да би определили ма коју другу тачку M, епициклоиде, то се на луку $\widehat{PM}$, описаном из C' као средишта, узме лук $\widehat{Np} =$ луку $\widehat{AP}$, и тачка M биће опредељена, ако се узме $\overline{pM} = \overline{AP}$. —

На овај начин можемо не само епициклоиду конструисати, определивши поједине њене тачке, но у исто време имамо у свакој од ових тачака, јошт и њену нормалу $\overline{pM}$. — Тако исто могли би определити за ма коју тачку M епициклоиде, њен полупречник кривине, а то било познатим образцем из више анализе: (аналитичне геометрије и диференциалног и нитеграл: рачуна)

$$\varrho = n + \frac{nR'}{R'+2R}$$ у коме је

$n = \overline{pM}$; $R' = \overline{AC'}$ и $R = \overline{AC}$.

и то било графичком конструкцијом, која се састои у томе, да се узме $\overline{SD} = \overline{AP}$, а затим да се повуче $\overline{DC'}$, која пресеца продужену $\overline{PA}$ у E, чим се добија полупречник кривине $\overline{PE}$, који се пренесе од M до F, и F је средиште кривине. —

Пошто је епициклоида овако конструисана, можемо лако определити крику $\overset{\frown}{AB}$, ако пренесемо на нормале епициклоиде и са стране њене конкавности, полупречник паока тако, да ова крива $\overset{\frown}{AB}$, и епициклоида $\overset{\frown}{O'M}$, имају једну исту еволуту. — Но зна се, да је еволута епициклоиде опет епициклоида, која је подобна првој. Дакле: крива $\overset{\frown}{AB}$ [које је тангента у A, права $\overline{AQ}$ повучена тако да је $\overline{SQ} = \overline{AO}$] има у унутрашњости круга C', близу тачке A, и изпод ове, тако звано ошиље [rebroussement] које је удаљено од $\overset{\frown}{NM}$, за полупречник паока. — Очевидно је, да профил зуба несме имати никакво ошиље, потоме конвексна крива $\overset{\frown}{AB}$, и њено продужење само до тачке ошиља, може да се употреби за профил зуба, који утврђен на точку C', мора потискивати паок у правцу стрелица. — У овом случају, додир зуба морао би почети у тачки ошиља, и то врло мало пре, но што паок заузме положај O', на скоро затим паок прошавши праву средишта $\overline{CC'}$, биће потискиван делом $\overset{\frown}{AB}$ зуба. —

Предпоставимо сада да, пошто је паок дошао у O'' а крива, која га довде потискивала у $\overset{\frown}{A'B'}$; обртање точкова буде у обратном правцу. Лако је видити да ће у овом случају паок потискивати криву $\overset{\frown}{A'B'}$ до $\overset{\frown}{AB}$. Осим тога отношење између угловни брзина, остаће непромењено, а тако исто и заједничка нормала пролазиће непрестано кроз првобитну тачку додира A. — Исти услов биће испуњен, ако би ово обратно обртање трајало дотле, док паок не би додирао криву $\overset{\frown}{AB}$, у њеној геометричкој тачки ошиља, испод тачке A. Но ако би и даље овако обртање продужили, задржавајући исто отношење угловни брзина, онда ће престати додир паока са зубом. Тако н. пр. рецимо да крива $\overset{\frown}{AB}$, сајужена са точком C', заузима положај $\overset{\frown}{ab}$. Одговарајући положај паока определићемо ако узмемо лук $\overset{\frown}{OO'}$, раван луку $\overset{\frown}{Aa}$. — Но слика показује, да у овом случају паок неможе више правилно даље потискивати конвексни зуб ab, јер ни једна од његови нормала не пролази више кроз тачку A. — Осим тога овај се зуб налази изван домашаја паока, и на његовој левој страни, потоме овај зуб неће моћи даље сметати правилном обртању два точка. —

Из свега тога можемо закључити, да ако би точак са паоцима произвео обртање зубчастог точка, онда ће паоци почињати додирати зубе пре и врло близу праве средишта $\overline{CC'}$. Напротив ако би зубчасти точак произвео обртање точка са паоцима (паочњака), онда се зуби и паоци почињу додирати пошто су врло мало прешли праву, која сајужава средишта, и као што се искуством доказало, да је у овом другом случају, трење између додирајући се површина мање него у првом случају, то се узима скоро свагда, да зубчаник производи обртање паочњака. — Другим речма оваковн зубчаници нису реципроки. —

Дно удубљења заокружено је тако, како би се паок могао удобно да смести, кад његово средиште дође у периферију основног круга C'. Осим тога остави се известни зазор између зуба и паока, и овај је зазор тим мањи, што је конструкција точкова тачније и брижљивије извршена.[1]

NB. Овај систем зубчаника, због својих мана врло се редко данас, и само у изузетним случајима употребљује, некада се пак врло често употребљавао.

b. Унутарњи ваљчасти зубчаници.

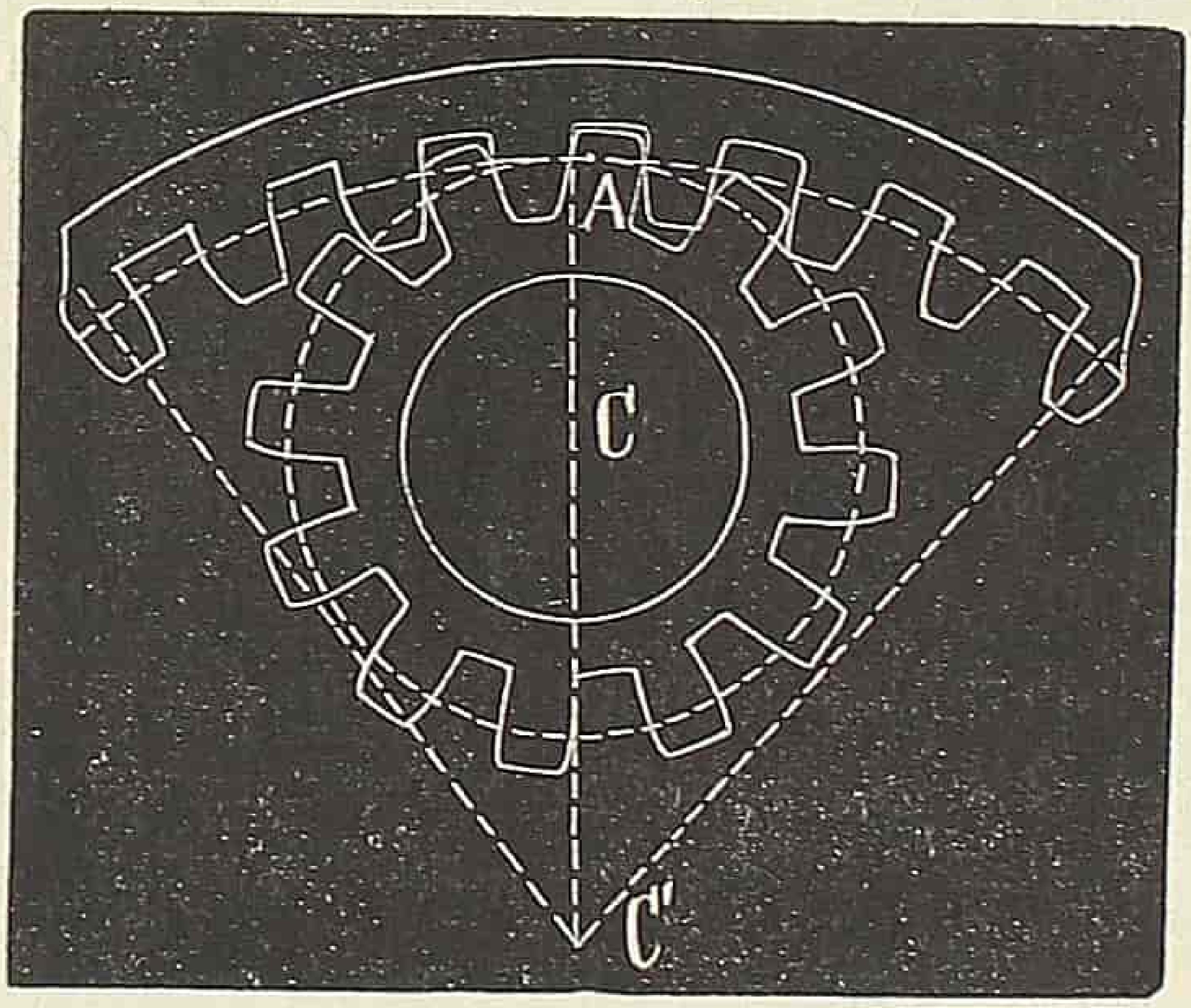
198. Напред изложена начела и правила, о трасирању профила зуба за спољне зубчанике, вреде и за унутарње, но за ове последње имамо јошт сљедеће примедбе навести, и то:

1-во. Код унутарњи зубчаника, профил зуба већег точка неможе бити образован из криво-пружне хипоциклоидне фазе

---

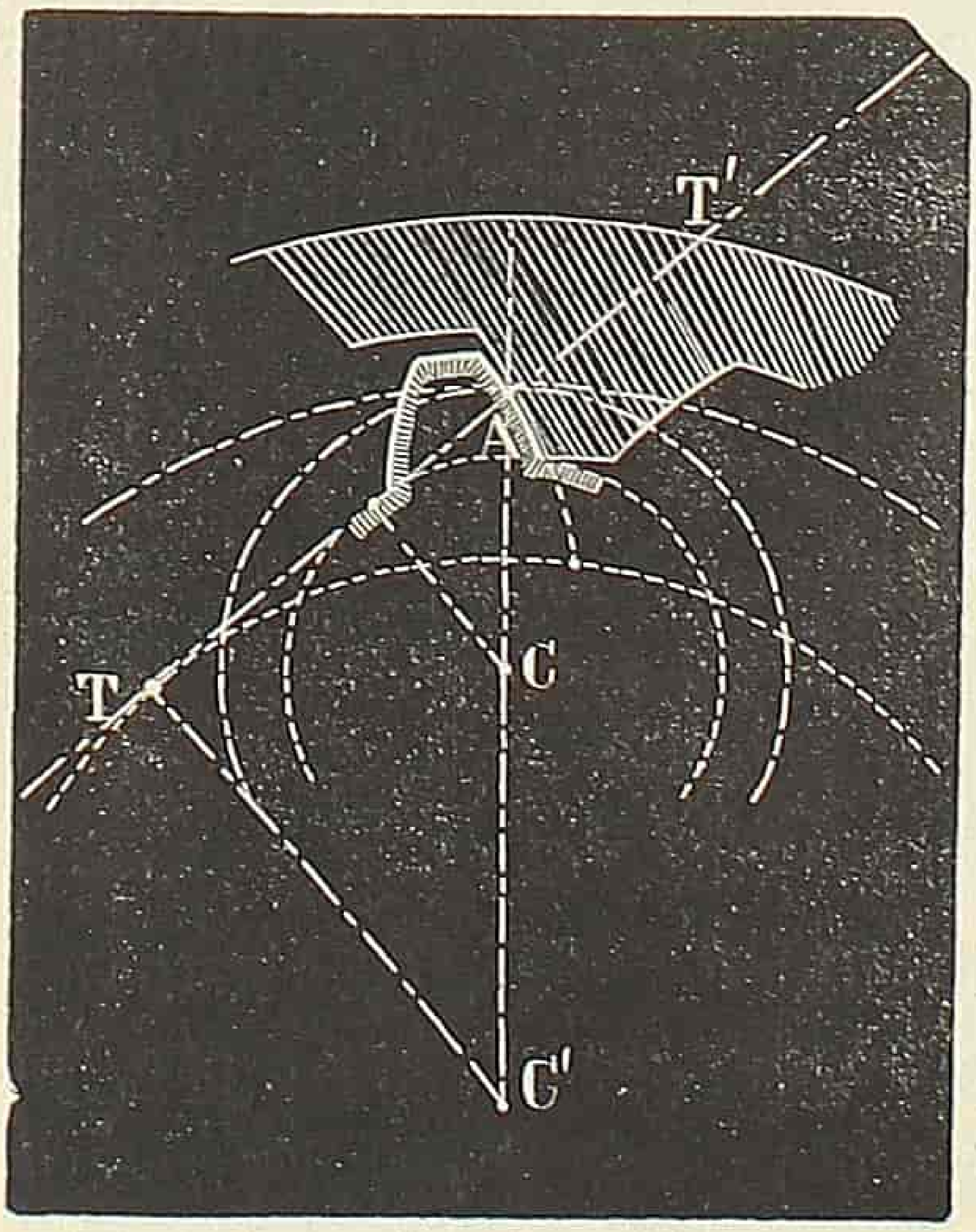
[1] Пречник паока обично је раван ширини зуба, а зазор је један десети део корака, —

и праве фланке управљене управно на периферију основног круга, тако да додир зуба буде са обе стране праве, која сајужава средишта основни кругова, јер фаза налази се са унутарње стране основног круга, и потоме њен сајуз са фланком образовао би ошиље, које се у практики неможе да употреби. — Зуби већег точка дејствују само њином кривом површином на равну површину зуба мањег точка. — Ако би већи точак био вођа мањег точка, онда би додир зуба почињао после праве средишта $\overline{CC'}$, у противном случају, додир би почињао пред овом правом; Сл. 138. представља један систем овакови зубчаника. —



Сл. 138.

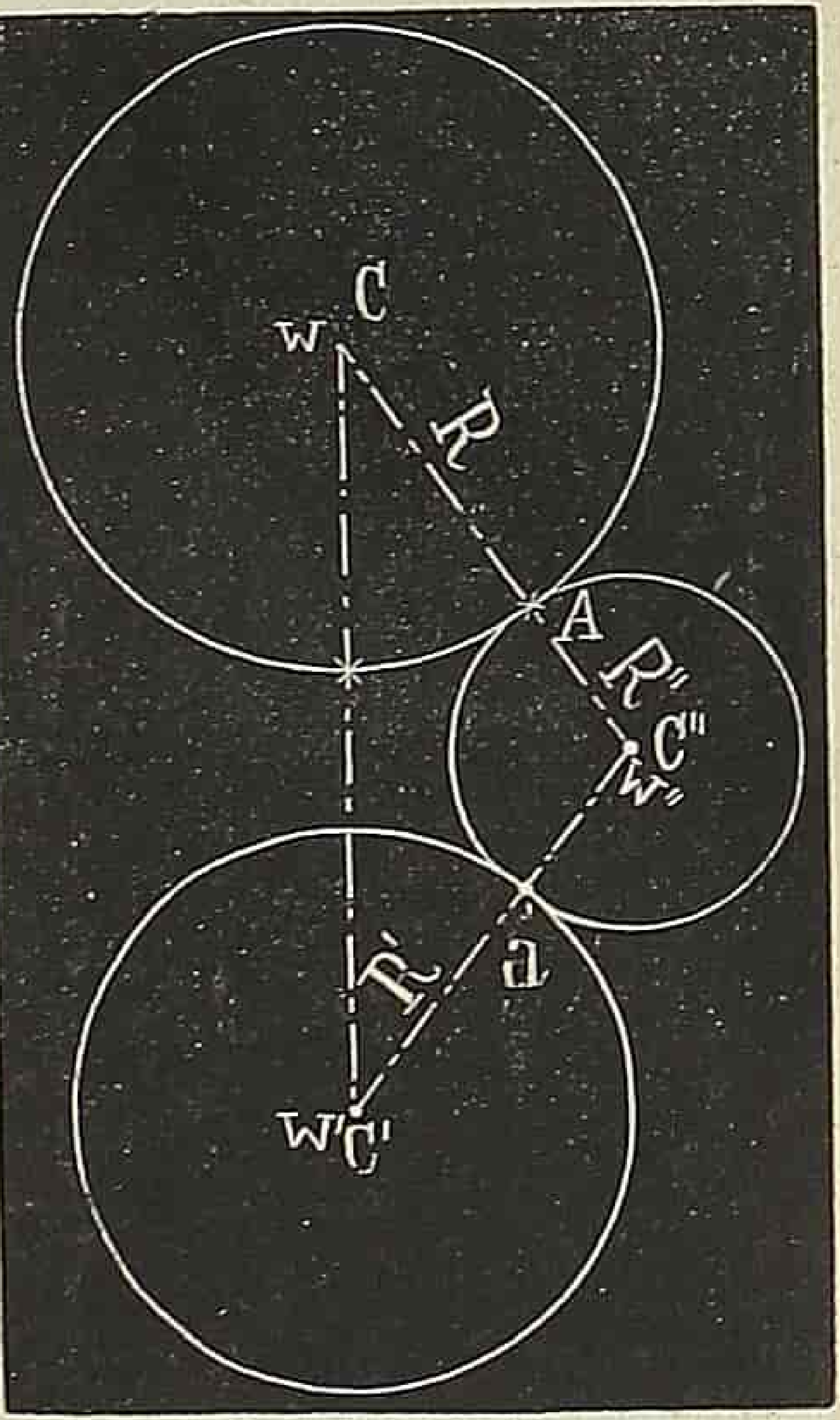
2-го. Ако би за профил зуба узели еволвенту круга, онда профил зуба већег точка испасће конкаван, што је непрактично. — Ова незгода као и она, која постаје у сљед косог узајмног дејства зуба, Сл. 139, може се у неколико избећи, ако се број зуба довољно увећа. У овом случају додир зуба може почињати пред правом $\overline{CC'}$, а свршавати се иза ове праве. —



Сл. 139.

199. Унутарњи зубчаници употребљују се поглавито у тој цељи, да се добије обртање обе осовине у једном истом правцу. Но ово се може постићи и без унутарњи зубчаника, употребљујући спољне зубчанике са једним посредним точком. И заиста:

Нека су C, и C', Сл. 140 пројекције две осовине, које се имају обртати у истом правцу, и рецимо да је отношење



Сл. 140.

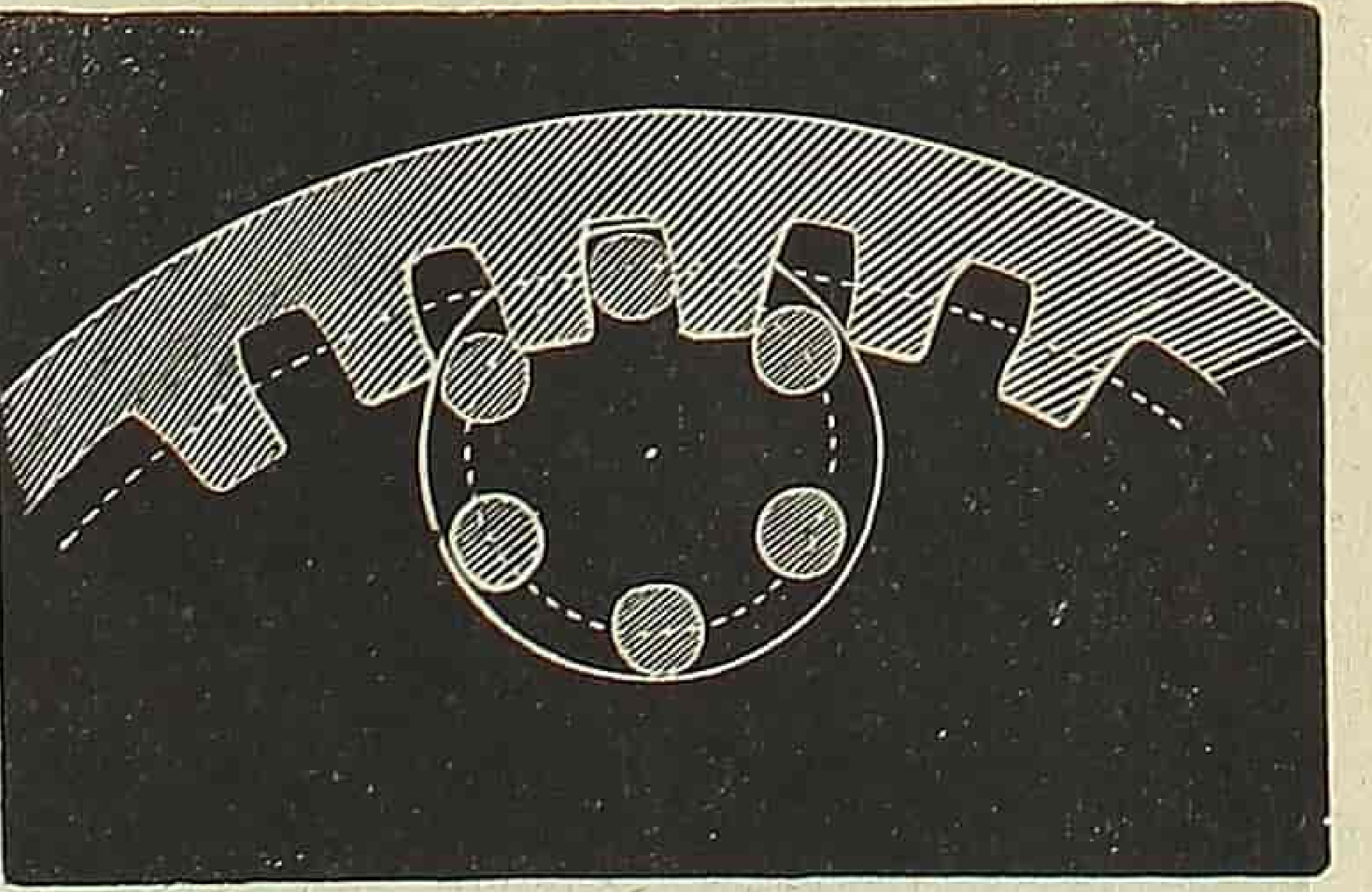
њиних брзина дато. — Ако утврдимо на вопросне осовине два обична зубчаника, којих се периферије основни кругова недодирају, затим наместимо трећи точак C'', тако, да завата са сваким точком C, и C', онда је лако видити, да ће се осовине точкова C и C' обртати у истом правцу, а њиове угловне брзине стајаће у преокренутој сразмери њиови полупречника R и R', па ма какав био полупречник помоћног точка C'', и заиста нека су w, w'; и w'' одговарајуће угловне брзине ова три точка, имаћемо:

$$\frac{w''}{w} = -\frac{R}{R''}, \qquad \frac{w''}{w'} = -\frac{R'}{R''} \quad \text{и отуда}$$

$$\frac{w}{w'} = \frac{R'}{R}.$$

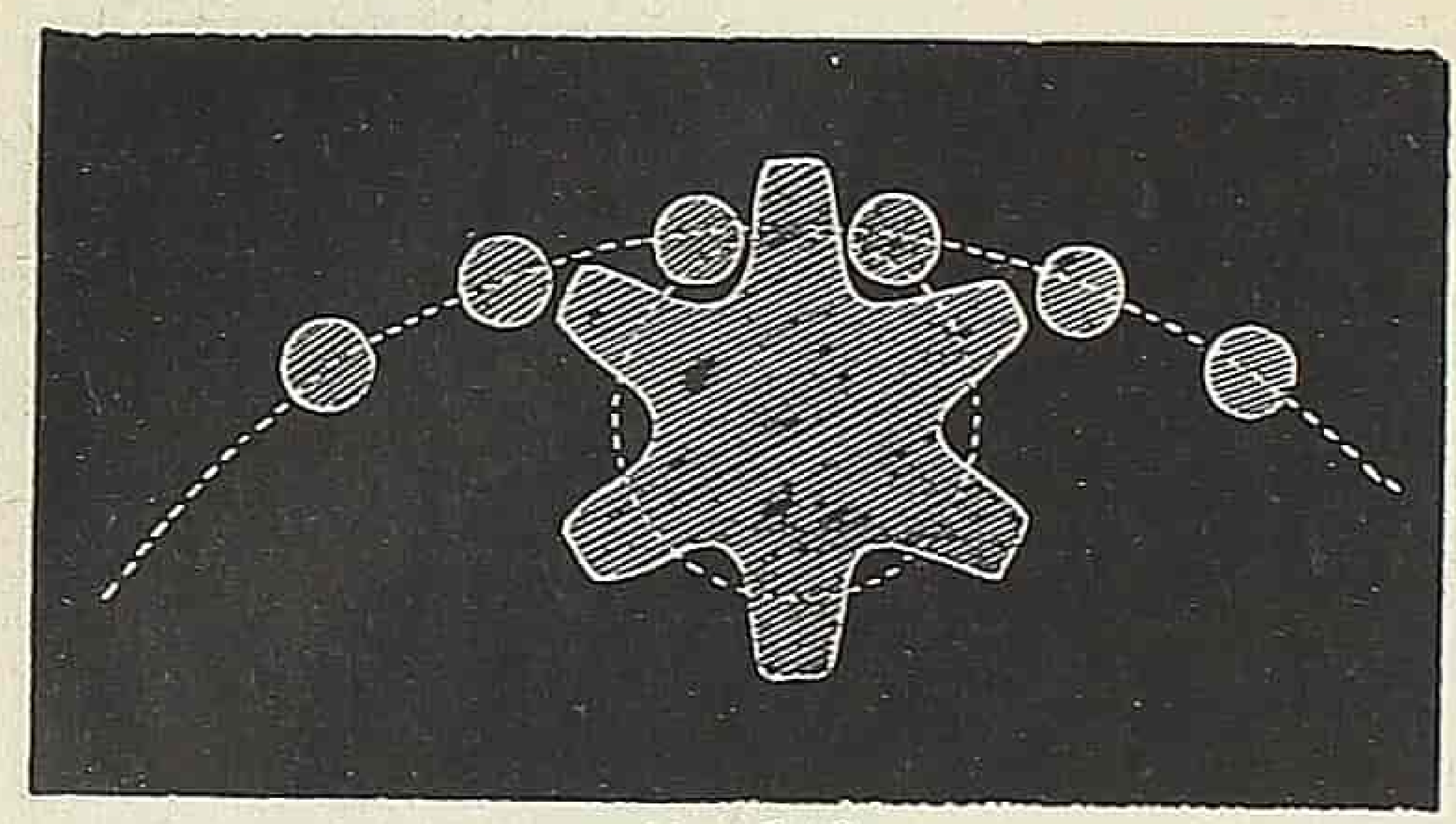
Може се дакле рећи: да отношење угловни брзина крајни осовина, зависи само од отношења полупречника одговарајући точкова, а помоћни точак C'', употребљен је само зато, да се промени правац обртања. —

У опште ако се ма колико зубчасти точкова тако распореде да редом један за други завата, онда отношење угловни брзина, ма која два точка, зависи само од отношења пополупречника ових точкова. —.



Сл. 141.

3-ће. Кад је већи точак вођа мањег точка, онда овај последњи може бити наоружан са паоцима Сл. 141. Одговарајући профил зуба већег точка биће крива пруга равноодстојна са хипоциклоидом, коју описује једна тачка основног круга мањег точка, који се котрља по периферији основног круга већег точка.



Сл. 142.

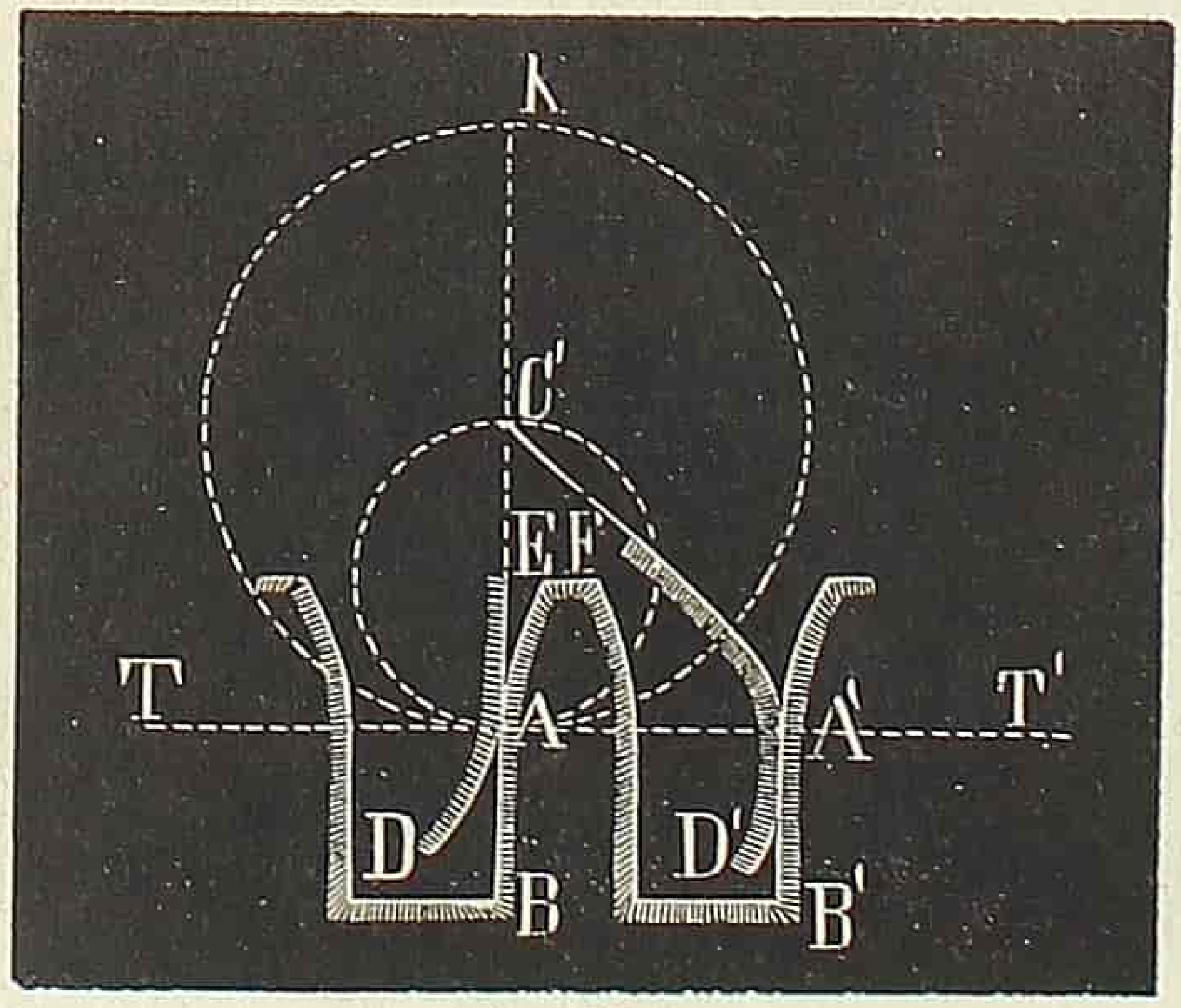
Може и обратно бити, т. је: да је већи точак наоружан са паоцима, а мањи са зубима, кои у овом случају служи као вођа. Сл: 142. — Овај систем зубчасти точкова данас се у практики више неупотребљава, и ми га тек само овде напомињемо. —

Зубчаник и зубчаница [*кремаљера-crémaillère*].

200. Теорија ваљчасти зубчаника, вреди без сумње и за случај, кад је полупречник једног од основни кругова безкрајан. — У овом случају одговарајући точак замењен је са једном правом полугом, која је наоружана са зубима, и коју ћемо ми за сад, док се удесниј назив ненађе, звати зубчаница — кремаљера. — Кретање зубчанице може бити само напредно и у њеном сопственом правцу. Наш ће задатак бити дакле, да определимо профил зуба како зубчаника тако и зубчанице под условом, да брзина напредног кретања зубчанице буде у сталном отношењу са угловном брзином зубчаника. —

Решење овог задатка, кои спада у особите случаје зубчаника, незактева никакву нову теорију о трасирању зуба, и ми ћемо овде само у кратко да промотримо најобичније случаје, у коима је брзина зубчанице у сталном отношењу са угловном брзином зубчаника. —.

1. *Случај. Зубчаница са правим или кривим фланкама*



Сл. 143.

201. Кад кретање између зубчаника и зубчанице мора бити реципроко [1] онда се употребљују профили зуба са фланкама. — У овом случају, ако се узме права фланка $\overline{AE}$ за зуб зубчаника Сл. 143 онда фаза $\widehat{AF}$ зуба зубчанице, биће лук циклоиде, описане једном тачком круга, кога је пречник $\overline{CA}$.

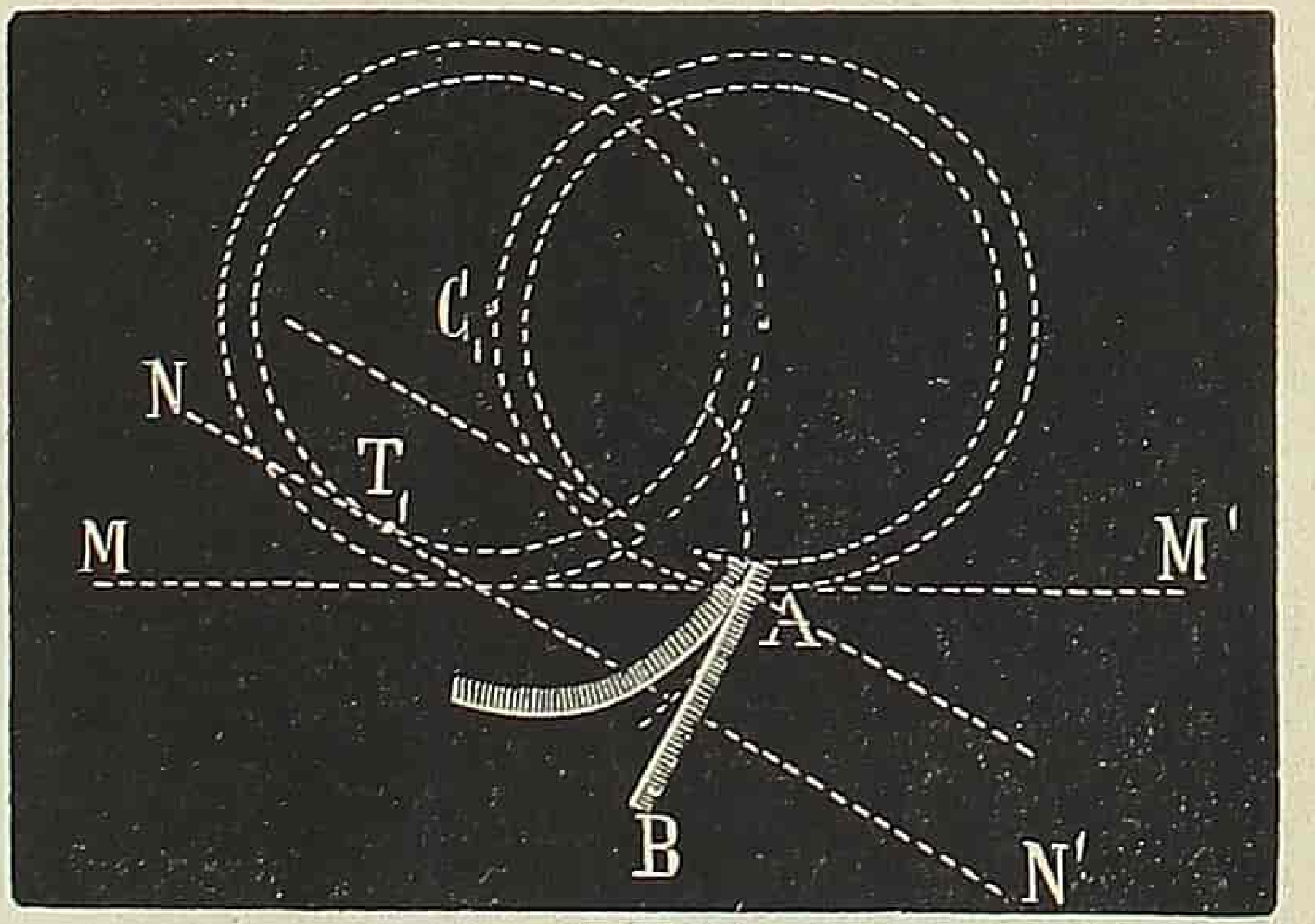
---

[1] Ми смо на једном месту објаснили, шта треба разумети под именом „реципроко кретање“ зубчаника. —.

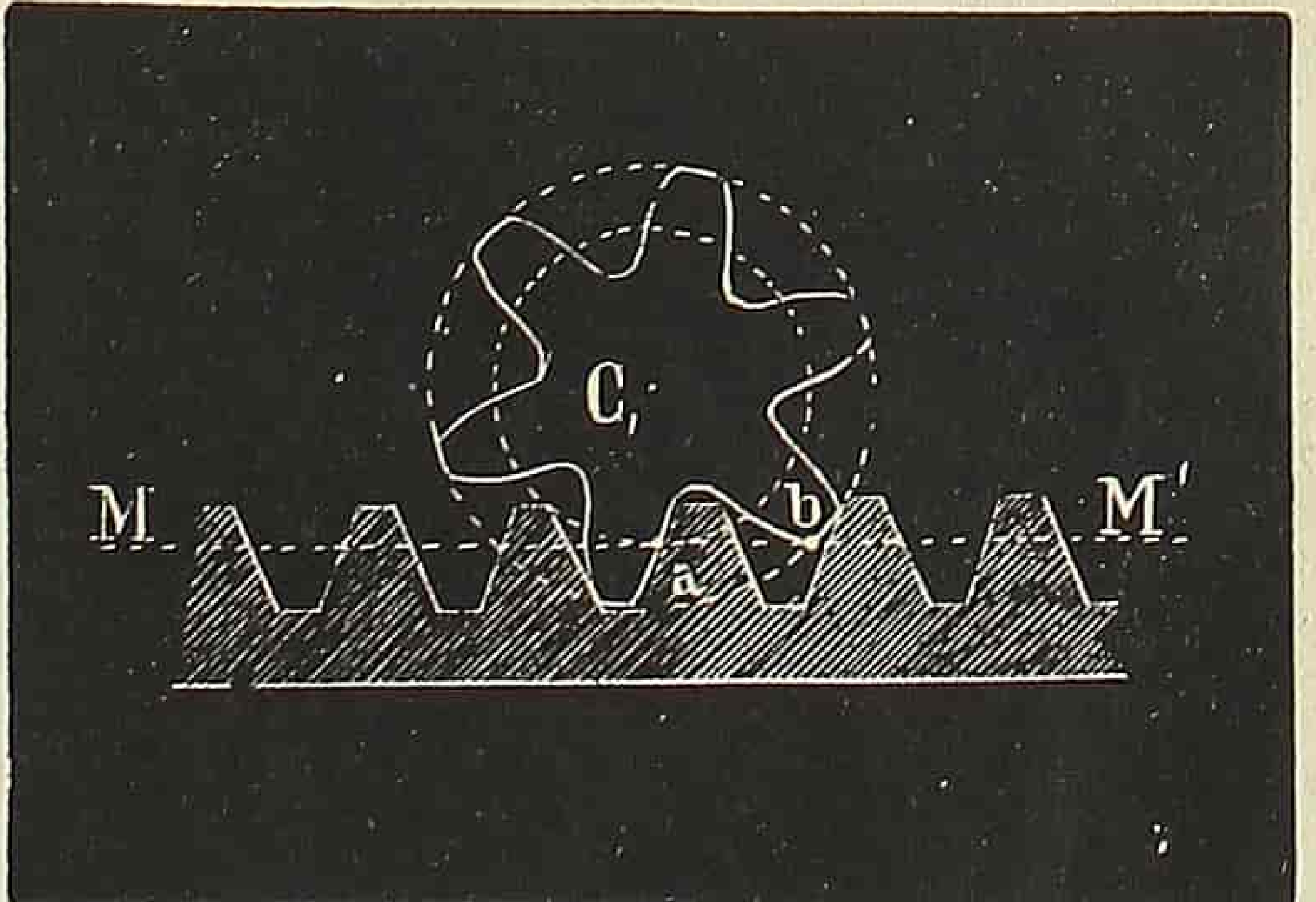
Фаза $\widehat{AD}$ зубчаника биће еволвента круга, и овде имамо приметити, да строго узевши; зубчаница и нема фланке. И заиста, еволвента $\widehat{AD}$, при обртању точка око осе C', непрестано пресеца праву $\overline{TT'}$, под правим углом, сљедствено она дејствује непрестано само на тачку A фланке AB, $A'B'$. —

Отуда сљедује да се зуб зубчанице врло брзо изеде око тачке A. — Ова се незгода може тако избећи, ако се узме за профел фазе зубчаника и фланке зубчанице, лук круга ма ког полупречника, или јошт боље ако употребимо таблице WIllis-*a*. Овако конструисане зубчанице, могу завататн са свима зубчас: точковима, кои имају исти корак. —

2. *Случај. Зубчаница са косим фланкама.* — У овом случају заједничка нармала зуба, заузима коси положај према зубчаници. — Нека је $\overline{NN'}$ та нормала, која је стална. Профил зуба зубчаника је еволвента круга C_1T_1 Сл. 144, што се друге еволвенте тиче, ова је замењена са правом $\overline{AB}$ управном на $\overline{NN'}$ — Ако се оће да пренос кретања буде могућ у оба правца, онда сваки профил мора бити симетричан; и потоме зуби имају трапезоидни облик Сл: 145. — Одстојање зубчанице од зубчаника може се мењати, без да правилност у преносу кретања буде повређена.



Сл. 144.



Сл. 145.

Једва заслужује напомену, да ако означимо са r полупречник основног круга зубчаника, са h пут, кои зубчаница прође за један обрт точка, са m број зуба зубчаника, а са a, корак, онда имамо ове једначине:

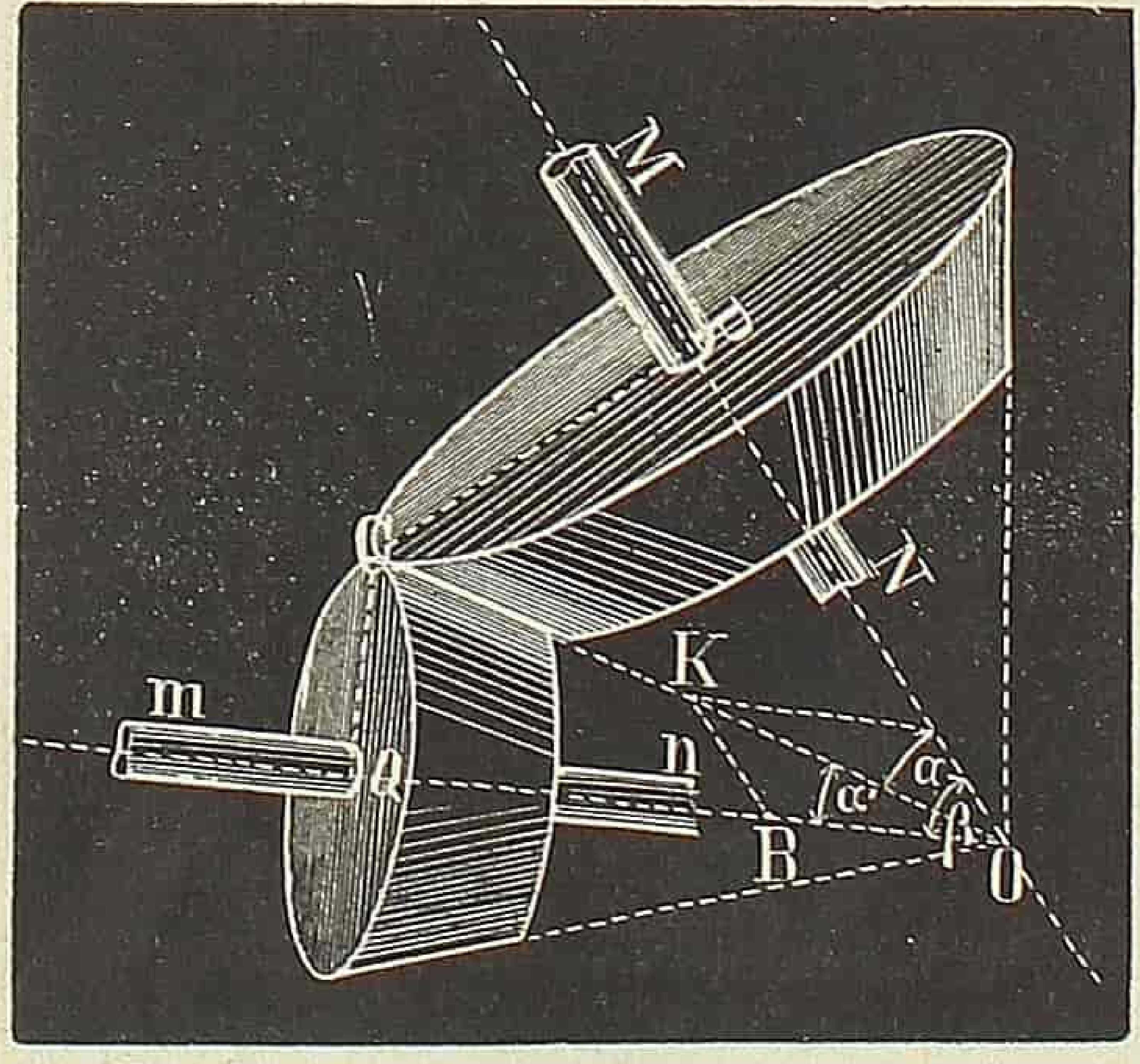
$$r = \frac{h}{2\pi}; \qquad m = \frac{2\pi r}{a}.$$

Дужина зуба зубчаника ограничи се тако, да додир два одговарајућа зуба престаје, пошто је зубчаница прошла неки дати пут, кои се обично узима раван кораку. — Ради тога треба пренети по правој додира $\overline{MM'}$, дужану $\overline{ab}$ равну кораку, и из средишта C, а са полупречником $\overline{C_1 b}$ описати круг, кои ће ограничити дужину зуба зубчаника. —

3. *Пренос кретања између осовина под углом,*

[т. је: кад се осе продуже и у једној тачки пресецају].

202. Изпитајмо сада пренос кретања код такови тела, која се обрћу око две осовине под углом, са сталним отношењем брзина. —



Сл. 146.

1. *фрикциони [тарући се] конуси.* — Сматрајмо два одбијена конуса Сл: 146, који имају исти врх, и који се додирају по целој дужини производнице $\overline{OC}$. Ако се ова два конуса узајмно толико и тако притискују, да се један по другом може котрљати без клизања, кад једног од њих каква кретна сила (мотор) око његове осовине обрће, онда је лако видити, не само да се тиме може произвести пренос кретања између осовина, које су под углом, но и да је отношење угловни брзина ових осовина стално, и на томе се оснива пренос кретања средством фрикциони конуса, који имају исте добре и рђаве стране, као и фрикциони ваљци. —

Нека је O, врх и C, једна тачка производнице, у којој се конуси додирају, $\overline{CP}$, и $\overline{CQ}$, одстојања тачке C од две осе $\overline{PO}$, и $\overline{QO}$; [Ова достојања јесу одговарајући полупречници два круга, кои се просто котрљају један по другом]; α, α', и β, угли COP, COQ, POQ, нека су напоследку w, и w', одговарајуће угловне брзине конуса; имаћемо:

$\overline{CP}\ w = \overline{CQ}\ w'$ и као што је $\overline{CP} = \overline{CO}\ sin\alpha$, $\overline{CQ} = \overline{CO}\ sin\alpha'$, биће $wsin\alpha = w'sin\ \alpha'$, но $sin\ \alpha' = sin\ (\beta-\alpha)$дакле.

$$\frac{w}{w'}sin\alpha = sin\ \beta\ cos\ \alpha - cos\ \beta\ sin\ \alpha \qquad \text{одкуда}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{sin\beta}(\frac{w}{w'}+cos\beta)\cdot$$

Из свега тога може се дакле рећи: да при преносу кретања средством фрикциони конуса, отношење угловни брзина, равно је преокренутом отношењу синуса полу-углова налазећи се у врху ови конуса.

203. Помоћу овог правила можемо определити оба конуса, кад су познати положаи њиних оса и отношење угловни брзина, и то овако.

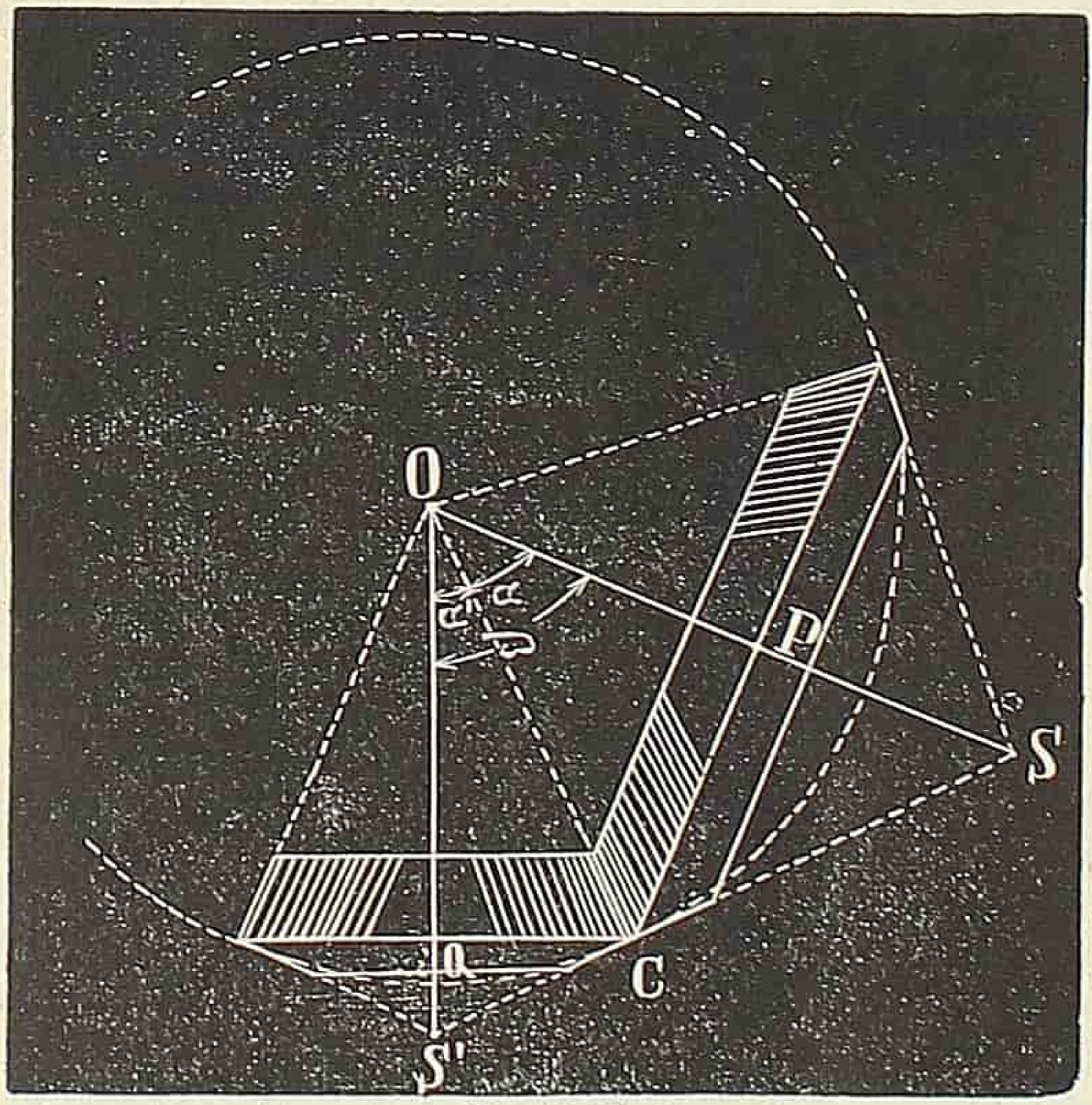
Кроз ма коју тачку B, осе $\overline{OQ}$, повуче се равноодстојна са осом $\overline{OP}$. На овој равноодстојној узме се дужина $\overline{BK}$, која би са $\overline{OB}$ стајала у управном отношењу угловни брзина оба конуса. Тачка K биће тачка производнице, у којој се конуси имају додирати. Ако дакле представимо себи, да се права $\overline{OK}$ обрће око сваке од дати оса, онда ће она описати површине вопросни конуса. —[1]

NB. Ако би се један конус налазио са унутарње стране оног другог, онда ће се оба обртати у истом правцу. У предходећем пак случају, њиова су обртања противположеног правца. — Један од конуса може бити замењен са равнином, у којој се мора налазити врх оног другог конуса. —

---

[1] У практики употребљују се само два одбијена конуса од незнатни дебљина. —

204 *Конични зубчаници.* Ако узајмни тисак између два конуса није тако велики, да би се могао произвести пренос кретања, онда се површине конуса снабдевају са зубима, између коих налазе се удубљења и тако, се добијају конични зубчаници. Додирајуће се површине зуба, морају бити такове, да пренос кретања буде једномеран, и такав као кад би се два конуса котрљала без клизања један по другом. — Ове површине јесу коничне и имају исти врх, кои и основни конуси, потоме да ове површине определимо, довољно је да знамо само једну управницу т. је: профил зуба, кои се може на сљедећи начин трасирати.



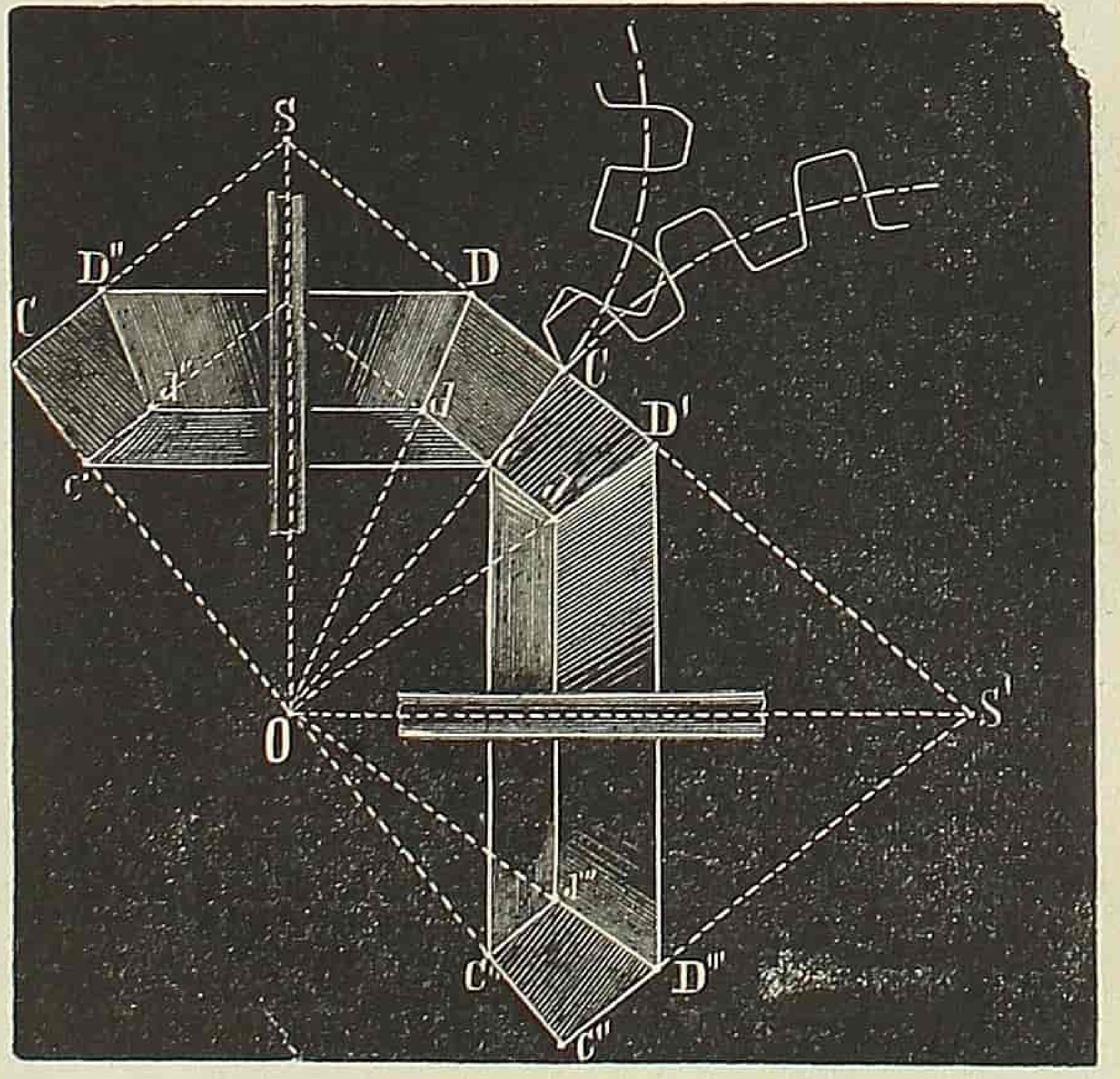
Сл. 147.

Представимо себи да смо из средишта O, а са полупречником $\overline{OC}$, описали сферу, — На овој сфери налазиће-ду се периферије кругова $\overline{CP}$, и $\overline{CQ}$, који служе као основице основни конуса Сл. 147. — Ако сада подобно будемо умствовали као и код ваљчасти зубчаника, онда је лако видити, да на поменутој сфери можемо определити профил зуба конични зубчаника. Овде су праве пруге замењене са луцима највећи сферни кругова, а обичне епициклоиде [које се налазе у једној равнини код ваљчасти зубчаника,] са сферним епициклоидама, — Ова геометриска конструкција, може се тачно извршити по правилима нацртне геометрије, но она се у практики неизвршује нити упутребљује због доста тешког трасирања сферни крива пруга. —.

У практики, вопросна управница [directrice] опредељује се приближно но за практику довољно тачно на сљедећи начин, кои је први употребио инглез Tredgold. —.

На производницу $\overline{OC}$ додира основни конуса, а кроз тачку C, повуче се управна $\overline{SS'}$, која пресеца осе поменути конуса у S и S'. Ове тачке узму се као врхови прави конуса, кои имају исте основице $\overline{CP}$, и $\overline{CQ}$, као и основни конуси и кои су око сфере описани, и на развијеним површинама ови конуса CPS и CQS' трасирају се управнице или профили зуба.

Ради тога имамо предходно приметити, да се за време обртања оба точка ове управнице морају додирати, и да се близу тачке C, оне удаљавају врло мало од равнине пројектиране у SS', која додира како сферу тако и конусе CPS, и CQS'. Осим тога разне тачке ових управница, крећу се тако, да остају у сталним одговарајућим одстојањима од врхова S и S'. — Потоме ако развијемо обе коничне површине CPS, и CQC, [или боље површине ови одбијени конуса] на тангирајућу равнину SS', т. је; ако из тачака S, и S', као средишта, а са полупречницима $\overline{CS}$, и $\overline{CS'}$, опишемо два круга, која се у тачки C додирају Сл. 148, па на овим крузима узмемо луке, равне развијеним основицама основни конуса, онда по горепоменутој приметби, релативно кретање елементни коничних површина, које постепено долазе у равнину SS', биће истоветно са котрљањем два кружна лука $\overset{\frown}{CS}$, $\overset{\frown}{CS'}$.



Сл. 148.

Ако дакле узмемо ова два лука као два основна круга ваљчасти зубчаника, па определимо профиле зуба, по једном од познати начина за оваковe зубчанике, онда ове профиле можемо лако изрезати на папендеклу (carton pappendeckel), а затим пренети овако изрезане профиле, на одговарајуће површине конуса, и тако ће тражена управница бити опредељена. —

Пошто је овако управница опредељена, онда се зуби конични зубчаника конструишу тако, да су ограничени коничним површинама, које описује права пруга, која се тако креће, да додирајући напред опредељену управницу, непрестано пролази кроз тачку *O*. —

NB. Као што се у опште конични зубчаници састоје само из једног дела конуса, који недопире до врха *O*, то се у место овог врха узима још једна управница, која се за сваки точак определи на другој помоћној коничној површини равноодстојној са коничном површином, на којој се налази прва производница. — Потоме за сваки точак, одговарајући зуби биће ограничени са четири коничне површине, и пресек ови зуба биће трапезоидног изгледа, као што предходећа слика показује. —

205. *Детајљ зубчаника.* Код зубчаника зуби треба да буду симетрични, како би се један исти точак могао обртати у једном или у другом правцу, и тиме покретао или сам кретан био од другог точка. — Ови зуби морају бити ограничени са правилним површинама тако, како би се два зуба, која један за други заватају, додирала по целој дужини једне исте производнице, и тиме се узајмни тисакједномерно и удесно распоредио.

Сви зуби једног истот точка, морају бити једнаки и једнако удаљени један од другог. [1]

Код сваког зубчаника, поглавиту пажњу заслужују две ствари; 1-во. Корак *a*, и 2-го број зуба N. — Полупречник *R* основног круга сајужен је са овим двема количинама једначином.

$$2\,\pi R = Na.$$

Ми смо на једном месту напоменули, а овде налазимо за потребно пофторити, да за два зубчаника, који заватају

---

[1] Ово је на једном месту већ напоменуто.

један за други, корак мора бити један исти, отуда сљедује: Да полупречници основни кругова два зубчаника стоје у правој, а одговарајуће угловне брзине у преокренутој сразмери бројева њиови зуба. — Потоме кад оћемо да конструишемо два зубчаника по датом отношењу, онда ово мора бити изражено количником $\frac{n}{N}$ од два цела броја. — Ова два броја не треба да су ни сувише велика ни сувише мала [од прилике од 8 до 120].

Ако су бројеви N и n међусобом односно прости [т. је немају заједничке мере], онда сваки зуб једног точка, постепено завата са свима зубима оног другог, и два иста зуба тек онда долазе у додир, кад је точак од N зуба учинио n обрта.

У практики гледа се у опште да се зубчаници овако удесе, јер се тиме зуби једномерније оједају. — Напротив ако би N и n имали каквог заједничког чиниоца, онда сваки зуб већег точка, у сваком обрту долази у додир са истим зубом мањег точка. — Обично се конструктери сатова овог правила држе, да би се већа сигурност у правилном кретању сата имала. —

Зуби оба зубчаника јесу једнаке дебљине, кад су од једног истог материјала — од метала или од дрвета — начињени. — Ако не би били од истог материјала, онда зубе од слабијег материјала треба дебље правити. — Удубљења су у опште за $\frac{1}{15}$ шира од дебљине зуба, ова разлика зове се зазор. —

Дужина зуба изван основни кругова треба тако да је определења, да се свагда најмање један пар зуба налази у додир, јер без тога скоро би се свагда дешавао судар, и точкови не би се правилно обртали.

Зубчаници, којих су профили зуба епициклоиде и еволвенте круга, обично се тако удесе, да се свагда два пара зуба налазе у додир, и то један пред а други иза праве, која сајужава средишта точкова.

Ми ћемо у динамики видити, да је трење код зубчаника тим веће што је тачка додира зуба више удаљена од праве средишта, нарочито пре пролазка ове праве. — Отуда сљедује: да је пробитачније да дејство зуба буде и са једне и са друге стране горепоменуте праве средишта, но ово нетреба да је једнако. — Лук, који пролазе основни крузи од почетка дејства зуба до праве средишта, узме се скоро свакада мањи или највише раван луку, који пролазе исти крузи од праве средишта па до тренутка, кад зуби престају заватати један за други. Тако на прилику може се узети а и узима се, да је први лук раван половини ($\frac{1}{2}$) а други три четвртине ($\frac{3}{4}$) корака a.

Пошто је једном величина ових лукова опредељена, онда се могу лако графично да ограниче дужине зуба изван основни кругова, за сваки систем зубчаника, који се у практики употребљује. — За ово ограничење зуба, осим тачног начина постоје више емпирички правила, од којих ми ћемо нека овде да наведемо. Нека су R и r крајњи полупречници већег и мањег точка. N и n одговарајући бројеви зуба. Једно од горепоменути емпирички правила представљено је приближно овим изразом

$$\frac{R}{r} = \frac{N+2}{n+2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Reid, који је ваљано дело о конструкцији сатова написао, препоручује овај израз.

$$\frac{R}{r} = \frac{N+2{,}5}{n+1{,}5} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Напоследку Willis, који се са овим питањем озбиљно занимао, наводи да изрази (1) и (2) незадовољавају подпуно услове практике. Они дају резултате доста задовољавајуће само онда, кад се мањим точком обрће већи. У противном случају треба узети.

$$\frac{R}{r} = \frac{N+3}{n+1.} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

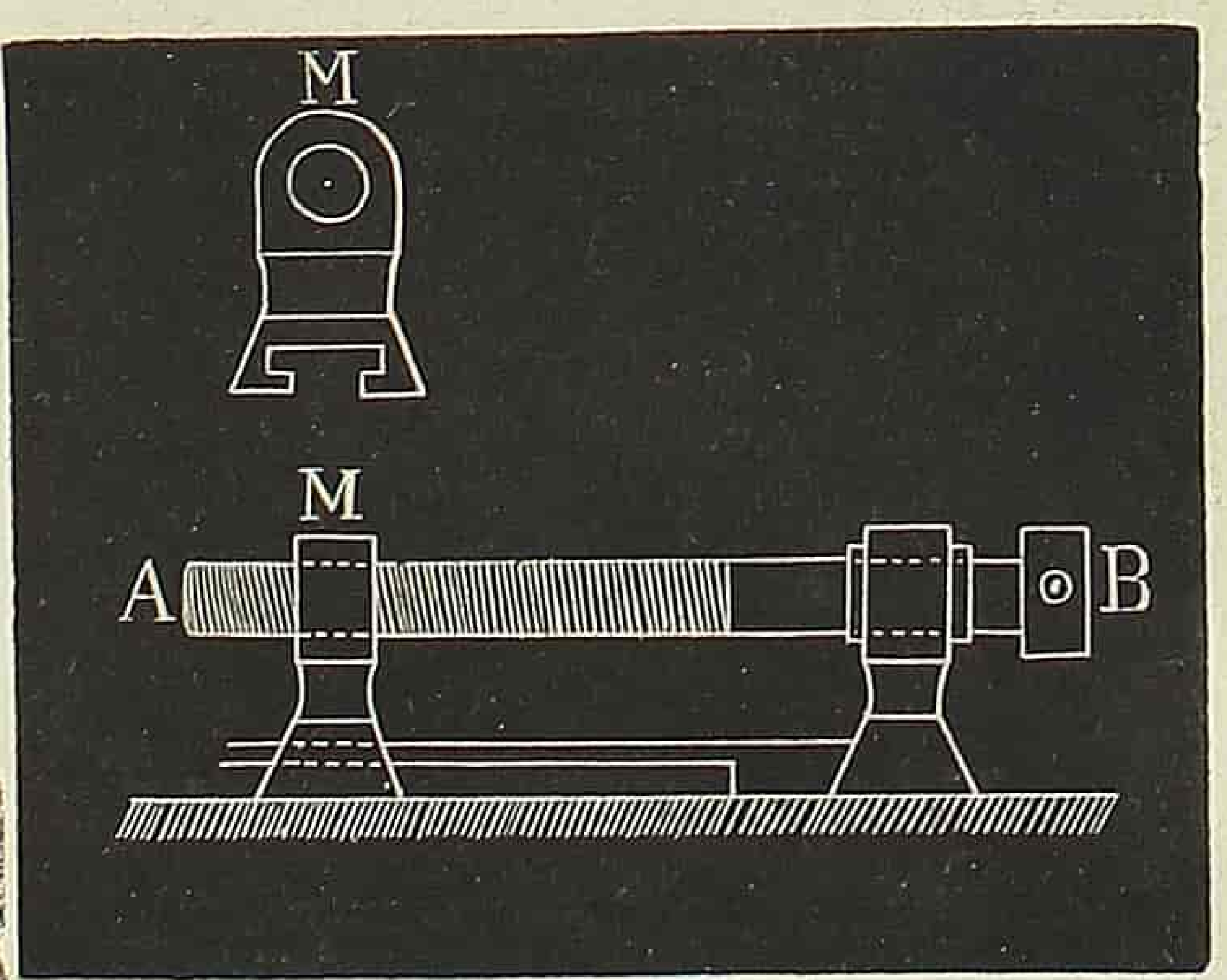
При конструкцији зубчаника нетреба се само обзирати на геометричке и меканичке услове задатка, но треба имати јошт у виду и јачину зуба, која скоро стоји у размери са њиовом ширином, и квадратом њиове дебљине. — Но са увећањем дебљине зуба, увећава се и корак, а то је непробитачно у смотрењу трења. *С* друге стране, сувише великом ширином зуба,[1] недобија се велика корист, јер ако би додирајуће се површине зуба, биле знатно простране, онда ће се без сумње десити, да се неке њине части и недодирају као што би ваљало. — Обично се за ширину зуба узима 4 до 5 пута њиова дебљина. —

C. Пренос кретања између осовина, које се неналазе у једној истој равнини.

206. Од махински органа служећи за пренос кретања између осовина, којих се геометричке осе неналазе у једној истој равнини, испитаћемо ми најпре тако звани безкрајни шраф. — Но предходно нуждно ће бити да напоменемо нека својства обичног шрафа. —

Познато је, да кад се неки обични шраф *AB* Сл. 149. без напредног кретања само обрће, онда ће се његова матрица *M* [écrou, muter] кад је у обртању препречена, напредно кретати, и величина овог кретања за један обрт шрафа, биће равна његовом кораку; тако ако означимо са r одстојање ма које тачке шрафа од његове осе, онда за један његов обрт, ова тачка учиниће пут

$$2\,r\pi.$$



Сл. 149.

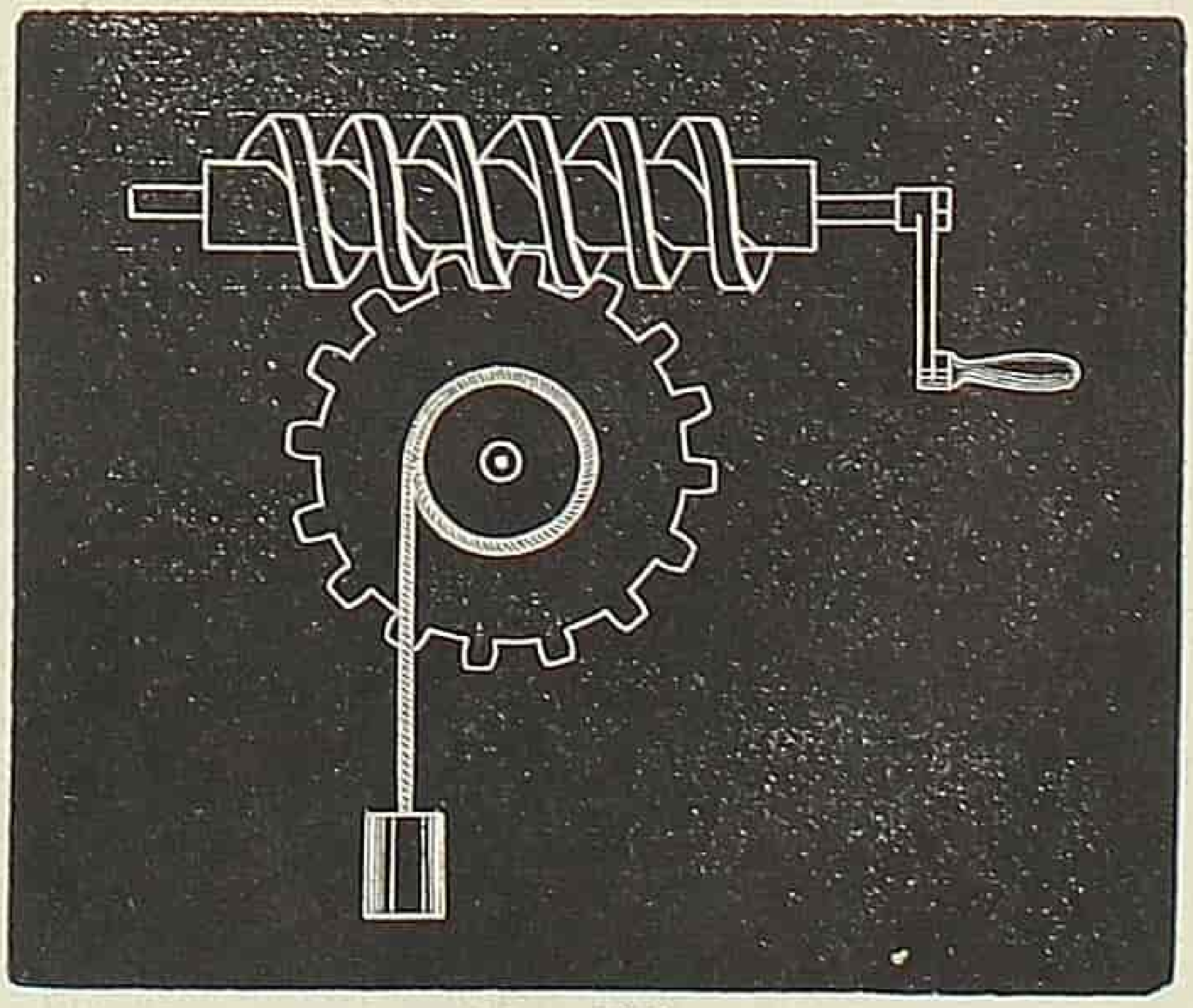
---

[1] Ширина је зуба мера, равноодстојна са осом обртања. —

Међутим матрица ће се померити за један корак p. Но ово отношење постојаће и за ма какав део обртања тако, да ако означимо јошт са w угловну брзину шрафа, са v брзину матрице, онда ма колико било r, имаћемо:

$$\frac{wr}{v} = \frac{2\pi r}{p} \text{ или } \frac{w}{v} = \frac{2\pi}{p}.$$

207. *Безкрајни шраф.* Напред поменуто кретање неће у ничему преиначено бити, ако би шраф био кратак, а његова матрица млого дужа. Исто би тако било, ако би се употребио само неки део матрице, јер није никако нуждно да она обувата цео шраф; у овом случају матрица би имала неки вид кремаљере (зубчанице), која би се правопружно кретала. — Пут, који би овакова кремаљере прошла равноодстојно са осом шрафа, био би раван простору заузетом зубима мање један. — Напоследку исто отношење постојаће између брзине шрафа и основне праве поменуте кремаљере, ако би се ова савила у виду круга и у зубчаник преобратила, који би имао доста велики пречник, и кога би средња равнина пролазила кроз осу шрафа Сл. 150. Означавајући са R полупречник овог точка, а са W његову угловну брзину, v може да се замени са WR и напред наведена једначина постаће:



Сл. 150.

$$\frac{w}{W} = \frac{2\pi R}{p}$$

Нека је сад n број завојака [filets] на шрафу. N број зуба зубчастог точка. Пошто одстојање од средине до средине ови зуба мора бити равно одстојању два једно до друго налазећа се завојка, како би сваки завојак постепено заватао за један зуб, то ако означимо са a ово одстојане, имаћемо:

$$p = na, \; 2\pi R = Na.$$

и потоме
$$\frac{w}{W} = \frac{N}{n}$$

Ова једначина подобна је дакле једначини наведеној код ваљчасти зубчаника. —

Овакав шраф зове се безкрајњи шраф, јер се може непрестано да обрће у истом правцу, што код обичног шрафа неможе да буде. —

208. *Профил завојака.* Из напред реченог лако је видити, да у равнини повученој кроз осу шрафа а управно на осу точка, завојци долазе постепено у додир са точком као зуби једне кремаљере, потоме профили завојка морају бити такви као што су профили, који одговарају кремаљери и њеном ваљчастом точку.

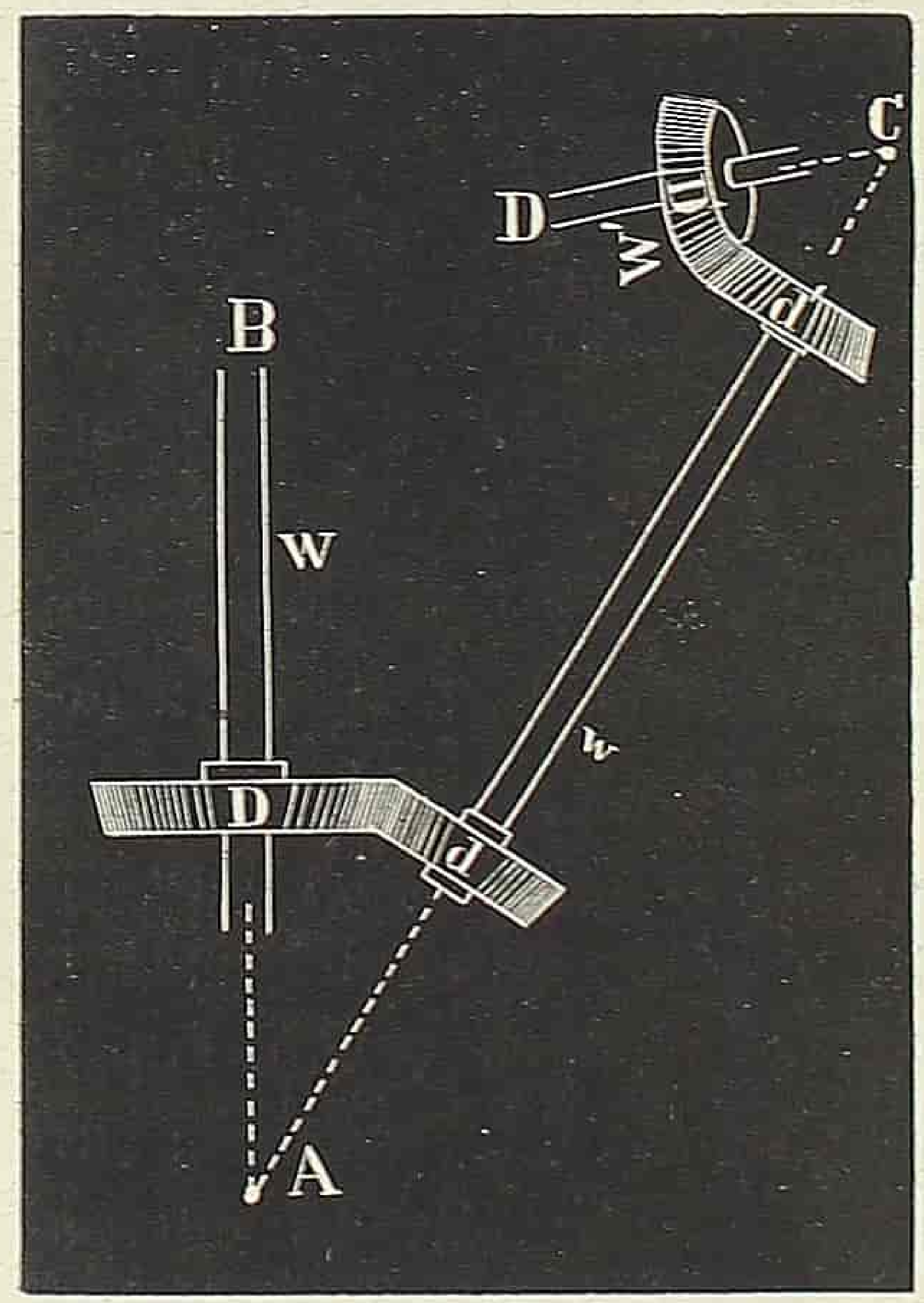
Што се пак тиче форме зуба самог точка, будући да ови имају доста малу ширину, то се њиов додир са завојцима шрафа може сматрати, као да бива у равнини, која тангира средњу завојну пругу [завојницу — hélice moyenne] шрафа. Потоме зуби морају бити косо положени према њиовој средњој равнини, тако исто као што су косо положени завојци шрафа према његовој оси. — Отуда сљедује, да зуби точка образују тако рећи један шраф, који толико има разни завојака, колико точак има зуба, и кога је средња завојна пруга нагнута према оси овог шрафа за уго J, који је комплемент аналогичног угла i оног другог шрафа. — Осим тога оба шрафа морају бити истог правца, т. је: оба десна или оба лева. —

209. Теорија трења показује под каквим би условима безкрајни шраф и зубчасти точак могли бити реципроки, т. је. да се може повољно један средством другог покретати. — Ови услови подпуно су испуњени, кад се угли J и i међусобом па сљедствено и од 45^0 мало разликују. — У осталом због великог трења, безкрајни шрафови употребљују се врло редко за пренос кретања. Њиова је употреба поглавито за кретања са малим брзинама, и кад се има при преносу кретања мали одпор да савлада. —

210. *Екипажа зубчаника.* Пренос кретања између две осовине, којих се геометричке осе неналазе у једној истој равнини, производи се понајвише средством зубчаника употребљујући трећу посредну осовину, која се мора тако удесити, да њена геометричка оса, продужена пресеца прве две, или да је равноодстојна са једмом а да пресеца ону другу. —

У овом последњем случају два ваљчаста зубчаника, која би сајужавала две равноодстојне осовине, могу да се замену са безкрајним каишом, о ком ћемо ниже говорити. —

211. Лако је определити отношење угловни брзина вопросне две осовине, које сајужава трећа помоћна осовина. — И заиста:



Сл. 151.

Нека су $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ две осовине, којих се геометричне осе неналазе у једној истој равнини. Сл. 151, а $\overline{AC}$ трећа помоћна осовина, о којој је напред речено да пресеца прве две. — Означимо са D, d, D', d', пречнике основица коничн̂и точкова, који су на поменутим осовинама утврђени, и истим писменима као што слика показује, означени. — Означимо даље са N, n, N', n', број зуба ови точкова, а са W, w, W', одговарајуће угловне брзине, по познатом биће:

$$WD = wd;\ wd' = W'D' \text{ отуда}$$

$$\frac{W}{W'} = \frac{dd'}{DD'} = \frac{nn'}{NN'}.$$

Исто би тако било, кад би две вопросне осовине биле међусобом сајужене са ма колико други посредни осовина. — Тако на прилику ако означимо са:

O		O'		O''	O'''	Ове осовине зубчаника, добоша или котурова [poulies]
A	a'	A'	a''	A''	a'''	Зубчасте точкове, добоша или котура.
D	d'	D'	d''	D''	d'''	Пречнике точкова, добоша или котура.
N	n'	N'	n''	N''	n'''	Број зуба точкова.
W		W'		W''	W'''	Угловне брзине.

Онда ће точак A на осовини O, заватати са точком a' на осовини O'; или ову су два добоша са једним истим безкрајним каишем. Точак A' на осовини O', заватаће са точком a'' на осовини O''; A'' на осовини O'', са точком a''' на осовини O''', и т. д. имаћемо дакле:

$$WD = W'd'\,;\ W'D' = W''d''\,;\ W''D'' = W'''d''' \text{ одкуда}$$

$$\frac{W}{W'''} = \frac{d'.d''.d'''}{D.D'.D''} = \frac{n'.n''.n'''}{N.N.N''}$$

NB. У практики угловне брзине замењују се са одговарајућим бројевима обрта за један минут, кои су им сразмерни. —

Пренос кретања посредством крути тела.

212. Код махина пренос кретања између два тела, производи се често трећим крутим телом, које је са прва два подобно зглавку или шарнири сајужено. — Геометричка својства односно кретања овако сајужена два тела, испитали смо ми под № 108 Сл: 55. Број 3.

Да би отношење брзина било стално, треба да тачка K у којој тело $\overline{AB}$ [продужено ако је потребно] пресеца праву средишта $\overline{OO'}$ буде стална. — Но ова тачка може само тако бити стална, ако се у безкрајњем одстојању налази, што условљава да полупречници $\overline{AO}$, и $\overline{BO'}$, буду једнаки и равноодстојни, сљедствено да дужина тела AB буде равна одстојању $\overline{OO'}$

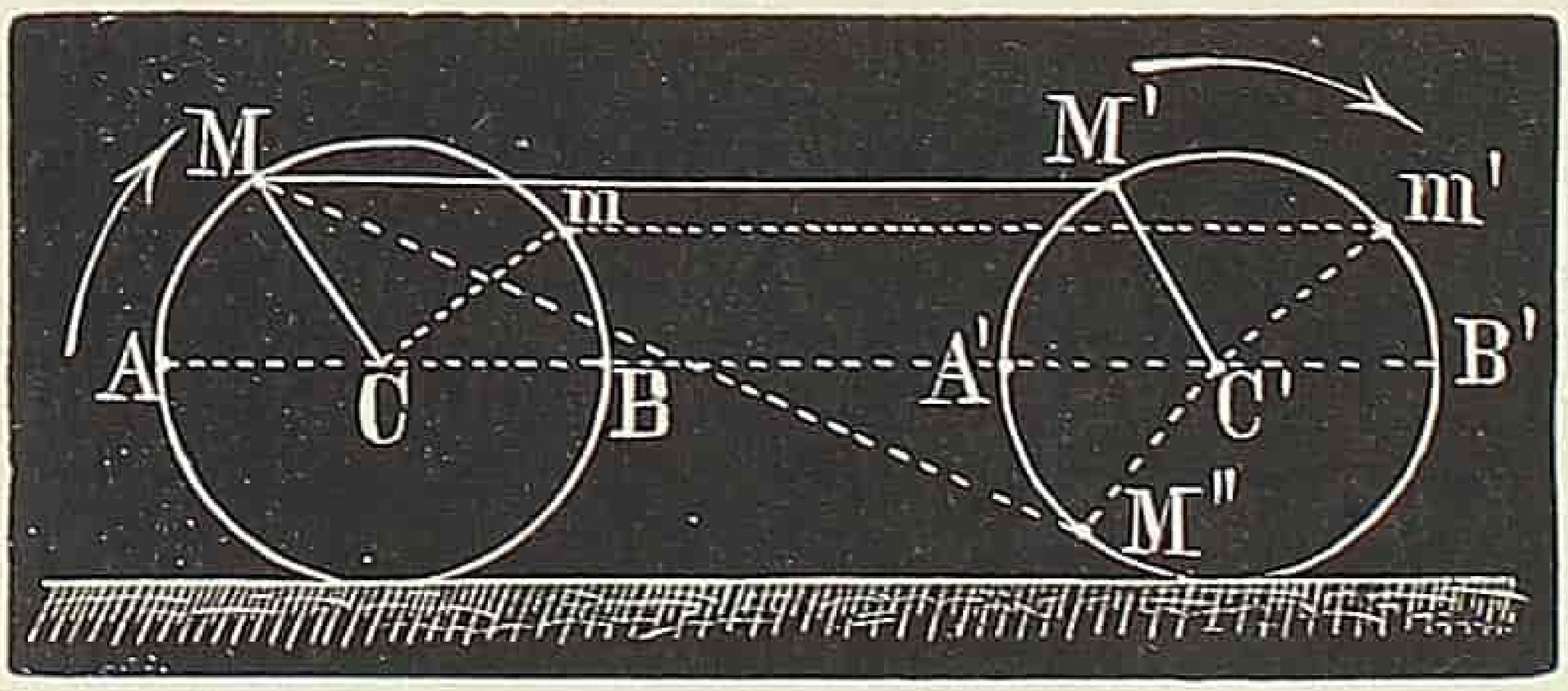
У овом случају, угловне брзине осовина O и O' биће очевидно једнаке и истог правца, и ово је једини случај у коме се може имати стално отношење брзина, кад се оће да употреби какво круто тело за пренос кретања. —

213. *Сирега точкова локомотиве.* Обична локомотива почива на три пара точкова, између којих је њена тежина неједнако разпоређена. Једну од осовина; која се зове моторна осовина, покреће непосредно сама махина, и трење, које се порађа између моторни точкова и шина, служи тако рећи као

одупирач (ослон) у сљед чега се локомотива напредно креће, повлачећи собом цео воз. —

Но кад је одпор воза врло велики, онда се моторни точкови локомотиве обрћу на једном истом месту, јер трење између шина и речени точкова неможе више служити као одупирач за напредно кретање локомотиве. — Од тренутка кад се ово деси, увећање моторне силе непомаже ништа; потоме нека дата локомотива, ма колика била њена моторна сила, може само до известне границе постојећи одпор да савлада. — Ова граница равна је производу из притиска, који дејствује на моторну осовину, и једног сачиниоца, који зависи од стања тарући се површина точкова и шина, као и од постојећи атмосферски околности. —

Да би локомотива била у стању да покреће какав већи воз, то се средством машке [bielle] сајузе један или два пара точкова локомотиве, са моторним точковима као што Сл. 152 показује. — У сљед тога, сви сајужени точкови морају се једновремено обртати са моторним точковима, и тако ови немогу се више на месту обртати, без да трење на периферијалној површини (a la jante) свију сајужени точкова небуде савладано; или јошт боље, у сљед сајуза точкова о којима је реч, локомотива добија више одупирања (ослона) за своје напредно кретање. [Све ово боље ће се објаснити кад се буде говорило о трењу у динамики].



Сл. 152.

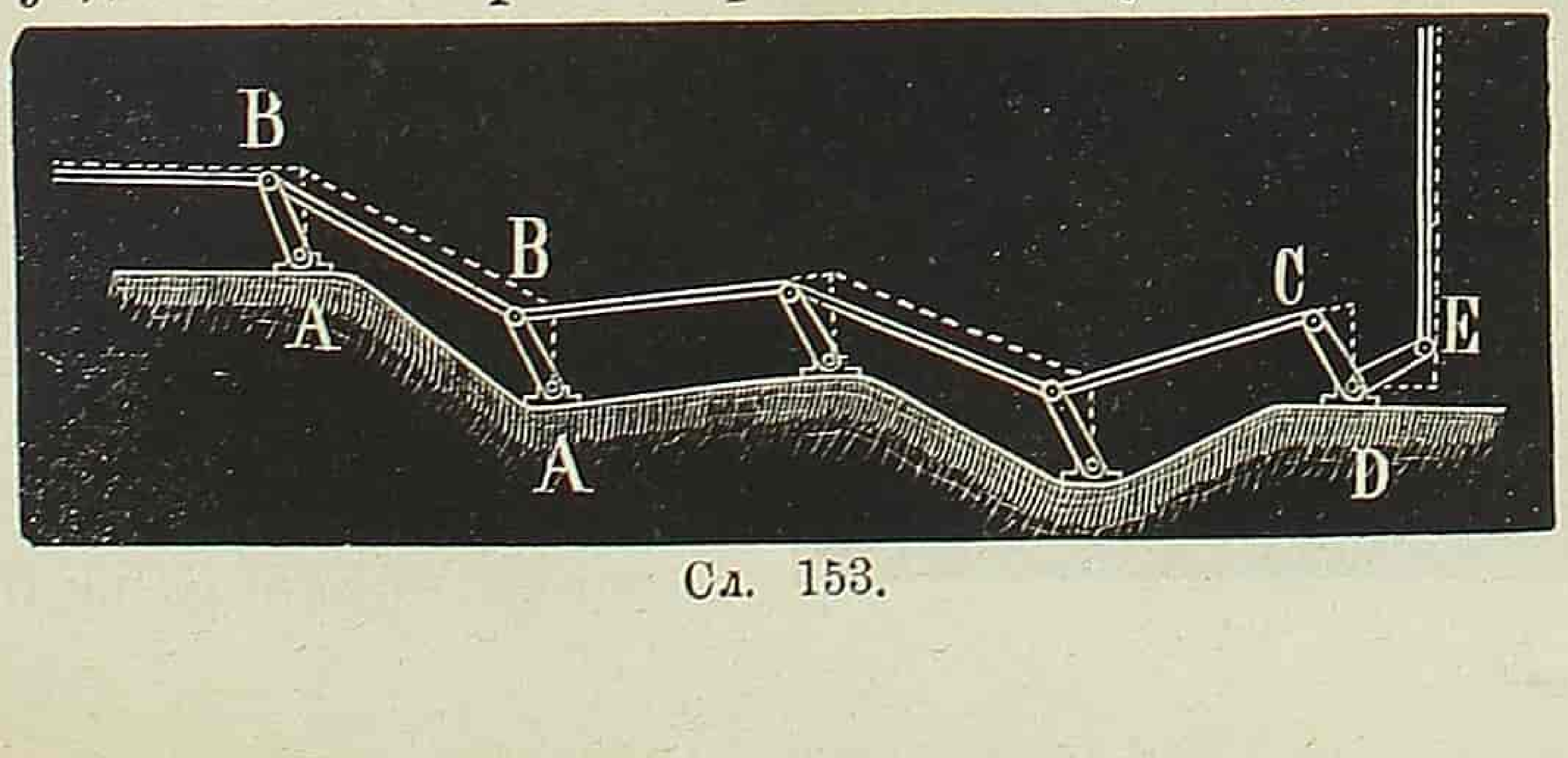
214. *Мртве тачке.* Сматрајмо две једнаке ручке $\overline{CM}$ и $\overline{C'M'}$ сајужене машком $\overline{MM'}$; предходећа слика. —

За сваки положај ручке $\overline{CM}$, противположени крај машке може да се налази на периферији (C'), у два разна положаја M' и M'', потоме две ручке и једна машка могу да се употребе на два разна начина. Слика $CMM'C'$ одговара двема једнаким угловним брзинама истог правца, а онај други начин сајуза одговара противположеним брзинама, којих је отношење мењљиво. —

Тачке M', и M'', слажу се кад је тачка M у A, или у B. У овом случају два полупречника налазе се на правој средишта $\overline{CC'}$, и при том имамо ову важну примедбу навести: Ако сматрамо н. пр. полупречник $\overline{CA}$ да се креће према CM, као што је стрелицом означено, онда је са геометричног гледишта неизвестан правац кретања, другог полупречника $\overline{C'A'}$, јер ништа га непринуђава да се пре управи према $\overline{CM'}$, него према $\overline{C'M''}$. Но пошто заузме један или други правац, онда се у истом правцу креће за време полуобрта сваког од два точка, после чега опет се појављује иста неизвесност и тако даље. — Тачке A' и B' зову се мртве тачке. —

Да би кретање правилно било и да би се избегла неизвесност, која се порађа у сваком периоду, кад год се полупречници $\overline{CM}$ и $\overline{C'M'}$ слажу са правом средишта $\overline{CC'}$, то се обично свакада при конструкцији махина, обраћа известна пажња на прелаз преко мртви тачака, — Код локомотива са сваке стране жељезнице налази се по једна спрежна машка, — За једну исту осовину, сајужене две машке у виду зглавка или боље у виду шарнире, удешене су на два полупречника $\overline{CM}$, $\overline{Cm}$, управна један на други тако, да кад се један налази на мртвој тачки, онда да је други прешао ову тачку. —

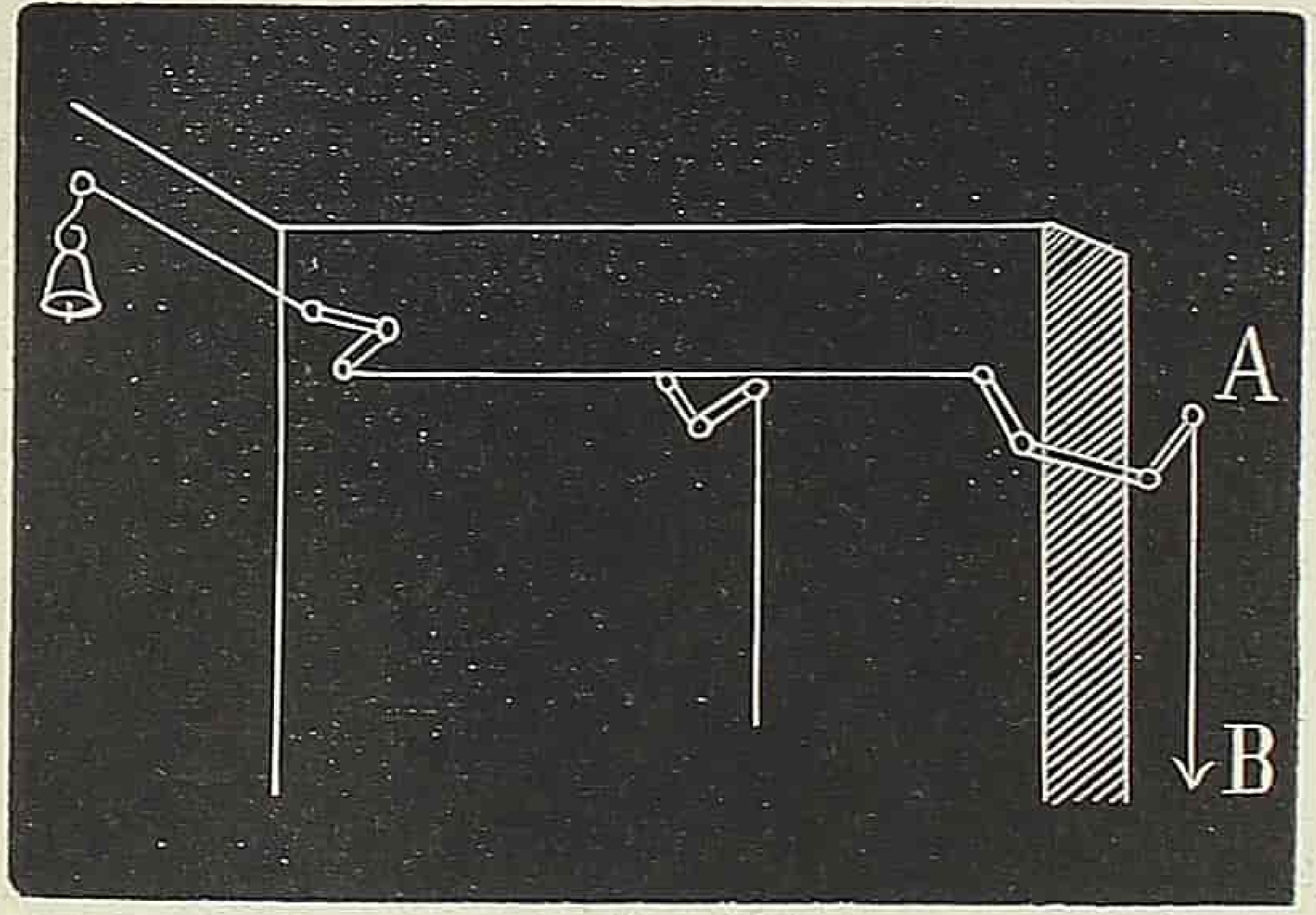
215 *Дршке сајужене са машкама.* Употреба држака сајужени са машкама као што слика 153 покезује, упражњавана је била дуго време при махинама за пренос крећања на велика одстојања, које се кретање производило каквим падом воде као моторном силом, (употреба хидраумничког кола). — Слика представља један овакав пренос кретања кад је терен таласајући.



Сл. 153.

— Ракљаста кретка *CDE*, служи за промену правца крећања. — Код овог меканизма порађа се при кретању врло велико трење. —

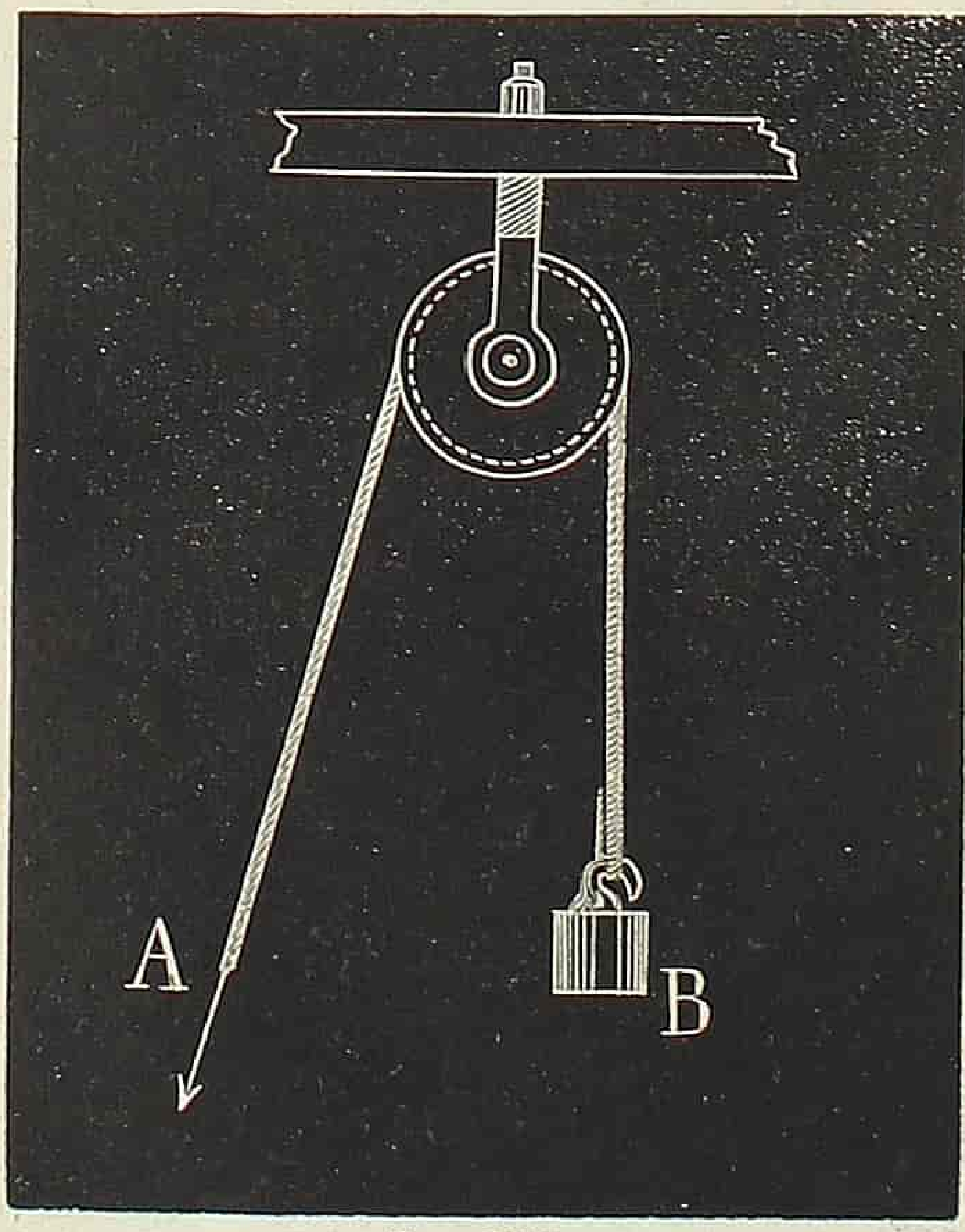
216. *меканизам за звонце,* У овај систем преноса кретања може се уврстити јошт меканизам кои се употребљује за звонца, код поједини приватни кућа или државни канцеларија Овде су машке замењене са гвозденим жицама Сл: 154, На крају *A* налази се конопчић $\overline{AB}$ за кои се вуче, кад се оће да звони. —



Сл. 154.

Пренос кретања посредством ужета [*конопаца*] **ланаца и каиша.**

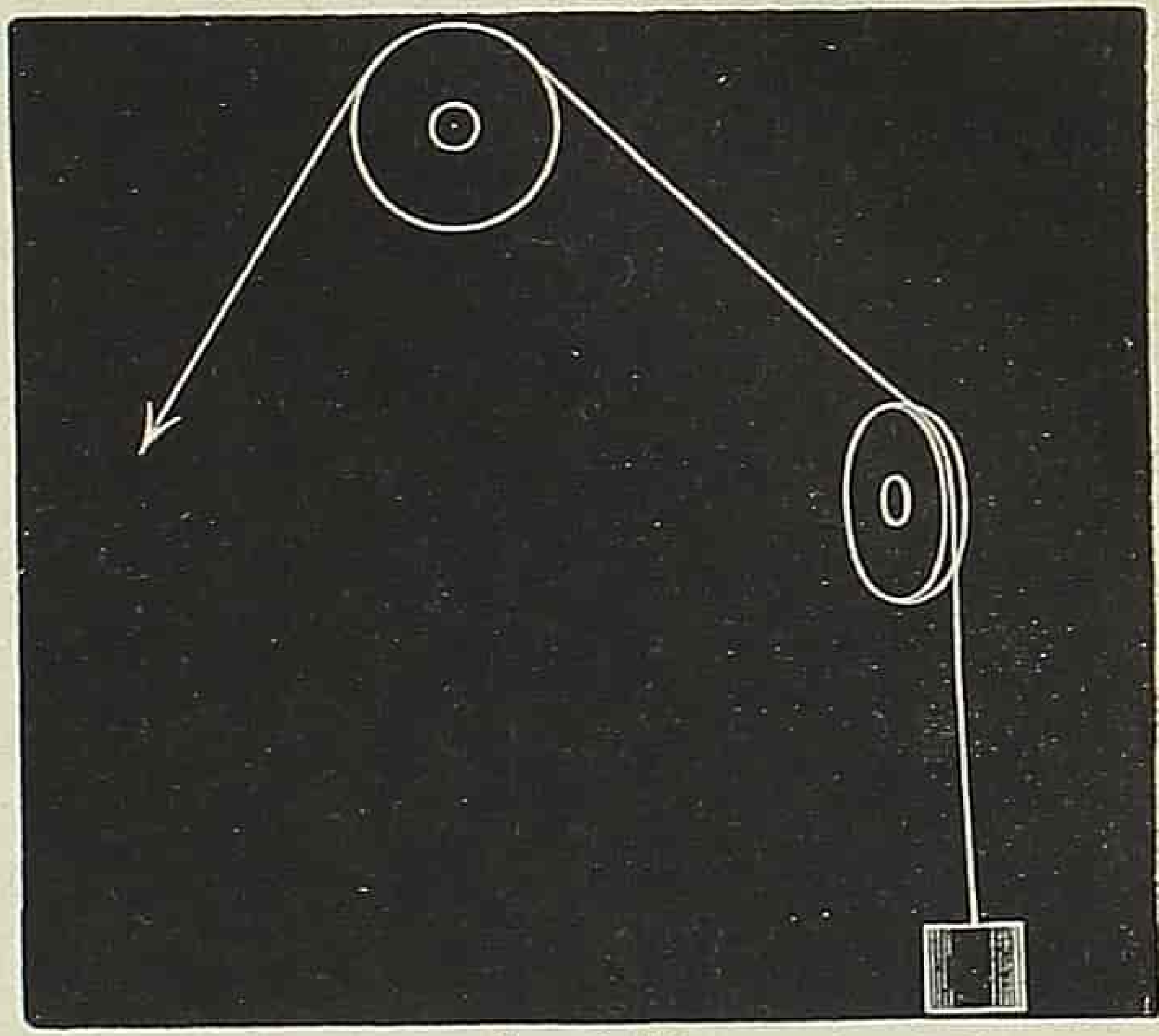
217, За пренос кретања употребљују се врло често конопци, ланци, и каиши, као на прилику за извлачење воде из бунара, за дизање материала на висину при конструкцији здања и т. д. и т. д. Ми ћемо сада да изпитамо како се поменута тела употребљују за пренос кретања у најобичнијим случајима. —



Сл. 155.

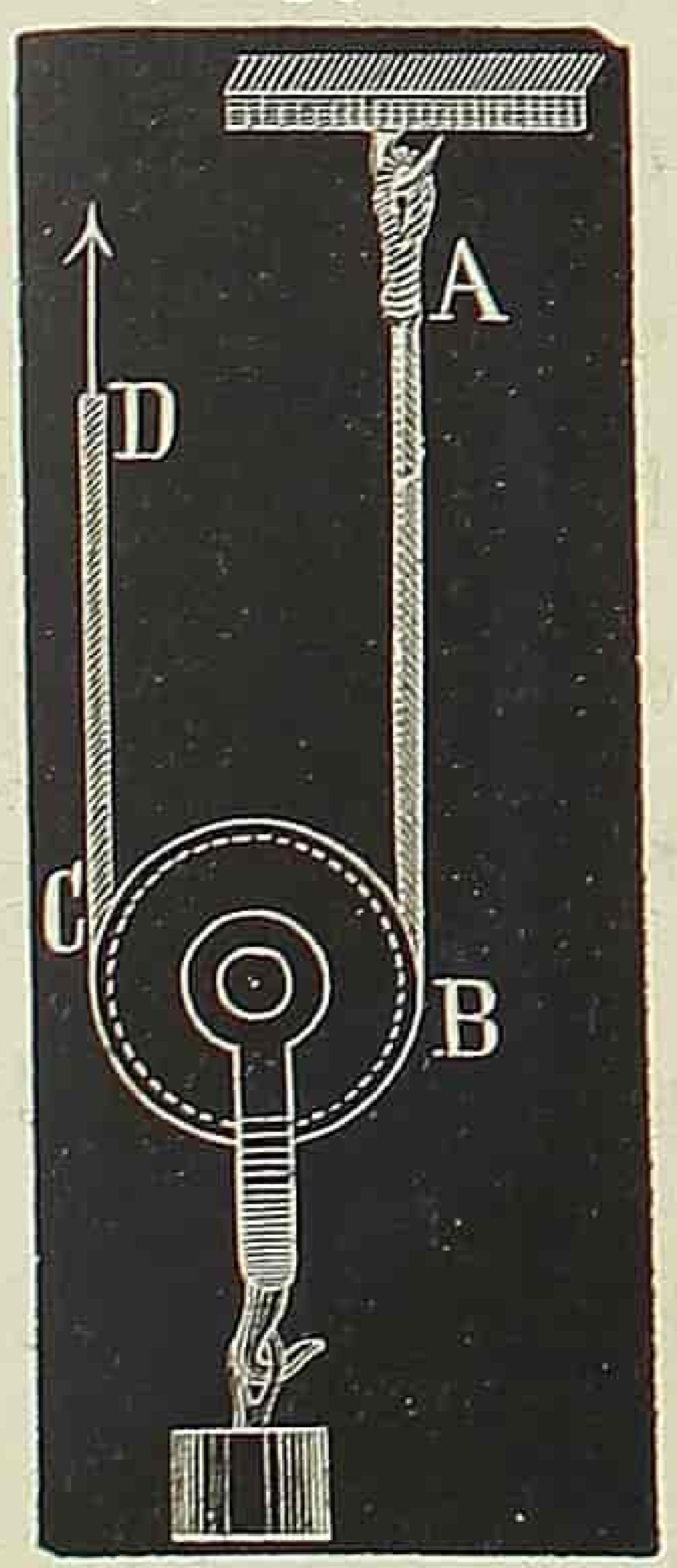
1. *Котур са утврђеном осом.* Кад се какав конопац вуче за један крај, па је нуждно да се његов правац промени, онда се свакада у тачки, у којој се конопац савија, употребљује један по периферији изжљебљени котур, кога је обртна оса утврђена Сл. 155. Овај котур употребљује се зато да се умали трење, које би се произвело, кад би конопац клизао по каквој некретној површини. Лако је видити да

је брзина тачке A, у којој мотарна сила дејствује, једнака са брзином терета B, кои се диже. — Потоме употреба котура са утврђеном осом служи само на умалење трења, и на промену правца брзине а никако на промену саме брзине, због тога се стални котур обично означава под именом *сироводни котур*. Горепоменути закон постои ма колики био број и разпоред стални котурова, као што је н. пр. Сл: 156 представљено Оса сваког котура управна је на равнину два правца конопца, кои котур додирају. —

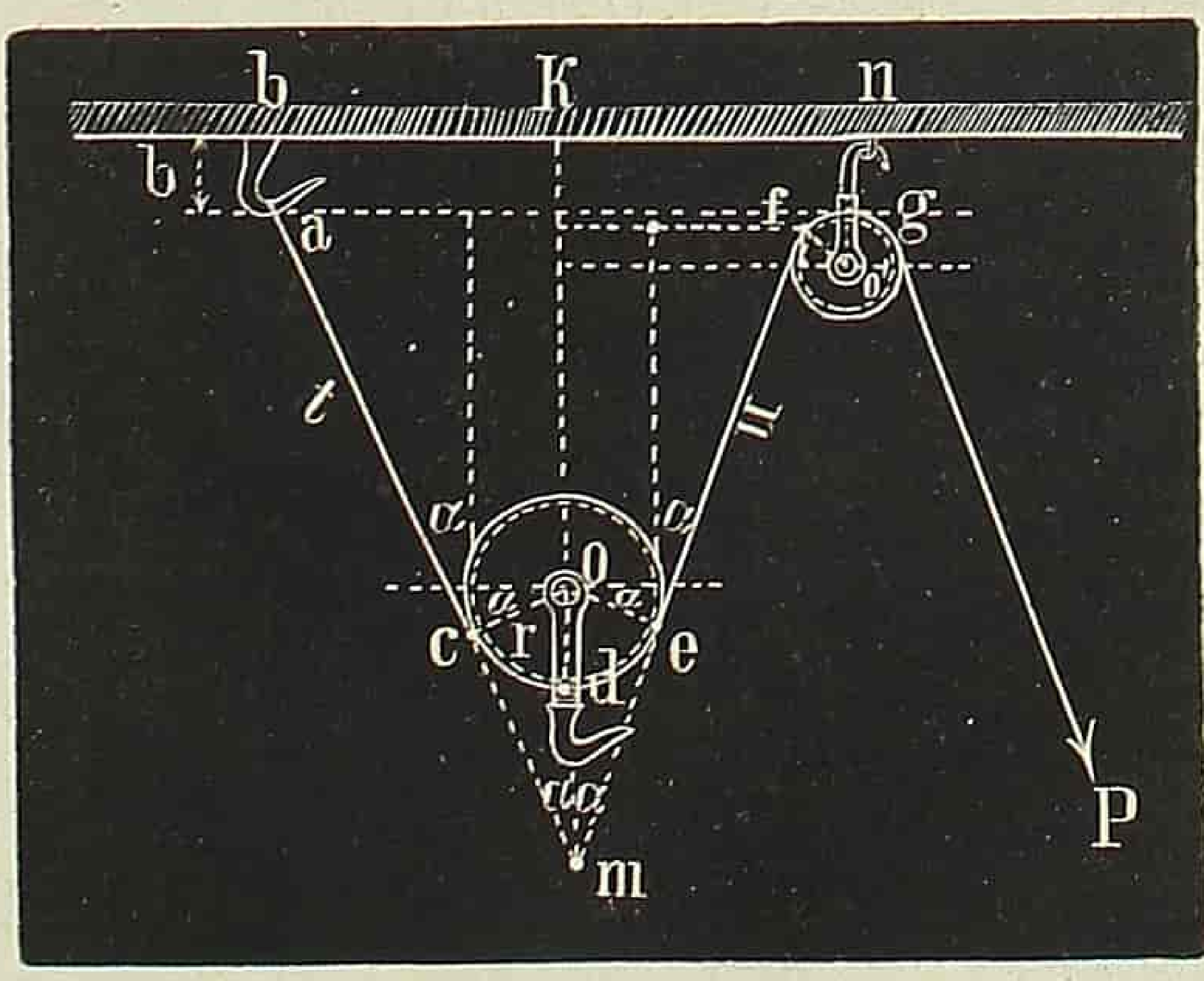


Сл. 1.56

2. *Кретни котур*. Ако се осовина, око које се котур обрће, и сама креће, онда имамо тако звани кретни котур Сл: 157. Ако су оба дела конопца равноодстојна, онда је лако видити, да за колико се некретни део $\overline{AB}$ умали, за толико се онај кретни $\overline{CD}$ увећа, и брзина једне тачке кретног дела конопца, равна је двогубој брзини осе котура, која се креће по правој пруги. —



Сл. 157.



Сл. 158·

3. *Кретни и спроводни котур.* Слика 158 представља јасно употребу конопца и два котура o и o' за подизање и спуштање терета, кои би куком $\overline{od}$ закачен био. — Котур o' обрће се око своје сталне, а o, око своје кретне осовине. Отношење између брзина на периферији котура o' и брзине средишта котура o, управљене по правцу вертикалном $\overline{oK}$ равно је двогубом *cosin* угла α. Крај a конопца утврђен је, и овде имамо ове сталне количине: $\overline{ag} = a.$; вертикална $\overline{ab} = b$, $\overline{co} = r$, $\overline{fo'} = r'$, а мењиве: $\overline{ok} = y$ $acdefg = l$, уго $cmo = \alpha$,

Из саме слике лако је видити да је:

$$l = \overline{ac} + cde + \overline{ef} + \overline{fg} = t + (2\,r\,\pi - 2\,r\,\alpha) + u + (\frac{r'\pi}{2} - r'\alpha) =$$

$$= t + u + (\frac{\pi}{2} - \alpha)(2\,r + r') \ldots\ldots (1)$$

Ако пројектирамо $a\,c\,o\,e\,f\,g$ на хоризонталну $\overline{bn}$; имаћемо:

$$a = (t + u)\,sin\,\alpha + (2\,r + r')\,cos\,\alpha \ldots\ldots (2)$$

Ако пројектирамо $baco$ и $oefo'$ на вертикалну $\overline{mk}$, имаћемо:

$$\left.\begin{aligned} y &= b + t\,cos\,\alpha - r\,sin\,\alpha \\ y &= u\,cos\,\alpha - r'sin\,\alpha - r\,sin\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{дакле}$$

$$2\,y = (t + u)\,cos\,\alpha + b - (2\,r + r')sin\,\alpha \ldots\ldots (3)$$

Диференциалећи предходеће три једначине биће:

$$dl = d\,(t + u) - (2\,r + r')\,d\alpha \ldots\ldots (4)$$

$$o = d\,(t + u)\,sin\,\alpha + (t + u)\,cos\,\alpha\,d\alpha - (2\,r + r')\,sin\,\alpha\,d\alpha \ldots\ldots (5)$$

$$2\,dy = d\,(t + u)\,cos\,\alpha - (t + u)\,sin\,\alpha\,d\alpha - (2r + r')\,cos\,\alpha\,d\alpha \ldots (6)$$

Опредељујући из (4) $d\,(t + u)$, и замењујући га у (5) и (6) добићемо:

$$sin\,\alpha\,dl = -(t + u)\,cos\,\alpha\,d\alpha \ldots\ldots (7)$$

$$2\,dy = cos\,\alpha\,dl - (t + u)\,sin\,\alpha\,d\alpha \ldots (8)$$

из (7) $dl = -\dfrac{(t+u)\,cos\,\alpha\,d\,\alpha}{sin\,\alpha}$, и замењено у (8) даће

$$2\,sin\,\alpha\,dy = -(t + u)\,(sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha)\,d\alpha = -(t + u)\,d\alpha$$

потоме $\dfrac{dl}{by} = 2\,cos\,\alpha.$

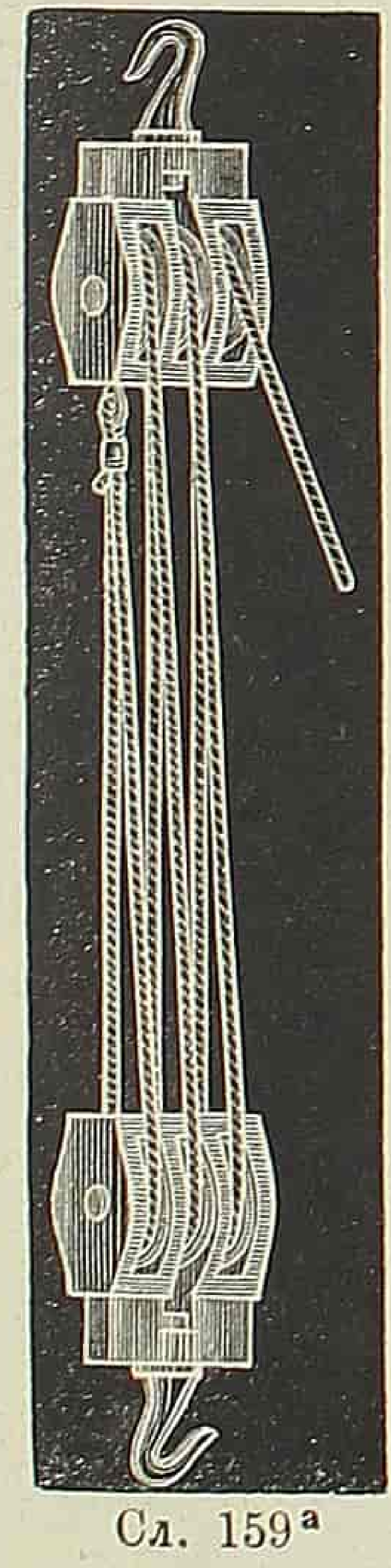
Но као што је $\frac{dl}{dt} = v; \; \frac{dy}{dt} = v'$, то отуда сљедује:

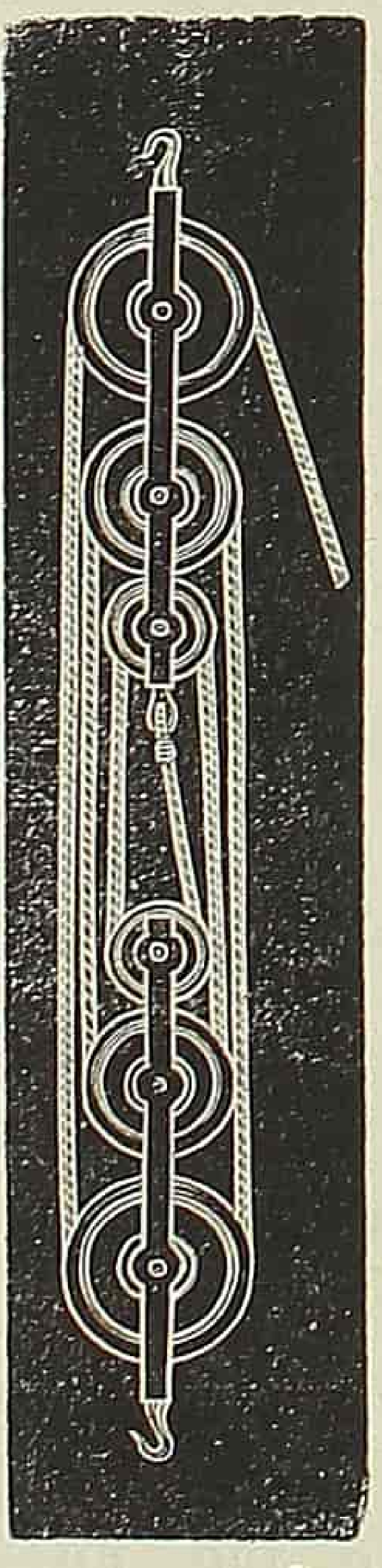
$$\frac{dl}{dy} = \frac{v}{v'} = 2 \cos \alpha$$ што смо имали да докажемо.

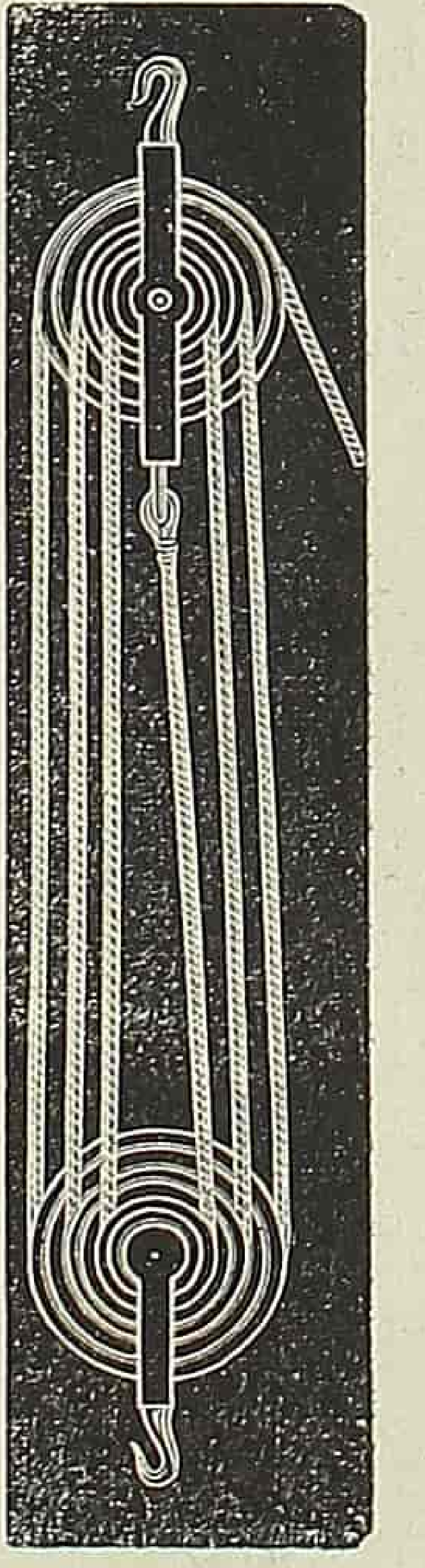
Ако би стране $\overline{ac}$ и $\overline{ef}$ конопца биле равноодстојне, онда

је $\alpha = o$ и $\frac{v}{v'} = 2$, дакле $v = 2\ v'$,

218. *котураче.* Ове справе врло употребљиве нарочито при морнарству, састоје се из два главна дела, један кретан а други некретан. Сваки део састои се из извесног броја котурова, кои се обрћу око своих оса. — Распоред котурова на овим осама различит је као што слика 159 показује, но главна ствојства остају иста за сваки систем. —


Сл. 159^{a}


Сл. 159^{b}


Сл. 159^{c}

Терет, кои се има дизати, закачи се за кретни део котураче. Један крај конопца утврђен је за један део котураче, а други крај за кои се вуче, идући од једног дела до другог, прелази на изменце преко једног сталног и једног покретног котура, док се напоследку неодвоји од последњег сталног котура, и долази у руке онога, кои има терет да диже.

Ако је стални крај конопца утврђен за некретни део котураче, онда је број струкова конопца и котурова паран, као што слике показују, напротив ако би вопросни крај био утврђен за покретни део котураче, онда како број струкова конопца, тако и котурова биће безпаран.

При определењу отношења брзина, имамо у рачун узети и број струкова конопца, кои сајужавају котурове. И заиста, кад се кретни део котураче уздигне на неку извесну висину, онда сваки од струкова на коима котури почивају, скратиће се за исту количину, а крај за кои се вуче, увећа ће се за толико колико износи сбир ових скраћења струкова, — Овде се предпоставља, да су сви струкови врло близу равноодстојни међусобом. — Ако дакле означимо са V брзину једне тачке краја, за који се вуче, са v брзину покретног дела котураче, са n буој струкова конопца, кои иду од једног дела котураче до другог, онда ћемо имати:

$$V = n\,v \qquad \text{отуда}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{n}.$$

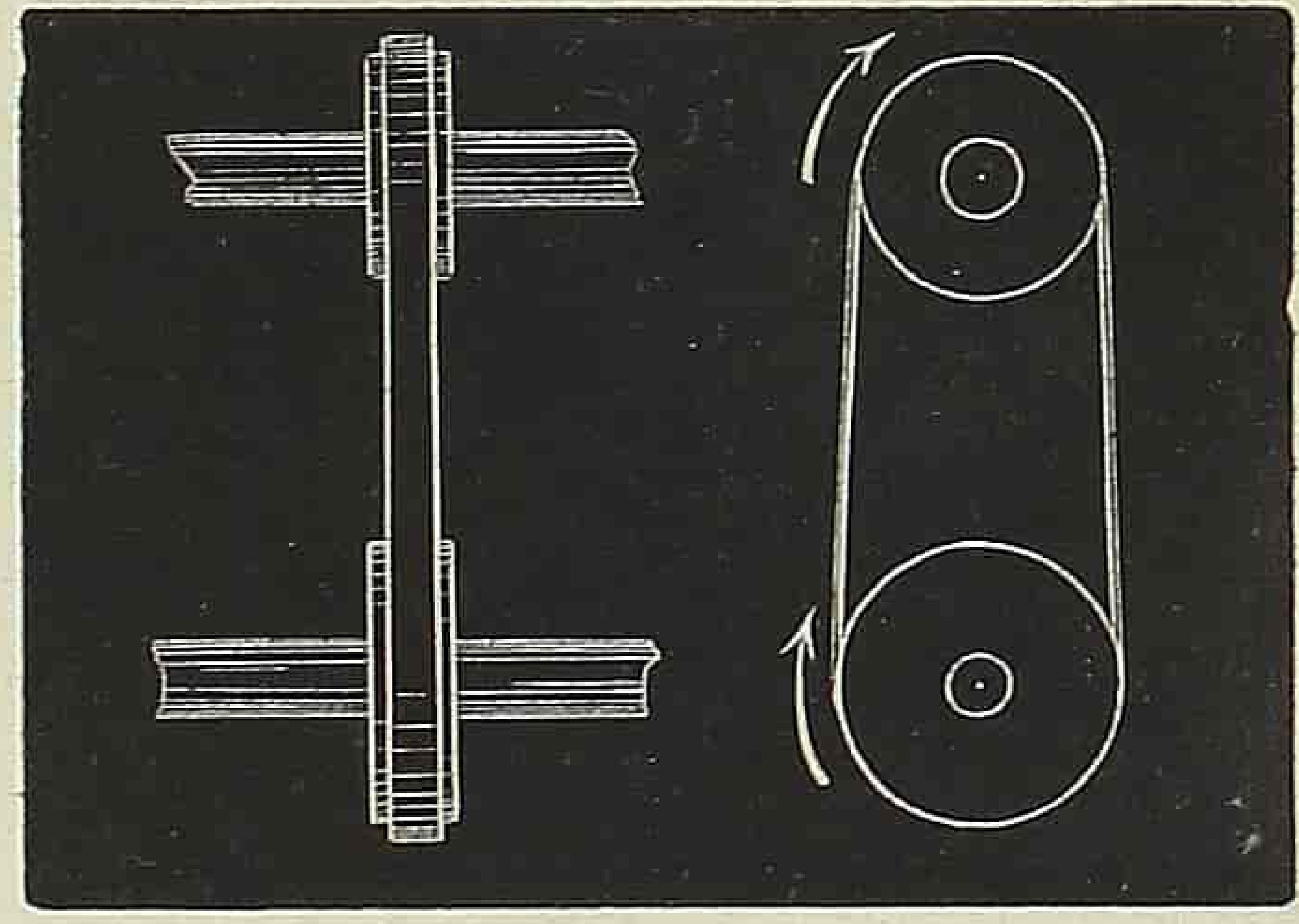
Што ће рећи: Да отношење између брзине тачке, у којој дејствује терет, и брзине тачке, у којој дејствује мотор, равно је јединици подељеној са бројем струкова конопца

219 *Екипажа котурача.* Узмимо две такове котураче као што их напред описасмо и рецимо да за сваку имамо једначину.

$$V = n\,v$$
$$V' = n'\,v'$$

Сајужавајући удесно ове две котураче, можемо добити да отношења брзина буду равна $\frac{n}{n'}$, или nn', потоме како будемо узели $v = v'$ или $v = V'$ т. j: потоме како будемо закачили кретни део друге за кретни део прве котураче, или за њен крај, у коме дејствује мотор. — Јасно је, да у једном од ова два случаја можемо добити, да отношење брзина буде разломак. —

220. *Безкрајни каиш*, У индустрији употребљују се врло често конопци или тако звани безкрајни каиши за пренос кретања између две а и више осовина. — Узмимо н. пр. случај да имато произвести пренос кретања измеђ две равноодстојне осовине. Каиш се обавије око два котура или добоша од коих један је утврђен на једној, а онај други на другој осовини Сл. 160. Између ова два котура, део каиша у правој пруги непрестано мора бити затегнут, да би се пренос кретања могао произвести.

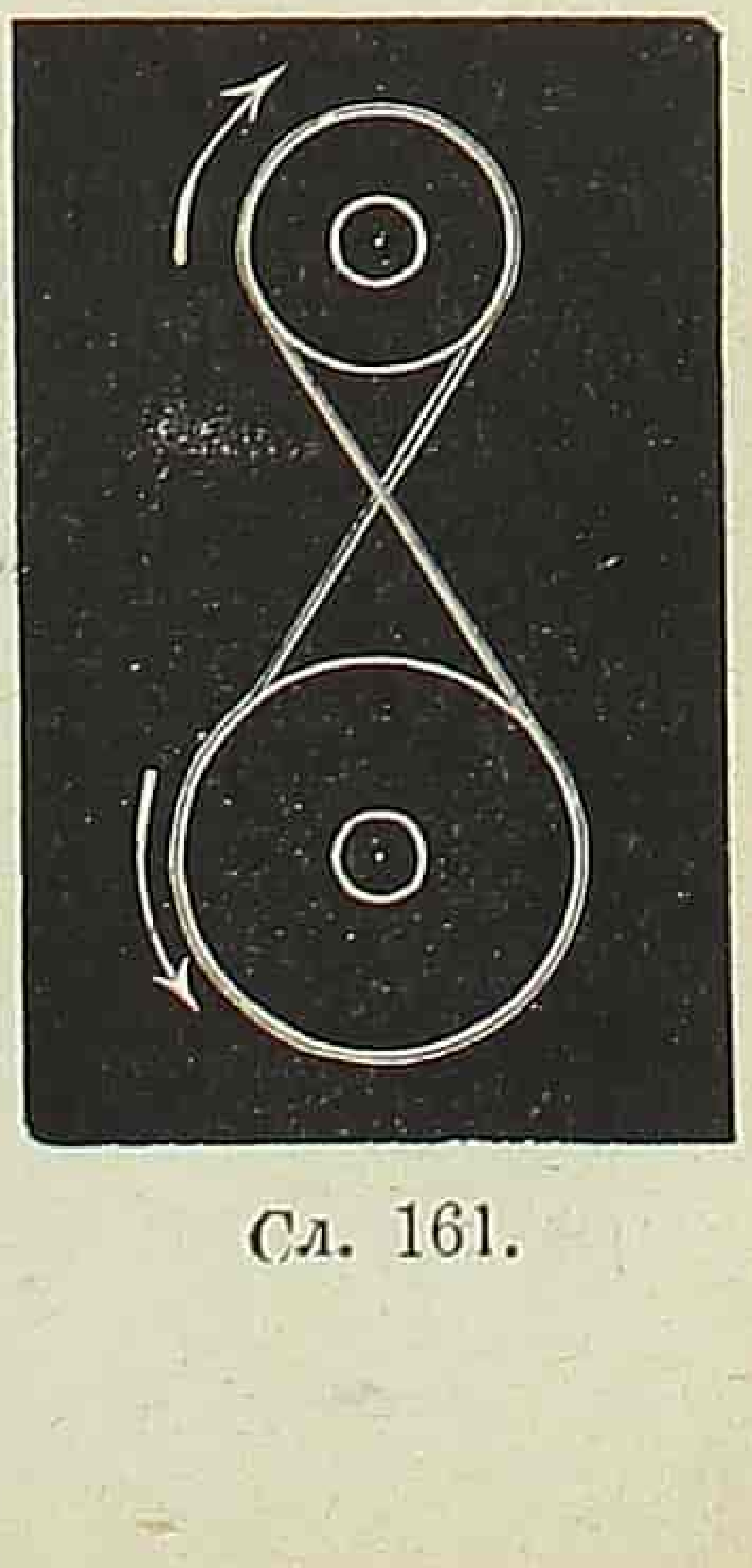


Сл. 160.

Лако је видити, да ма какав био профил котурова око којих је каиш обавијен, отношење угловни брзина може стално бити само тако, ако на ова два профила заједничка тангента, која означава правопружни део каиша или продужење ове тагенте, пресеца средишта у некој сталној тачки.

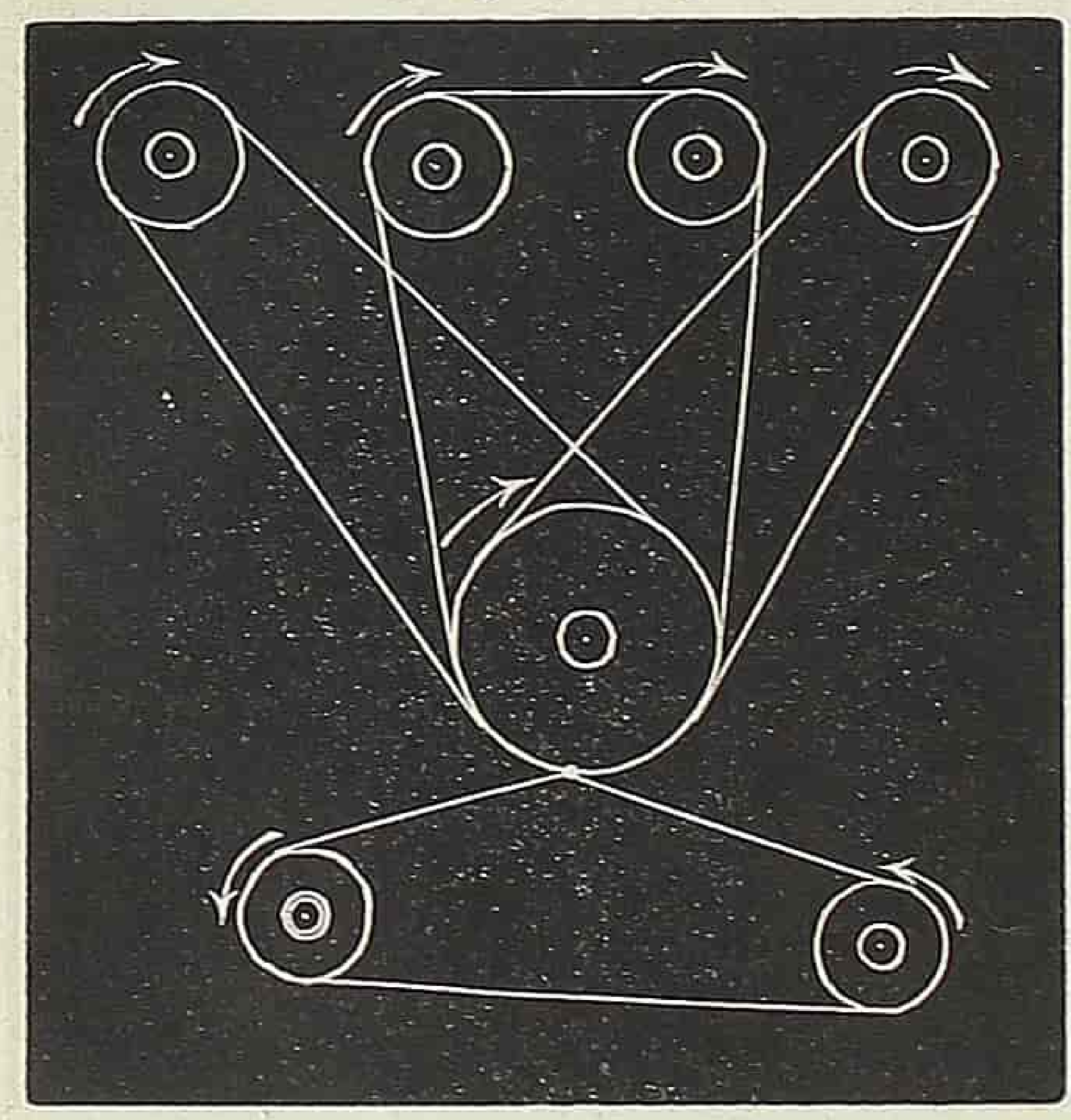
У практики узима се свакада за пресек ови котурова, два са осовинама сасредна круга. — Ови крузи одговарају нуждном и довољном услову, да отношење угловни брзина буде сално, јер као што је лако дознати, ове брзипе стоје у преокренутом отношењу полупречника котурова.

Отуда сљедује, да кад оћемо да произведемо пренос кретања између две дате равноодстојне осовине, средством безкрајњег каиша, онда треба на ове осовине утврдити два такова кружна котура [или добоша], да њини полупречници стоје у преокренутом отношењу угловни брзина, које желимо имати. — Ови полупречници немају никакву везу са међу — одстојањем осовина. Каиш може ићи од једног котура до другог, или у једном правцу или да се укршта, т. је: његови правопружни делови, могу бити управљени или по заједничкој спољној или унутарњој тангенти два круга, — У првом случају Сл: 160



Сл. 161.

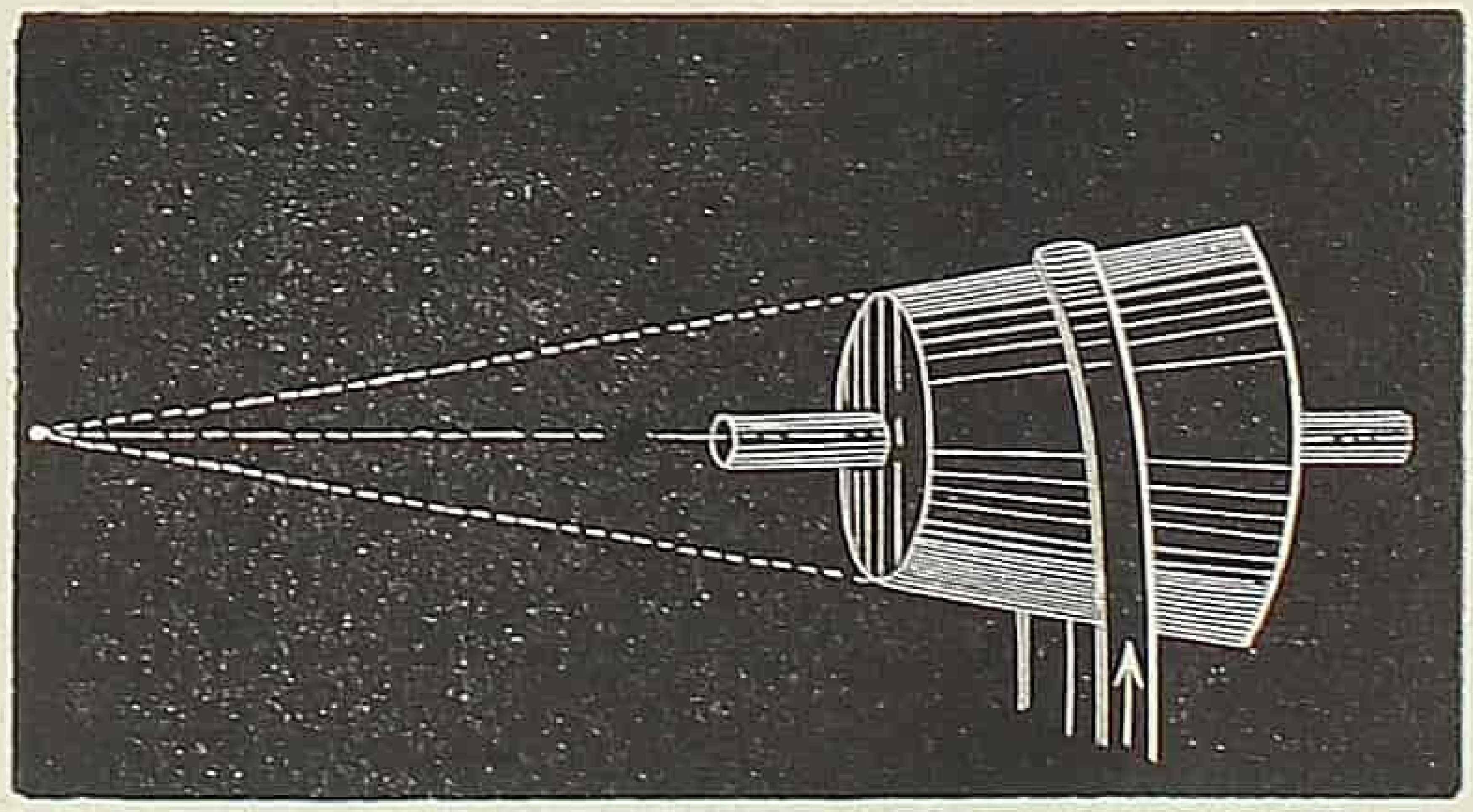
осовине се брћу у истом правцу, а у другом Сл: 161 осовине се обућу у против-положеном правцу. —



Сл. 162.

221. Један исти каиш може пренети кретање од једног истог добоша на више котурова Сл. 162. —

222. *Облик котурова.* — Котури за пљоснате (равне) каише обично су ваљчасти и у средини мало пупчасти. Често су котури начињени у виду одбијени конуса. — Сматрајмо један каиш кои се налази на одбијеном конусу Сл. 163. Лако је сватити да ће се страна каиша, која је ближа врху конуса, обртати лакше него она друга, у сљед тога каиш ће тежити, да узме коси положај, а његов струк, кои се намотава, тежиће *k'* основици конуса. Потоме ако се каиш буде налазио на два одбијена и обратно положена конуса, онда ће се он сам по себи непрестано задржавати у средини ови конуса. —



Сл. 163.

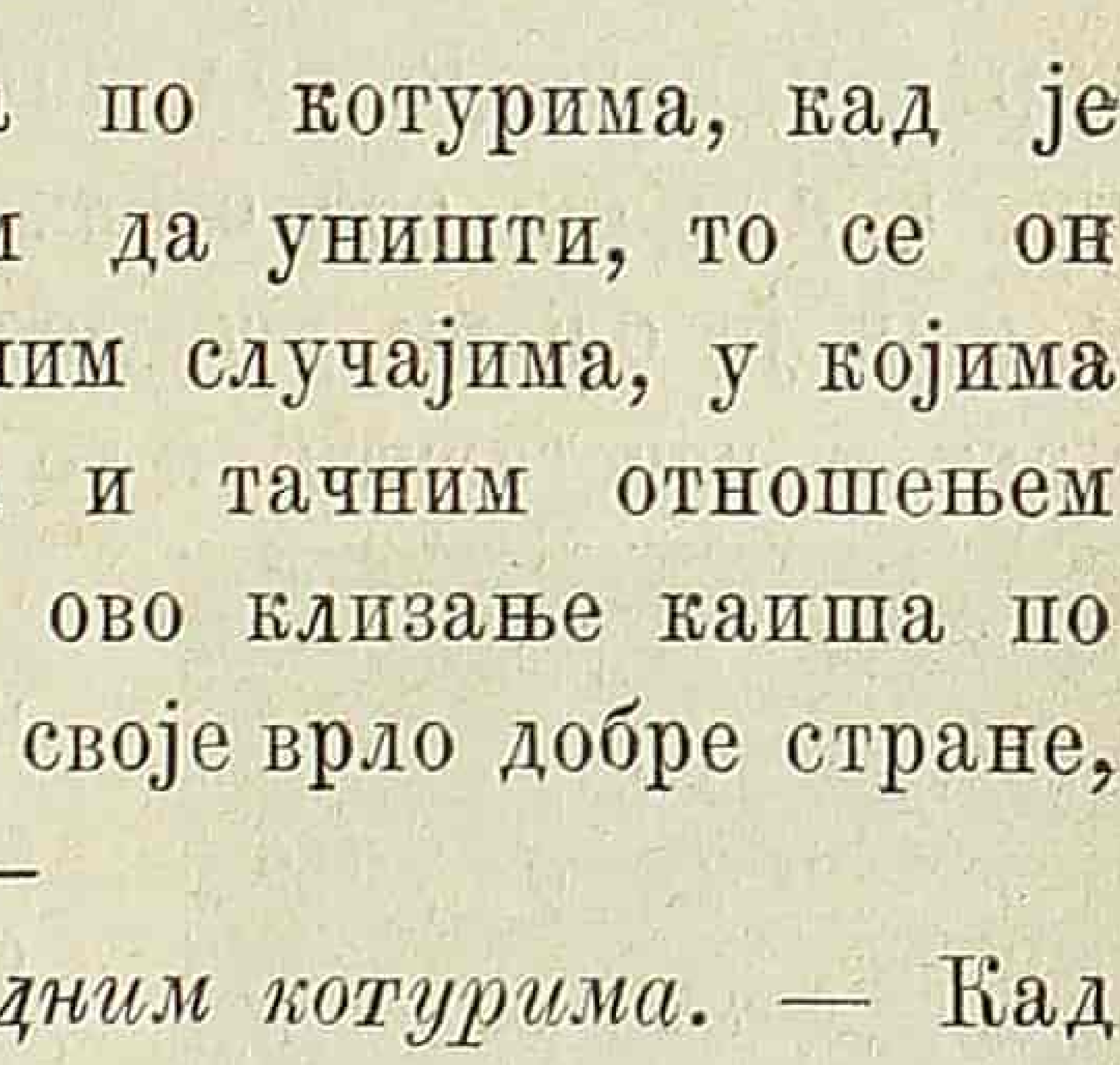
223. *Гладни котур.* (*Poulie folle*). У фабрикама, моторна махина у опште непосредно покреће једну осовину, која се протеже кроз целу радионицу било испод тавана били испод патоса — Са ове осовине пренаша се кретање средством великог броја безкрајни каиша на разне алат-махине радионице: Свака од ови алат-махина поверена је особитом раднику, кои треба да је у стању, да може по потреби и повољно продужити или зауставити кретање поверене му алат-михине, без да се брине шта ће бити са осталим алат-махинама радионице.

Ради тога, на осовини алат-махине налазе се два котура, један утврђен, и служи за пренос кретања, а други, који је истог пречника као и први, није утврђен на осовини, и може се независно од ове обртати, због чега ћемо га ми за сада назвати *гладни котур*. Сад кад раденик оће да заустави своју поверену му алат-махину, онда он средством једне ракље (виле) премести каиш са утврђеног на гладни котур, и осовина се алат-махине заустави при свем том што каиш продужава и даље своје кретање. Напротив кад оће да постави своју алат-махину у кретање, онда обратним покретом ракље, премести каиш са гладног на утврђени котур. — Овакав пренос кретања производи се без икакве ларме, без потреса, и млого лакше него код зубчасти точкова, због тога се безкрајни каиш, осим други његови добри страна и употребљује врло често у фабрикама. —

Но као што се клизање каиша по котурима, кад је одпор знатно велики, неможе сасвим да уништи, то се он неможе целисходно да употреби у оним случајима, у којима је пренос кретања условљен сталним и тачним отношењем обртања двеју осовина. — Међутим ово клизање каиша по котурима до известне границе има и своје врло добре стране, као што ћемо то доцније дознати. —

224. *Безкрајни каиши са спроводним котурима.* — Кад оћемо да средством безкрајњег каиша произведемо пренос кретања између две осовине, којих се геометричке осе неналазе у једној истој равнини, онда осим преносни котурова утврђени на свакој од две осовине, употребљују се по који пут јошт два тако звана спроводна котура [poulies de renvoi]. Ево како то бива. —

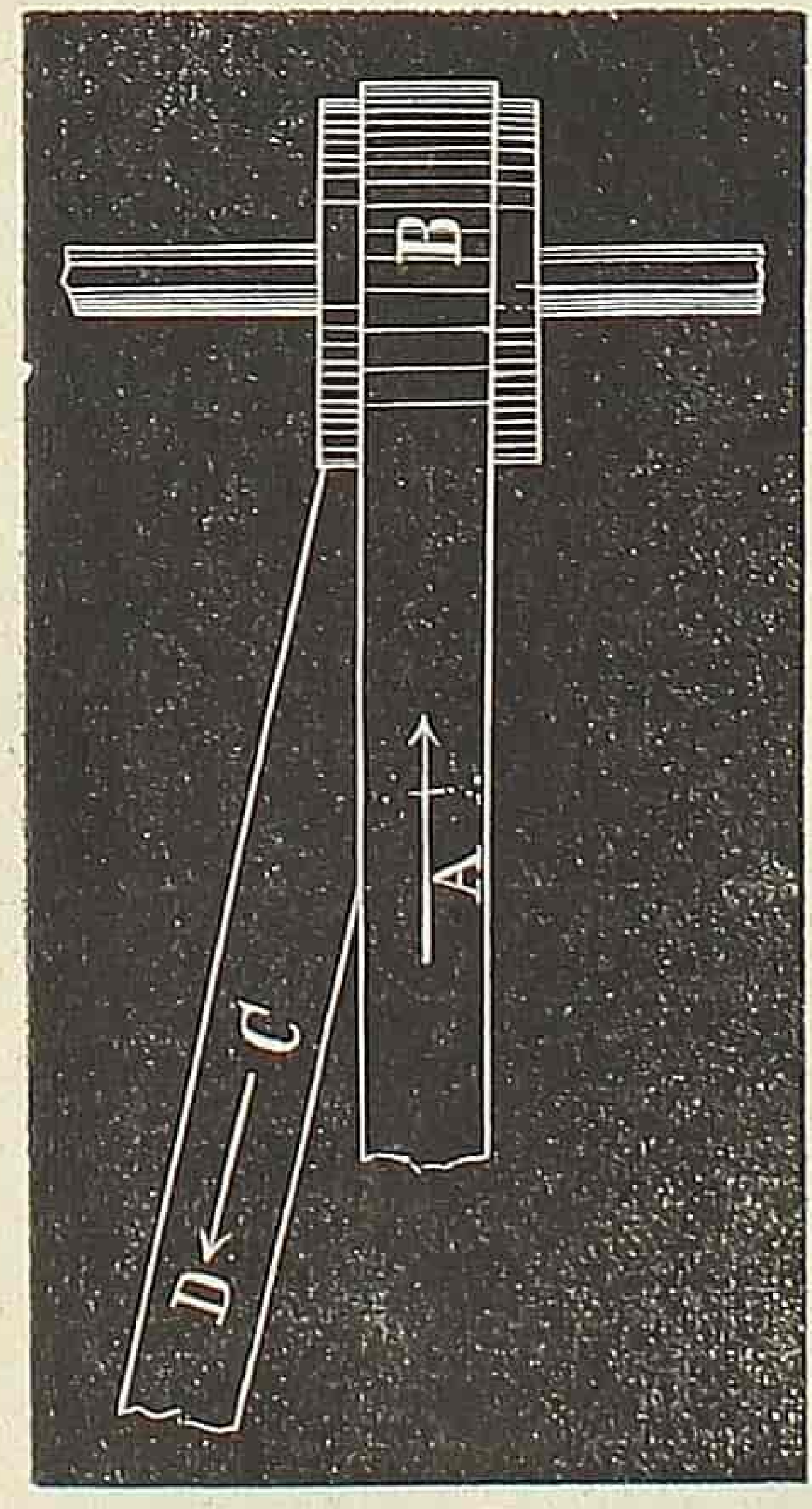
Нека су A и A' слика 164 две осовине о којима је говор, а BD и $B'D'$ на овим осовинама утврђени котури. Пречници ових котурова преокренуто су сразмерни угловним брзинама осовина. — Ако сад представимо себи, да смо кроз средину



Сл. 164.

ови котурова положили равнине, онда се ове морају пресецати јер нису равноодстојне. — Нека је $\overline{EE}$ овај пресек. Из ма које тачке J овог пресека повучимо тангенте $\overline{JB}$ и $\overline{JB'}$ на два котура и у углу BJB' образованом од тангената, наместимо спроводни котур L, који би се обртао око своје утврђене осовине. Ако подобном конструкцијом у тачки K праве $\overline{EE}$, наместимо други спроводни котур M у углу DKD', па затим наместимо око ова четири котура безкрајни каиш као што слика показује, онда ће вопросне осовине бити међусобом сајужене, и пренос кретања може се повољно да произведе у једном или у другом правцу, јер се сваки котур налази у равнини два струка безкрајњег каиша, који га додирају (тангирају).

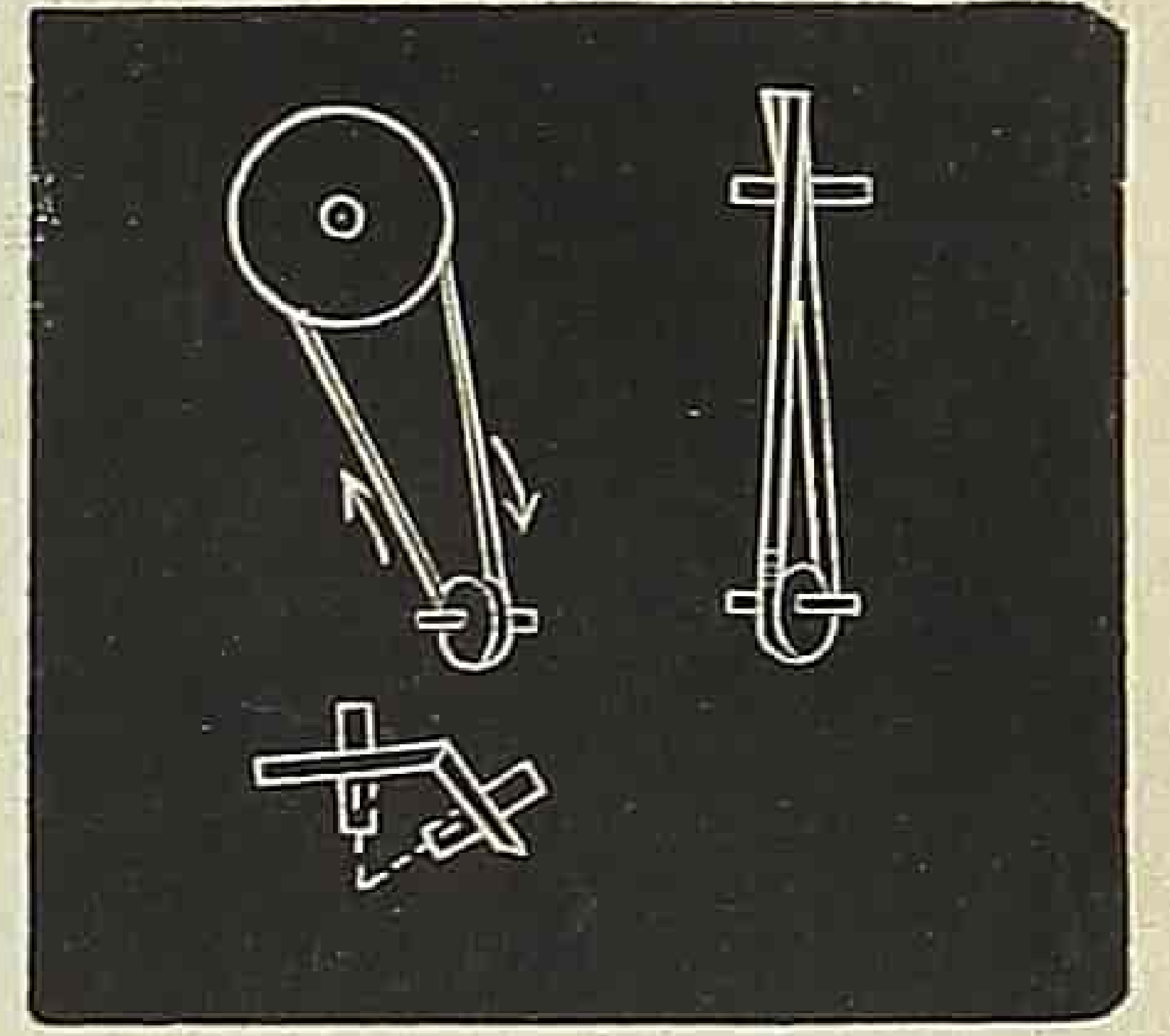
225. *Безкрајни каиш обуватајући непосредно два неравноодстојна котура.* — Ако се незактева, да се осовине могу обртати како је кад потребно, у једном или у другом правцу, и ако су ове осовине довољно удаљене једна од друге и њин је оштри уго доста мали, онда се спроводни котури могу и изоставити, и то на овом важном основу:



Сл. 165.

Кад је безкрајни каиш обавијен око каквог котура, онда да би се на истом могао одржати, треба да је струк AB Сл. 165 који се на котур намотава, тако управљен, како би се средина каиша налазила у равнини управној на обртну осу котура, међутим без икакве је незгоде, ако би се струк $\overline{CD}$ одмотавао од котура под известним нагибом. Ово је зато тако, што кад се каиш једанпут већ налази на котуру у B, онда се с њим заједно обрће, и задржава се на њему трењем. — Сила пак, која дејствује по правцу $\overline{CD}$, затеже каиш, и даје му постепено овај коси положај без да га принуђава да по котуру клиза. — Лако је сада сватити, зашто треба дејствовати на струк AB

кад оћемо каиш са котура да скинемо, а не на струк *CD*. Тако исто лако је сватити сајуз осовина представљен у хоризонталној и вертикалној пројекцији Сл. 166. — Пресек равнина, које би положене биле кроз средину оба котура, био би заједничка тангента њиови кругова. — Горњи струк каиша, који заузима коси положај према равнини дољнег котура, кога оставља, налази се у равнини горњег котура, на који се намотава. — Дољњи пак струк косо положен према горњем котуру од ког се одмотава, налази се у равнини дољнег котура на који се намотава. — Напоследку осовине се могу обртати само у правцу, који је стрелицама означен; у противположеном правцу каиш би одма спао са котурова.



Сл. 166.

Утицај изтезања каиша на отношење брзина.

[Приметба француског инжињера Kretz-a]

226. Лако је сватити, да при преносу кретања средством каиша, струк, који непосредно производи обртање, изложен је потеги *T*, која је већа од потеге *t* оног другог струка. — Но као што је каиш еластичан, то се он изтеже сразмерно потеги, којој је изложен. Нека је *l* дужина каиша, која се за време Θ намотава под потегом t; исти део каиша кад се одвија под потегом *T* има већу дужину *L*, и отношење између *L* и *l* определено је овим изразом.

$$\frac{L}{l} = \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t.}$$

α је сачиниоц изтезања каиша.[1]

Но да се не би материја каиша са једне стране нагомилавала [да се не би каиш набирао] треба да за исто време и

---

[1] Ако је *S* попречни пресек каиша у квадратним милиметрима, онда потоме како је каиш нов или је неко време већ употребљаван; биће $a = \frac{o,^{m}\, 21}{S}$ или $\frac{o,^{m}\, 16}{S}$.

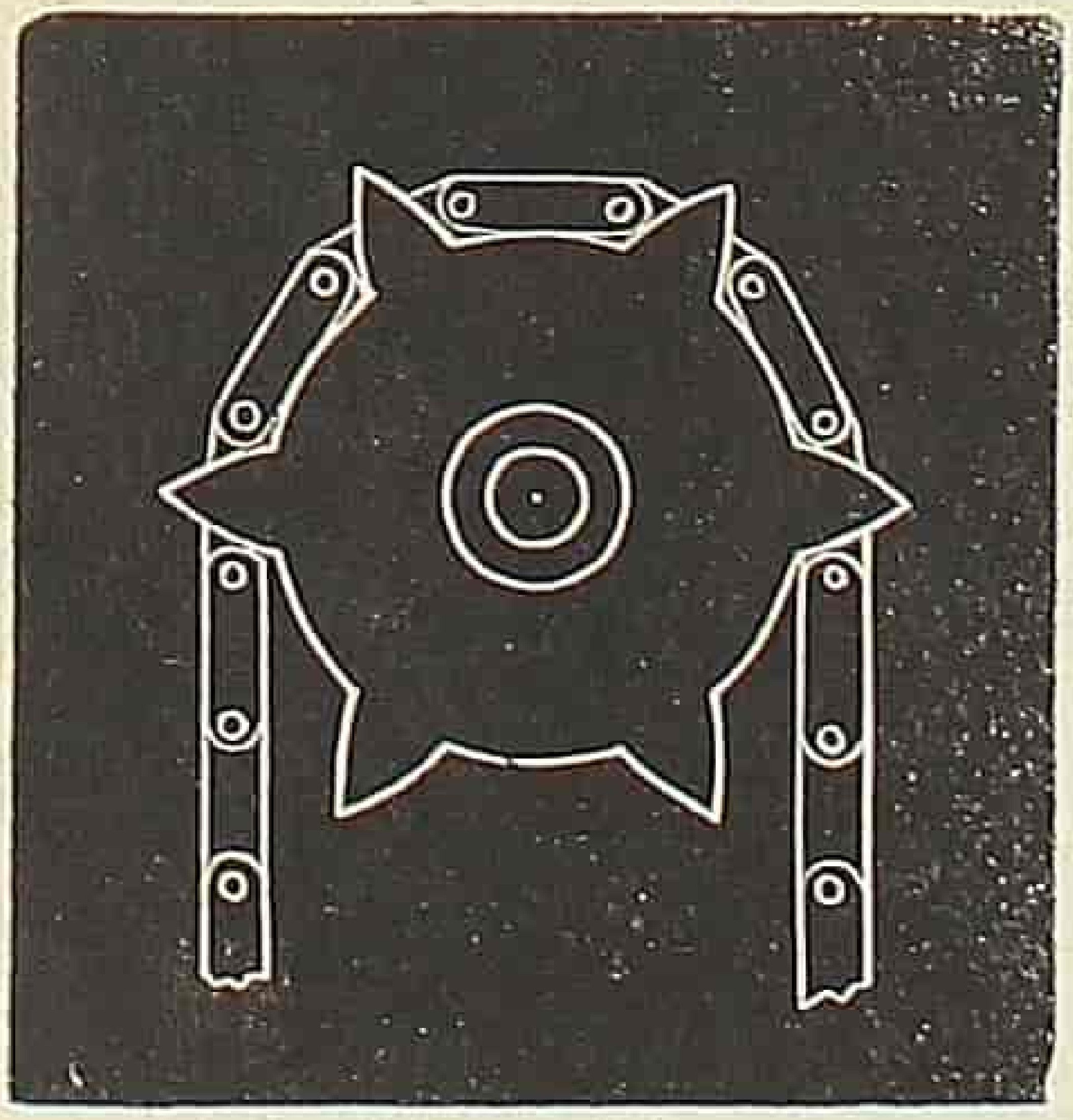
иста количина материје пролази преко оба котура, дакле дужине, које се једновремено одвијају од оба котура, сразмерне су количинама L и l, потоме у место познатог израза $wR = w'R'$, имаћемо ову једначину:

$$\frac{wR}{w'R'} = \frac{L}{l} = \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}$$

R и w јесу полупречник и угловна брзина тако званог моторног котура, R' и w' аналогичне количине оног другог котура.

Отуда сљедује: да угловне брзине нестоје тачно у преокренутом отношењу полупречника котурова, и ако би по обичном правилу рачунали ове полупречнике, онда би после неког времена имали брзину млого мању него што је брзина, која је рачуном опредељена. — Искуством се доказало да, са обзиром на то што је Kretz приметио, пречник моторног котура треба увећати за $\frac{1}{509}$ део, или у истој размери редуцирати пречник оног другог котура. —

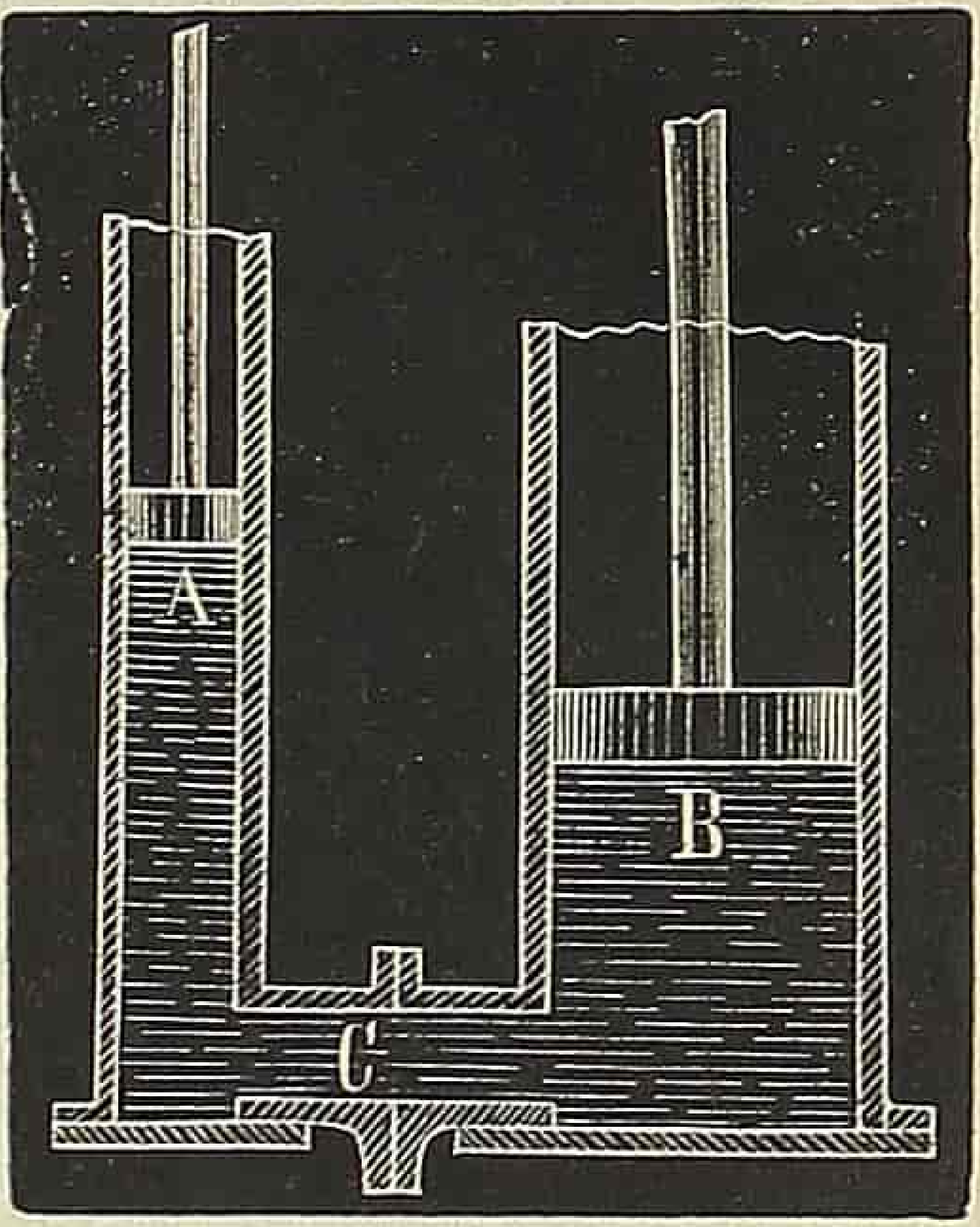
227. *Ланци.* Гвоздени ланци врло се редко у индустрји употребљују за пренос кретања, изузевши неке особите случаје. — Котури за ланце кад се за пренос кретања употребљују, снабдевени су са зубима као што слика 167 показује, а то зато да би се избегло клизање ланца по котуру, које се у овом случају врло лако дешава. Потоме само је један струк ланца затегнут, а онај други слободно виси изпод котурова. — Рђава страна сваког ланца је та, што се алке (чланци) које га састављају, лако изтегну, услед чега ланац се неможе тачно око котура обмотавати, и порађа се свагда судар при заватању зуба за алке. —



Сл. 167.

228. Додатак. Овде је место, да у кратко напоменемо махине, код којих се пренос кретања производи средством течности:

1-во. *Хидраулична ūреса.* Хидраулична преса, која је изнађена од Pascal-a, и која се с дана на дан све више употребљава, састоји се у главноме из два шупља ваљка A и B сајужена на доњем крају са једном цеви C Сл, 168. — У сваком ваљку налази се по један клип, који се може кретати. — Ваљци су испод клипова [pistons]. као и комуникациона цев C напуњени водом. — Кад један клип н. пр. B дејством какве силе силази на ниже, онда потискује известну количину воде, која кроз цев C пролази у други ваљак и тера клип A на више. Но због нестисљивости воде, запремина првог ваљка умаљена је управо за толико за колико је запремина другог ваљка увећана. — Ако дакле означимо са S и S' попречне пресеке ваљака са v и v' брзине клипова, имаћеио:



Сл. 168.

$$Sv = S'v'.$$

Ми ћемо, кад будемо у хидраулики о помпама говорили, тачније описати цео састав хидрауличке пресе. — Овде смо је само узели као пример за пренос кретања средством течности. —

2-го. *Хидраулична нијаљка.* Ако су оба ваљка једнаког пречника, онда еу и брзине клипова једнаке но противног правца. Овакова справа зове се хидраулична нијаљка. —

229. Код махина, редко се може да произведе непосредни сајуз између моторне и алат-махине употребом прости махински органа, које смо напред изложили. — Најчешће принуђени смо да комбинишемо више органа удесно изабрани, и само тим начином можемо решити разне задатке, односеће се на једномерни пренос кретања. — Ми ћемо овде у кратко да изложимо неколико примера о међусобном сајузу ови органа. —

1-во. *Екиūажа зубчаника.* О тој смо већ говорили № 210.

2-го. *Екипажа котурова.* Кад се неможе непосредно да изврши пренос кретања средством безкрајњег каиша, онда се употребљује још једна или више посредни осовина. —

Нека су r и R полупречници котурова утврђени на две прве осовине. — Отношење угловни брзина ових котурова биће:

$$\frac{r}{R}$$

са знаком $+$ или $-$, потоме како се каиш неукршта или укршта измеђ осовина.

На другој осовини утврђен је још један котур (r'), сајужен средством другог каиша са котуром (R'), који је утврђен на трећој осовини и тако даље. Отношење угловни брзина између прве и последње осовине биће:

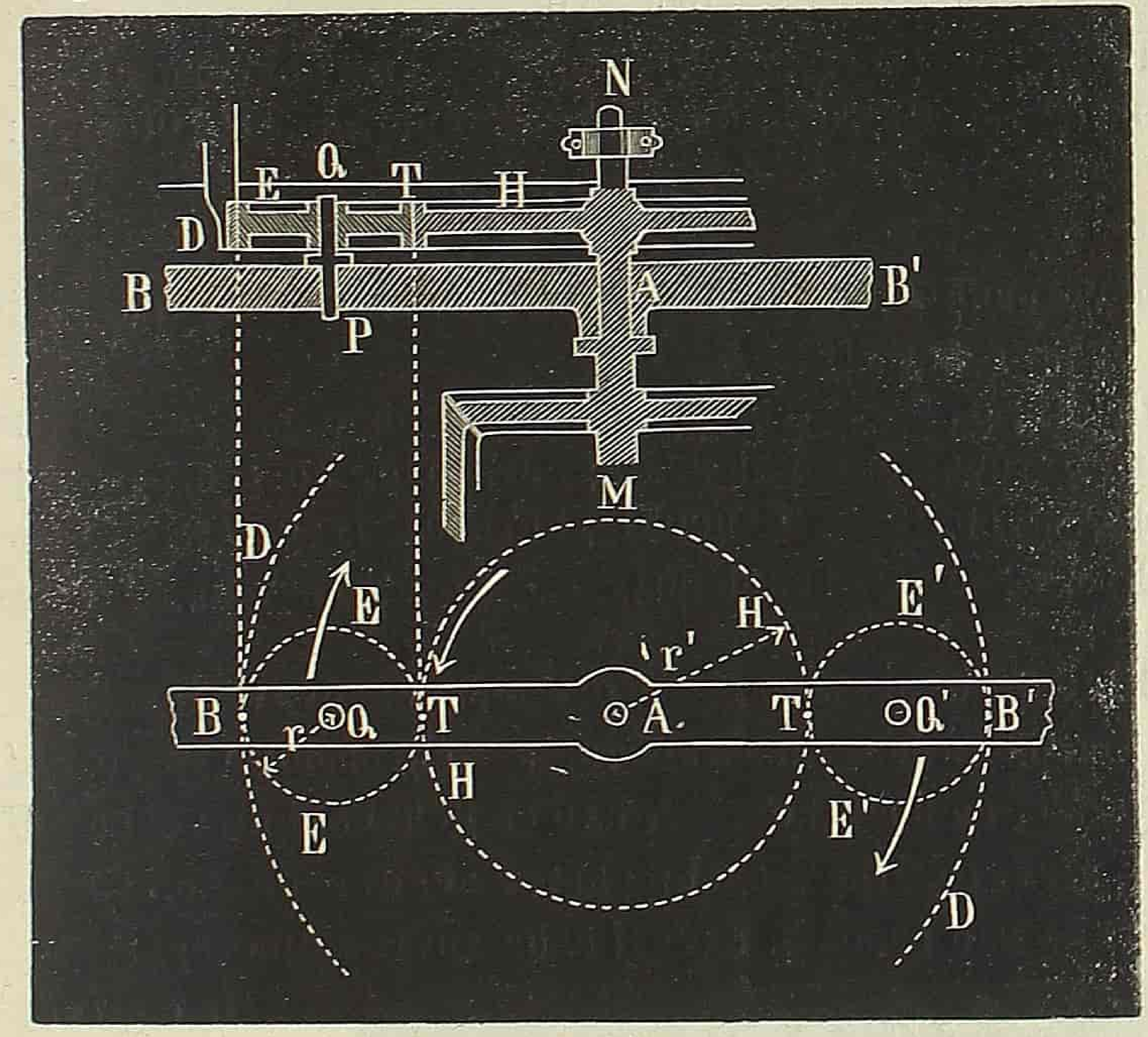
$$E = \frac{r.r.'r.'' \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.}{R.R.'R.'' \,.\,.\,.\,.\,.\,.}$$

израз сасвим подобан изразу зубчасти точкова. Само овде имамо приметити, да полупречници котурова могу међусобом стојати у ма ком отношењу, што код зубчасти точкова није тако. — Осим тога спроводни котури немају никаквог утицаја на отношење угловни брзина осовина између којих се налазе.

230. *Епициклоидни тренови.* Систем зубчасти точкова, којих се осовине утврђене на каквом раму, обрћу око неког сталног средишта, зове се епициклоидни трен. —

Склоп једног оваковог трена, као и његово рачунање са кинематичког гледишта, најбоље ћемо научити из ниже изложени примера. —

I. Пример. Нека је *BAB'* хоризонтална полуга, која се слободно може обртати око вертикалне осовине [вретена] *MN*. Сл. 169. — На овој полуги, а у једнаком одстојању од *MN*, налазе се две друге мање вертикалне осовине *PQ*, и *P'Q'*, око којих се обрћу два једнака зубчаника *EE*, и *E'E'*. — Ова два точка заватају у исто време са великим некретним точком *DD*; са унутарње стране, и са точком *HH* који је утврђен на вретену *MN*. — Геометричка је оса, око које се ово вретено обрће, стална [утврђена]. —



Сл. 169.

Нека је W угловна брзина полуге BAB', која се обрће око горепоменуте осе, а W' угловна брзина точка HH и сљедствено вретена MN, које се око исте осе обрће. — Нека је r полупречник два мала једнака точка EE, и $E'E'$, а r полупречник точка HH. Пошто се осовине ови мали точкова налазе на полуги BAB', то ће њина брзина као и полуге бити:

$$W(r' + r).$$

Даље као што се основни крузи мали точкова котрљају [дакле епициклоидно крећу] по основном кругу некретног точка DD, то ће брзина тачака додира TT' мали кругова са кругом HH бити $2\,W\,(r' + r)$, но ово је и брзина основног круга точка HH, отуда сљедује ова једначина.

$$2\,W\,(r' + r) = W'\,r', \text{ и дакле}$$

$$W' = 2\left(1 + \frac{r}{r'}\right) W.$$

Полупречник основног круга некретног точка *DD*, је $(r' + 2r)$; даље полупречници ова четири точка јесу сразмерни одговарајућим бројевима њиови зуба. —

Бројни пример. — Узмимо да мањи точкови имају сваки по 25, централни точак *HH* 50, а некретни *DD* 100 зуба; биће:

$$W' = 3 W.$$

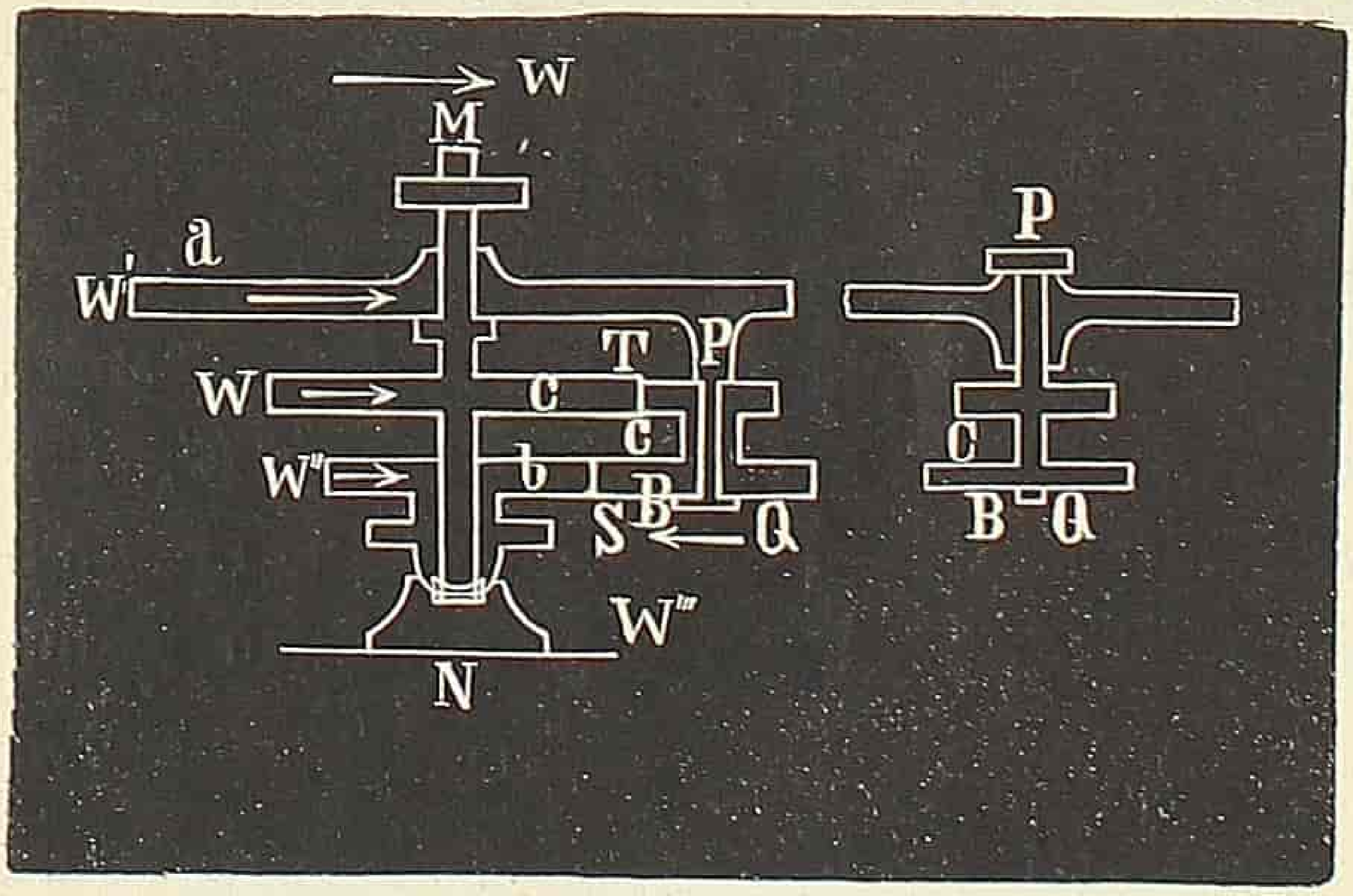
Дакле угловна брзина точка *HH* и вретена *MN*, равна је трогубој брзини полуге *BAB'*. —

Приметба. — 1-во. Довољно би било кад би се само један мали точак *EE* или *E'E'* употребио, но због симетричног разпореда терета (и одпора) употребљују се два точка.

2-го. Угловне брзине полуге *BAB'*, и вретена *MN* истог су правца.

3-ће. Ако би хтели да ове брзине буду једнаке, онда мале точкове треба изоставити, а међусобом чврсто сајузити полугу *BB'*, са вретеном *MN* или са централним точком *HH*. —

II. Пример. Предходећи састав епициклоидног трена може да се узме као особити случај овог другог примера. —



Сл· 170.

На обртној полуги а, Сл. 170 око вретена *MN*, утврђено је друго мање вретено *PQ* са предходећим равноодстојно, око кога се обрће један колчак (цев), на коме се налазе два међусобом чврсто сајужена точка *B* и *C*. [или што је исто на полуги *a*, налази се ваљчаста рупа, у којој се обрће вретено *PQ*, а на овом вретену утврђени су точкови *B* и *C*.]. Ова два зубчаста точка завата ју за друга два *b* и *c*. Точак *c* углављен је на вретену *MN*, а точак *b* може да се обрће око истог вретена, [што се обично каже да је гладан]. Захтева се да се определи отношење, које постоји између угловни брзина ова три точка *a*, *b*, и *c*. —

Означимо ове брзине са W', W'', и W, и рецимо да су оне управљене у једном истом правцу. Предпоставимо точкове B и C као неки систем сравњивања, и нека је W''' релативна угловна брзина овог система око PQ, коју брзину овде као непознату у помоћ узимамо.

Означимо са истим писменима B, C, b, c, првобитне полупречнике напред речена четири точка. Пошто је то тако, абсолутна брзина тачке додира S, основни кругова B, и b, сматране на точку b, биће $W''b$, а брзина исте тачке сматране на точку B, биће резултанта [и у овом случају сбир] од привлачне брзине $W'(B+b)$, и релативне брзине $W'''B$, имаћемо дакле:

$$W''b = W'(B+b) + W'''B$$

Тако исто абсолутна брзина заједничке тачке T, точкова C и c, изражена је једначином

$$Wc = W'\ (C+c) + W'''C.$$

елиминирајући W'', добићемо

$$W''\frac{b}{B} - W\frac{c}{C} = W'\ (\frac{b}{B} - \frac{c}{C}) \ldots\ldots (1).$$

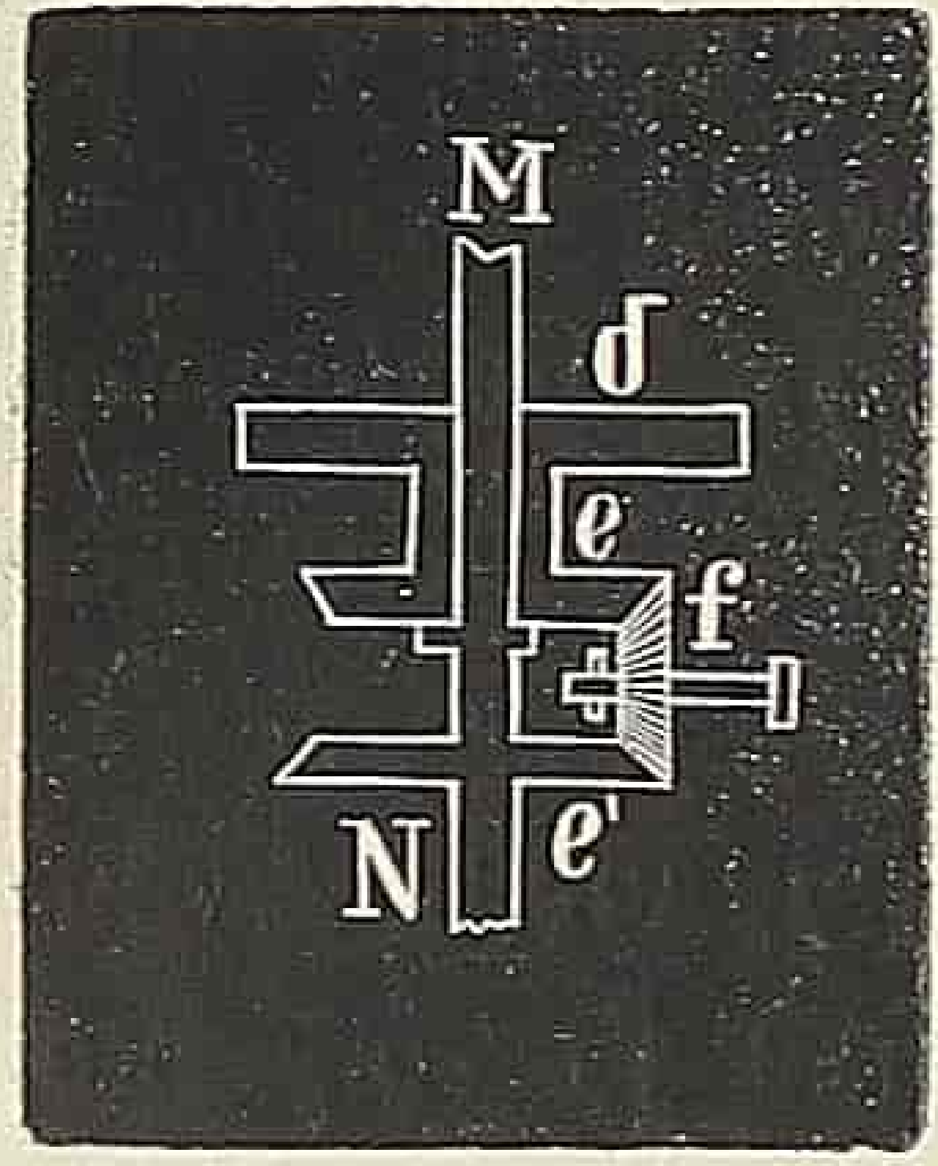
и овом једначином можемо лако определити једну од 3 брзине, кад су оне друге две дате.

Особити скучај: $W' = o$; $W\frac{c}{C} = W'\ (\frac{c}{C} - \frac{b}{B}) \ldots. (2).$

Приметбе, 1-во. Ако би се точак B налазио са унутарње стране точка b, онда у предходећој једначини треба само знак од B променути, као што се о томе можемо лако уверити. Ако осим ове предпоставке, узмемо $W'' = o$ а $B = C$, онда имамо случај изложен у I примеру, и последња једначина постаје:

$$W = W'\ (1 + \frac{b}{c}) = W'\,(1 + \frac{2C+c}{c}) = 2\ W'\,(1 + \frac{C}{c})$$

2-го. Ако би се један од точкова a, b, c, обртао у правцу, кои је предпостављеном правцу у предходећем рачуну противполо-



Сл. 170. $^{\text{bis}}$

жен, онда у једначини под (1) треба променути знак обртања вопросног точка. — Узмимо н. пр. да је $W' = - W$.

(Ово се може извршити на разне начине. Један од ових начина је, кад се на вретену *MN* и на колчаку точка *b*, утврде два једнака конична точка *e*, *e'* Сл. 170$^{\text{bis}}$ који заватају са трећим точком *f*)

Једначина под (1) постаће:

$$W \left(\frac{b}{B} + \frac{c}{C}\right) = - W' \left(\frac{b}{C} - \frac{c}{C}\right), \quad \text{или}$$

$$W (b\ C + B\ c) = W' (b\ C - B\ c).$$

Ако сад поставимо н. пр. да је:

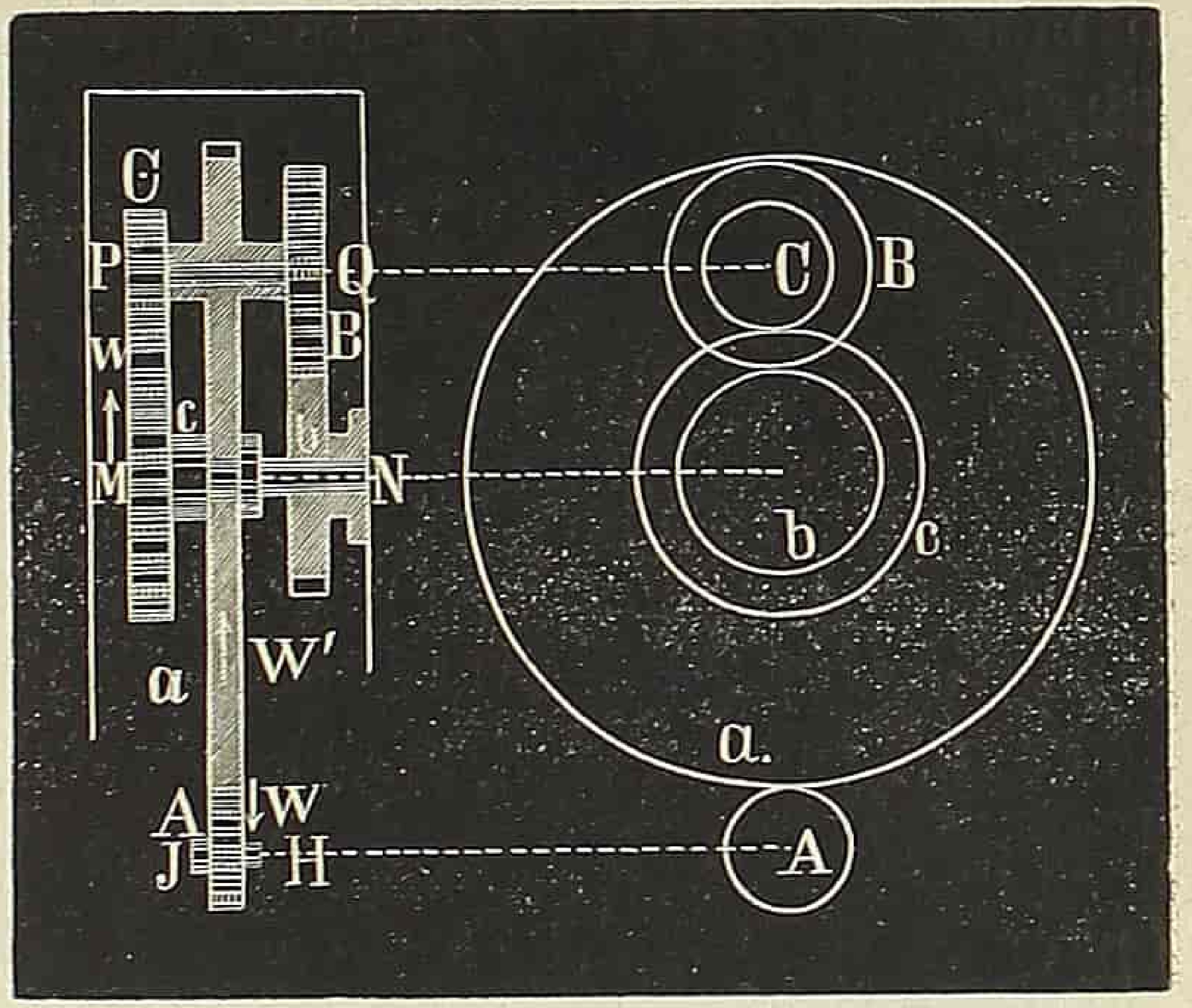
$$\frac{bC}{Bc} = \frac{61.41}{49.51} = \frac{2501}{2499}, \text{ онда ћемо добити}$$

$$W = - \frac{1}{2500}\ W'$$

3-ће. два точка *B* и *C* могу бити једнака, или место њих може да се употреби само један довољно велики точак, са коим би заватала два међусобом мало разликујућа се точка *b* и *c*. Профил зуба ових точкова био би еволвента круга. Тако н. пр. при предходећој предпоставки $W'' = - W$, ако узмемо $B = C$ и $\frac{b}{c} = \frac{101}{99}$, имаћемо:

$$W' = \frac{1}{100}\ W.$$

4-то. Обртно тело на коме се налази вретено *PQ* епициклоидног система *B C* могло би бити отврђено на вретену *MN*, а точкови *b* и *c* на независним колчацима (manchons), кои имају исту осу. — У овом случају не би се имало шта мењати у једначини под (1). —



Сл. 171.

III. Пр. Употреба предходећег механизма на тако звани месечни часопоказатељ (horloge à cadran lunaire). — месечњак, — Моторни точак A утврђен на својој осовини $\overline{JH}$ Сл. 171, завата са точком a, кои је гладан (лабав folle), на својој осовини MN. На овом точку утврђена је цев, у којој се обрће осовина PQ, сајужена са два точка B и C. — Точак B завата са некретним точком b, кога се средиште налази у геометричкој оси од MN. — Точак C завата са точком c, кои је углављен на вретену $\overline{MN}$. Тражи се отношење између угловне брзине w, осовине $\overline{MN}$ и угловне брзине W осовине JH. —

Задржавајући предходећа означења имамо ове једначине:

$$w\,(\frac{c}{C}) = W'\,(\frac{c}{C} - \frac{b}{B}), \qquad \text{и}$$

$$w'\,a = W\,A$$

елиминирајући W' добићемо:

$$\frac{w}{W} = \frac{A}{a}\,\frac{Bc - Cb}{Bc.}$$

Pecqueur механичар у Паризу, узео је за свој месечњак ове бројеве.

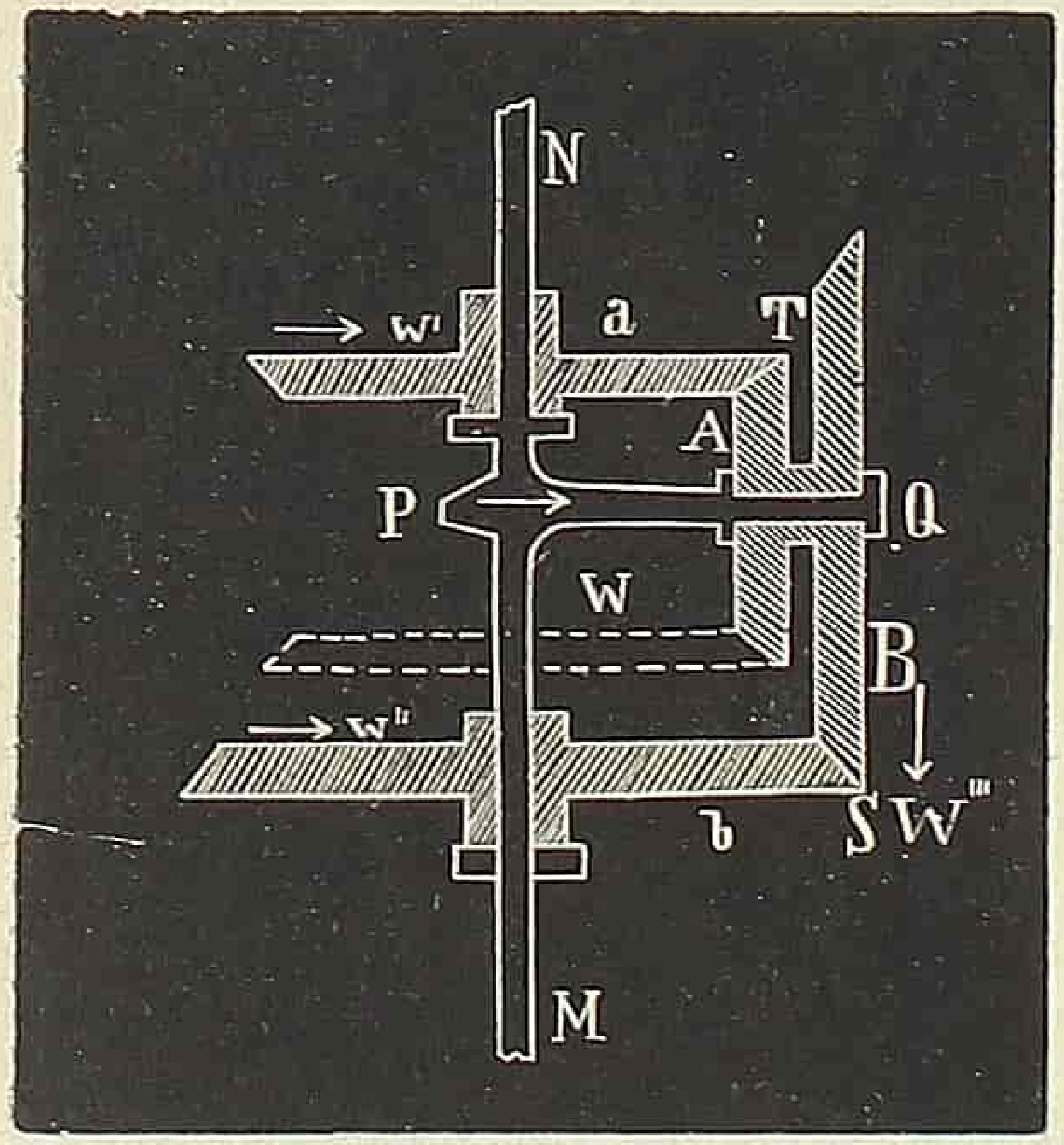
$A = 31, a = 54, B = 85. \; b = 62, C = 33, c = 41$, дакле

$$\frac{A}{a} = \frac{31}{54}, \; \frac{Bc}{bC} = \frac{85.41}{72.33} \text{ одкуда } \frac{w}{W} = \frac{31}{54}\,\frac{(85.41 - 62.33)}{85.41} =$$

$$= \frac{31.24.39}{54.85.41} = \frac{44609}{188190},$$ и овај разломак представља скоро

отношење између недеље од 7 дана и месечно време од 29,^{д}·530588.

Пошто је 2439 прост број, то се предходеће отношење неби могло добити, кад би се сви точкови обртали око утврђени осовина, изузимајући случај, кад би један од точкова имао 2439 зуба. — Ова тешкоћа уклоњена је тиме, што је речени број замењен са разликом друга два броја, која се дају разложити на просте чиниоце, кои се међусобом мало разликују. — Две сказаљке утврђене су на осовинама *JH* и *MH* [а могу бити и на другим осовинама, коих угловне брзине стоје у истом отношењу]. Прва сказаљка показује на сатном кругу дане недеље, а друга означава старост месеца.



Сл. 172.

IV. Пр. *Трен сферо-епициклоидног кретања.* Осовина *PQ* Сл. 172, управна на осовину *MN*, обрће се око ове са угловном брзином *W*. Око осовине *PQ* обрћу се два неуглављена (гладна) и међусобом чврсто сајужена точка *A* и *B*, која заватају такође са неуглављеним точковима *a* и *b*, кои се обрћу око *MN* са угловним брзинама w'' и w' — Зактева се да се определи у ком отношењу стоје ове три брзине w, w', и w'', међусобом.

Да би овај задатак решили, узмимо као и пређе релативну угловну брзину w''' целог система *A B*, око *PQ* као помоћну непознату. Потоме абсолутна брзина тачке *S* биће:

$$bw'' = bw + Bw''' \text{ а тачке } T,$$

$$aw' = aw - Aw'' \text{ отуда}$$

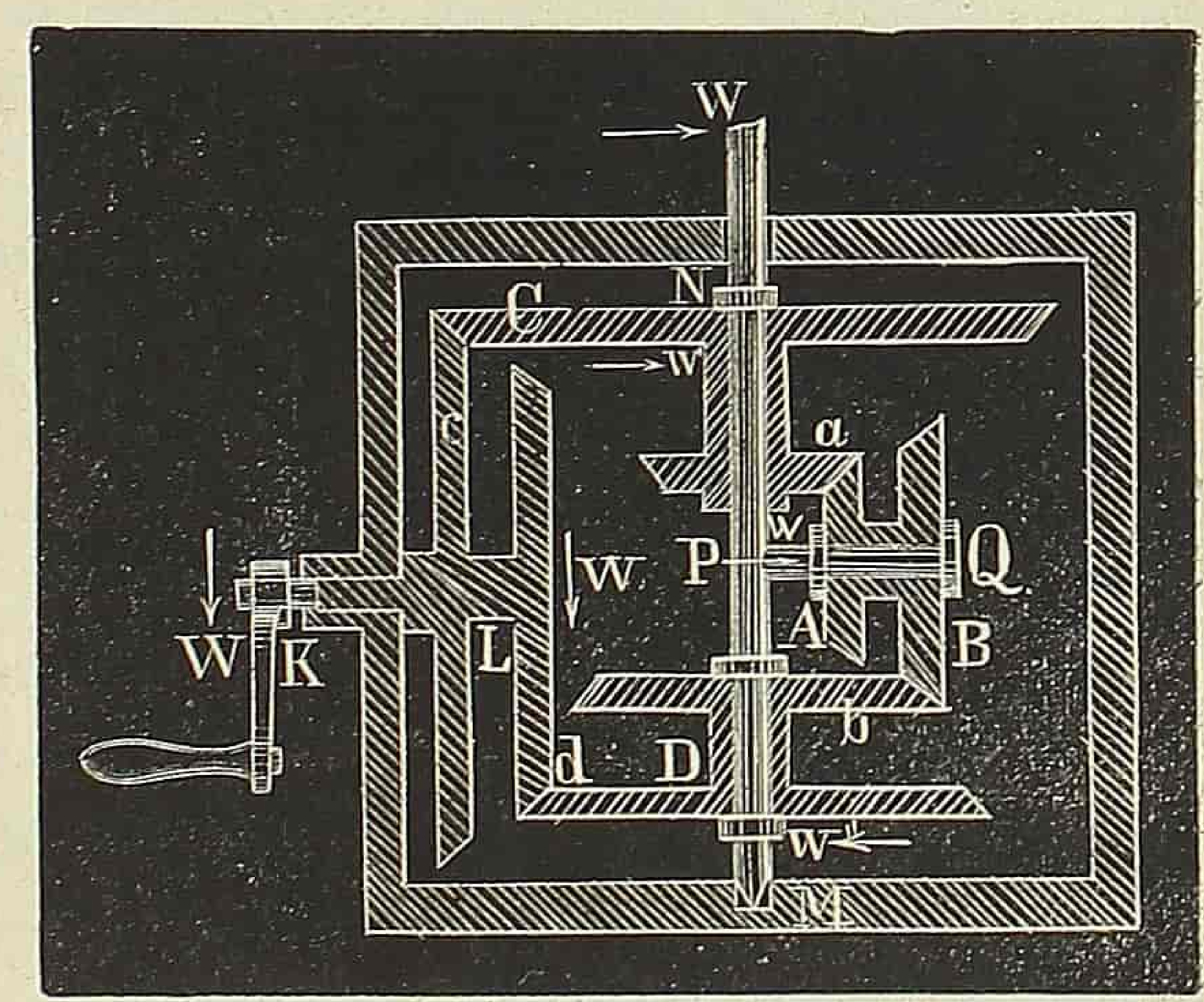
$$w''' = \frac{bw'' - bw}{B} = \frac{aw - aw'}{A} \text{ и дакле}$$

$$\frac{b}{B}\, w'' + \frac{a}{A}\, w' = \left(\frac{b}{B} + \frac{a}{A}\right) w.$$

Општи израз, коим је представљено тражено отношење, обзирући се при том на знак обртања. —

Приметба Ако би се конични точак a налазио изпод осовине PQ, т. је. са исте стране као и точак b, онда у предходећој једначини треба променути знак од A, или јошт боље једног ма ког од четири точка. —

V. Пр. *Употреба предходећег механизма.* Осам точкова чврсто међусобом сајужени два и два. —



Сл. 173.

Точкови c и d углављени на једној истој осовини Сл. 173, која почива на сталним подпорама K,L; обрћу се са угловном брзином W.

Точкови D и b сајужени међусобом, но неуглављени (гладни) на осовини MN, која се такође ослања на утврђене подпоре. Угловна је брзина ових точкова W' и обрћу се у лево.

Точкови C и a сајужени међусобом налазе се на истој осовини неуглављени. Њиова је угловна брзина W', но обртање је удесно.

Напоследку точкови A и B сајужени међусобом но неуглављени на осовини PQ, обрћу се са угловном брзином w. —

Пита се за отношење између угловни брзина W и w.

Обзирући се на сајуз точкова A, a, B, b; имамо по напред постављеној једначини, мењајући знак угловној брзини W''.

$$\frac{a}{A} W' - \frac{b}{B} W'' = (\frac{a}{A} + \frac{b}{B}) W$$

Осим тога лако је дознати да је:

$$w' = \frac{c}{C} W; \text{ и } W'' = \frac{d}{D} W$$

отуда сљедује:

$$(\frac{ac}{AC} - \frac{bd}{BD}) W = (\frac{a}{A} + \frac{b}{B}) w \qquad \text{или}$$

$$(aB + Ab)\; CD\, w = (aBcD - AbCd)\; W$$

једначина којом су сајужене угловне брзине W и w. —

Приметба. Количине $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$ и т. д. којима је опредељено $\frac{w}{W}$, јесу отношења полупречника, или пречника, или бројева зуба вопросни точкова, који заватају један за други. — Дакле $\frac{w}{W}$ зависи само од $\frac{aB}{A.b}$, од $\frac{c}{C}$ и $\frac{d}{D}$.

Бројни пример. 1-во. Узмимо да је:

$\frac{aB}{Ab} = \frac{1.13}{3.9}$, $\frac{c}{C} = \frac{43}{9}$; $\frac{d}{D} = \frac{23}{10}$; имаћемо:

$$\frac{w}{W} = \frac{1.13.43.10 - 3.9.9.23}{(1.13 + 3,9)9.10} = \frac{1}{3600}$$

2-го. Нека је $\frac{aB}{Ab} = \frac{1.11}{1.7}$, $\frac{c}{C} = \frac{44}{75}$; $\frac{d}{D} = \frac{55}{64}$ биће.

$$\frac{w}{W} = \frac{11.44.64. - 7.75.59}{(11 + 7).75.64} = \frac{1}{86400}$$

и ово је отношење једне секунде према 24 сата.

Напоследку 3° нека је

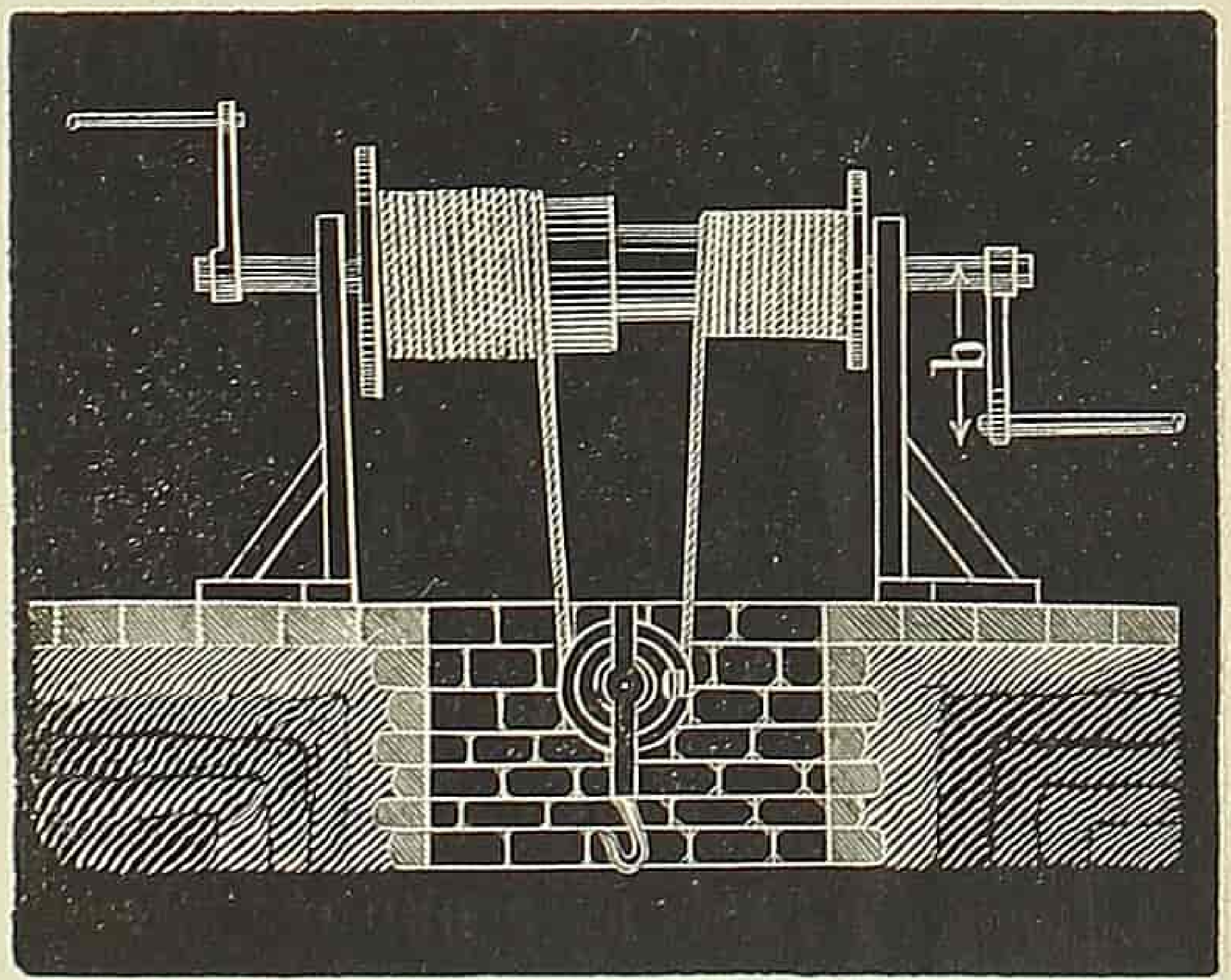
$\frac{aB}{Ab} = \frac{17.31}{11.43}$; $\frac{c}{C} = \frac{7}{4}$; $\frac{d}{D} = \frac{3}{5}$ одкуда

$$\frac{w}{W} = \frac{17.31.7.3. - 11.43.45}{(17.31 + 11.43)\,3.4.} = \frac{1607}{12.000}$$

Пошто је 1607 прост број, то да би предходеће отношење могли тачно да добијемо, са таковим системом зубчасти точкова, кога би осе биле сталне, нужно је да један између точкова буде најмање са 1607 зуба. —

231. *Диференциална кретања.* Кад ођемо да отношење између угловни брзина буде врло мало, онда ово неможемо свакада постићи са треном обични зубчаника, са безкрајним шрафом, или котурима (poulies). — У овом случају служимо се таковим меканизмима, који се оснивају на употреби два, у неколико противположена органа од којих један поништава скоро оно, што је други произвео. — Разлика између дејства ова два органа је коначни резултат, и ова разлика може се начинити тако мала као што се ође. — Меканизми овог рода спадају у тако звана диференциална кретања. Ево неколико примера зато:

Диференциални витао. Главни део вишла састоји се из два једно до друго постављена и међусобом чврсто сајужена ваљка Сл. 174. која имају једну исту осу, а разне полупречнике *R* и *r*. — Терет, који се има дизати, закачен је за покретни котур *a*, а два краја конопца на коме је котур, обавијају се у противположеном правцу око напред поменути ваљака. — У осталом слика представља јасно без даљег описа, цео *меканизам* (састав) витла. —



Сл. 174.

Ако се витао тако обрће, да се један крај конопца обавија око ваљка већег полупречника, а одвија са мањег, и ако означимо са α лук за који се вишао обрнуо, онда је лако видити, да ће се конопац за αR, обавити око већег, а за αr одвити од мањег ваљка. Висећи део конопца умалиће се дакле за α $(R - r)$, а кретни котур уздигнуће се за . . . . .
$h = \frac{1}{2} (R - r)$,
дакле тако исто као кад би имали обични витао, кога би полупречник био $(R - r)$; међу тим крај ручке описаће пут

$\alpha\, b$; само овде имамо приметити, да код диференциалног витла, отношење $\frac{R-r}{2b}$ брзина може да се умали толико колико оће; код обичног пак витла, полупречник овог може се само у границама стабилитета (јачине) умаљавати. —

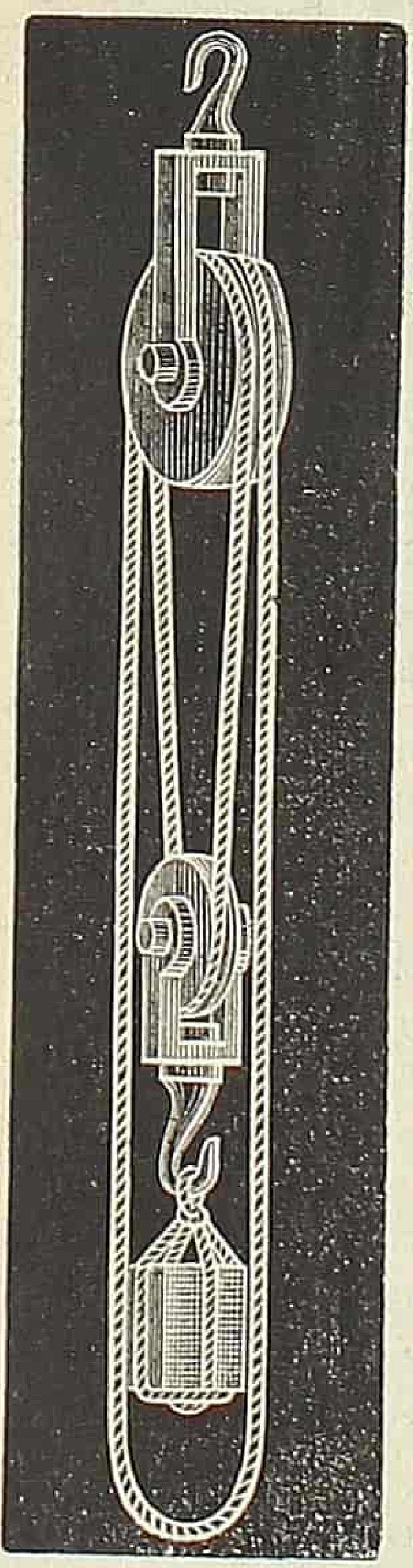
Да се уздигне терет на висину:

$$h = \tfrac{1}{2}\,(R - r)\,\alpha.$$

треба одвити конопац за $\alpha\, r = \frac{2\,rh}{R\,-\,r}$, и пренебрегавајући пречник кретног котура и нагиб струкова конопца, дужина његова морала би бити најмање

$$\frac{2\,hr}{R\,-\,r} + 2\,h.$$

Због велике дужине конопца, диференциални витао врло се редко употребљује, при свој напред наведеној његовој користи.

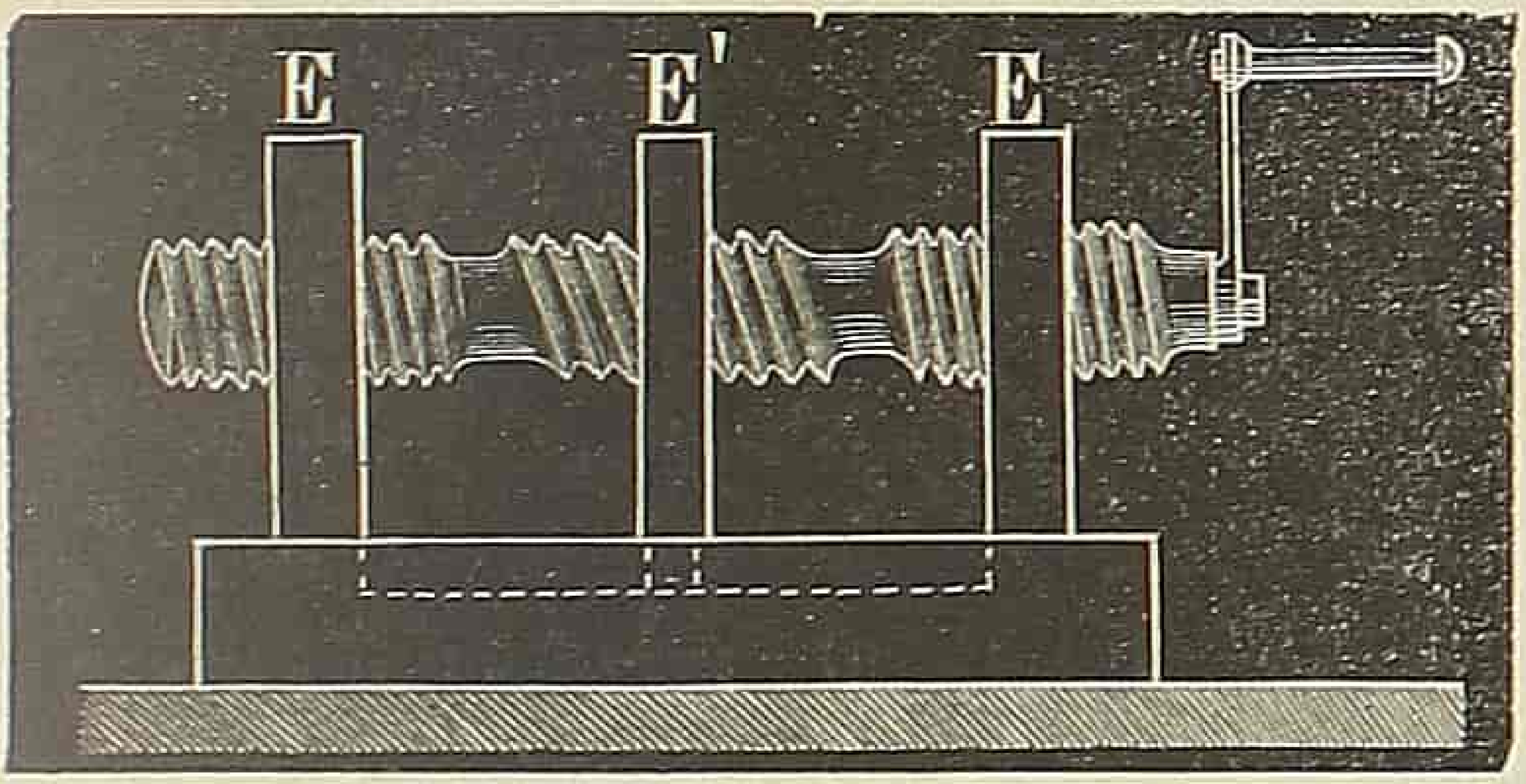


Сл. 175.

232. *Диференциална котурача.* Напредпоменута незгода односећа се на дужину конопца, може се избећи употребом диференциалне котураче Wilson-*a* која се састои из два чврсто сајужена и мало међусобом разликујућа се котура Сл: 175, обртна око једне исте осовине. — Два слободно висећа краја конопца; кои се обавија око ових котурова, сајужавају се испод кретног котура. — Само трење довољно је, да се предупреди клизање конопца по котурима.

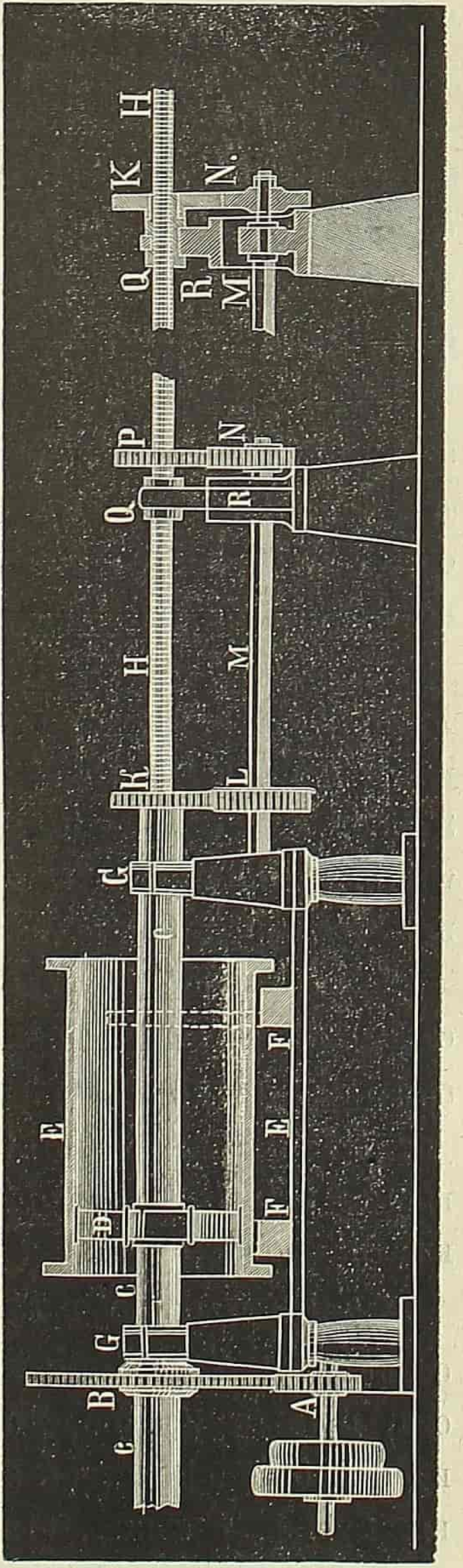
233. *Диференциални шраф од Prony.* — Сматрајмо један ваљак на коме су два шрафа разног корака. Ови шрафови обрћу се у две матрице (завртке), од којих једна је стална, а друга се може само правопружно кретати. — Лако је видити да за сваки обрт шрафа, одстојање матрица умаљава се или увећава за количину, која је равна разлики или сбиру два корака, потоме како су завојнице на оба шрафа завијене у истом или противположеном правцу.

— Тако на прилику ако би разлика корака била од $\frac{1}{10}$ милиметра, и шраф би се обрнуо за 2°, уго кои се може лако измерити по каквом на степене подељеном лимбусу, онда кретна матрица покренуће се — теоретично — за $\frac{1}{1800}$ милитра. Слика 176 представља диференциални шраф од Прони, кога се некретна матрица састои из два дела *E,E.* а кретна *E'* може да се правопружно тако лагано покреће као што се оће.



Сл. 176.

234. *Махина за унутарње гладење ваљчасти цеви.* Кад се има унутарња површина каквог ваљка *EE* Сл: 177 да углади, онда се он најпре утврди, и алат [нож], кои струже (реже — глади —) мора полако да прође његову целу унутарњу површину. — Ради тога нож мора имати двогубо кретање, т: је: обртање и лагано напредовање по правцу осе ваљка. — Осовина *CC.* овог алата (ножа) представљена је на једном крају у виду шрафа *H*, кои пролази завртку (матрицу) *Q*, која кад би била утврђена, онда би се нуж за сваки обрт напредно помакао за један корак шрафа. — У место тога, завртка се обрће у истом правцу као и шраф,



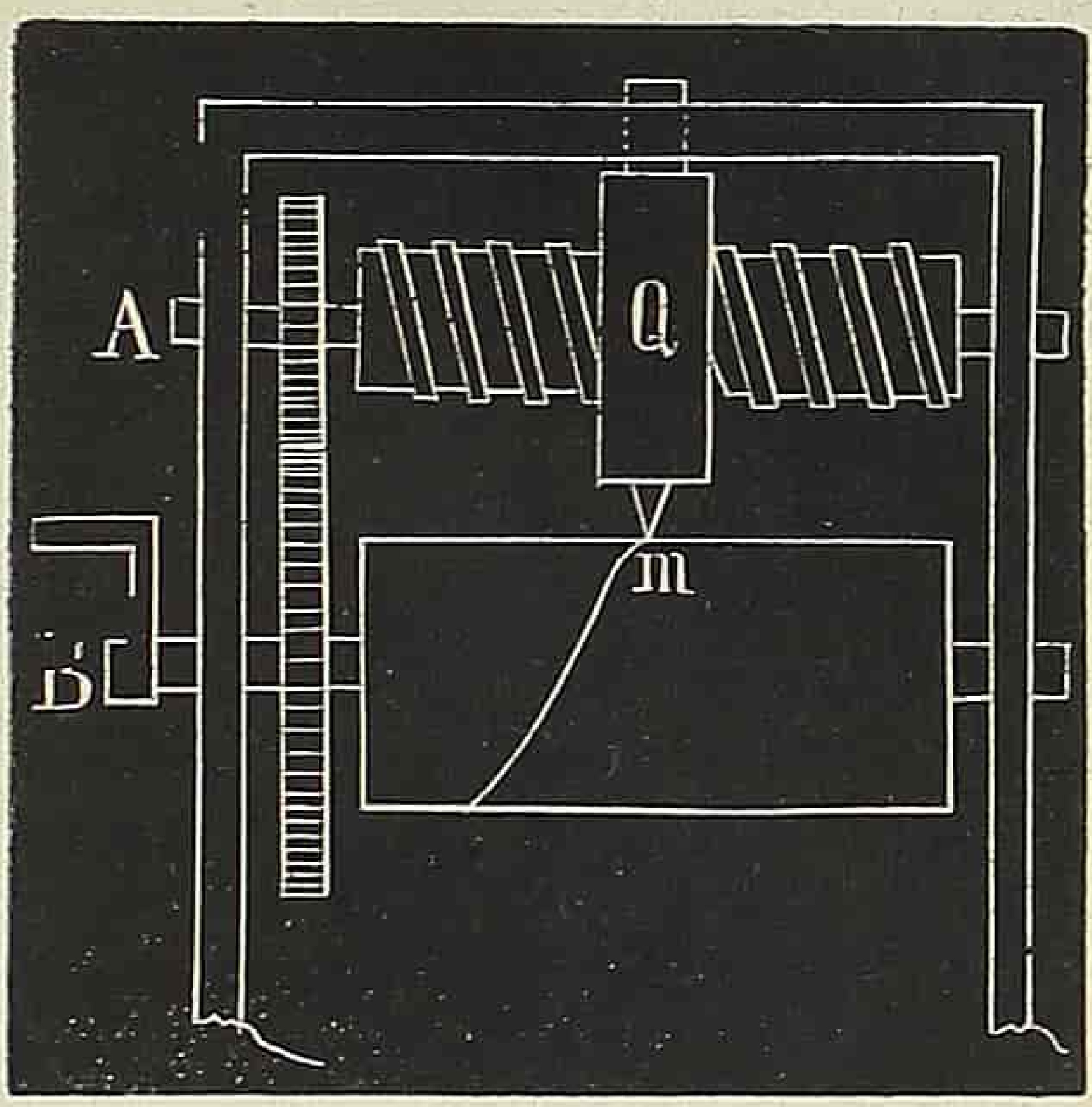
Сл. 177

но само мало лакше, — Потоме за један абсолутни обрт шрафа, релативно је обртање само један део обрта, и овај део опредељен је разликом угловни брзина шрафа *H* и завртке *Q*. — Овој разлики одговара помицање алата представљено истим делом корака шрафа. — Све ово сватићемо јошт боље из ниже наведеног преноса кретања између шрафа и завртке. — Обртање осовине *CC*. произведено је зубчастим точковима *A* и *B* тако, да се осовина може јошт и напредно кретати без да точак *B* участвује у овом кретању, јер је нарамком *G* препречен. — Предпоставимо ради утврђења мисли, да се точак *B* и осовина *C* обрћу на десно за једног посматрача, кои је на левом крају махине. —

Точак *K* утврђен на осовини *CC*, има 36, а точак *L* на осовини *M*, 37 зуба. Потоме лако је сватити, да кад точак *K* учини 37 обрта на десно, онда ће точак *L* учинити 36 обрта на лево. — За ово време точкови *N* и *P*, кои имају по 36 зуба, учиниће исти број обрта и то, први на лево, а други на десно. — Завртка *Q*, која је чврсто сајужена са *P*, и која се може само обртати, учиниће дакле 36 обрта на десно, док шраф *H* чврсто сајужен са осовином *C* учини 37 обрта у истом правцу. Дакле шраф, кои је у десно завијен, ућиће у завртку *Q*, за један корак, и за толико ће повући осовину *C* и алат *D*, а за то време осовина и точак *B* обрнуће се 37 пута. Алат (нож) *D* трасираће у цеви, која се глади, шрафну пругу (завојницу hélice), које ће корак бити $\frac{1}{37}$ од корака шрафа *H*. — Овде имамо јошт то додати, да точак *L* обртајући се заједно са осовиом *M*, у исто време клиза по њеној дужини, и због тога је ова осовина квадратног пресека. —

235. *Меканичко трасирање шрафне пруге [hélice.]* Две осовине *A* и *B* слика 178 обрћу се око своји геометрички оса, које су равноодстојне. Ово једновремено обртање произведено је средством зубчасти точкова. — Отношење угловни брзина осовина, стална је количина. Једна је од овиx осовина сајужена са ваљком а друга са шрафом. По овом

шрафу креће се завртка Q, на крају које утврђен је шиљак m, који на површини ваљка а у равнини двеју оса трасира шрафну пругу тако, да корак ове пруге, стоји према кораку шрафа у отношењу угловни брзина ваљка и шрафа, или у преокренутом отношењу пречника два зубчаника.



Сл. 178.

II. Правац кретања сталан — отношење брзина мењиво.

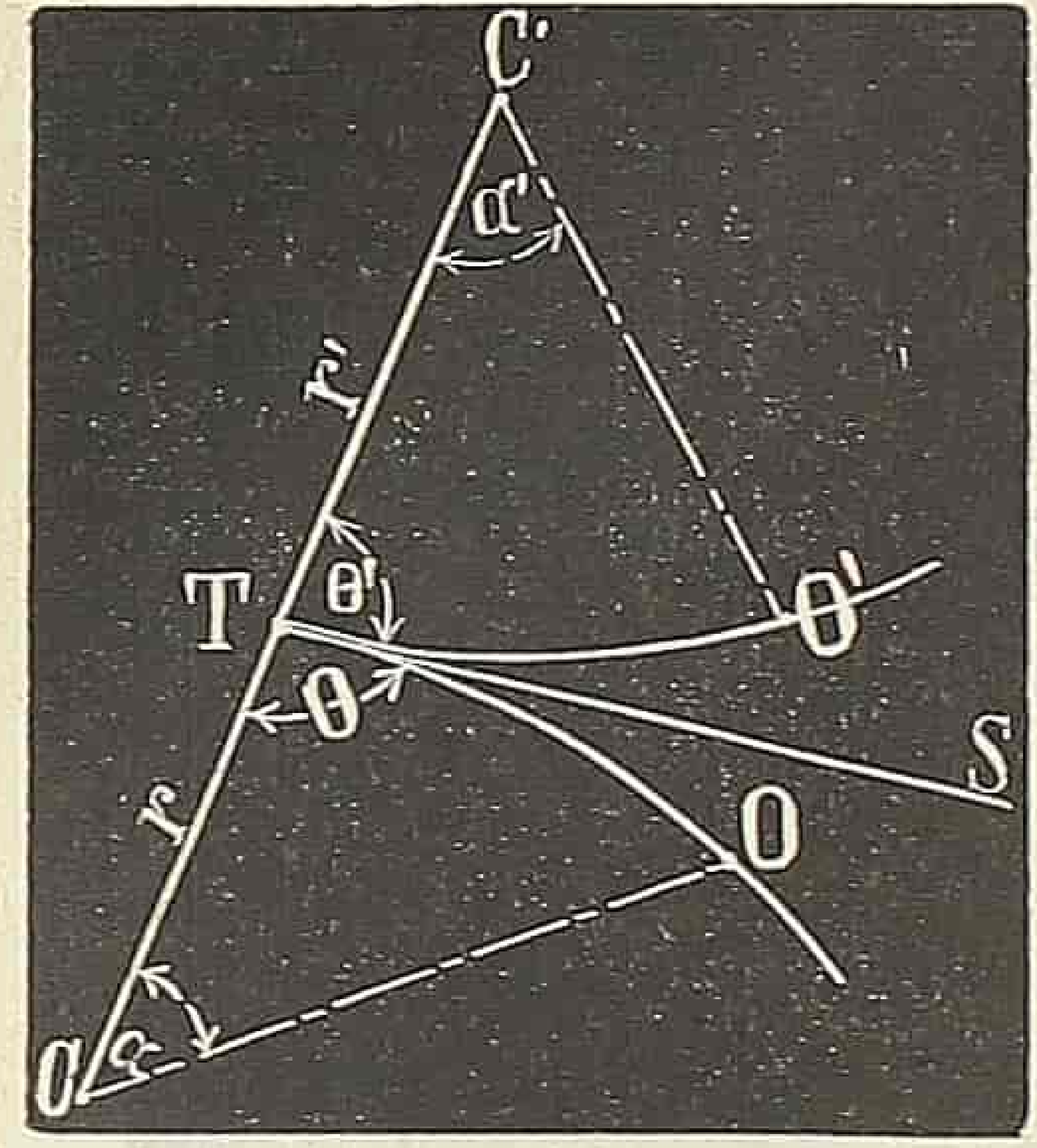
236. Ми ћемо сада да се упустимо у изучавање преноса кретања код оних органа махински, код којих је отношење брзина мењиво.

Но да би наша испитивања олакшали ми ћемо предходпрећи следећа теоретичка правила. —

Основне криве пруге и њина својства.

237. Кад се два чврста тела обрћу око две сталне равноодстојне осе, па сматрамо њино релативно кретање, онда налазимо [као што смо у I делу № 148 једном већ видили] да се ова два тела тако крећу као кад би била сајужена са две ваљчасте површине, које се котрљају једна по другој, и којих се производнице додира, у сваком тренутку, налазе у равнини обе осе обртања. — Потоме дакле, да би схватили напред-поменута обртања два тела, довољно је да испитамо обртања управни пресека два ваљка, који пресеци налазе се у једној истој равнини управној на осе обртања — Ове пресеке или боље обиме ових пресека зваћемо ми; Основне криве пруге, због аналогије са основним крузима обични зубчаника. —

238. Нека су C и C' средишта обртања ови криви пруга Сл. 179. O и O' две њине тачке, које су се налазиле у тачки додира на правој $\overline{CC'}$ у тренутку означеном са $t=o$, T



Сл. 179.

тачка додира криви пруга на истој правој на крају вретена t; α и α' угловни премештаи OCT, $O'C'T$, два тела за време t; нека су на последку r и r' радиуси вектори $\overline{CT}$ и $C'T$; којих је сбир $\overline{CC'}$ сталан; и који ми краткости ради означавамо са c. —

Пошто је то тако, можемо лако доказати сљедећа два својства [која се могу извести као сљедство № 159 и т. д.]

1-во. Кад се криве пруге TO и TO' обрћу око средишта C и C'; и непрестано се додирају на правој $\overline{CC'}$; онда њине угловне брзине, у сваком тренутку преокренуто су сразмерне одстојањима $\overline{TC}$, и $\overline{TC'}$, и ове две криве пруге котрљају се без клизања једна по другој. —

И заиста: Ако означимо са Θ и Θ' угле, које образују криве пруге TO и TO' са $\overline{CC'}$, онда ћемо имати: [види у диференцијалном рачуну израз тангенте однешене на поларне координате.] —

$$tag\,\Theta = \frac{rd\,\alpha,}{dr} \text{ и } tag\,\Theta' = \frac{r'd\alpha'}{dr'}.$$

но као што се криве пруге додирају у T, то ће бити:

$$\frac{rd\alpha}{dr} = = \frac{r'd\,\alpha'}{dr'}, \ldots\ldots \qquad \text{осим тога}$$

будући је $r + r' = c$, то отуда сљедује да је:

$$dr = dr'; \text{ дакле } \underline{rd\alpha = r'd\alpha'}$$

Сад ако поделимо ову једначину са временом dt; које одговара прираштају $d\alpha$, и $d\alpha'$, имаћемо:

$$r\frac{d\alpha}{dt} = r'\frac{d\alpha'}{dt}.$$

Пошто су пак $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\alpha'}{dt}$ одговарајуће угловне брзине криви пруга, то означавајући их са w и w' биће

$$rw = r'w' \text{ и отуда}$$

$$\frac{w}{w'} = \frac{r'}{r} \text{ што смо требали доказати.}$$

2-го. Ако означимо са ds и ds' луке на кривим пругама, који одговарају вретену dt имаћемо:

$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\alpha^2$; и $ds'^2 = dr'^2 + r'^2 d\alpha'^2$ и као што је $rd\alpha = r'd\alpha'$ и $dr = -dr'$ то сљедује да је:

$$\underline{ds = ds'}$$

239. *Определење основни криви пруга.* Ово сљедује из самог закона обртног кретања два тела, са којима су криве пруге сајужене.

Нека су $\alpha = f(t)$ и $\alpha' = \varphi(t)$.
две једначине, од којих свака представља кретање једног од два тела, или једну од две криве пруге. — По правилима диференциалног рачуна, једначина $r\frac{d\alpha}{dt} = r'\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ постаје

$$r\, f_1\, (t) = r'\varphi_1\, (t) \text{ отуда.}$$

$$\frac{r}{c - r} = \frac{\varphi_1\, (t)}{f_1\, (t)}$$

Елиминирајући t из ове последње једначине и једначине $\alpha = f\,(t)$, добићемо једначину криве пруге TO, однешене на поларне координате. Тако исто замењујући r са $(c - r')$ добићемо:

$$\frac{r'}{c-r'} = \frac{f_1\, (t)}{\varphi_1\, (t)} \text{ и помоћу ове једначине}$$

и једначине $\alpha' = \varphi\,(t)$, елиминирајући t, добићемо једначину криве пруге $O'T$. —

Ако је једна од криви пруга дата, онда се она друга може као сљедство из оне прве да изведе. И заиста задржавајући предходећа означења, ако узмемо једначину дате криве пруге у виду:

$$\alpha = \varphi\ (r). \qquad \text{па заменимо}$$

$$d\alpha = \varphi_1\ (r)\ dr \text{ и } r = c - r', \text{ у једначину}$$

$$rd\alpha = r'd\alpha', \text{ добићемо:}$$

$$d\alpha' = -\frac{c-r'}{r'}\ \varphi_1\ (c - r')\, dr', \text{ одкуда интегралењем можемо}$$

определити α' као функц од r'. —

Напоследку имамо приметити: да кад су већ конструисана два дела основни криви пруга, онда се лако могу определити и друге две криве пруге, ако за ове узмемо исте радиусе векторе, но умаљавајући или увећавајући по неком сталном отношењу угле, које ови радиуси вектори образују. — Тако ако су прве криве пруге представљене једначинама:

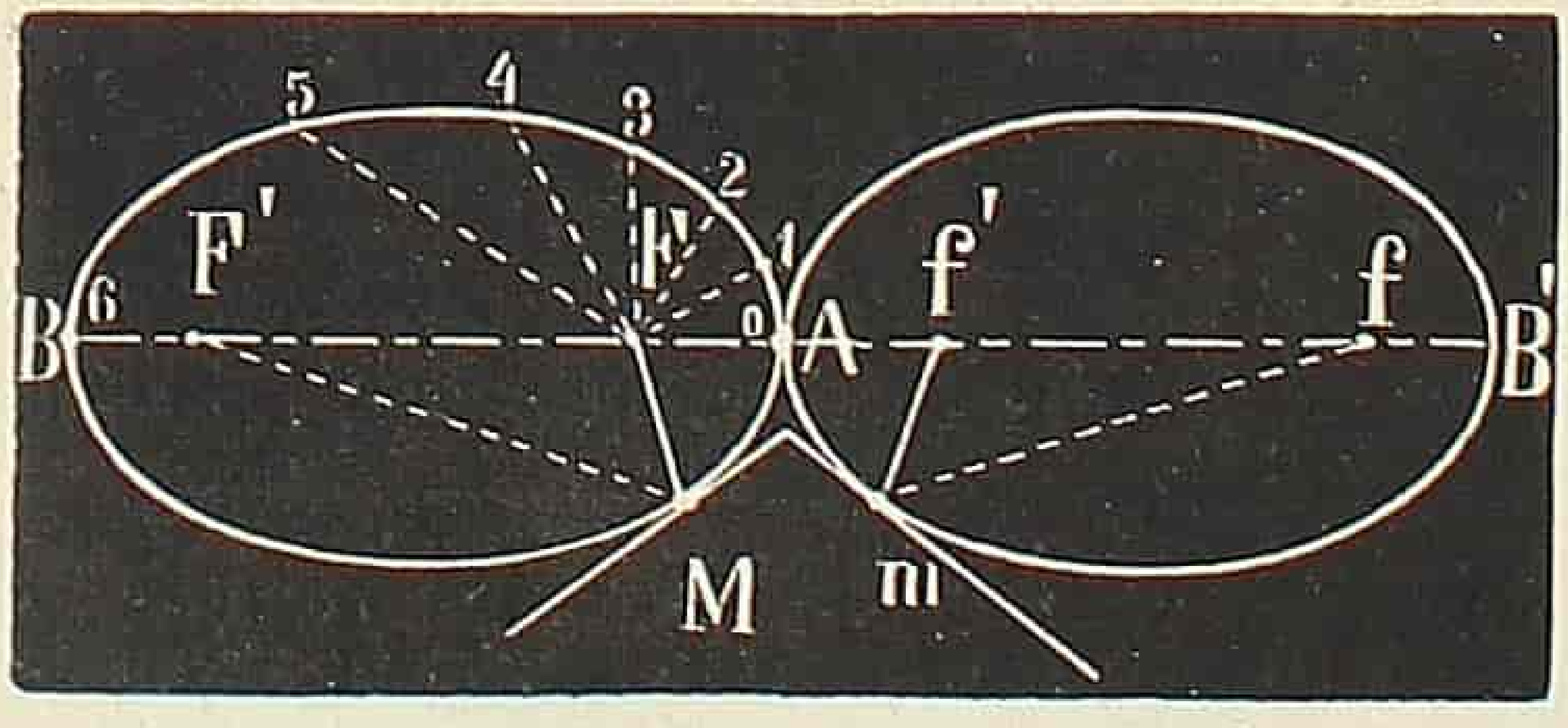
$$\alpha = f\,(r) \text{ и } \alpha' = \varphi\,(r')$$

онда друге две криве пруге биће представљене једначинама $n\beta = f\,(r)$, и $n\beta' = \varphi\,(r')$, и заиста ове последње криве пруге као и оне прве задовољавају једначине:

$$rd\beta = r'd\beta' \text{ и } r + r' = c, \text{ ако је } n$$

сталан број, и ако су β и β' угли, које радиуси вектори образују са две одговарајуће осе. —

Узмимо кои пример ради бољег објаснења напред изложене теорије. —



Сл. 180.

1-во. Представимо себи, да се две једнаке елипсе AMB . . . . . AmB' . . . . . Сл. 180 обрћу око два фокуса F, и f, којих је одстојање $\overline{Ff}$ равно великој оси $\overline{AB}$. Ове две елипсе котрљаће се без клизања једна по другој. И заиста; ако посмотримо два једнака лука $\overset{\frown}{AM}$ и $\overset{\frown}{Am}$, онда је лако видити да је $\overline{mf} = \overline{MF'}$. Потоме за ма које две тачке M и m; које својим координатама задовољавају једначину

$$\int (dr^2 + r^2\,d\alpha^2) = \int (dr'^2 + r'^2\,d\alpha'^2);$$

биће

$$r + r' = c,$$

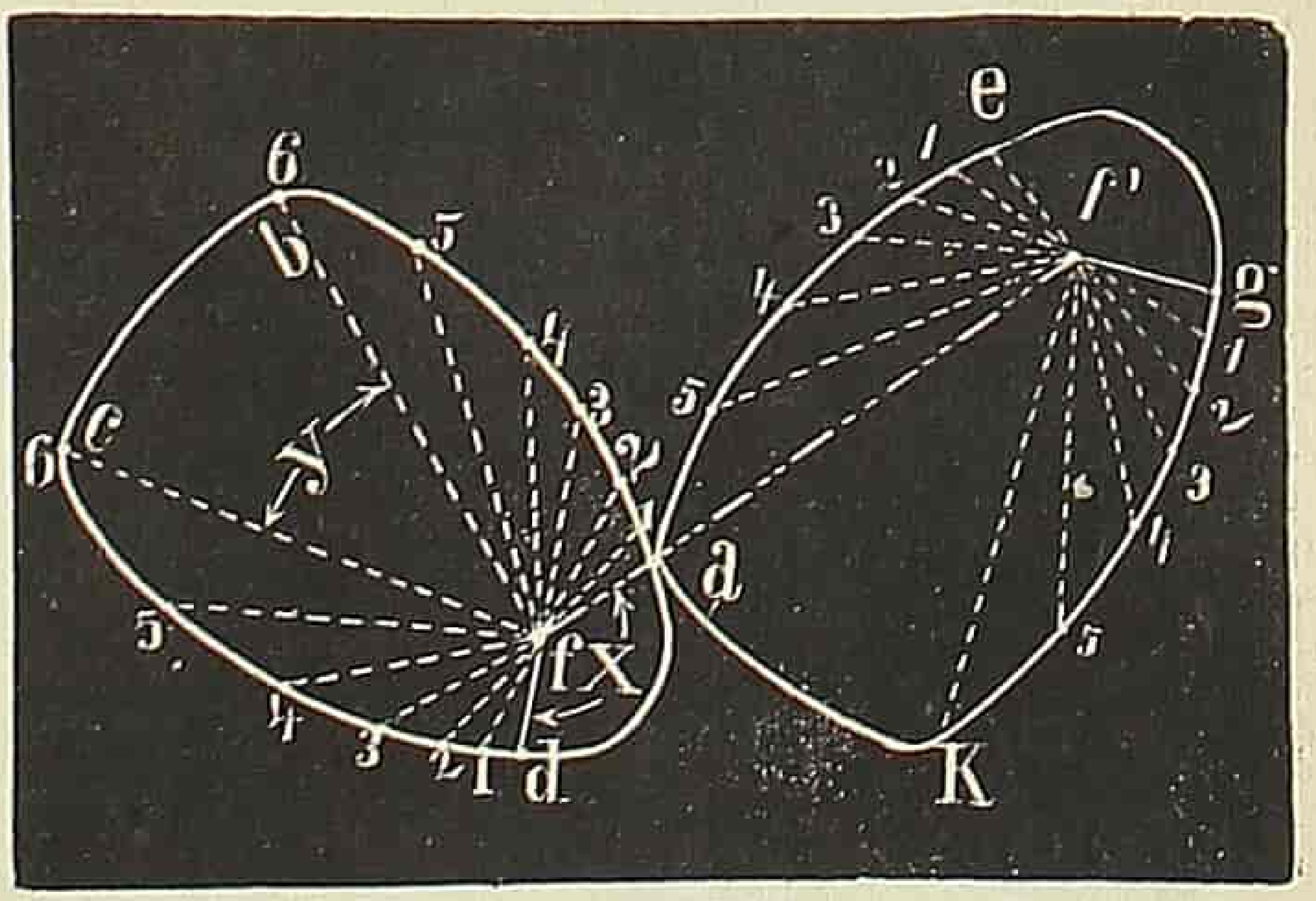
па дакле и

$$rd\alpha = r'd\alpha'$$

Осим тога лако је и то видити, да у тренутку кад се тачке M и m буду слагале, отношење угловни брзина $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\alpha'}{dt}$ постаје равно $\frac{mf}{MF}$.

После пола обрта, ово отношење, почем је најпре било $\frac{Af}{AF}$, нарасте постепено до преокренуте вредности $\frac{\overline{fB'}}{FB}$ и $\frac{\overline{FA}}{fA}$ затим наново опада и у сљедећој половини обрта пролази кроз преокренуте предходеће вредности. —

2-го. Повучимо из F разне радиусе векторе $\overline{F}_0$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}^{\tau}$ . . . . F_6, који образују међусобом једнаке угле, а сбир свију ови углова скупа да износи 180°: —



Сл. 181.

Образујмо ма какав уго afb Сл. 181 и подслимо га на толико исто међусобом једнаки углова, колико има од $\overline{FA}$ до $\overline{FB}$. Узмимо дужине $\overline{fa}$, $\overline{f_1}$ $\overline{f_2}$ . . . . $\overline{f_6}$ одговарајуће једнаке $\overline{F_0}$, $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, ... $\overline{F_6}$. Продужимо $\overline{fa}$ до f' и узмимо $\overline{af'} = \overline{Af}$. Образујмо уго $af'e \;=\; > afb$. — Ако сада наново извршимо предходећу конструкцију, онда ћемо добити криву пругу $a54. \ldots e$, која ће бити равна кривој пруги $a12. \ldots b$. По напред наведеној приметби, ове две помоћу елипсе конструисане криве пруге, јесу основне криве, које имају то својство, да при њином обртању око стални тачака f и f'; отношење угловни брзина прелази постепено од вредности $\frac{\overline{af'}}{\overline{af}}$ до преокренуте вредности $\frac{\overline{f'e}}{\overline{fb}}$ или $\frac{\overline{af}}{\overline{af'}}$. —

3-ће. Представимо себи да одма после криви пруга $a12$ . . . . b, $a54$ . . . e долазе два кружна лука $\overset{\frown}{bc}$ око f, и $\overset{\frown}{eg}$ око f'; затим две криве $c54$ . . . . . d; и $g12$ . . . . . k које су симетричке са пругама $b54$ . . . a и $e123$ . . . a, напоследку два кружна лука $\overset{\frown}{da}$ и $\overset{\frown}{ka}$; — осим тога узмимо ове криве тако да кружни луци $\overset{\frown}{bc}$, и $\overset{\frown}{ad}$, који имају разне полупрсчнике, буду једнаке *дужиие*, што је лако извршити, јер ако означимо са r полупречник $\overline{fa}$, r' полупречник $\overline{fb} = \overline{af'}$; са x уго afd; а са y уго bfc, онда услов о коме је реч, биће изражен једначином:

$$rx = r'y \text{ или } (r + r')\,x = r'\,(x + y).$$

одкуда можемо определити x, ако је сбир $(x + y)$, који је раван $360—2\,afb$ познат.

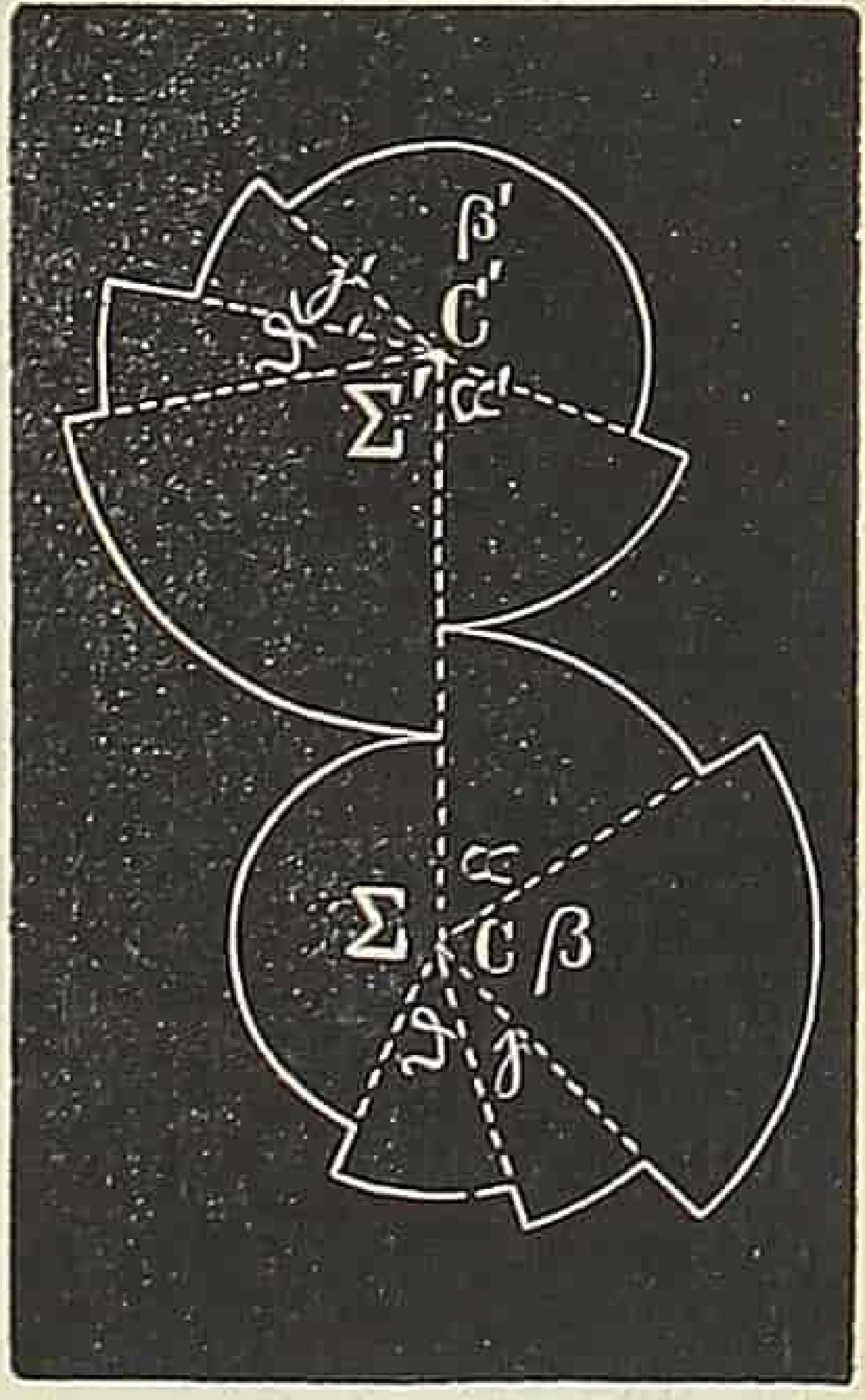
Пошто је то тако, лако је видити 1-во да се две једнаке криве пруге $abcda$, $aegka$ могу обртати око f и f' тако, да се котрљају једна по другој, и да се непрестано додирају на правој $\overline{ff'}$. — 2-го. Да ће се отношење угловни брзина, најпре $\frac{\overline{af'}}{\overline{af}}$ постепено умаљавати до $\frac{\overline{af}}{\overline{af'}}$; затим биће стално за време нролаза угла y; за једну, а угла x; за ону другу криву пругу, после тога исто отношење достиће постепено вредност $\frac{\overline{af'}}{\overline{af}}$ коју ће задржати до краја целог обрта. —

Ово је само један између млоги примера, који је узет за криве пруге изведене од елипсе. —

Напоследку имамо јошт додати: 1-во. Да се криве пруге, изведене из елипсе, употребљују онда, кад се оће, да отношење угловни брзина достиза своју највећу и најмању вредност [maxima etminima] више пута у самом једном обрту, или кад две криве пруге морају у исто време разни број обрта чинити. 2-го Да се ове криве пруге комбиноване са луцима кругова, употребљују за она кретања, код којих је отношење брзина на изменце (алтернативно) стално и мењливо. —

Пренос кретања додиром.

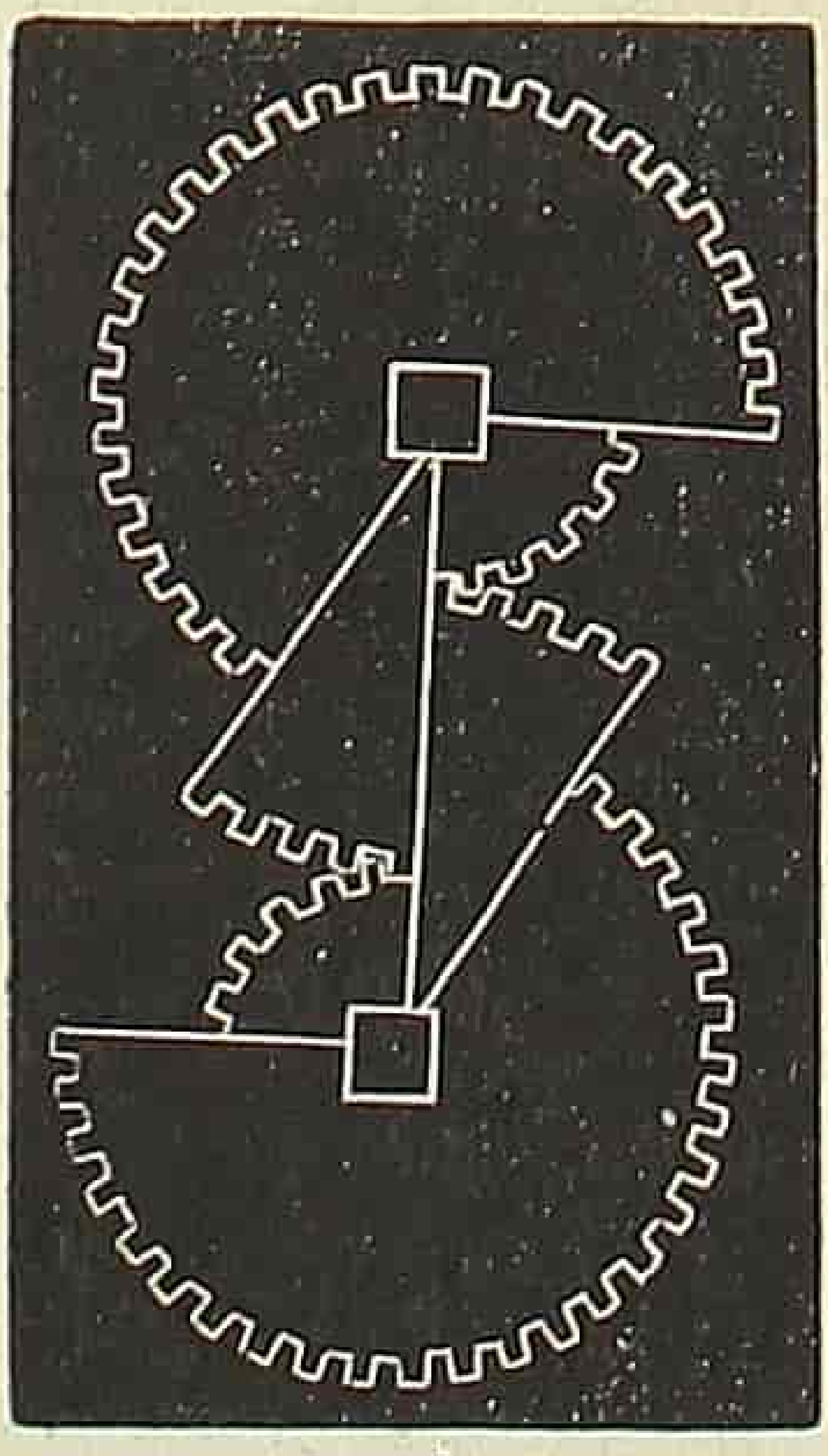
4-то. *Постепено додирајући се кружни луци.* Напред изложене непрекидне (континуалне) криве пруге, могу да се замену са кружним луцима, који редом један за другим иду као што слика 182 показује. Око средишта C налазе се н. пр. 5 кружни лукова, њиови угли, означени са α, β, γ, δ, Σ; скупа износе 360°; око средишта C' налазе се тако исто 5 кружни лукова са углима α', β', γ', δ', Σ'.



Сл. 182.

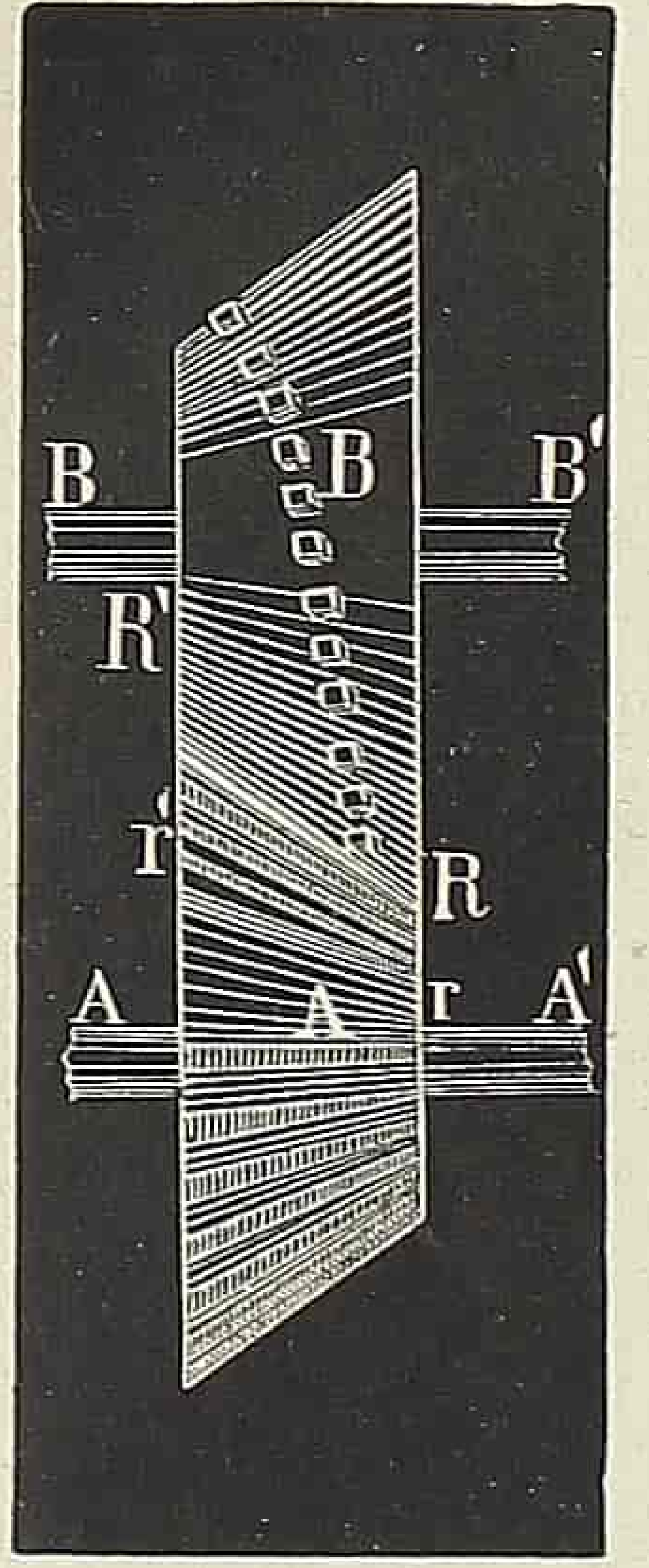
Полупречници два одговарајућа лука стоје у преокренутој размери њиови углова, и сбир је њиов непрестано раван одстојању средишта $\overline{CC'}$. — Отуда сљедује, да су два одговарајућа кружна лука једнаке дужине, и могу се котрљати без клизања један по другом. У овом случају постепене вредности отношења угловни брзина, око C и C' јесу: $\frac{\alpha}{\alpha'}$; $\frac{\beta}{\beta'}$; $\frac{\gamma}{\gamma'}$; $\frac{\delta}{\delta'}$; $\frac{\Sigma}{\Sigma'}$; $\frac{\alpha}{\alpha'}$; и т. д. и ово отношење нагло прелази са једне вредности на другу. —

240. *Зубчаници.* Кружни луци могу бити снабдевени са зубима, као што сл. 183 показује. Профил зуба опредељује се по начелима обични зубчасти точкова. Овде имамо у опште само то приметити, да ако оћемо, да кретање буде као и код основни криви пруга, онда треба да заједничка нормала два додирајућа се зуба пролази у сваком тренутку кроз заједничку тачку напред поменути криви пруга. —



Сл. 183.

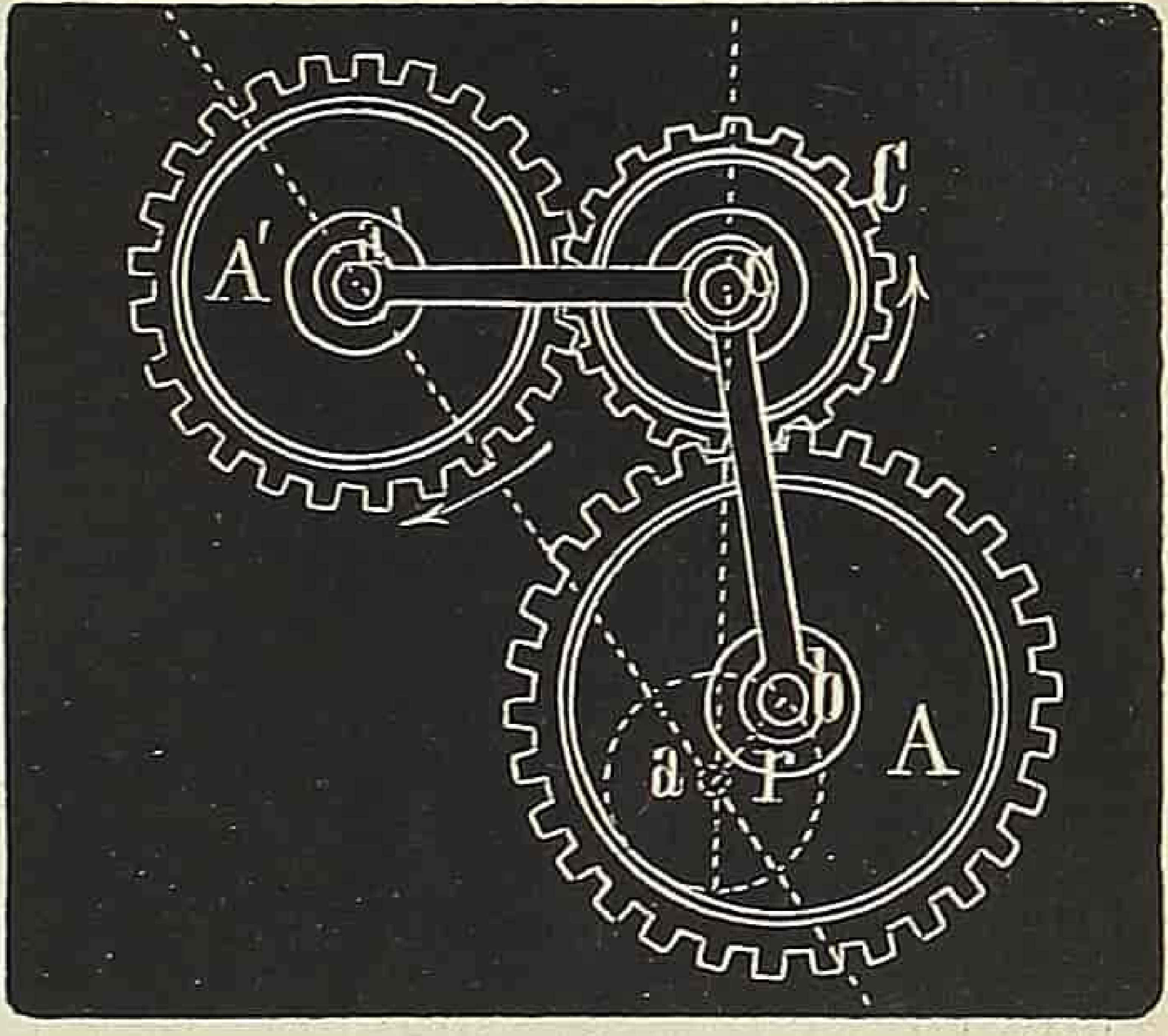
241. *Точкови Roemer-a.* Славни астроном дански Roemer. који је живио у другој половини 16 века, предложио је за мењање отношења угловни брзина, особити систем зубчаника, кои је на страни сликом 184 представљен. $\overline{AA'}$ и BB' јесу равноодстојне осовине, око којих се обрћу конички зубчасти точкови. — Основни конуси ових точкова положени су један према другом са противположеним врховима. — По целој дужини одбијеног гонуса A намештени су зуби обични конични точкова тако, да изгледа као да је олучен, а одбијени конус B снабдевен је са зубцима, коих положај опредељује се по закону потребног кретања. Нека су r и r' полупречници основица конуса A. а R и R' конуса B. — Кад зубац налазећи се на основици полупречника R, завата за олучасти конус, онда је отношење угловни брзина око осовина AA' и AB равно $\frac{R}{r}$, а кад зубац на основици R' завата за исти олучасти конус, онда је отношење угловни брзина $\frac{R'}{r'}$. Остали зубци производе промену поменутог отношења од једне напреднаведене вредности до друге, и морају бити распоређени по таквој кривој пруги, која се графично опредељује пошто се предходно оба основна конуса развију. —



Сл: 184.

Приметба. Кад је обртање олучастог конуса једномерно онда је оног другог периодично једнако, и сваки период траје за један обрт овог последњег конуса. Ако су бројеви олука и зубаца вопросни конуса односно прости међусобом, онда један исти олук постепено долази у додир са разним зубцима другог конуса. —

242. *Три обична зубчаника, од коих један ексцентричан.* Око две сталне осе a и a' Сл. 185 обрћу се два зубчаста точка A и A'. Средиште точка A налази се у b изван осе обртања a. — Са ова два точка завата трећи зубчасти точак c, Полуге



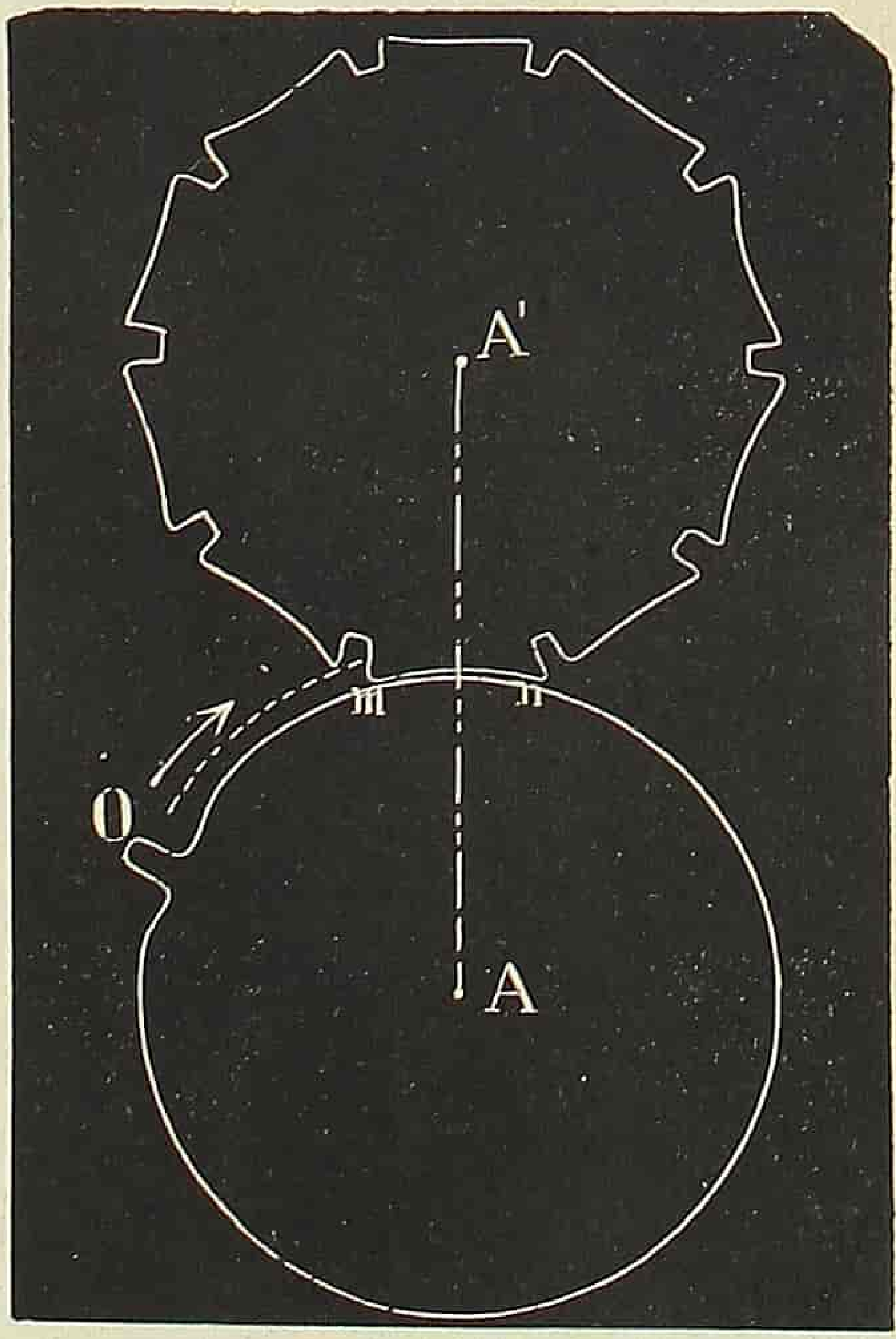
Сл. 185.

$\overline{a'c}$ и $\overline{cb}$ служе да одстојање оса a' c и b остане непрестано стално. Пошто је то тако, ако означимо са R полупречник точка A, кога је средиште у b, са r полупречник ab круга, кога описује средиште b око a; са R' полупречник точка A', са w и w' угловне брзине точкова A и A' онда ћемо имати, кад се три тачке c, a, и b налазе у правој пруги, ове две једначине.

$$w'R' = w\ (R + r) \text{ и } w'R' = w\ (R - r)$$

од којих прва одговара случају, кад се b налази између c, и a; а друга, кад се b налази у продужењу праве $\overline{ac}$. —

Између ова два крајна положаја, за сваки обрт точка A, отношење $\frac{w'}{w}$ угловни брзина прелази постепено од вредности $\frac{R + r}{R'}$ на вредност $\frac{R - r}{R'}$ и обратно. [vice versa]. —



Сл. 186.

234. *Прекидни зубчаник.* [Engrenage intermittent]. Око — оса A и A' Сл: 186 обрћу се два точка тако, да се A' обрне само за неки део н пр. $\frac{1}{10}$ део док точак A учини цео обрт. кад би се имао само овај услов да испуни, онда би се зато могла да употребе два зубчаста точка, којих би број зуба стајао у размери као 1: 10 и ово отношење непрестано би било равно преокренутом отношењу угловни брзина. Но на страни означена слика представља такав систем зубчаника, да кад се точак A обрне за $\frac{9}{10}$ целог

обрта, точак A' стои некретан, а затим се оба једновремено обрну за $\frac{1}{10}$ целог обрта. — Да се овај услов испуни, точак A наоружан је само једним зубом O, око кога се и са једне и са друге стране налазе мала удублења. На другом пак тучку налазе се 10 улублења раздвојена са 10 кружни конкавни лукова, којих је полупречник раван полупречнику точка A. — Лако је сватити да докле год зуб O, непочне заватати за једно од удублења точка A', дотле се овај точак неможе кретати ни на десно ни на лево, јер због конвексности точка A, ошиља m и n точка A' немогу прећи праву $\overline{AA'}$. Но кад при обрту точка A у правцу стрелице н. пр. зуб O, почне улазити у једно удубљење точка A', онда се оба точка почињу једновремено обртати у означеном правцу, и то због удоблења налазећа се и са једне и са друге стране зуба O, која дозвољавају да ошиља m и n могу преко праве $\overline{AA'}$ прећи.

Обртање точка A' престаје у тренутку кад зуб O остави једно од његови удубљења.

Овакав систем зубчаника употребљује се код известни тако звани рачунички апарата (compteurs.) —

Артикуларни систем са мењљивим односом брзина.

1. Осе равноодстојне.

244. *Ручке сајужене са машком [полугом].* Две осовине обрћу се око свои стални геометрички оса O и E — Сл. 187. које су равноодстојне. На крајевииа ових осовина утврђене су две ручке AO и EB сајужене у крајевима у виду шарнире са машком AB. Обе су осовине тако једна према другој положење, да се ручке могу пуно обртати, без да је машка у свом кретању препречена једном од осовина. —

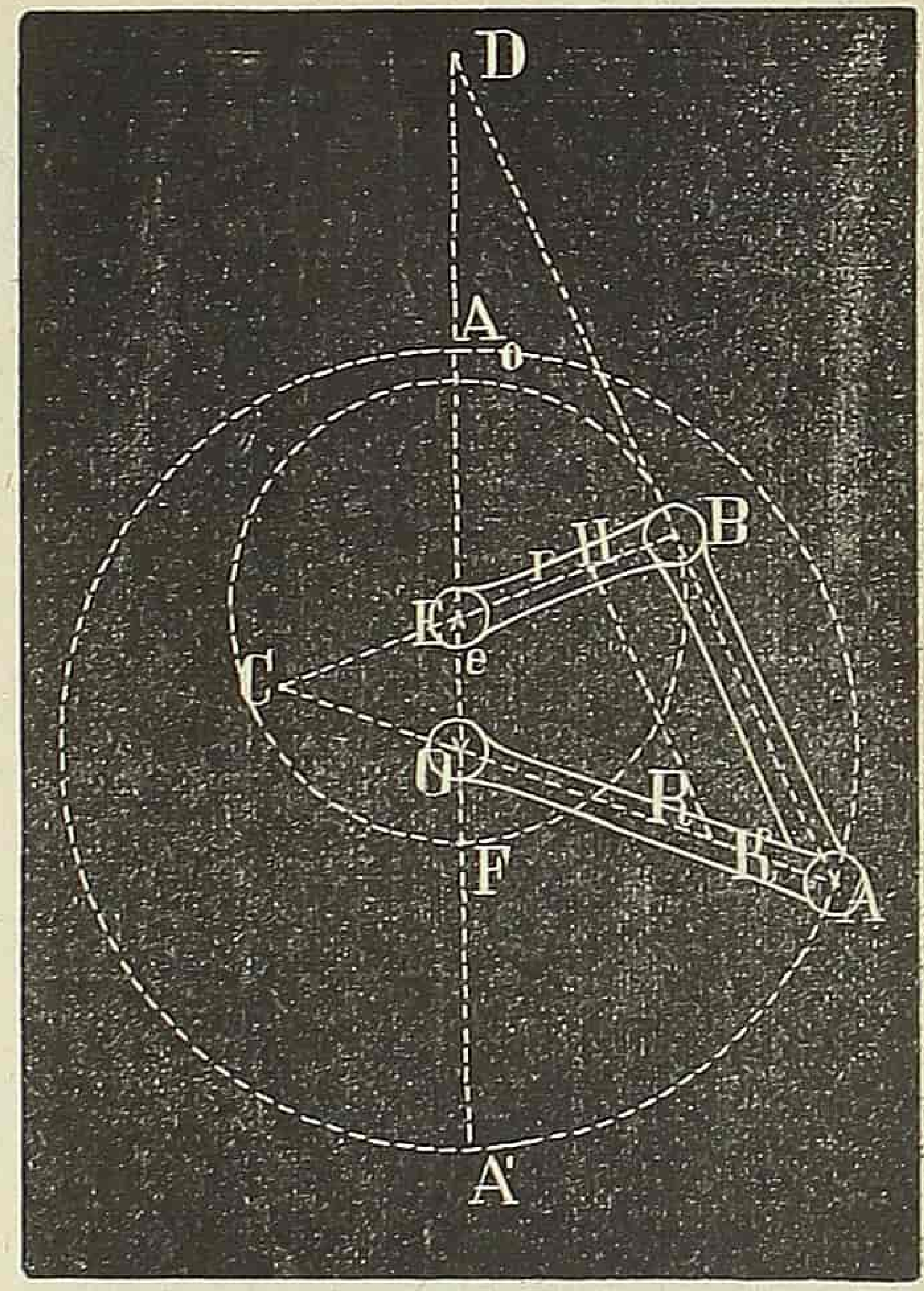
Нека су R и r полупречници кругова, кои су описани тачкама A и B — Поставимо краткости ради дужину машке $AB = a$, ексцентричност $\overline{OE} = e$. — Испитајмо сада под коим условом може кретање да буде непрекидно (континуално)

Могу бити два члучаја:

1. Ако су напред поменута два круга R и r концентрична, онда је лако видити да је једини услов тај, да се дужина a, налази између $(R - r,)$ и $(R + r)$. У овом случају отношење је угловни брзина стално. —

2. Ако су пак ови крузи ексцентрични као што слика представља, онда се дужина a, мора налазити између $(R - r + e]$ и $(R + r - e)$ то јест мора бити:

$$a > R - r + e. \text{ и}$$
$$a < R + r - e$$



Сл. 187.

Но ове две неравности могу само онда да постоје кад је r веће од e, дакле:

Да би обртање две ручке о коима је реч, могло бити непрекидно у истом правцу, треба:

1. да стална тачка веће ручке буде у кругу, кои описује тачка B мање ручке[1].

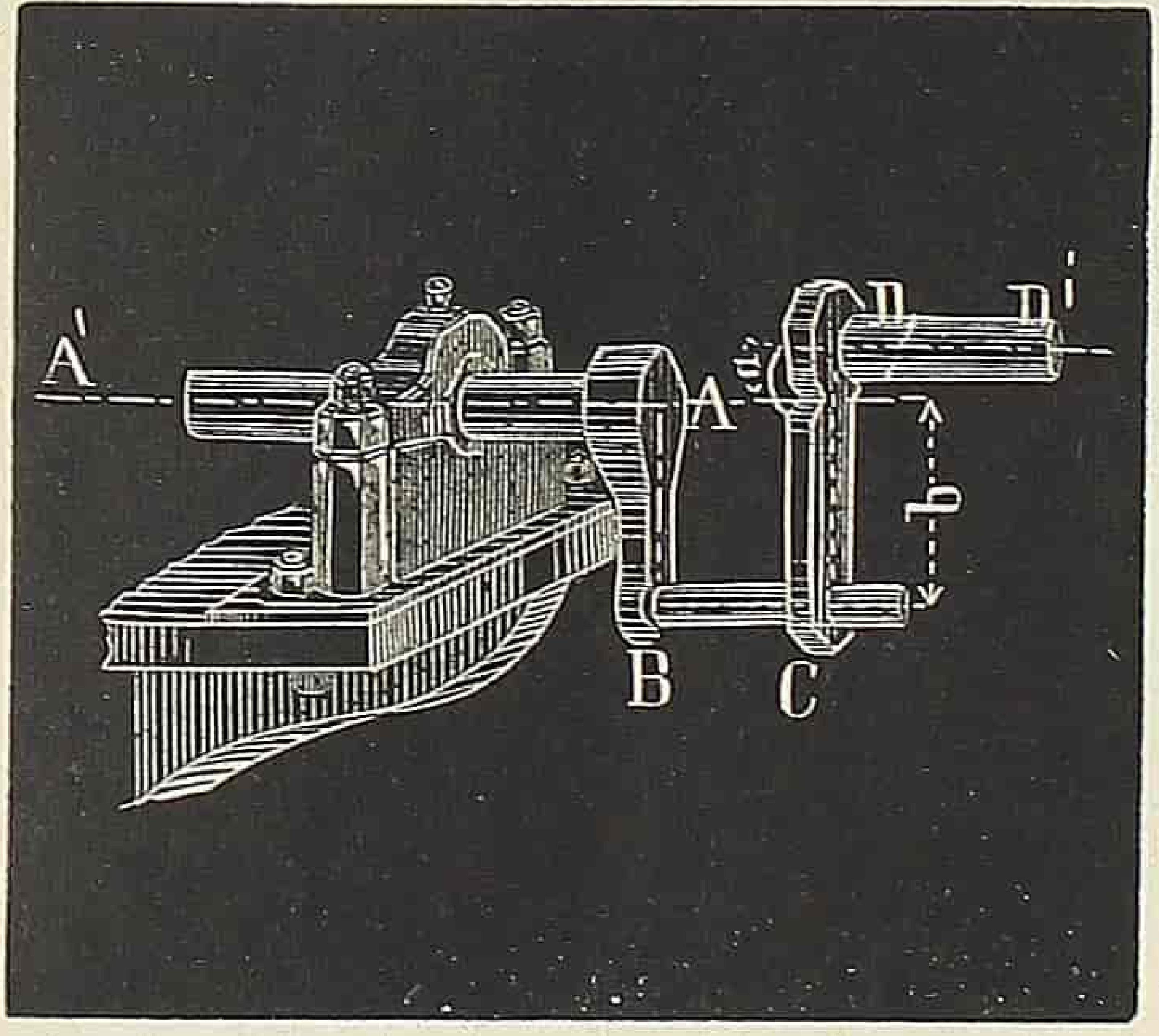
2. Да се дужина a, налази измнђу два дела $\overline{A'F}$ и $\overline{A_0F}$ пречника круга R. — Ови делови опредељени су пресечном тачком F Круга r, која тачка налази се у највећем одстојању од периферије круга R. —

Под овим условом, ако предпоставимо да је кретање тачке B једномерно, онда ће се брзина тачке A мењати са

---

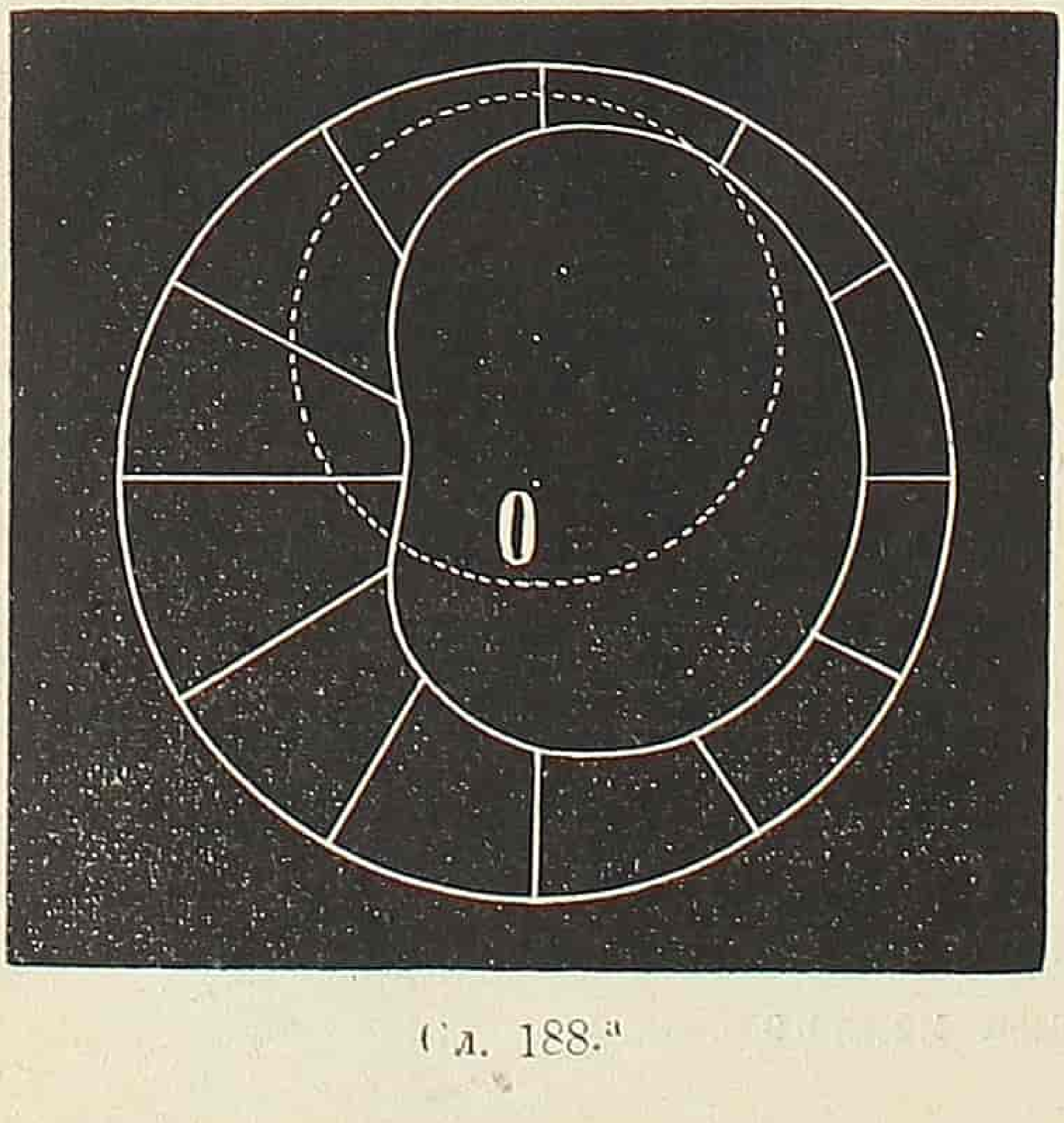
[1] Овде остављамо на страну особити случај, у коме је $R = r$ и $a = e$. У овом случају непрекидно је кретање могуће на два разна начина: било да машка остаје непрестано равноодстојна са правом средишта, у ком случају брзине две ручке јесу једнаке, било да машка пресеца праву средишта између стални тачака две ручке, и онда је отношење између два обртања менљиво. —

променом отношења два дела $\overline{DO}$ и $\overline{DE}$[1]. Машка неможе бити никада у правој пруги са ни једном од две ручке, и потоме код овог механизма нема мртви тачака. — У осталом и у опште говорећи, кретање је машке тако исто као и неке праве, које би се крајне тачке кретале по периферији два круга налазећа се у једној истој равнини. Види № 108 прим: 3,



Сл. 188.

242. *Ручка у процепу.* Две осовине AA' и DD' Сл. 188. обрћу се око свои геометрички оса, које су сталне, равноодстојне и једна од друге за a, удаљење. На крају једне осовине отврђена ручка AB, са ваљчастим краком BC. Геометричка оса овог крака удаљена је од осе AA' за b; и ово је одстојање веће од a. На крају D друге осовине утврђен је процеп CD, кои слика јасно представља. — Обе осовине тако су једна према другој намештене, да свака ручка може слободно цео обрт да учини без икакве препоне. — Потоме две вопросне осовине стоје у међусобном сајузу само средством крака BC, кои клиза по процепу CD. — За сваки обрт, оса крака CB налази се два пута у равнини геометрички оса, AA' и DD'



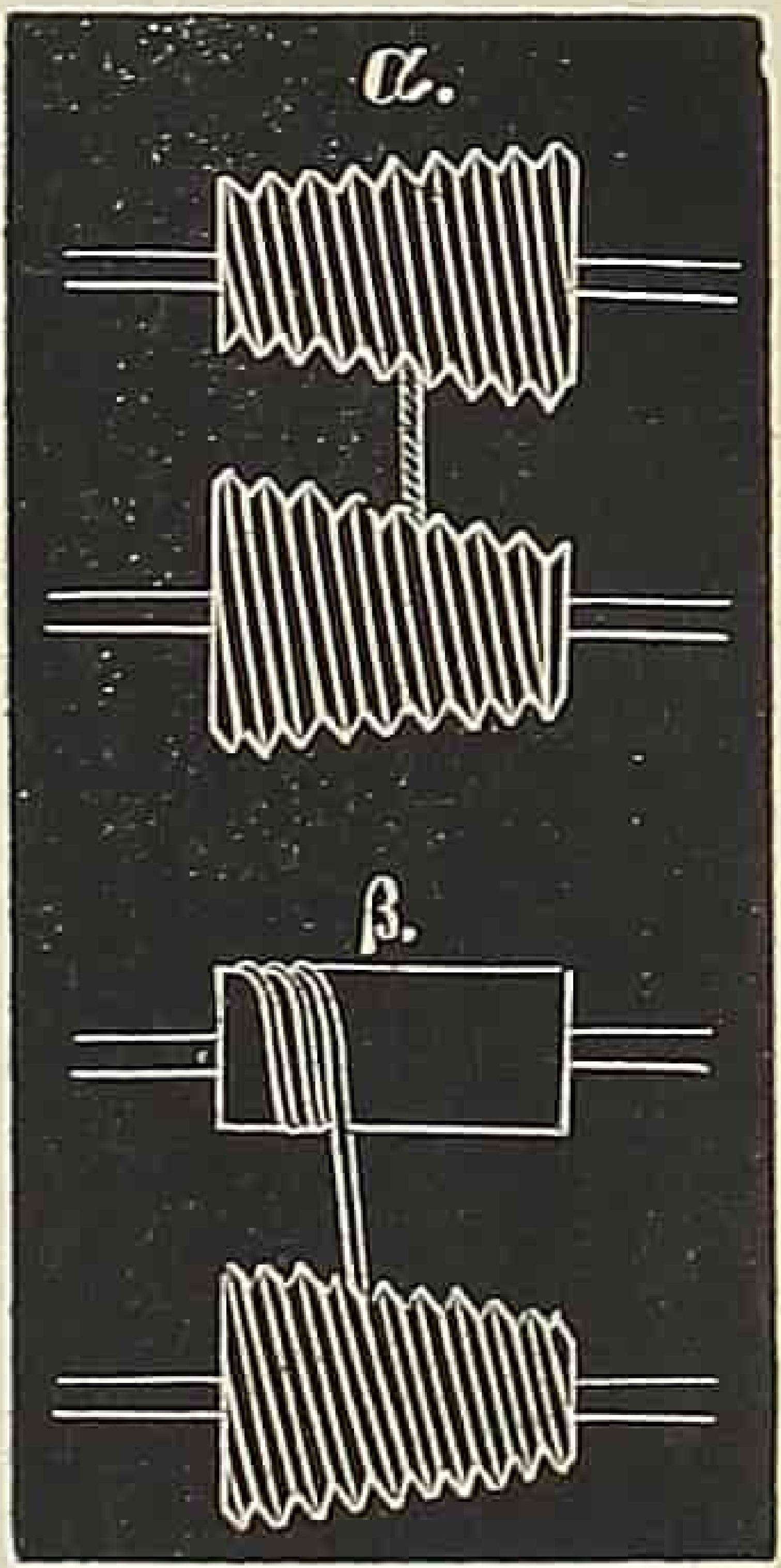
Сл. 188.^{a}

[1] Да би графично представили закон овог мењања отношења, сматрајмо тренутно средиште обртања C, машке AB имаћемо $\frac{V_a}{V_b} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Узимајући дакле дужину $\overline{BH}$ равну сталној брзини V_b, и повлачећи кроз H равноодстојну са $\overline{AB}$ добићемо $\overline{AK} = O$

Слика 188^{a} на страни означава геометричка места тачке K за један обрт система. —

и у овим тренутцима отношење је угловни брзина на измենце (алтернативно) $\frac{b - a}{b}$ и $\frac{b + a}{b}$ Ово отношење постепено прелази са једне на другу од ове две крајње вредности. — Ова је комбинација једна од најпрости, која се може употребити за сајуз два непрекидна обртања око две равноодстојне осовине, а са менљивим отношењем брзина.

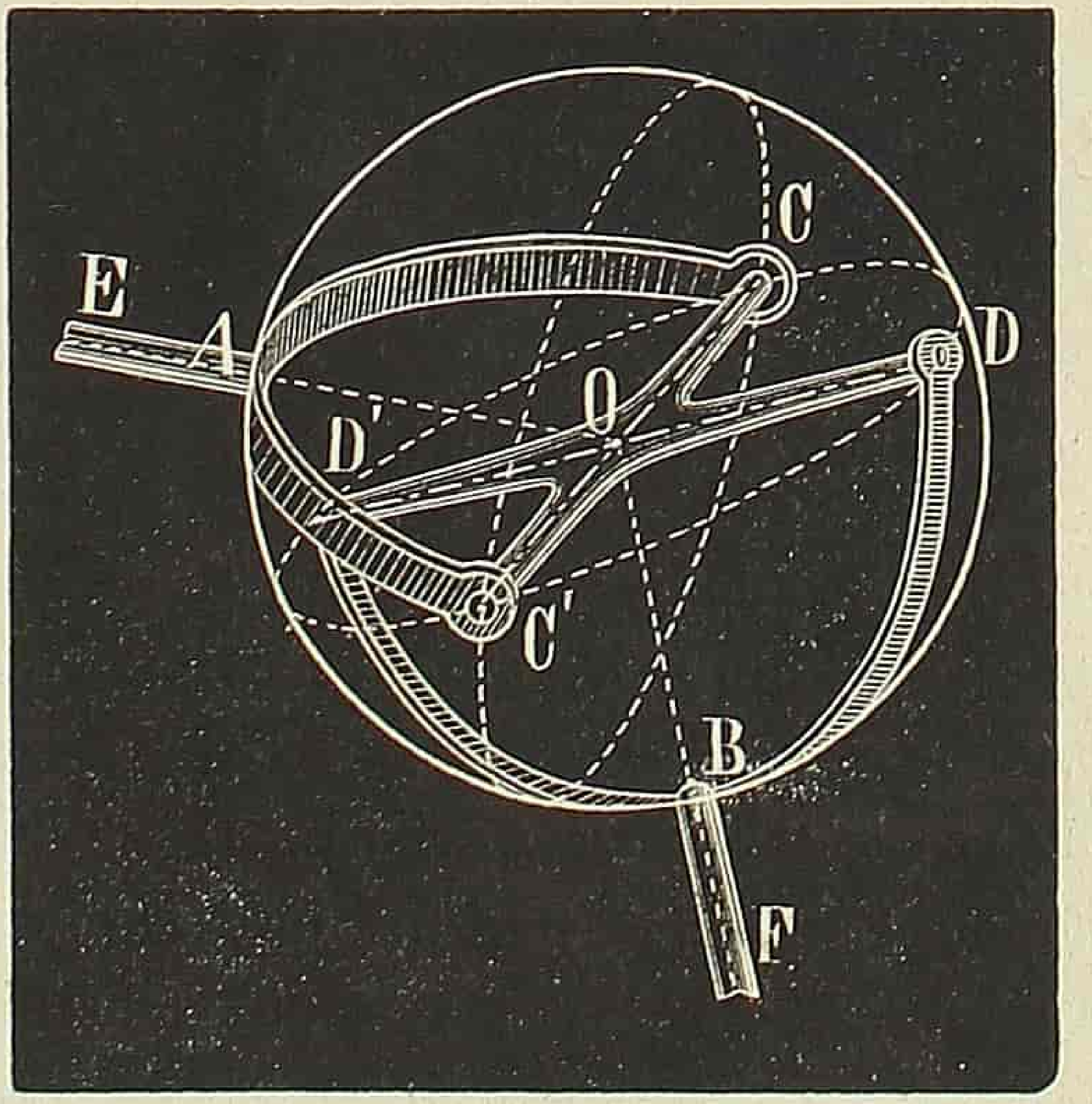
246. Промена отношења угловни брзина код равноодстојни осовина производи се каткад средством два конуса, која су изолучена у виду спирале, Сл. 189 под (α), или средством једног олученог конуса и једног ваљка под (β). Око једног од ови конуса обмотава се а од другог одмотава се конопац или ланац. — Меканизам под β опотребљава се по већој части у конструкцији сатова. —



Сл. 189.

2. Стицајуће се осе.

247. *Униврезални сајуз.* (*Joint universel*).[1] Две осовине $\overline{EA}$ и $\overline{FB}$ Сл. 190 обрћу се око свои геометрички оса, које се у *O*. плесецају и образују међусобом уго близу 180. степени — Ове две осовине сајужене су међу собом средством ракљи *C'AC*; *DBD* и крстила *CC'D'D*. као што слика показује. — Тела *CC* и *D'D* која су управна једно на друго и образују крстила, обрћу се око свои геометрички кроз *O* пролазећи оса $\overline{OC'}$ и $\overline{DD'}$.



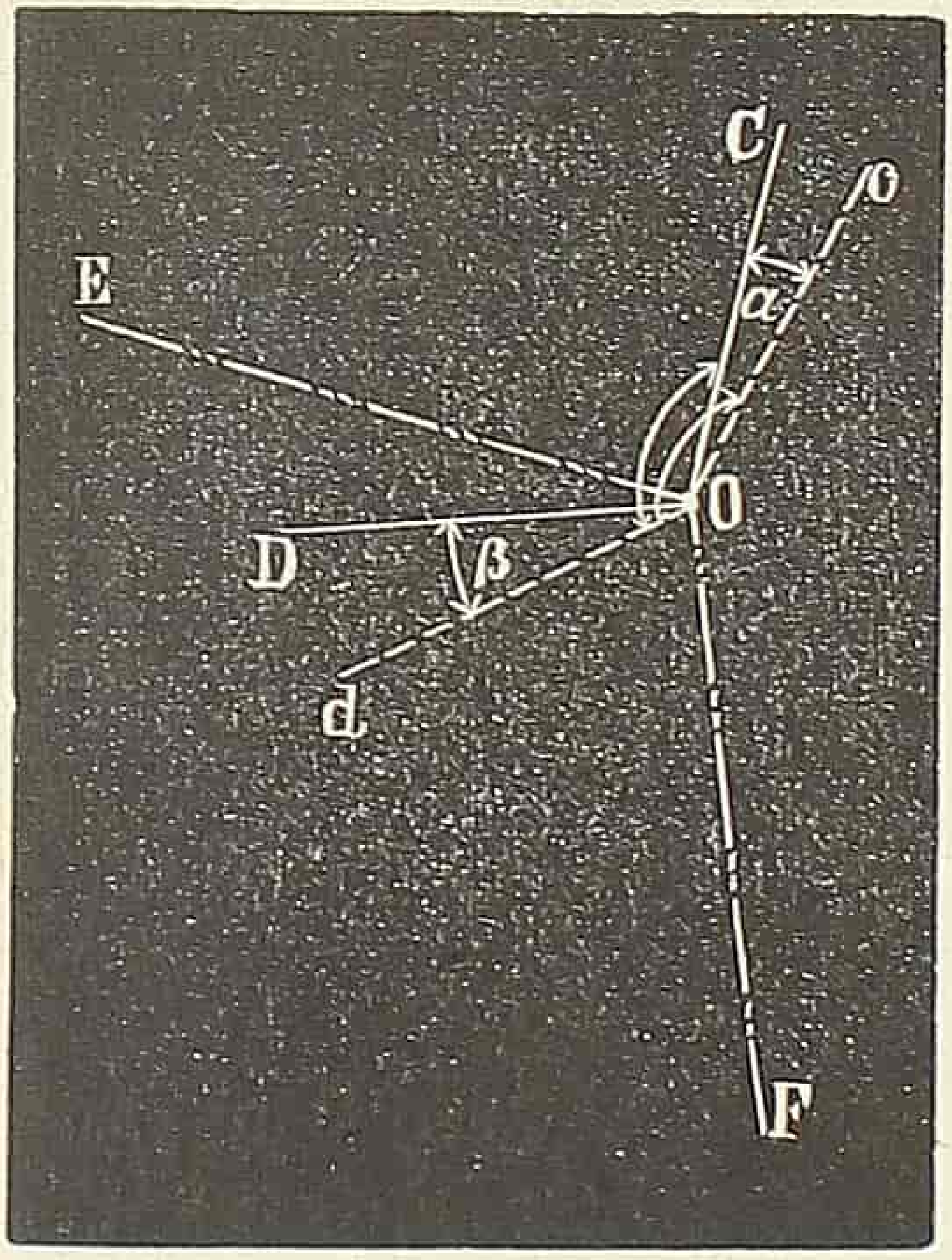
Сл. 190.

---

[1] Униврезални сајуз, познат је такође под именом! Сајуз Кардана (Jojnt de Cardan) или сајуз холандски (Jojnt hollandais.) Willis приписује Hooke-у изналазак овог меканизма (1674 год.).

Оба ова тела имају на крајевима рамена, која предупређују свако уздужно клизање. —

Пренос кретања са једне осовине на другу није једномеран, и ми ћемо сада да определимо отношење између једновремени угловни премештаја две вопросне осовине, за известни њин положај, н. пр. за положај у ком је оса CC' управна па сталну равнину AOB, а оса $\overline{DD'}$ налази се у овој равнини.



Сл. 191.

Представимо да се прва осовина обрнула за уго α; полупречник $\overline{OC}$ заузеће положај $\overline{Oc}$, сл. 191 уго COc биће раван $> \alpha$; и његова је равнина управна на осу $\overline{OE}$. У исто време полупречник $\overline{OD}$ премештајући се у Od описује уго $DOd = > \beta$, кога је равнина управна на $\overline{OF}$, сљедствено у њој се мора налазити и права $\overline{OC}$; потоме имаћемо да је уго $COd = \frac{\pi}{2} + \beta$. — Осим тога, будући се форма крстила немења, то је уго COd остао прави уго, дакле право-пружни угли триједра (телесног угла) образованог од $\overline{OC}$, $\overline{Oc}$, и $\overline{Od}$, јесу: α; $\frac{\pi}{2} + \beta$ и $\frac{\pi}{2}$. Напоследку ивични уго $cOCd$ налазећи се између две равнине управне на одговарајуће осе $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$, определен је оштрим углом A, који је суплемент тупог угла образованог од ове две осе. — Пошто је то тако, ако употребимо познати образац сферне тригонометрије, којим је изражено отношење између три правопружна угла a, b, c неког триједра и ивичног угла A противположеног страни a; имаћемо:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Постављајући сад $a = \frac{\pi}{2}$; $b = \alpha$; $c = \beta + \frac{\pi}{2}$; биће

$$o = -\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos A$$

одкуда тражено отношење:

$$\underline{tang\,\beta = tang\,\alpha \cos A.}$$

Ово отношење показује да су угли α и β у исто време o, и прави угли, но неједнаки између ови граница, даље пренос кретања не би се могао произвести, кад би уго A био прав уго.

248. *Отношење угловни брзина.* Диференцијалећи предходећу једначину и означавајући са w угловну брзину $\frac{d\alpha}{dt}$, осовине EA, а са w' угловну брзину $\frac{d\beta}{dt}$ осовине BF, добићемо:

$$\frac{d\beta}{dt} = w' = w \cos A \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} = \frac{w\cos A(1+tang^2\alpha)}{1+tang^2\beta.} =$$

$$= \frac{w \cos A\,(1+tang^2\alpha)}{1+tag^2\alpha \cos^2 A}$$

$$= \frac{w \cos A}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2 A} = \frac{w \cos A}{1 - \sin^2\alpha \sin^2 A}$$

Потоме кад је w стално $\frac{d\beta}{dt}$ је мењиво и увећава се са увећавањем α, почињући од вредности $w \cos A$ која одговара $\alpha = o$, до вредности $\frac{w}{\cos A}$, која одговара $\alpha = 90^\circ$. Обе угловне брзине једнаке су кад је:

$$(1 + tang^2\alpha)\cos A = 1 + tang^2\alpha \cos^2 A \quad \text{одкуда} \quad tag^2\alpha = \frac{1}{\cos A}$$

Ако би хтели да определимо угловну акцелерацију, онда последњу једначину треба наново диференциалити, тим начином добићемо предпостављајући w као стално:

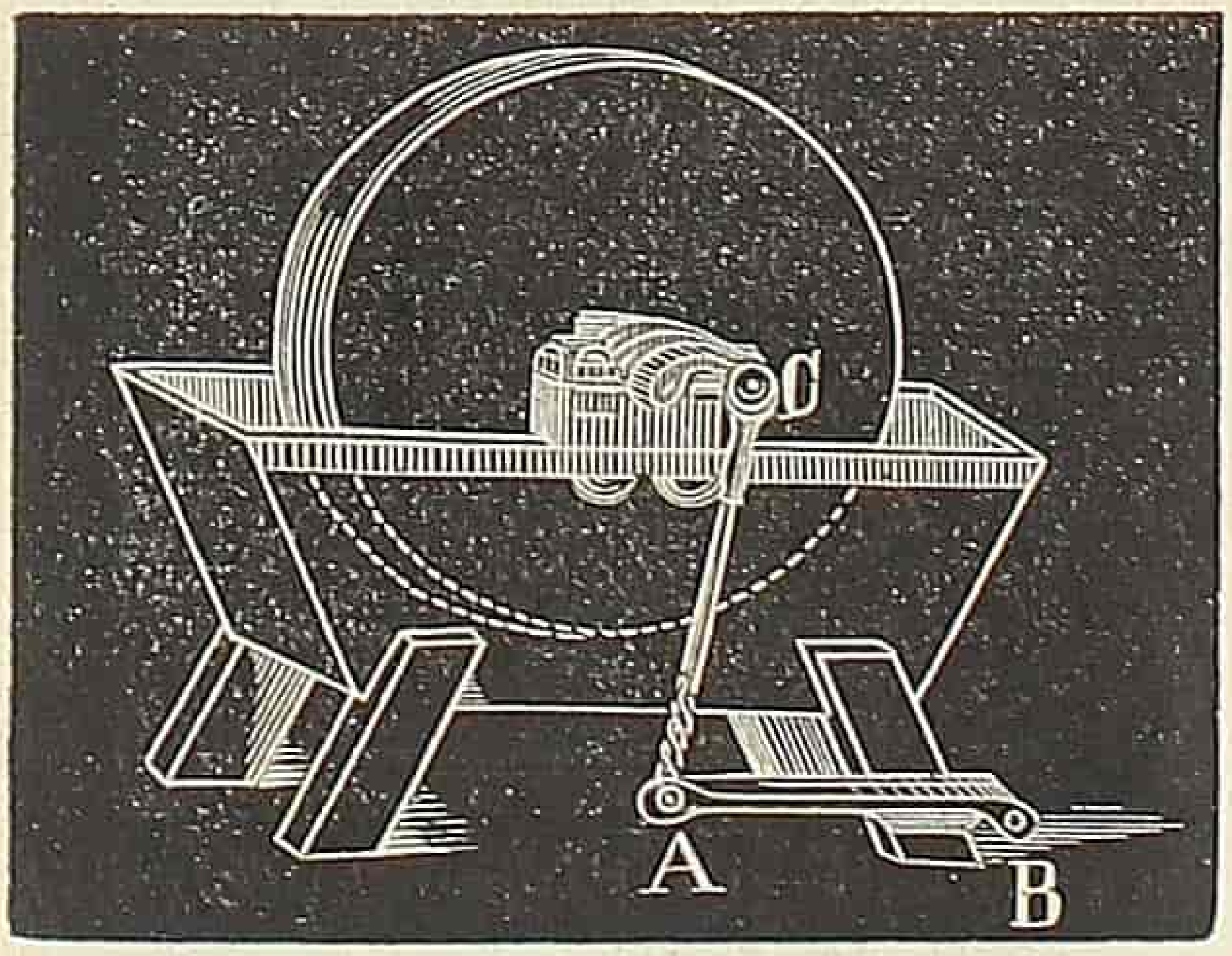
$\frac{d\beta^2}{dt^2} = 2\, w^2 \cos A \sin^2 A \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(1-\sin^2\alpha\cos^2 A)^2}$ количина, која постаје $= o$ за $\alpha = o$ и $\alpha = 90^\circ$, а позитивна између ове две вредности од α. За особити положај, у ком су две брзине једнаке, имаћемо:

$$1 - sin^2\alpha sin^2 A = cos A;\ sin\alpha\, cos\alpha = \frac{tag\,\alpha}{1 + tag^2\alpha} = \frac{\sqrt{cos A}}{1 + cos A.}$$

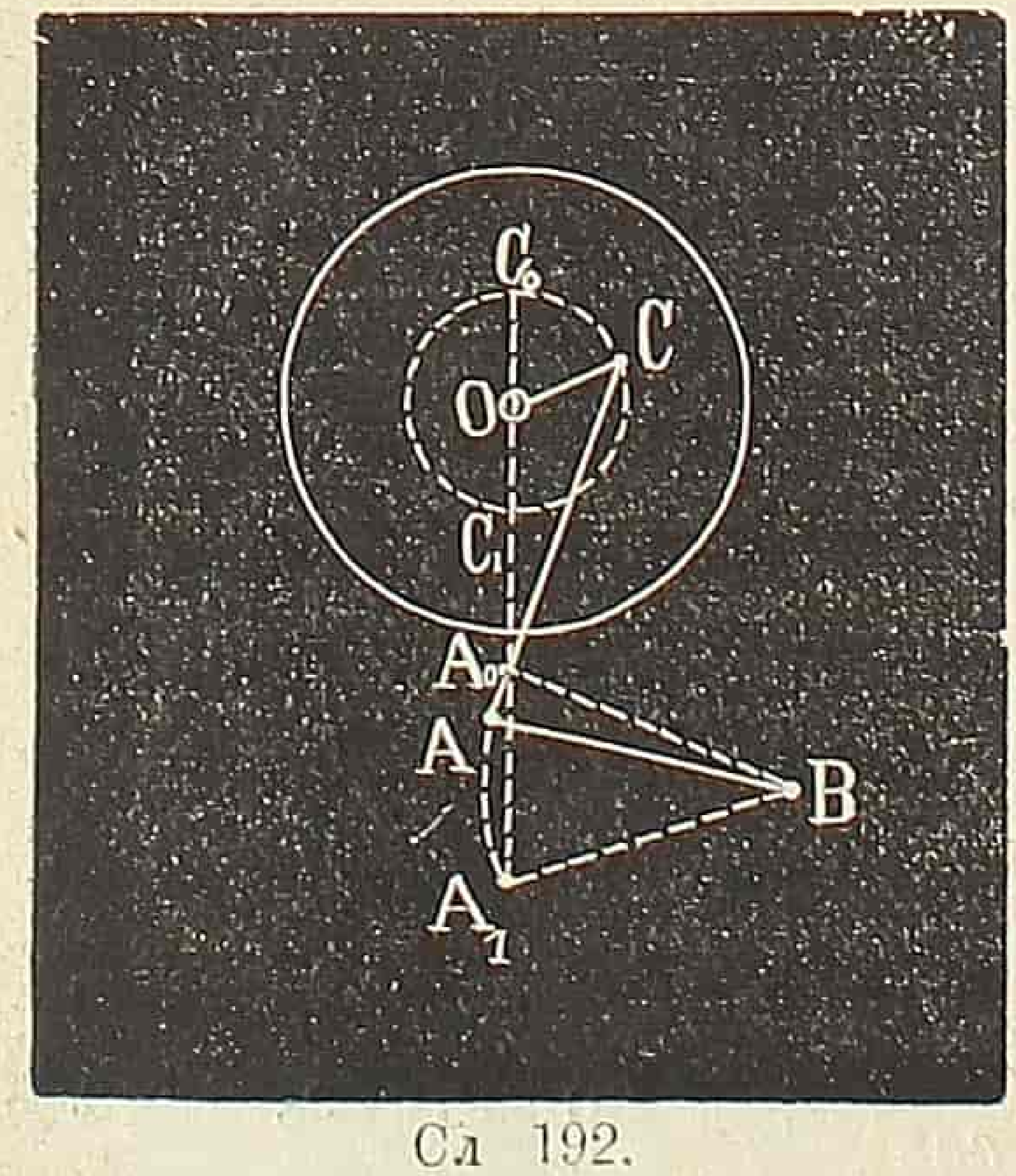
и потоме $$\frac{d\beta^2}{dt^2} = 4w^2 \frac{sin^2 \frac{1}{2} A}{\sqrt{вos\, A.}}.$$

3. Правац преносног кретања периодично менљив — отношење брзина стално или менљиво.

249. Велики се број махински органа налази, који периодично мењају правац кретања, т. је: док се један од органа непрестано креће у једном истом правцу, дотле други у сајузу са првим креће се час у једном час у другом правцу, другим речма тамо амо. — Механизам за обртање точила Сл. 192 на коме се разна сечива изоштравају, може се узети као тип механизма, који спадају у овај род кретања. — Нијаљка AB налази се у своја два крајна положаја, кад се две сајузне тачке A и C, машке AC, налазе у правој пруги са средиштем ручке. У овим положајима $[A_0$ и $A_1]$ брзина нијаљке поставши најпре o; мења свој правац, а две тачке C_0 и C_1 у којима се у овом тренутку налази тачка C ручке, зову се мртве тачке. — Код ових махина пробитачно је, да отношење брзина буде менљиво. И заиста треба свакада тако удесити вопросне органе какве махине, да се брзина кретајућег се органа тамо — амо, правилно умаљава до по-



Сл. 192.



Сл 192.

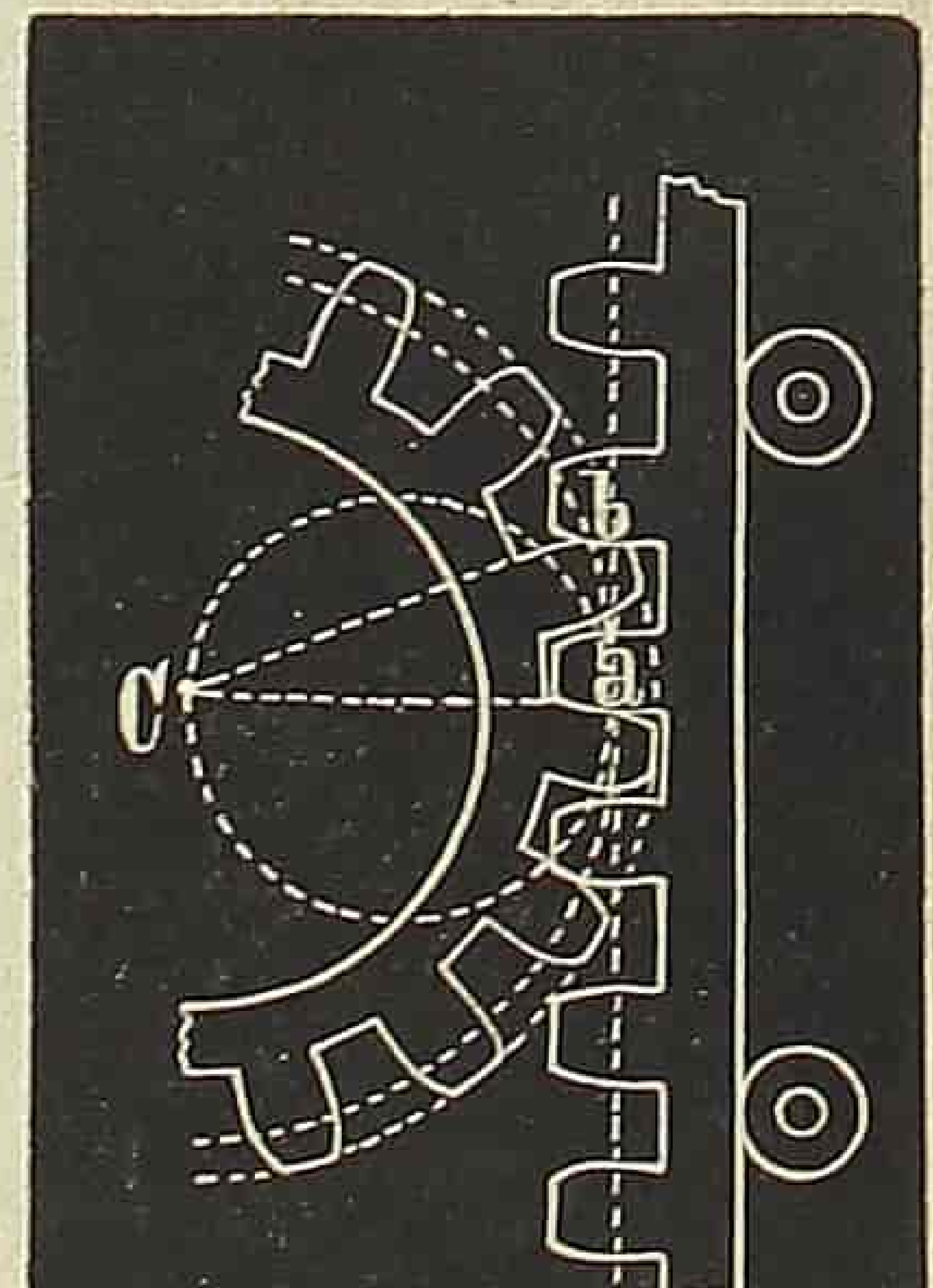
ловине пута вопросног органа до тренутка, у коме се правац његовог кретања мења. — С највећим старањем треба избегавати сваки састав меканизма, код кога би повећа маса нагло прелазила са једне крајње брзине у једном правцу на брзину противположеног правца.

Од многобројни махински органа, којих се правац кретања на изменце (алтернативно) мења, ми смо неке већ до сада напоменули. [Види сл. 106 и т. д.] а неке ћемо сада овде и то најобичније и најупотребљивије по сљедећем реду да наведемо.

Сајуз кружног и право-пружног кретања.

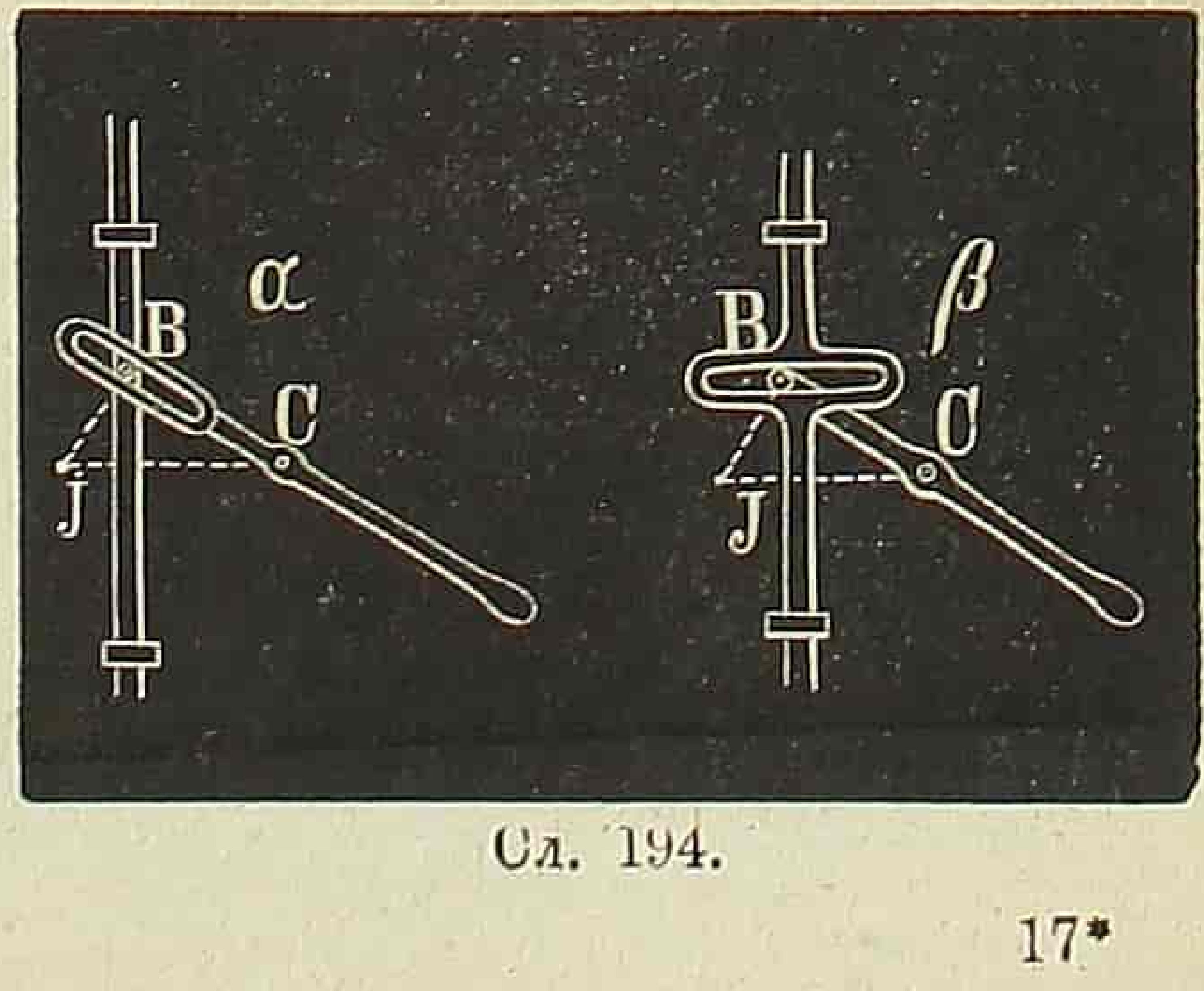
I. Случај. — Оса обртања управна на правац напредовања [напредног кретања.]

250. 1-°. *Зубчаник у сајузу са зубчаницом [кремаљером].* Сл. 193, о томе смо већ говорили на једном месту, [види Сл. 145. . . .].



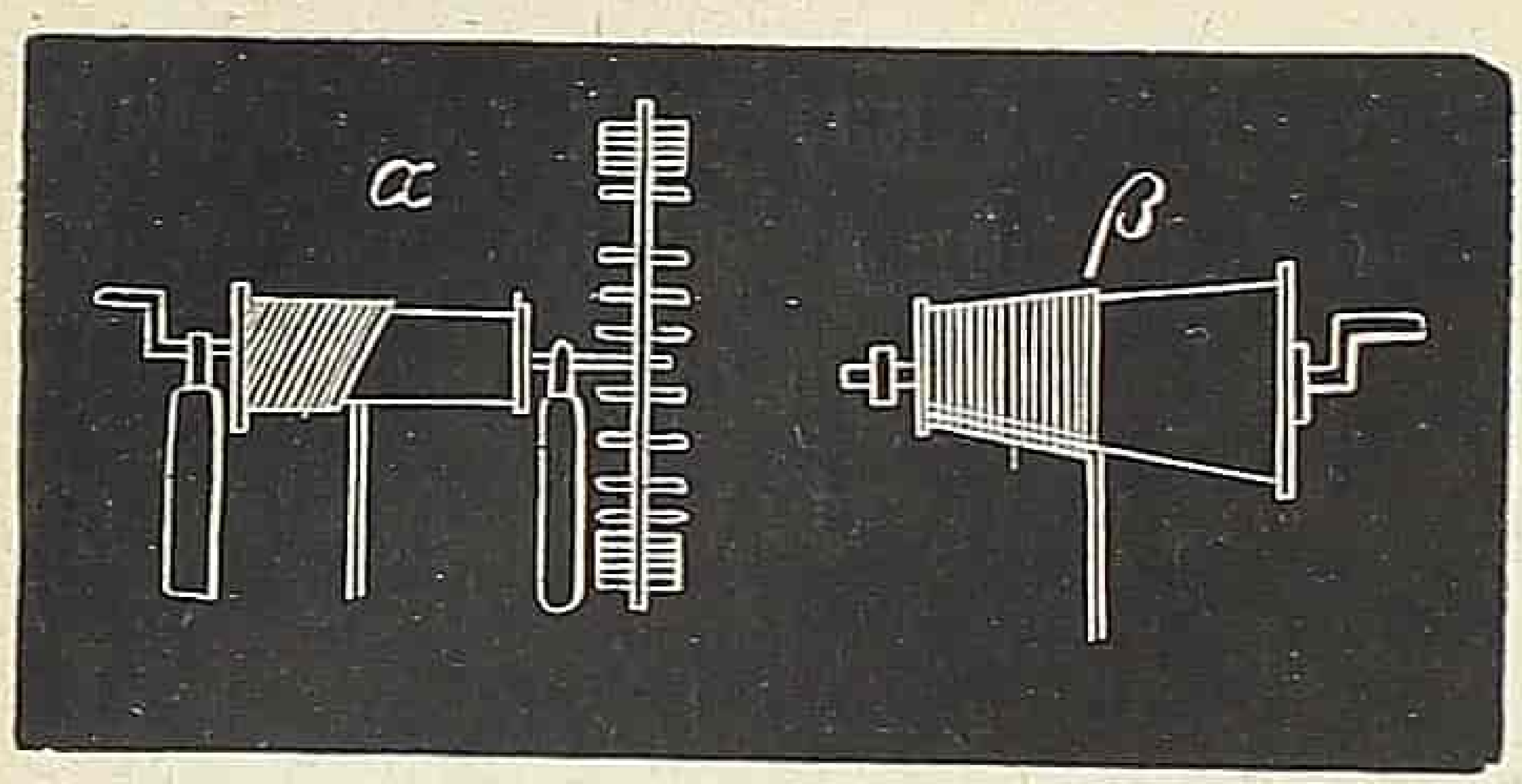
Сл. 193.

2-°. *Нијаљка и држка с процепом.* Сл. 194. под α и β; представља овакове сајузе махински органа. Отношење између брзине v држке и угловне брзине w нијаљке опредељено је изразом.
$v = w\,\overline{CJ}$. [види № 108 задат под 4]. C, је средиште око кога се нијаљка обрће, J пресек нормале у тачки додира B, и нормале повучене из C на правац држке. — [Види № 159 2-ги зад.]



Сл. 194.

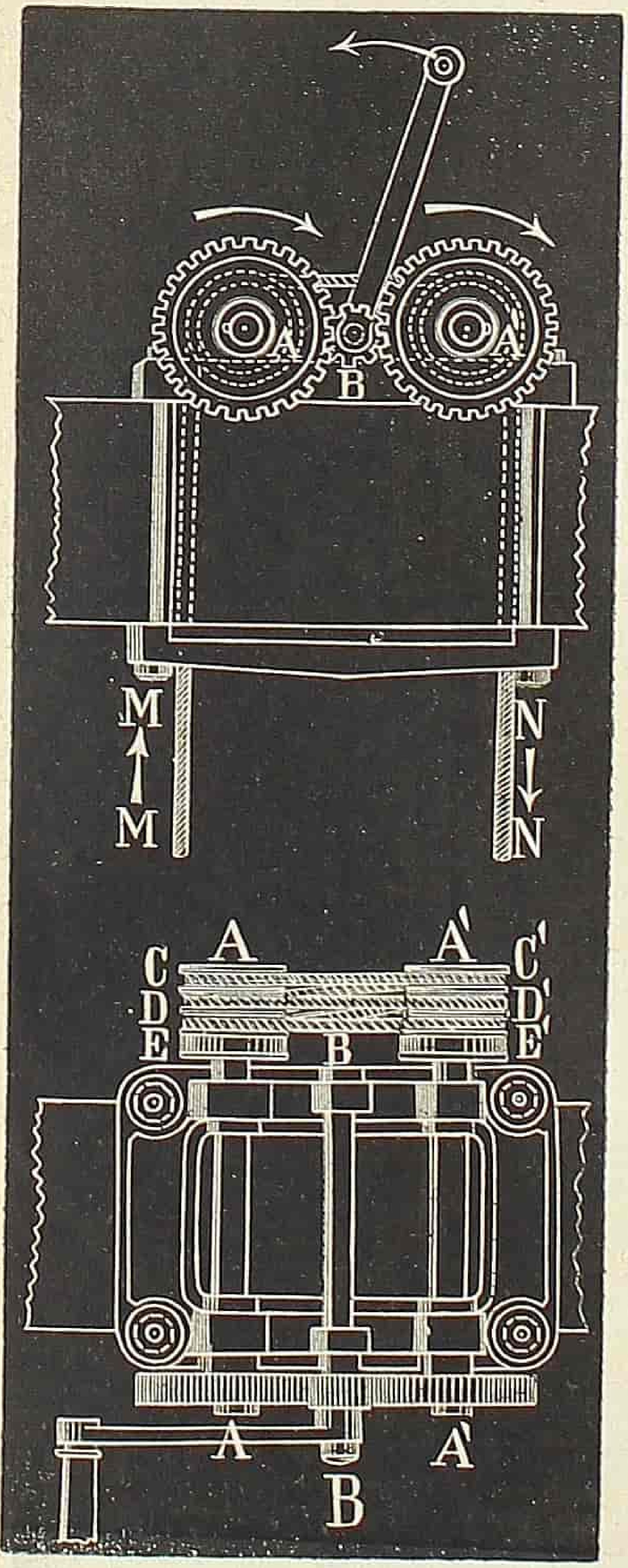
3-$^{\text{е}}$. *Ваљчасти и коничти вито.* Сл. 195 α и β. Отношење између угловне брзине w, хоризонталног витла, и брзине v ма које тачке вертикално ви-



Сл. 195.

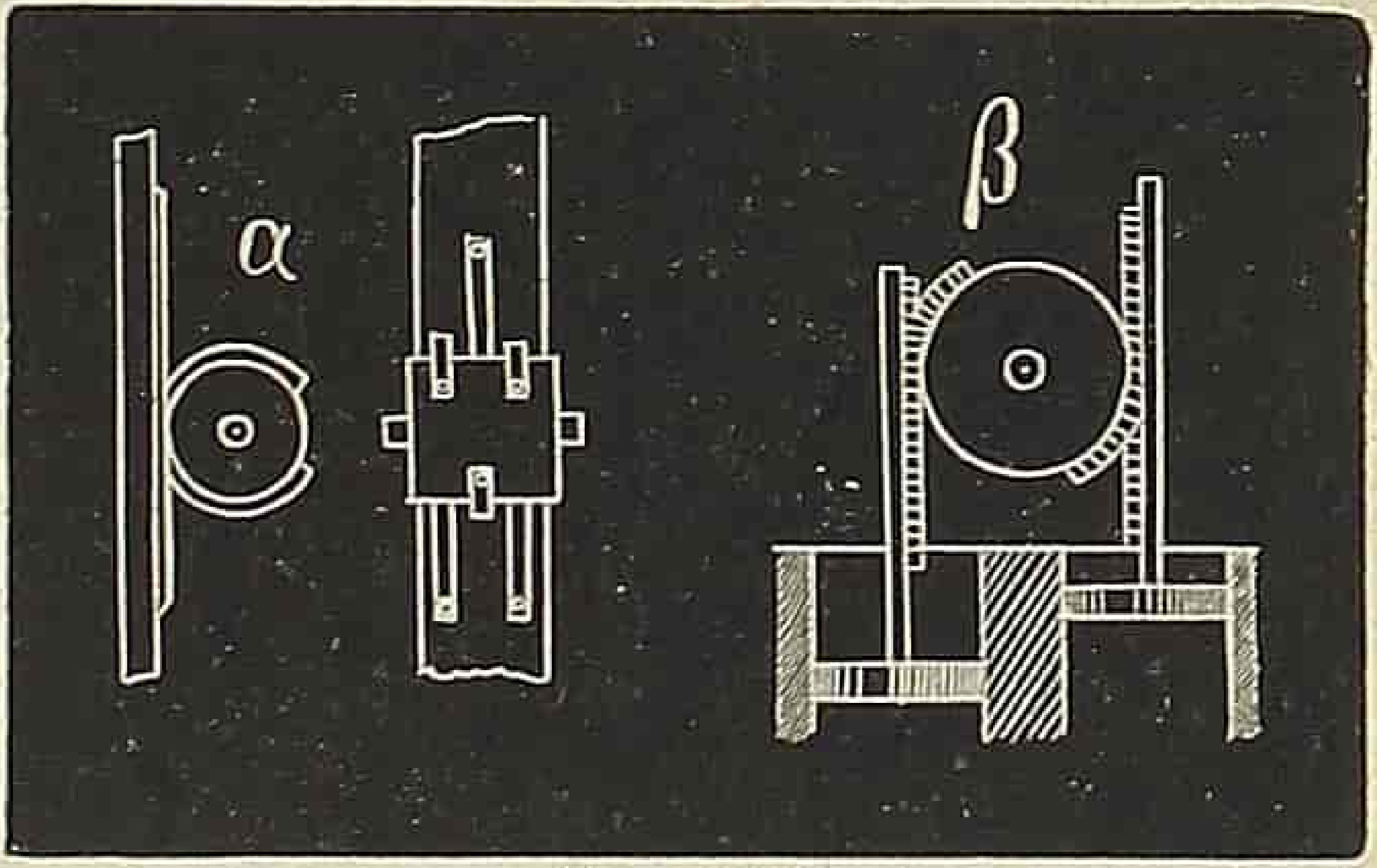
сећег конопца, у првом је случају стално а у другом мењиво.

4-°. *Двогуби попречно олучасти витао.* Код обичног витла конопац се на ваљак намотава само толико колика је дужина ваљка, потоме његова дужина намотавања ограничена је, изузевши случај, кад се конопац у редовима (слојевима) намотава, но у овом случају мења се отношење брзина. — Ова незгода може да се избегне витлом, који је сликом 196 представљен. Две осовине *AA* и *A'A'* равноодстојне су у једној истој равнини, коју ми овде предпостављамо да је хоризонтална, ма да може бити и другог положаја. — Ове две осовине обрћу се у истом правцу и са једнаком брзином. Обртање производи се са два једнака зубчаста точка, која су утврђена на ове осовинс и заватају са мањим точком, који се у средини налази утврђен на осовини *BB*. У противположеним крајевима осовина *AA*, и *A'A'* утврђена су два попречно олучаста ваљка, која су подобна једнаким олучастим котурићима *C*, *D*, *E*, на једној, и *C'*, *D'*, *E'*; на другој осовини. — Конопац *MM* . . . *NN*. . почиње се обмотавати око котура *C*, на ком заузима само једну четвртину периферије, од котура *C* прелази одозго на котур *C'*, на ком заузима половину периферије, затим прелази од *C'* и то одоздо на *D*, одатле се повраћа и одозго пре-



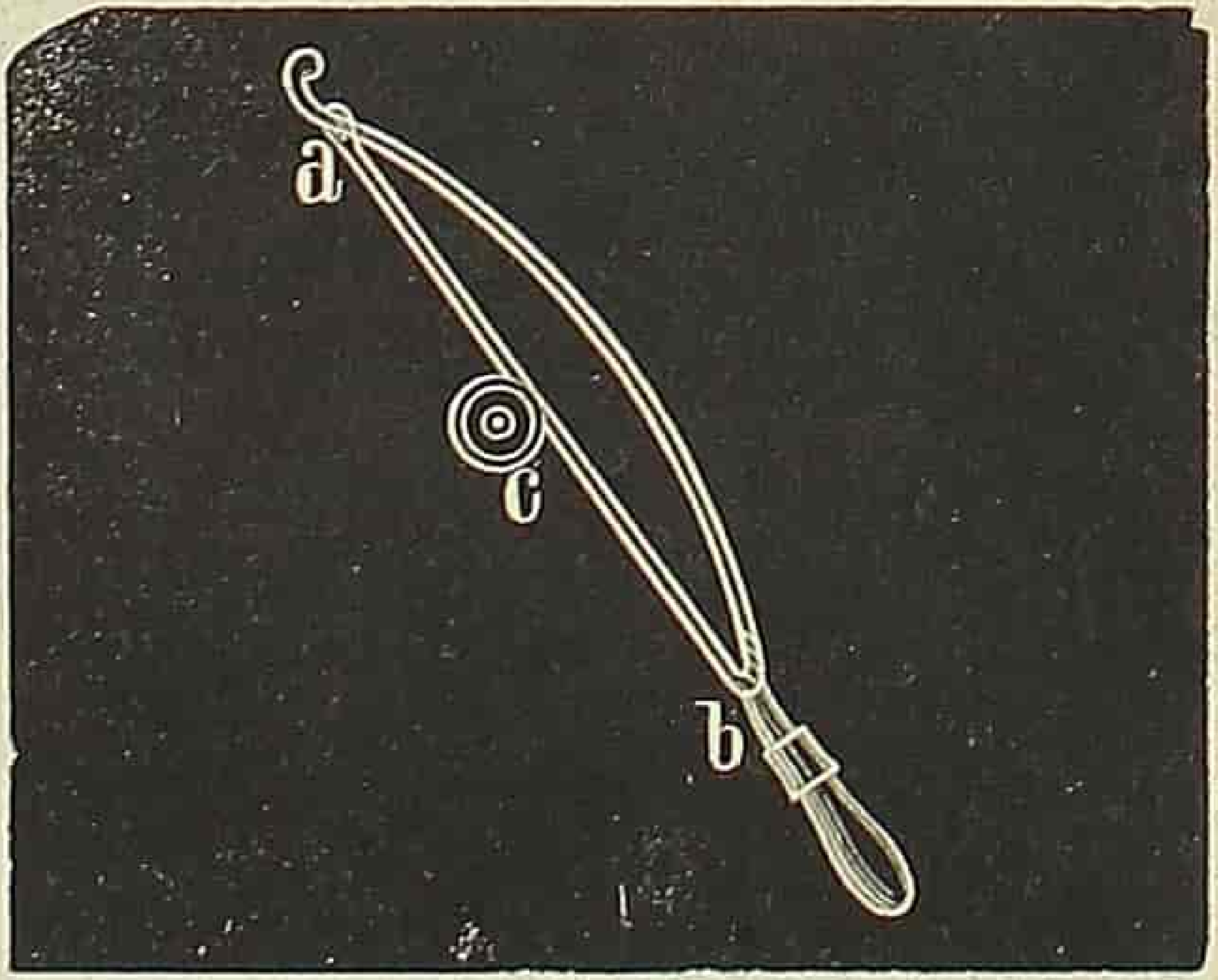
Сл. 196.

лази на котур D'; од овог прелази одоздо на E, и напоследку од E прелази одозго на котур E', на коме заузима једну четвртину периферије, и даље спушта се на ниже са стране *NN*. — Као што ћемо доцније у динамики видити врло мала потега са стране *NN* довољна је да предупреди клизање конопца и онда, кад би велика сила са стране *MM* дејствовала. — Лако је сватити, да кад се ручка и осовине једномерно обрћу, онда ће се и висећи крајеви конопца једномерно и право-пружно кретати. —



Сл. 197.

5. *Точак сајужен са држком средством каиша или ланца.* Сл. 197 под α, и β. Дршка кретајући се вертикално додира ваљчасти точак, изузевши дебљину каиша или ланца. — Каиш или ланац утврђен је једним крајем за точак а другим за држку. Два од ови каиша или ланаца обавијају се у једном а она друга два у другом правцу. —



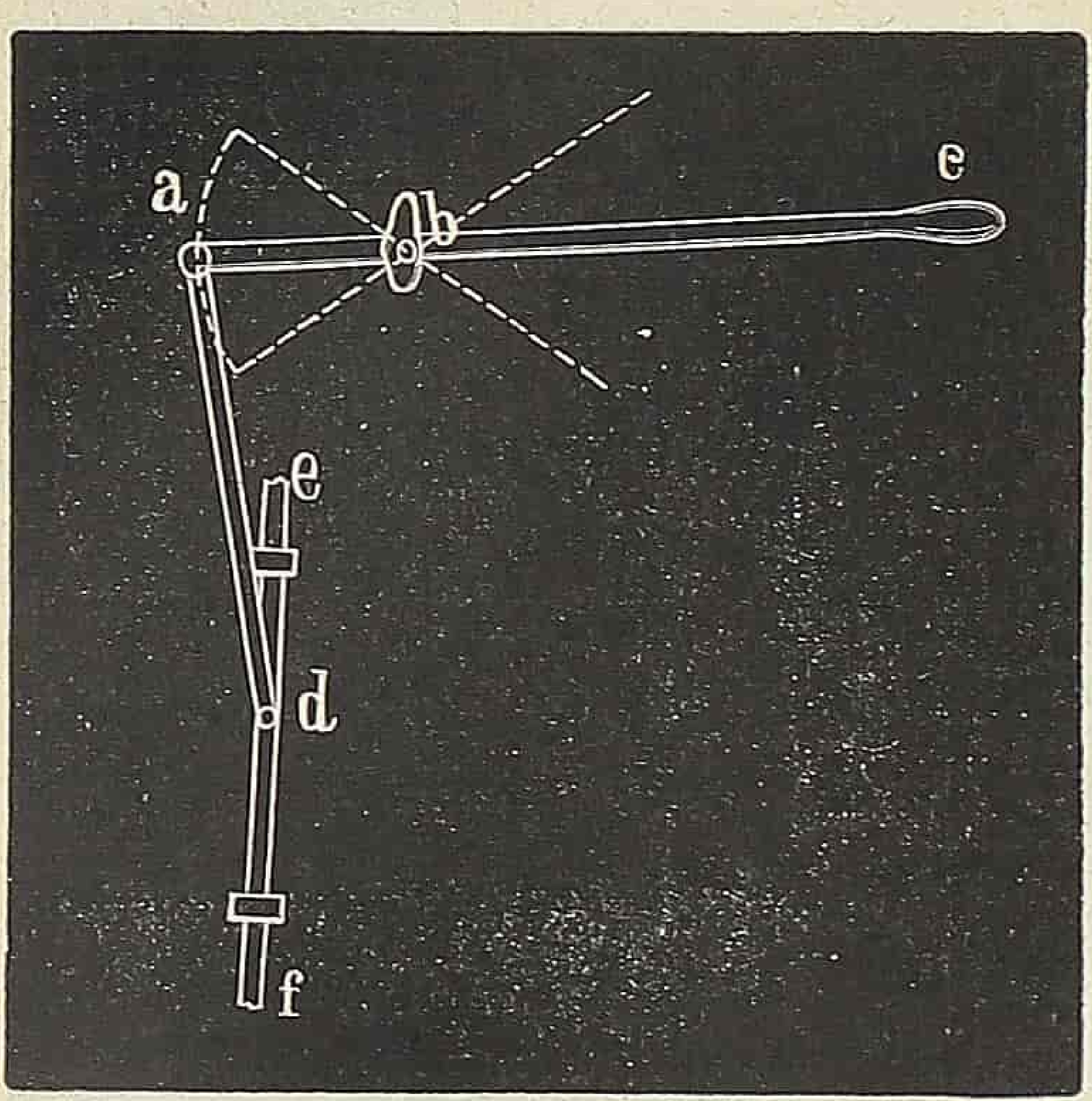
Сл. 198.

6-°. *Гудило. Оно* служи за обртање бургије при бушењу Сл. 198. Ова је справа врло позната. Канап *ab* гудила обавијен један пут око једног малог ваљка *c*, на коме је утврђена бургија. Овај ваљак обрће се на изменце у два правца при правопручном кретању гудила тамо амо; [час у једном час у другом правцу.] —

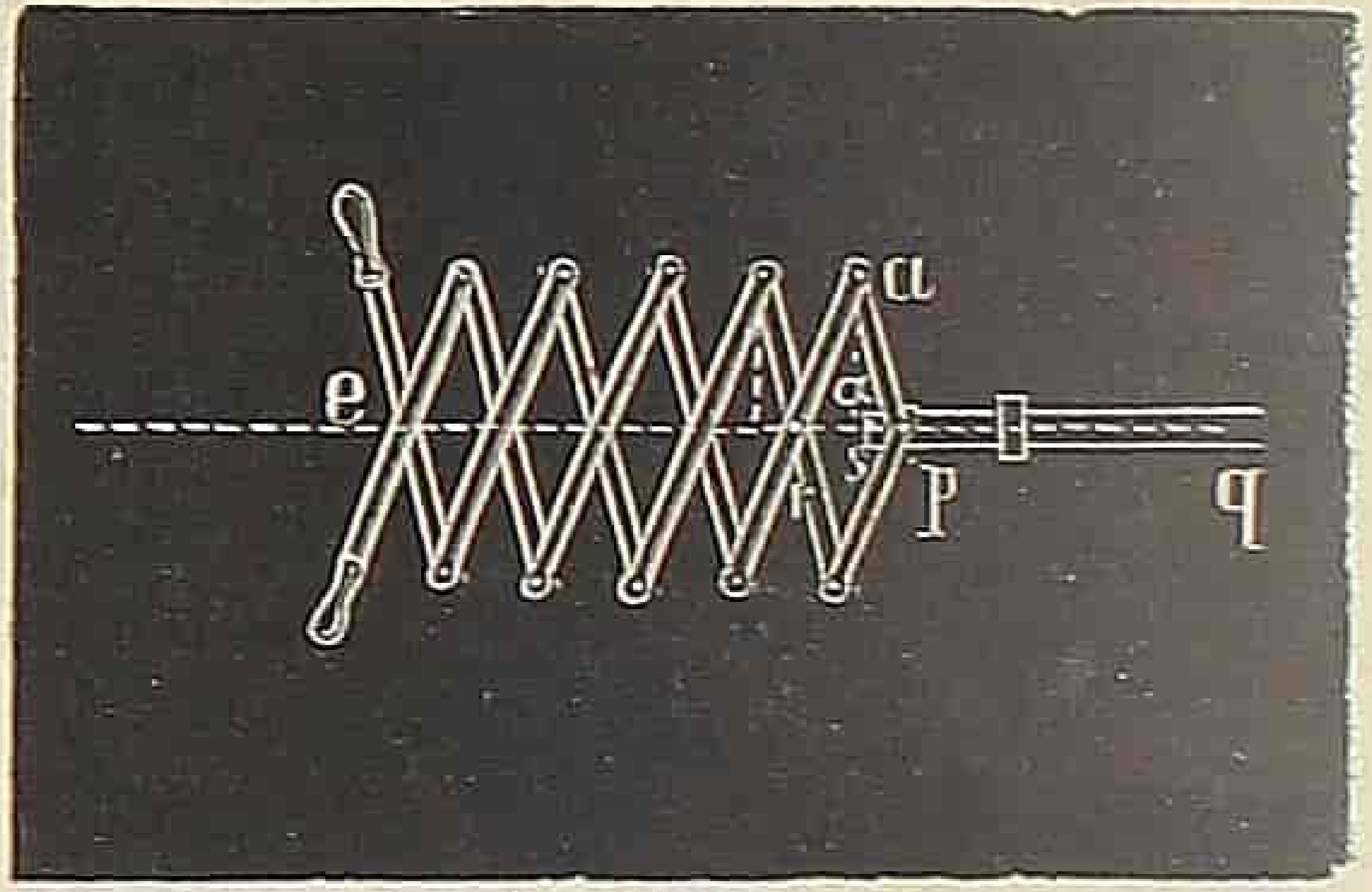
7-°. *Нијаљка abc, проста машка ad и држка edf Сл. 199* Отношење брзина нијаљке и држке опредељује се по правилу под № 108 зад. 4°.

8-°. О нијаљки са уздицом и о паралелограму Watt-а говорили смо под № 175 и 176.

9-°. *Циг-цаг.* Сл. 200. Ако означимо са a, дужину стране једног ромба; са n, број овакови ромба, са α. мењлив уго њиови страна са правцем кретне држке pq; x одстојање сталне



Сл. 199.



Сл. 200.

$$\left.\begin{array}{l} a \cos\alpha = \overline{sp} \\ a \cos\alpha = rs \end{array}\right\} \text{дакле } \overline{rp} = 2a \cos\alpha$$

осе e од врха последњег ромба, који је непосредно са држком сајужен, онда ће бити:

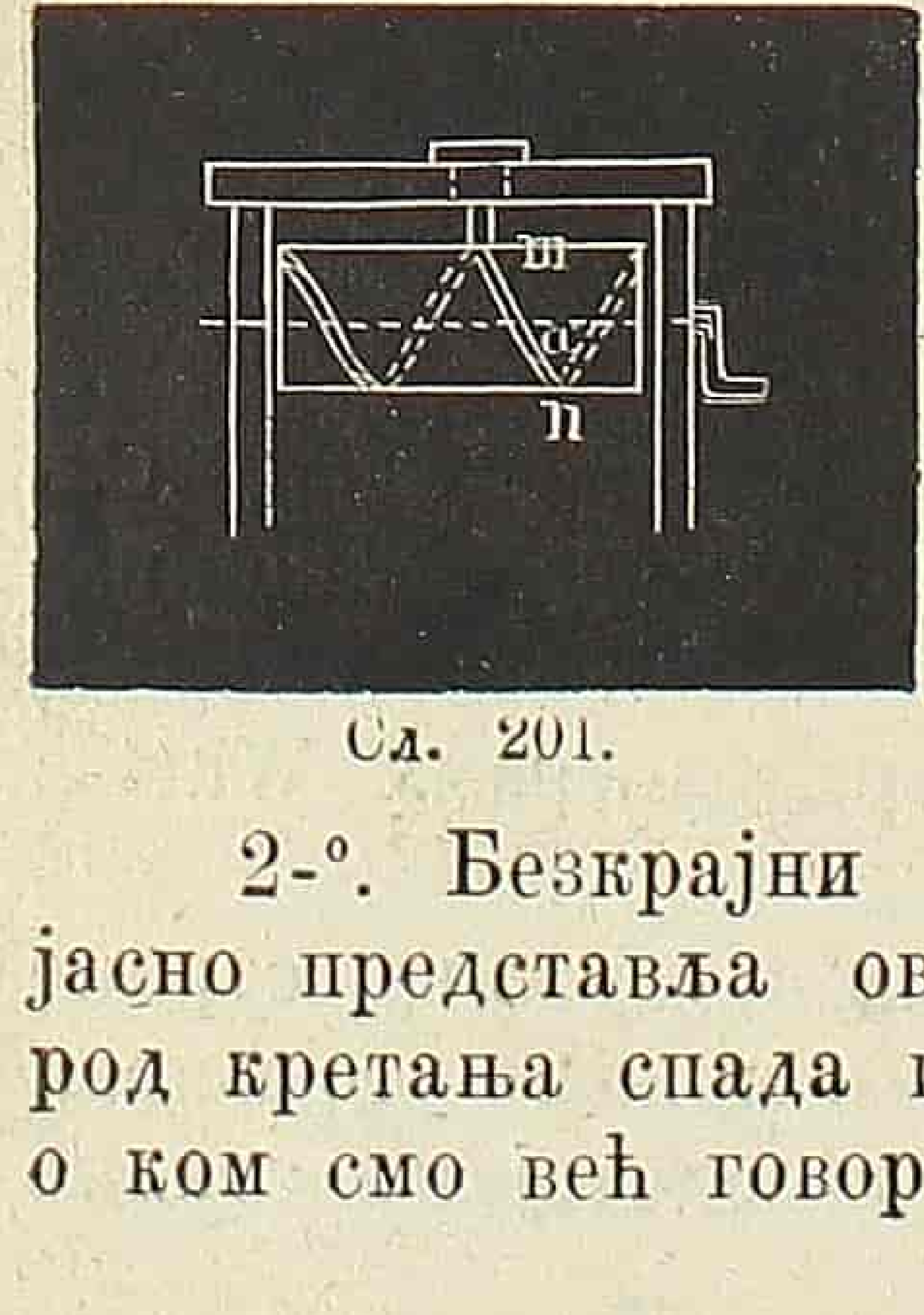
$$x = 2\,na \cos\alpha \qquad \text{и отуда}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\,na \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

и овом једначином изражено је отношење између брзина држке и угловне брзине кретке — (leviers). —

II. Случај. Оба обртања равноодстојна са правцем напредног кретања.

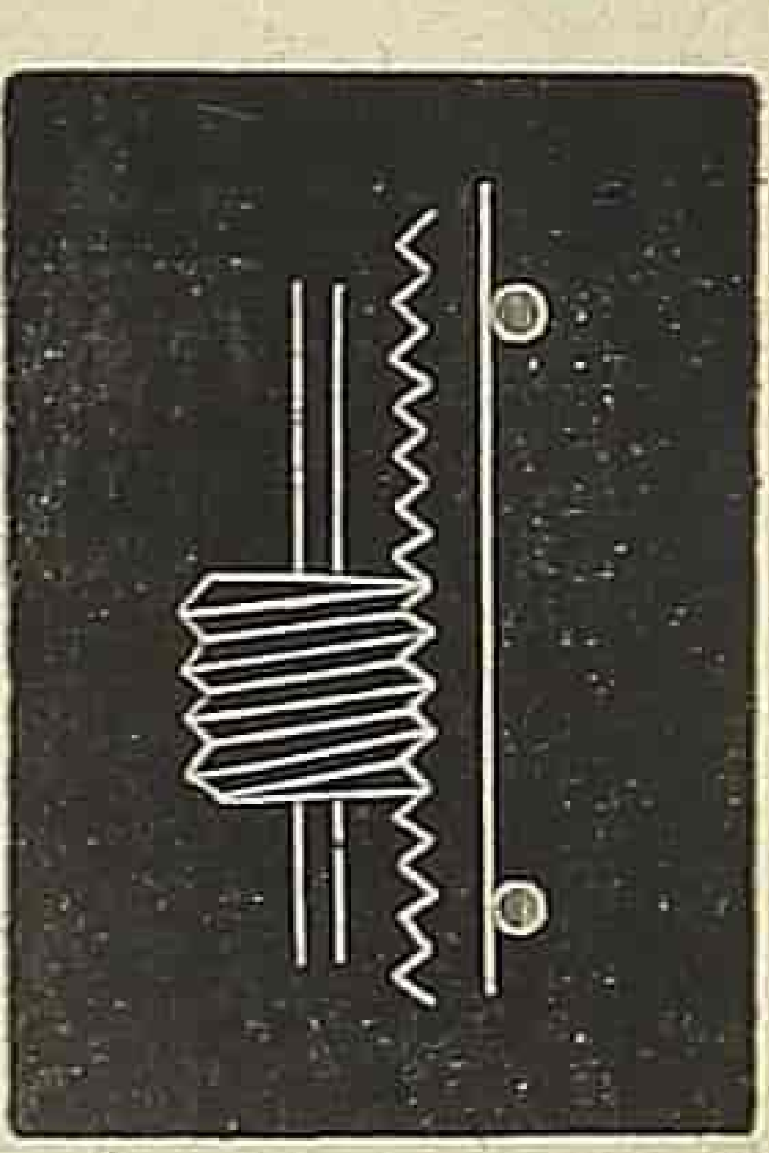
251. 1-°. Олучасти ваљак са клизајућим клином. Сл. 201. Споља ваљак је уздужно изолучен. У овај олук (жљеб). сталне ширине, улази један ваљчасти клин, кога је пречник скоро раван ширини олука. Клин сајужен са чврстим телом може се при обртању ваљка кретати само равноодстојно са његовом осом, и закон овог кретања зависи од нагиба олука према производницама ваљка. —



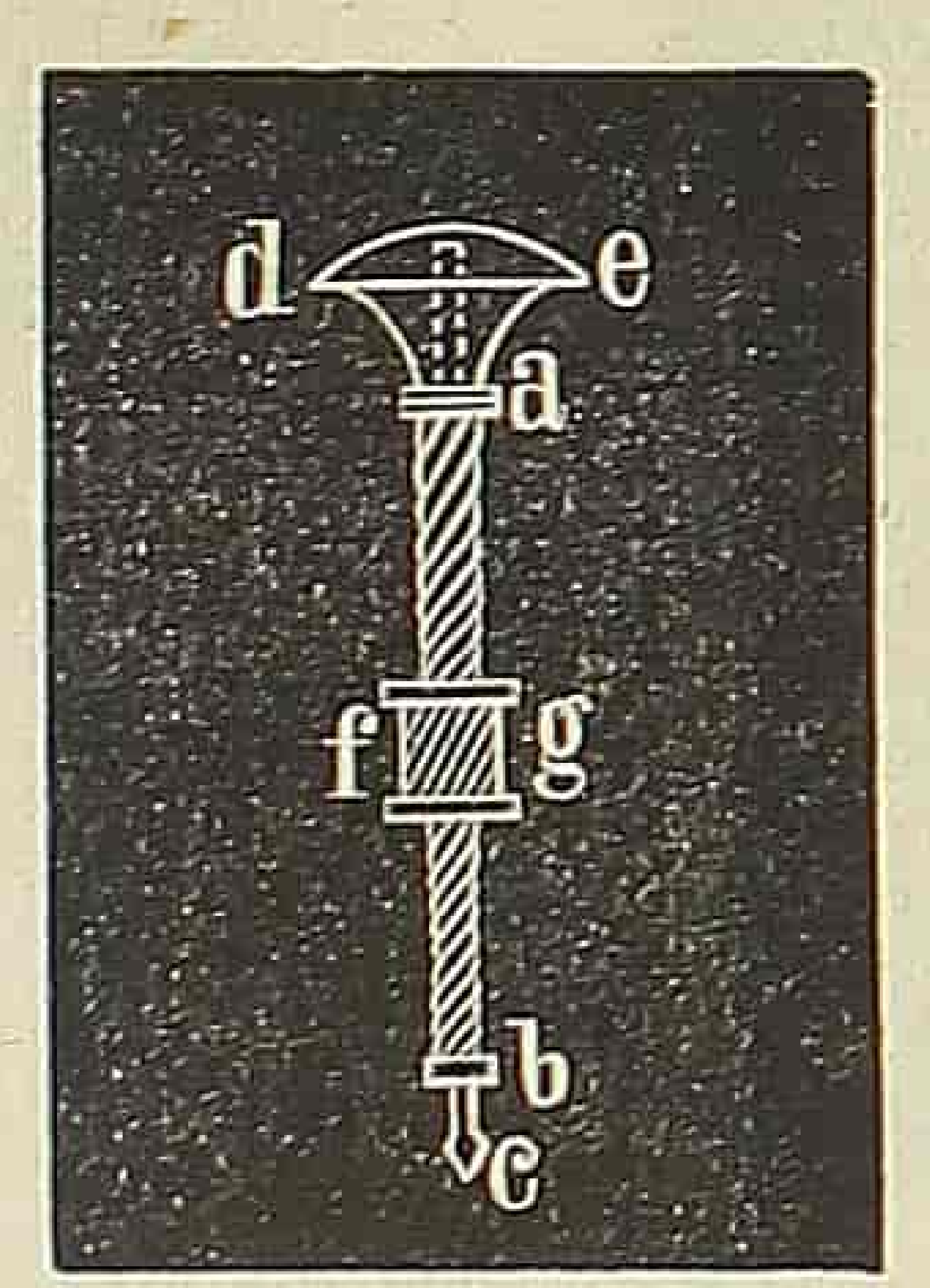
Сл. 201.

2-°. Безкрајни шраф и зубчаница [кремаљера] Сл. 202 јасно представља овај меканизам без даљег описа. У овај род кретања спада и прости шраф са покретном завртком, о ком смо већ говорили види Сл. 149. —

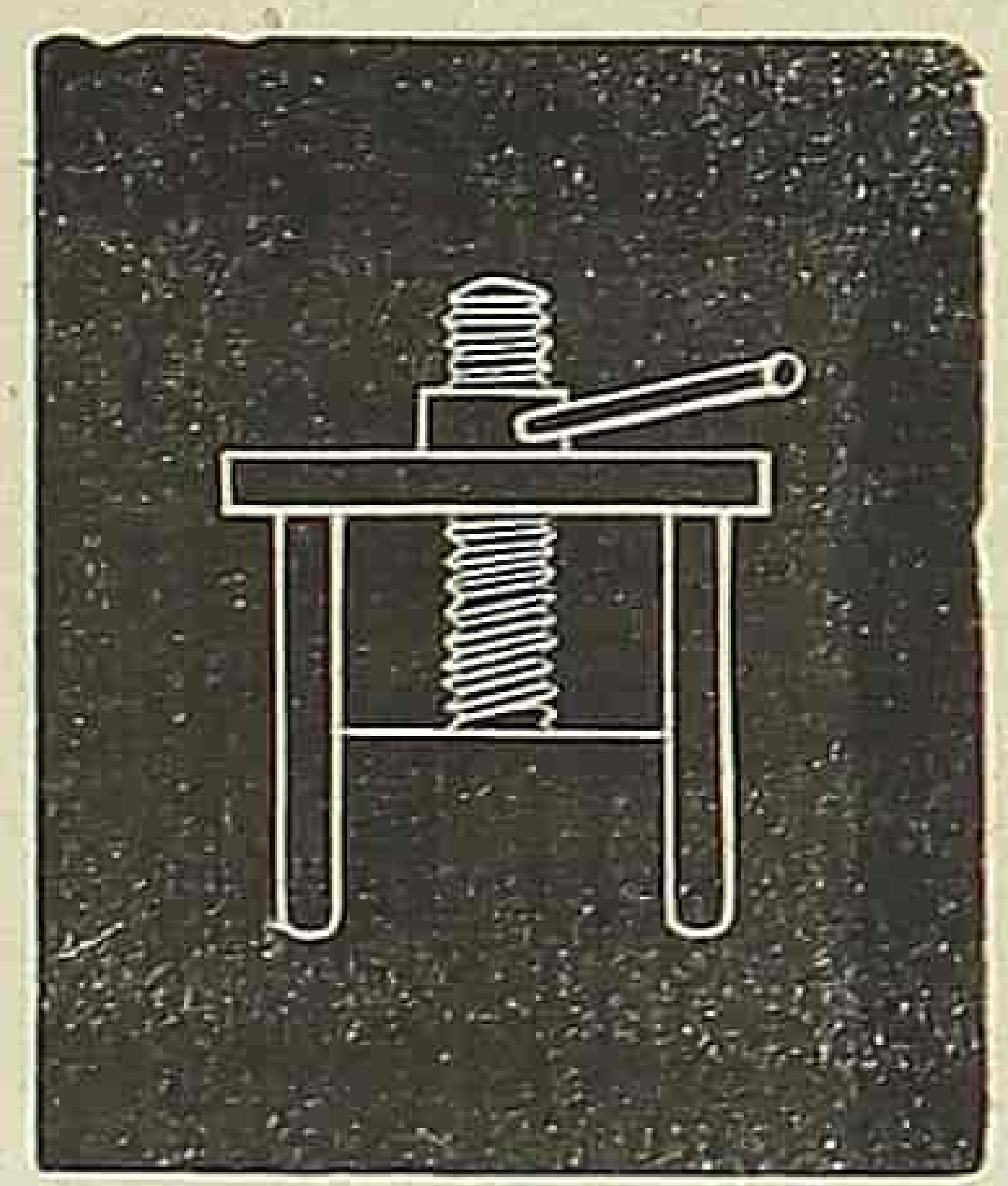
3-^{e}. Бургија за бушење метала Сл. 203. *a b*; вертикални шраф са врло нагнутим завојцима (filets). На једном крају овог шрафа утврђена је бургија *c*; а други крај служи као пиво, који улази у главу *dc*; раденик држи чврсто једном руком ову главу, а другом покреће завртку *fg* горе доле, у сљел чега бургија се обрће час у једном час у другом правцу. —



Сл. 202.



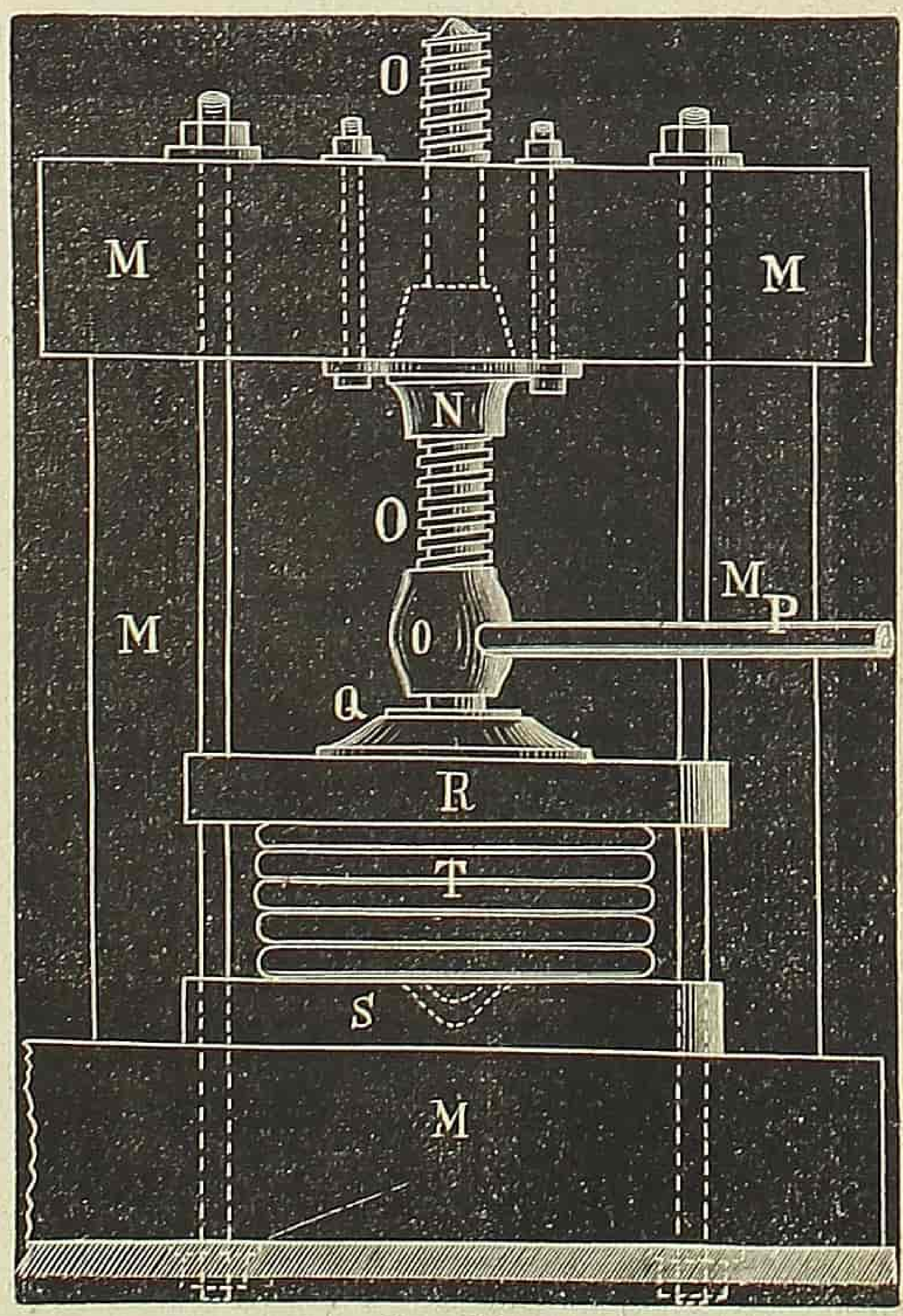
Сл. 203.



Сл. 204.

4-^{o}. Обртање завртке и напредно кретање шрафа. Сл. 204. — За сваки обрт завртке шраф се помери за један корак завојка (filets), ма колики да је број ови завојака. —

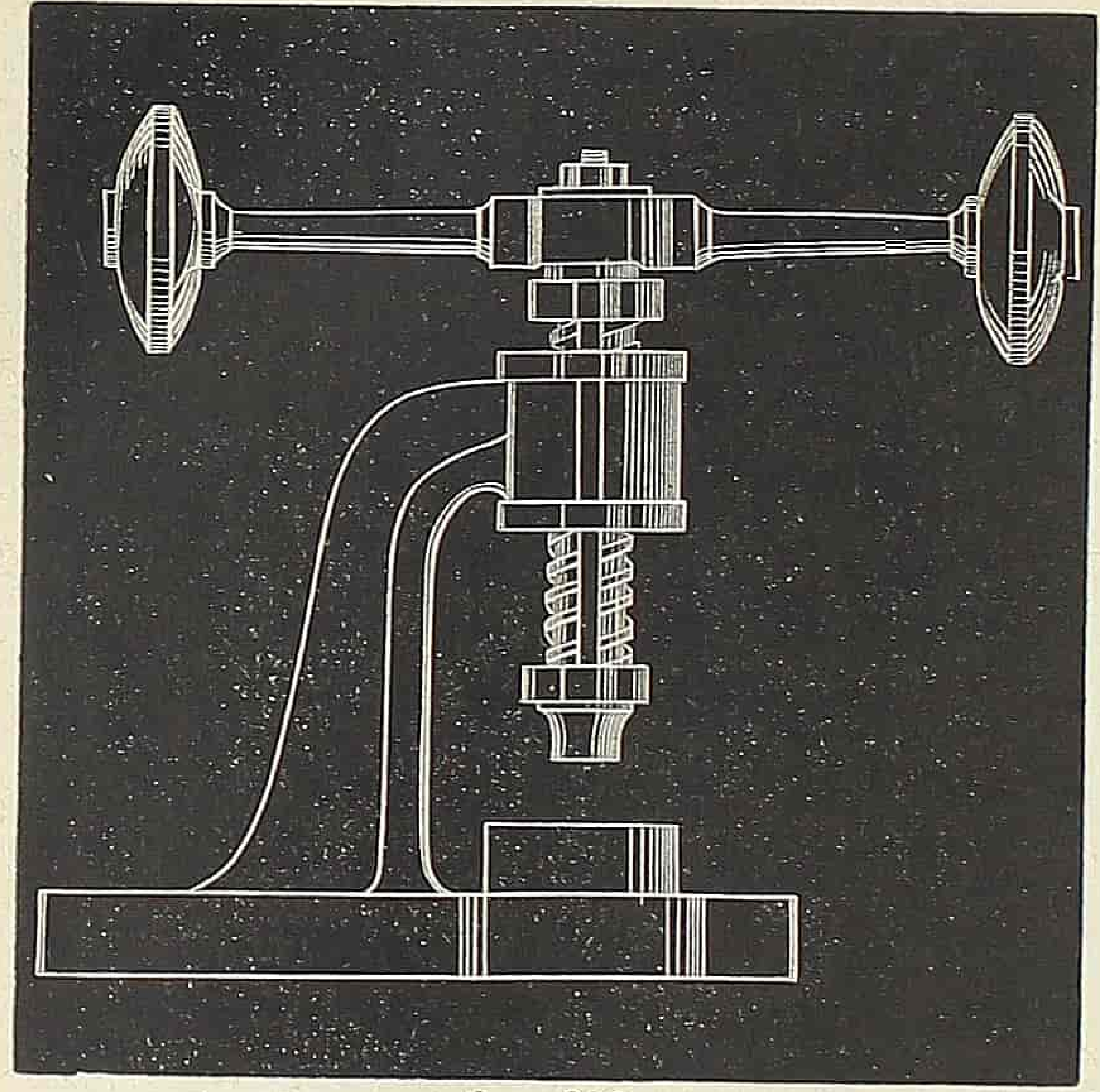
5-^{o}. Обртање шрафа у сталној завртки. [1] Код оваакови меканизма, кретање шрафа несастоји се само у простом обртању, већ је ово кретање хелисоидно, (шравно) сложено из обртања и напредовања. Ови



Сл. 205

---

[1] Боље би било по мом сватању, да се у место речи „завртка“ узме реч шрафница [ecrou, mouter.]



Сл. 206.

механизми употребљују се да се произведе напредно кретање другог неког тела. Као пример наводимо овде пресу са шрафом Сл. 205, и пресу за маркирање или ударање печата Сл. 206. — [Код Сл. 205 *M*. рам од дрвета, *N* завртка од бронзе; *O* шраф од гвожђа. *P* кретка (Levier). *Q* подпора с' чанком, у коме се обрће. *R* покретна табла, *S* утврђена табла, *T* материја за пресовање.] —

III. Сајуз два право-пружна кретања.

Сл. 207.

252. Две кретне држке $A'B$, $A'B'$ са јужене са једном машком. AA' Сл. 207. Тренутно средиште обртања машке, налази се у пресеку O две праве $\overline{AO}$ и $\overline{A'O}$, које су повучене кроз A, и A', управно на правце по којима се држке крећу. — Ако дакле означимо са v, и v', брзине држака, имаћемо:

$$\frac{v}{\overline{AO}} = \frac{v'}{\overline{A'O}}, \text{ и као што је } \frac{\overline{AO}}{\overline{A'O}} = \frac{sin\,\alpha'}{sin\,\alpha}, \text{ то}$$

ће бити: $\underline{v\, sin\,\alpha = v'\, sin\,\alpha'}$

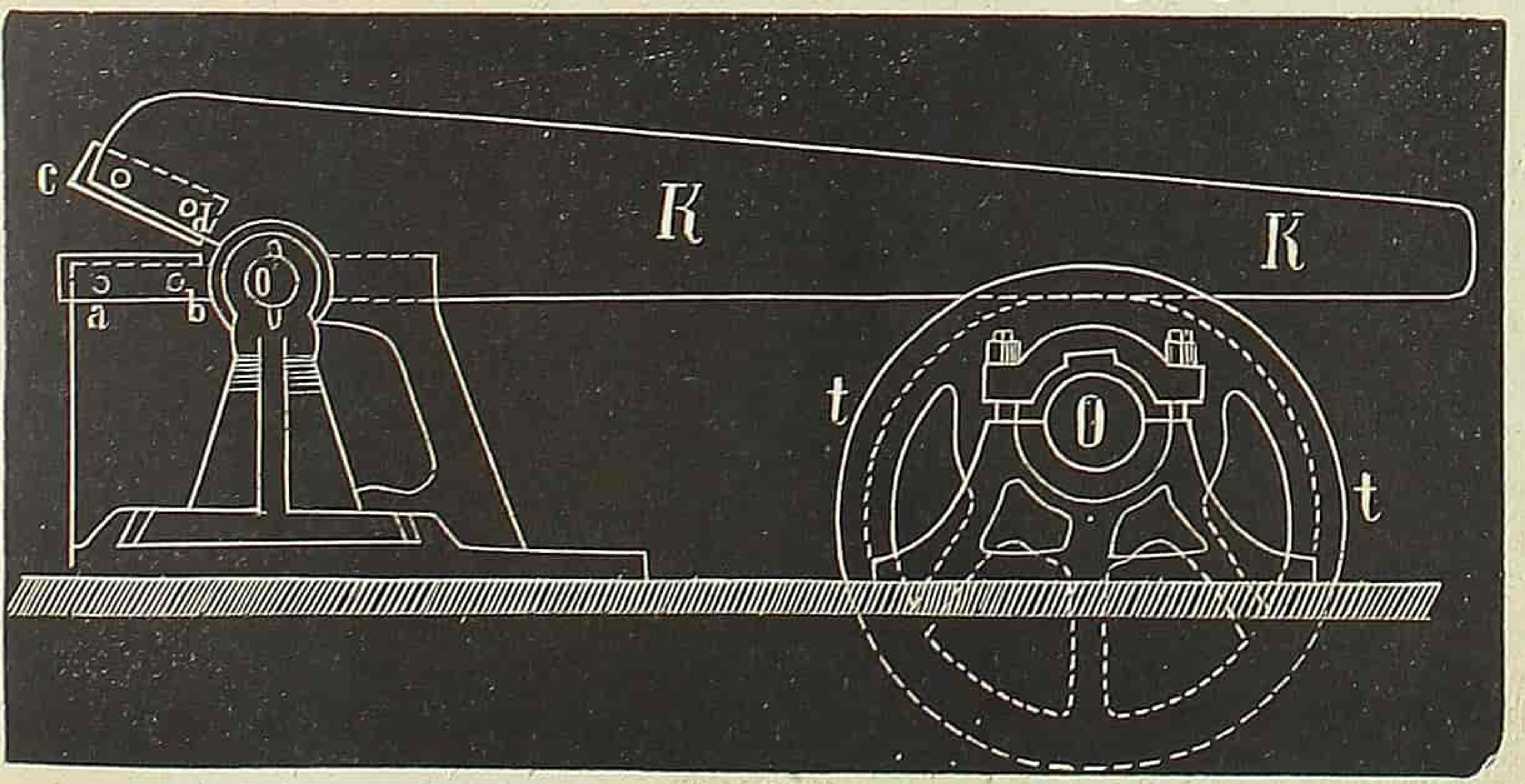
Овај последњи израз вреди и за случај, кад се држке неналазе у једној истој равнини. У овом случају сајуз у A, и A', мора бити у виду зглавка. —

О другим случајима, који спадају у овај род сајуза махински органа, говорили смо на другом месту. Види слике. 87, 88; 155; 156; 157; 158; 159; и т. д.

IV. Сајуз два кружна кретања, од којих једно је непрекидно а друго нијајуће тамо амо (алтернативно).

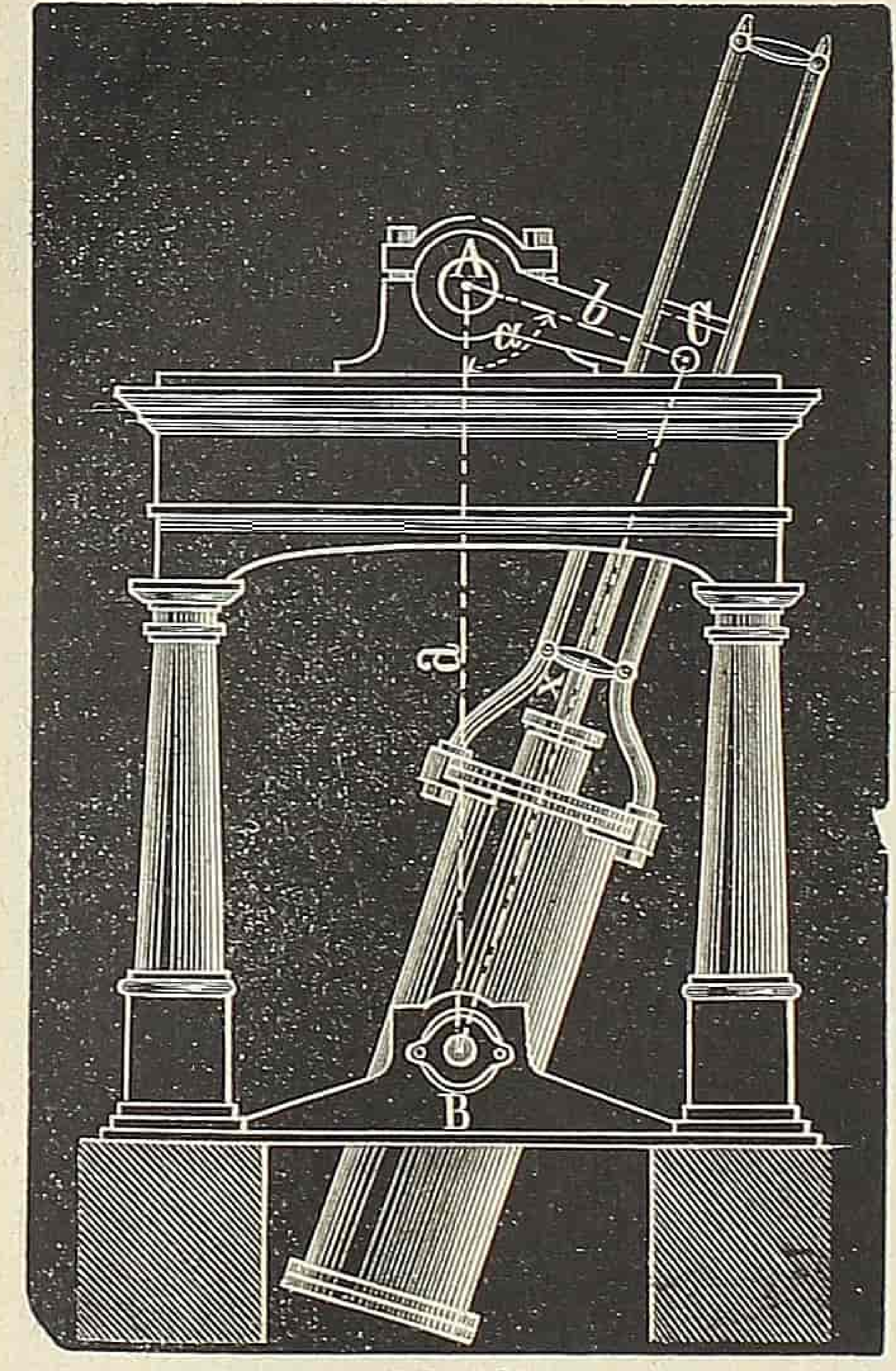
253. Меканизми који спадају у овај род сајуза, јесу:

1-°. Маказе за сечење гвожђа [гвоздени табли блеха] састоје се из једне сталне $\overline{ab}$, и једне обртне $\overline{cd}$ чељусти око сталне тачке o. Сл. 208. — Ова последња продужава се даље, и ослања се на ексцентрични точак, који се пуно-кружно обрће око осе O. Отношење између угловни брзина обртног крака $\overline{KK}$, и ексцентричког точка опредељује се по теорији под № 159 I зедатак. —



Сл. 208.

Приметба. Ексцентрик $t.t'$, може бити и другог вида а не баш кружног; а тако исто и осе обртања могу бити неравноодстојне. —



Сл. 209.

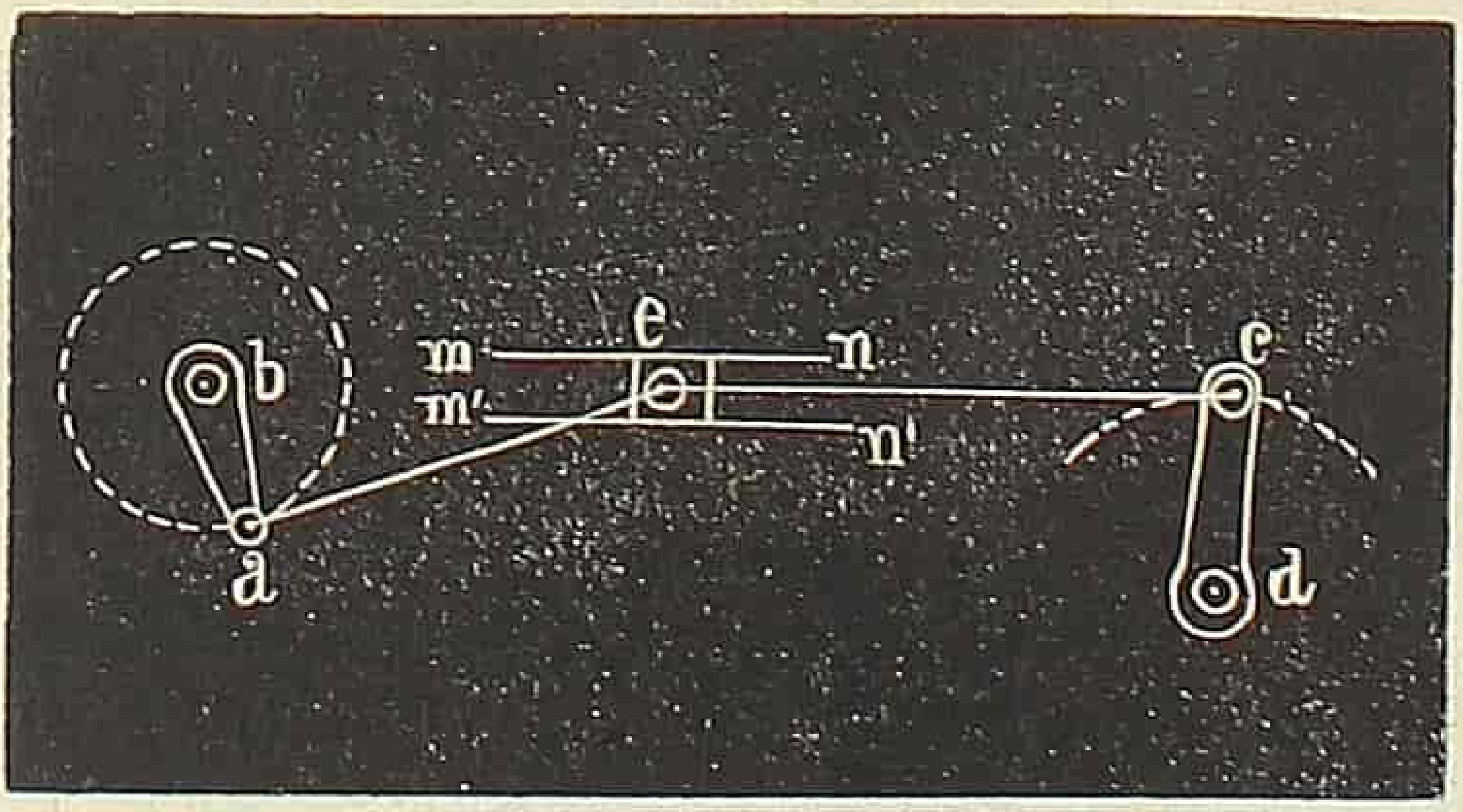
2° Нијајући се цилиндер у сајузу са ручком, која се пуно-кружно обрће око осе A. Сл, 209. Ако означимо са a стално одстојање двеју оса обртања A и B, са b крак ручке $\overline{AC}$, са x мењливо одстојање тачке C од осе B, напоследку са α — мењливи уго ручке са правом $\overline{AB}$, имаћемо:

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha, \text{ одкуда}$$

$$x \frac{dx}{dt} = ab \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

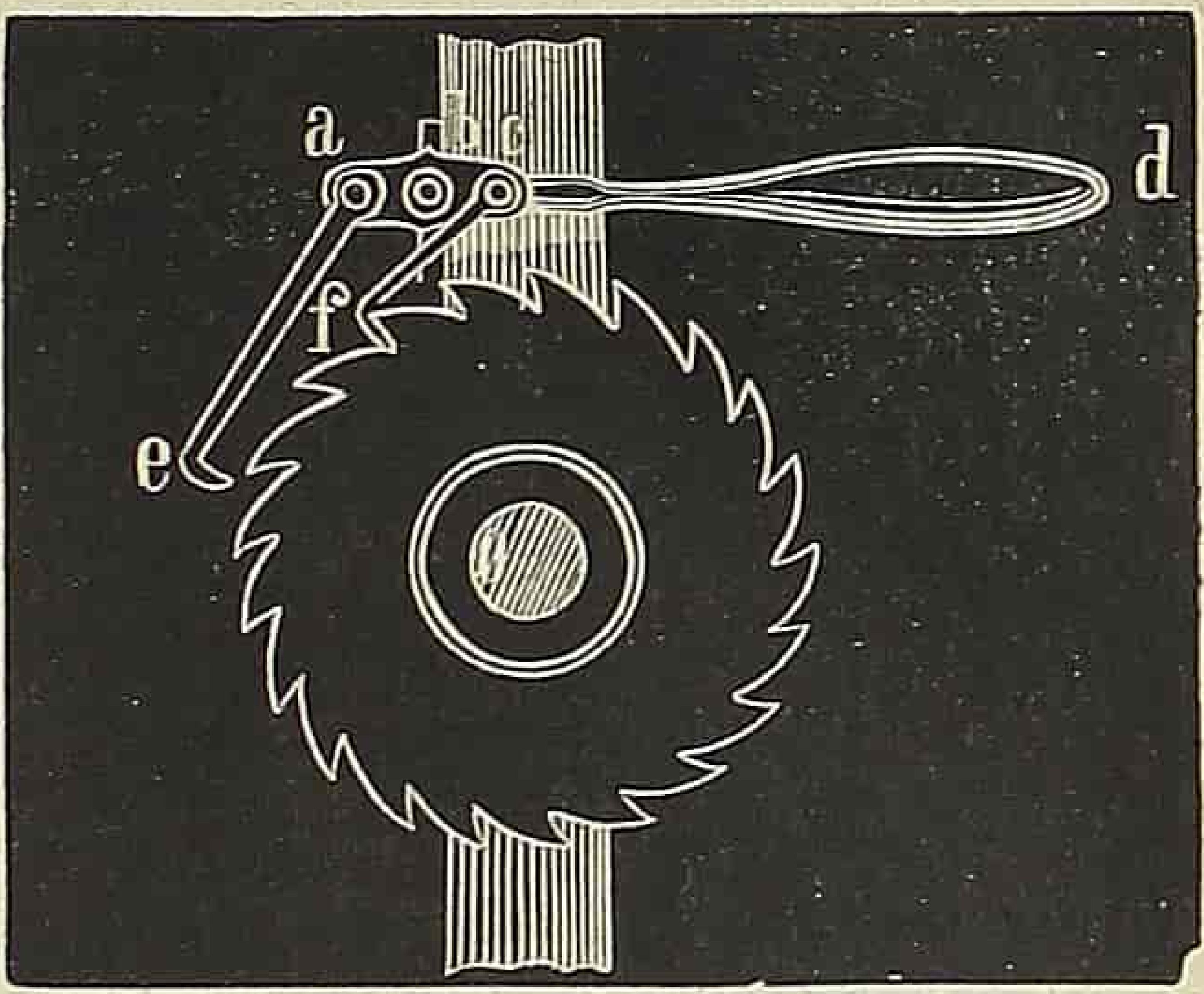
једначина, кајом је сајужена брзина тачке C, по правцу $\overline{CB}$, са њеном угловном брзином око тачке A. —

3° Ручка пунокружног обрта и машка сајужена у виду шарнире или зглавка са нијаљком, које је оса обртања равноодстојна са осом ручке. — Ови механизми представљени су сликама 106 и 192.



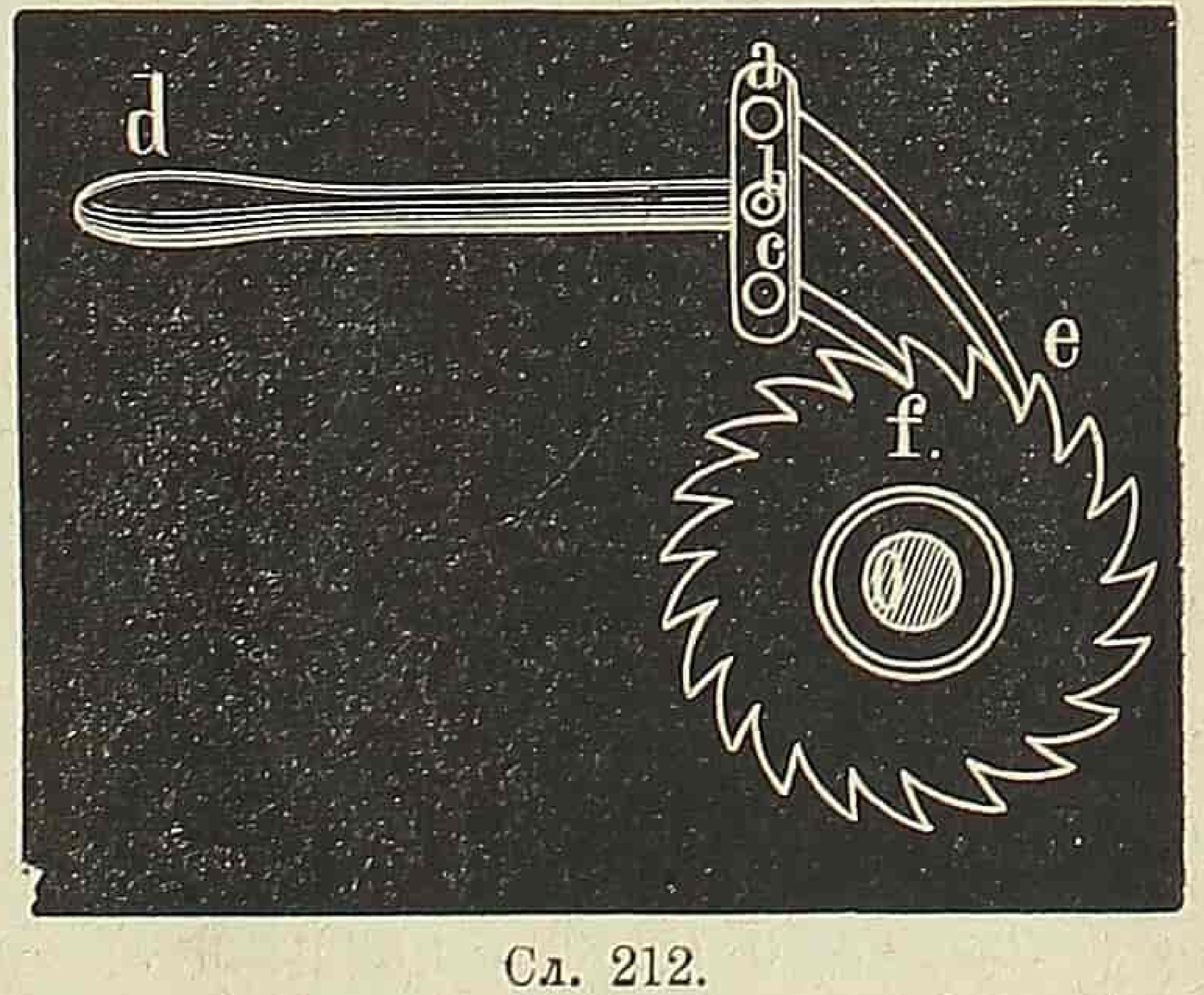
Сл. 210.

4° Слика 210, представља меканизам, код ког се ручка ab пуно-кружно обрће око осе b, а нијаљка $\overline{cd}$ нија око осе d, — Ова два органа сајужена су међусобом средством две машке $\overline{ae}$, и $\overline{ec}$, које стоје у сајузу средством клизајућег се тела e; — Дре право-пружне клизавице mn и $m'n'$ по коима клиза тело е; равноодстојне су међусобом. — Осе обртања b и d; могу бити и неравноодстојне, само у овом случају, клизавице морају бити у исто време управне на обе ове осе. —



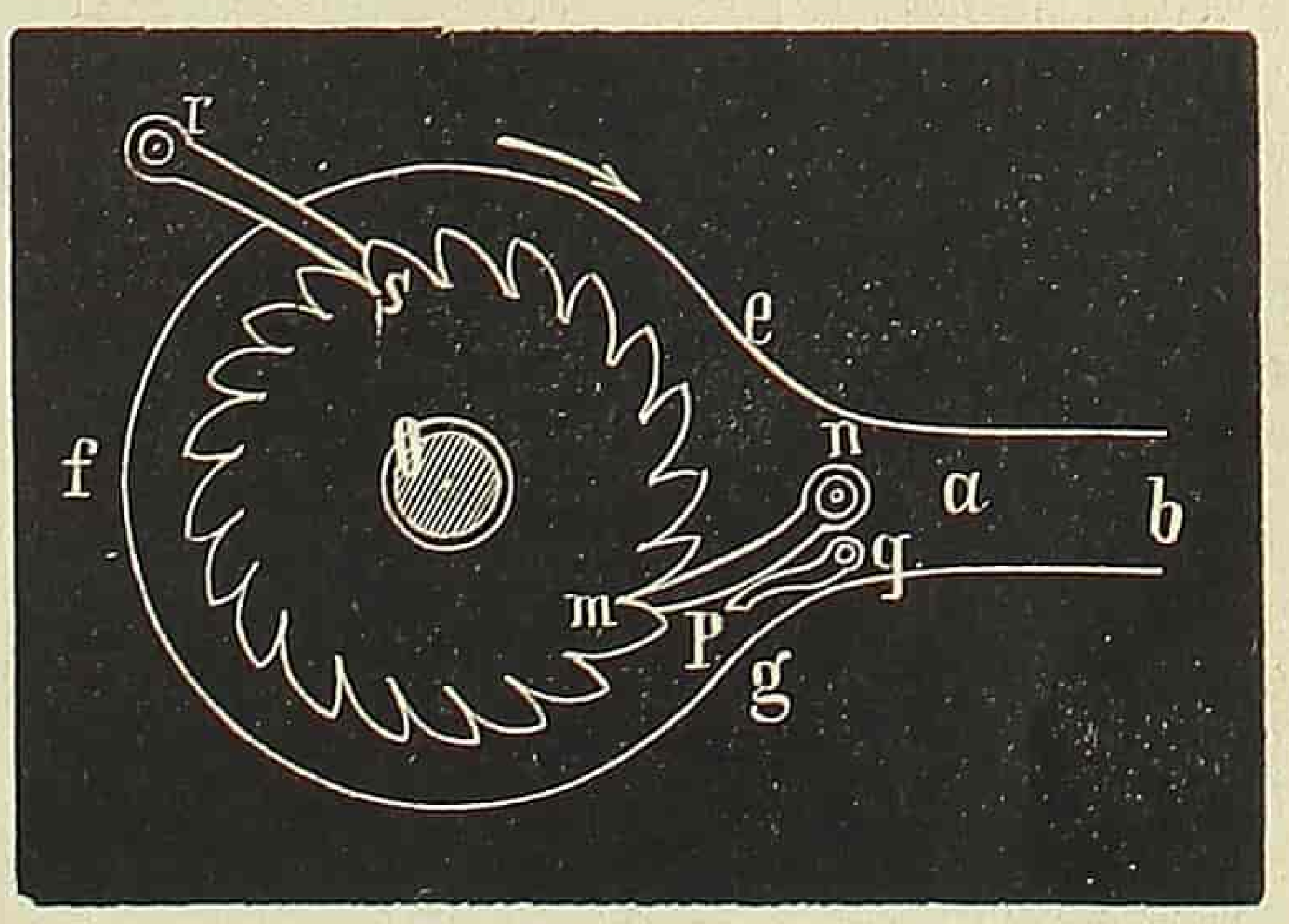
Сл. 211.

5° Кретка са скакавицама. — [Levier de la Garousse.] — Сл. 211. Кретка $\overline{ad}$, која се може нијати горе доле (уздизати и спуштати) око сталне осе *b*, сајужена је у виду шарнире са две куке *ae*, и *af*, које ћемо ми сада док се удеснија реч ненађе звати „*скакавице*“. Ове куке закачињу за зубе особите конструкције једног зубчаника — Кад се кретка *ad* уздиже, скакавица *cf* закачи за зуб точка, и принуђава га да се обрће око осе *O*, међутим скакавица *ae* одскаче и пада с једног зуба на други. Кад се затим кретка спушта, онда скакавица *ae* закачи за зуб точка и принуђава га да се у истом правцу обрће, а скакавица *cf* клиза и скаче са једног зуба на други. — Скакавице могу бити тако удешене, да дејствују на точак гурајући га као што слика 212. показује. — Овај механизам служи да се произведе обртање каквог витла за дизање терета као н. пр: за дизање материала на више, при зидању високи здања н т. д. —



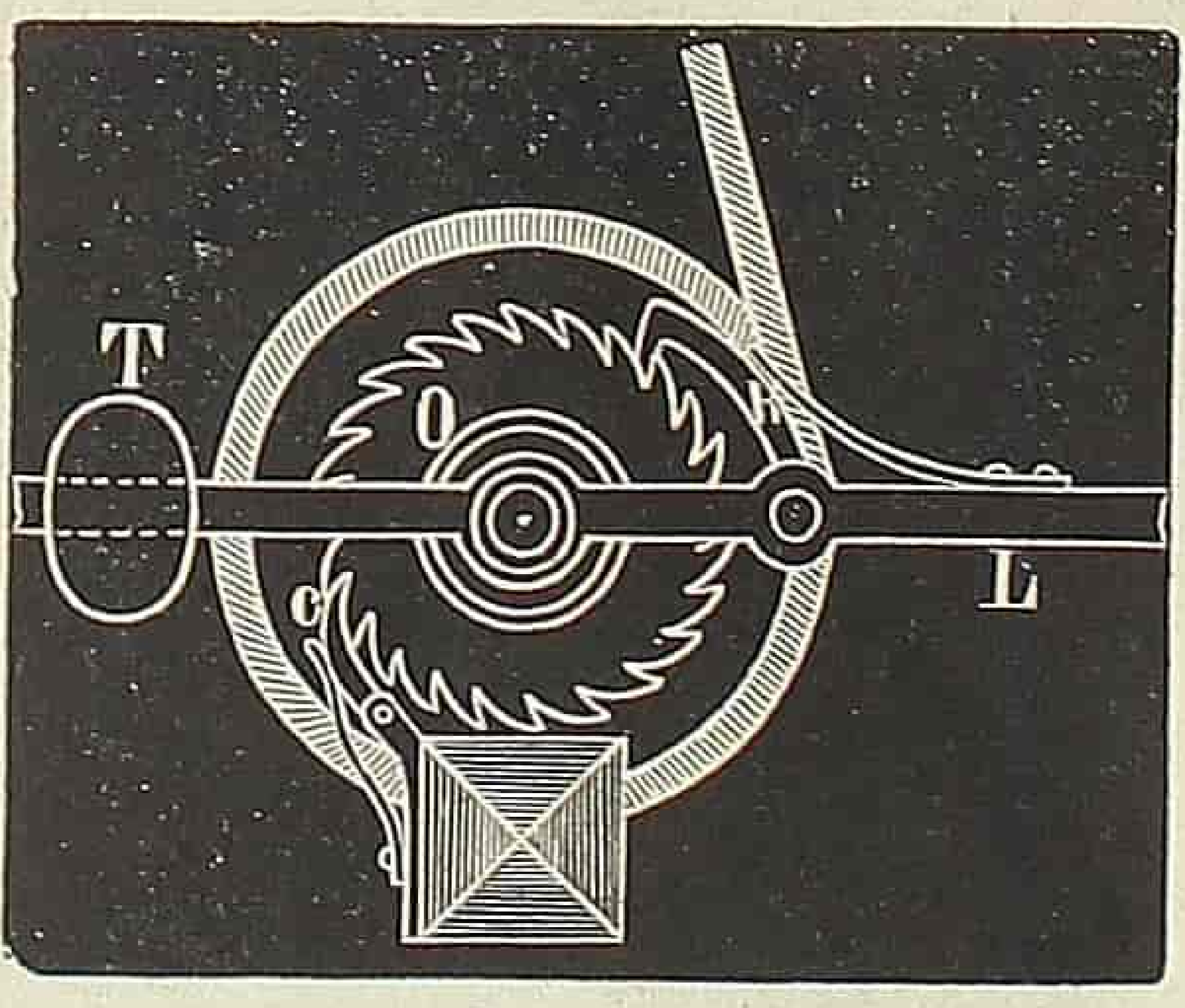
Сл. 212.

6. Кретка са скакавицом и запињачом. Сл: 213. Кретка *ab* спојена са прстеном *efg* обртна је око једног ваљка (витла), кои се и сам у своим сталним подпорама, непрестано у једном истом правцу при вучењу кретке на ниже,



Сл. 123.

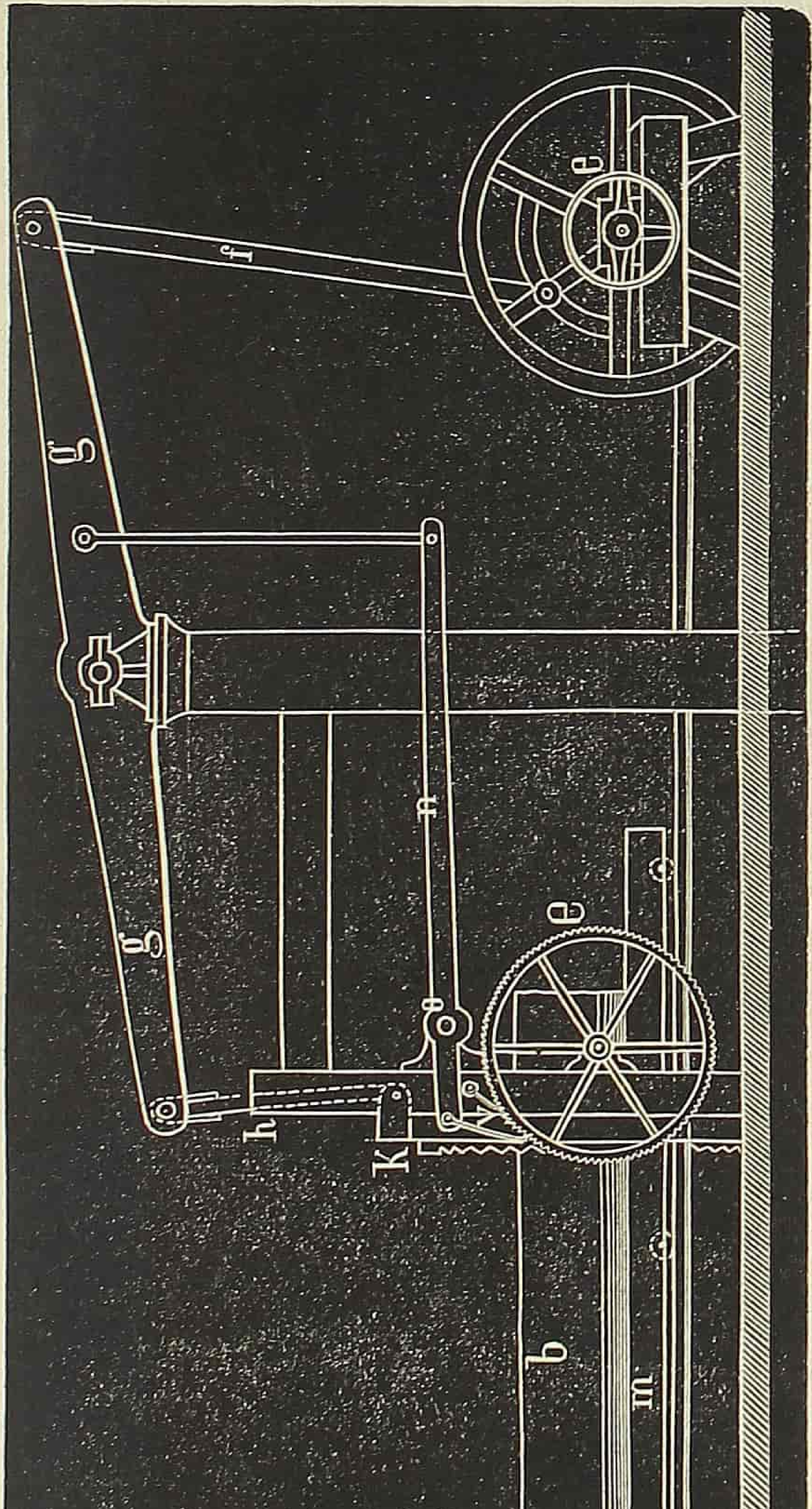
обрће. Око ваљка обавија се конопац а на његовом висећем крају закачен је терет за дизање. Обртање ваљка производи се на овај начин: Уз прстен кретке *a* на самом ваљку, утврђен је зубчасти точак исте конструкције као и у предходећим меканизмима. — Сад кад се кретка *ab* на ниже вуче, онда скакавица *mn*, која се око осе *n* на самој кретки може да обрће, и која се на федер *pq* ослања, закачи за зуб точка и тако се ваљак мора обртати у правцу стрелице, јер је са зубчастим точком чврсто сајужен. — Напротив кад се кретка на више диже, онда запињача *rs*, која се обрће око осе утврђене на подпорама целе махине, закачи за зуб точка, и противстаје обртању како точка тако и ваљка у противположеном правцу, потоме дакле ваљак остаје некретан за време дизања кретке на више. —



Сл. 214.

Да би се избегло време заставивања ваљка, то се употребе две подобне кретке, од коих једна се вуче на ниже, кад се друга диже на више. — Исти меканизам може да се начини и као што слика 214 јасно представља без описа. — T је тешко тело, које служи да раденик дејствује својом снагом само одозго на ниже. —

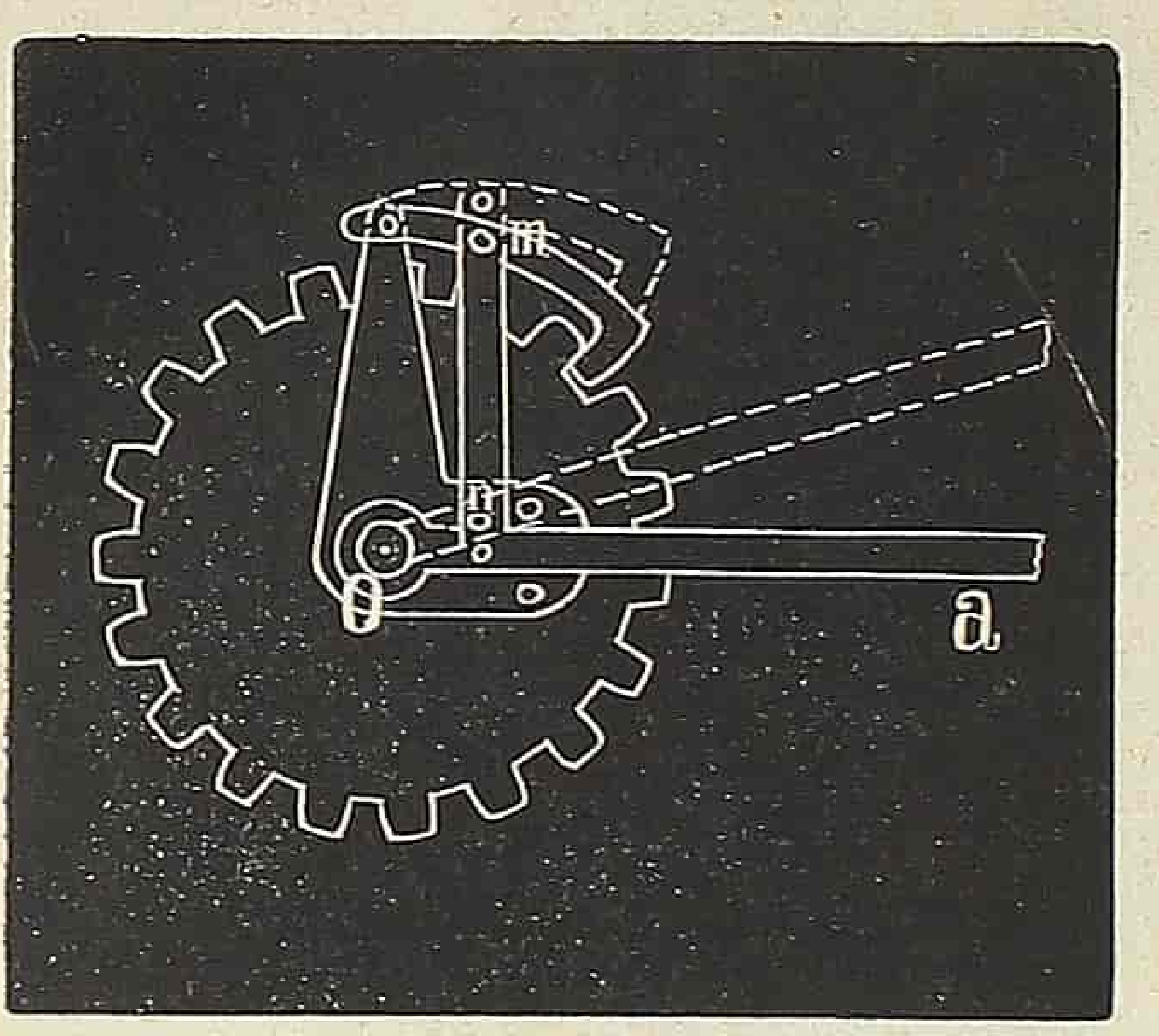
Примедба. Није нуждно да се кретка, на којој је моторна скакавица и зубчасти точак, обрћу око исте осе. Пример тога може се видити на слики 215, која представља меканизам једне тестере за стругање балвана. — У овој слики *e*, је моторни котур (poulie motrice), *f* машка. *gg* нијаљка, *h*. машка сајужена са рамом *k*, на коме је тестера утврђена, *l* зубчаник, кои служи за помицање колица *m*. — Ово помицање бива средством једног мањег зубчаника и зубчанице (кремаљере), која се на колицима налази. *n* кретка на којој је скакавица *v*. —.



Слика 215.

Незгоде обични скакавица.

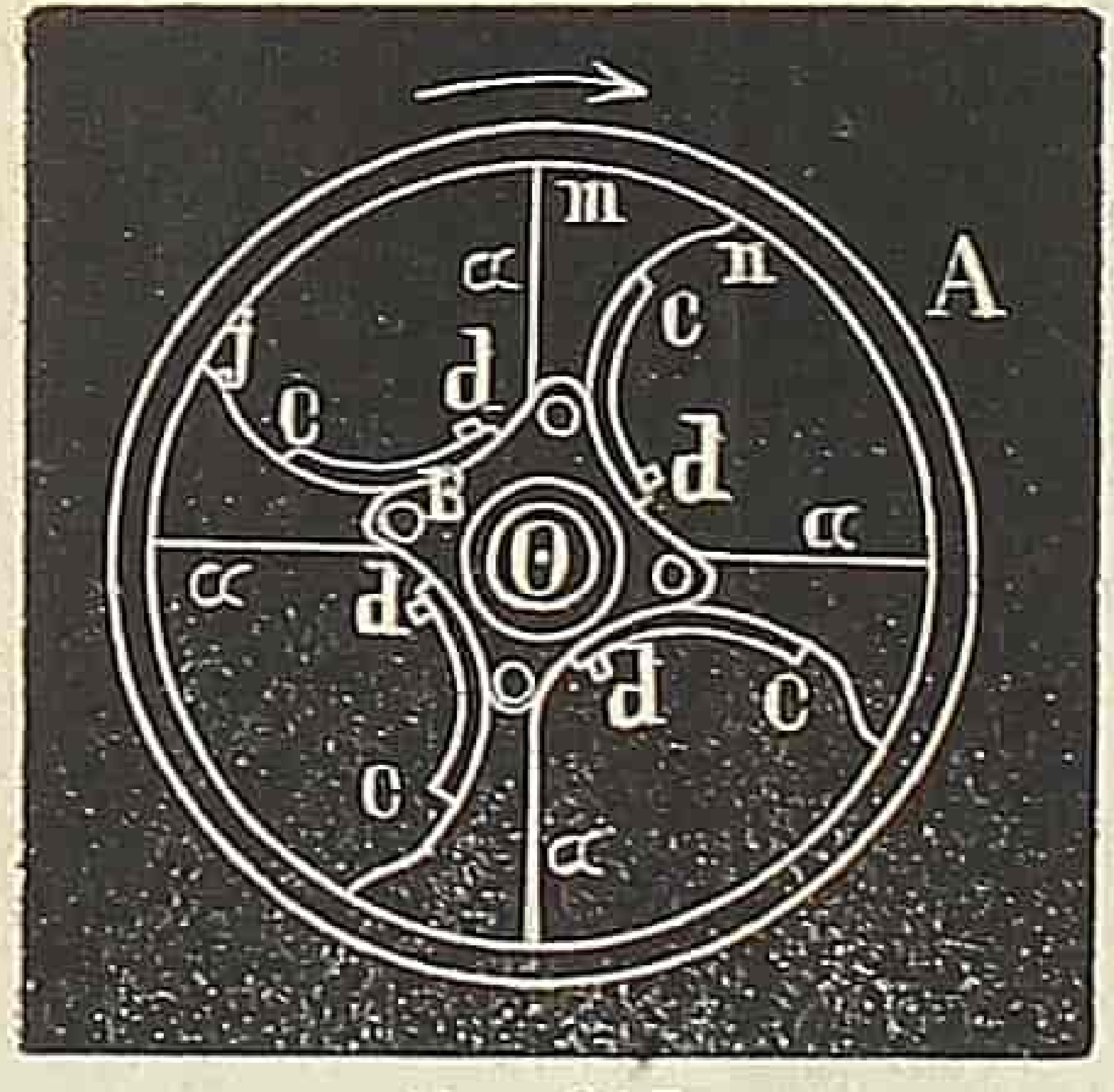
Ове незгоде јесу: 1°. Чести удари скакавице о точак и отуда порађајуће се непријатно чегртање. 2⁰ Изгубљено време, које постаје тиме, што кука скакавице незакачиње скоро никад као што ваља за зубе точка. Напредпоменуто чегртање може да се избегне употребом тако зване неме скакавице Сл: 216, Код овог система кретка *mn*, у место федера по-



Сл. 216.

стављa скакавицу кад треба на њено место.

Но најсавршенији меканизми овог рода, — односно чегртања, и изгубљеног времена јесу, тако зване чегртаљке с' трењем, о коима ћемо ми, што се њине теорије тиче, у динамики говорити, а за сада ћемо само један пример да наведемо. —



Сл. 217.

7^0 Чегртаљка Добо (Encliquetage Dobo) Сл: 217. Овде је зубчасти точак замењен точком *A*, кои је неуглављен — [гладан] и на кои непосредно дејствује моторна сила, — Пренос кретања од точка *A* на осовину *O*, производи се овако: Са осовином *O*, сајужена су у виду шарнире (артикулирана) четири крила *aa* .... која се ослањају на федере (прудна пера) *cd* тако, да кружни крајеви *mn* ових крила додирају точак *A* са унутарње стране.

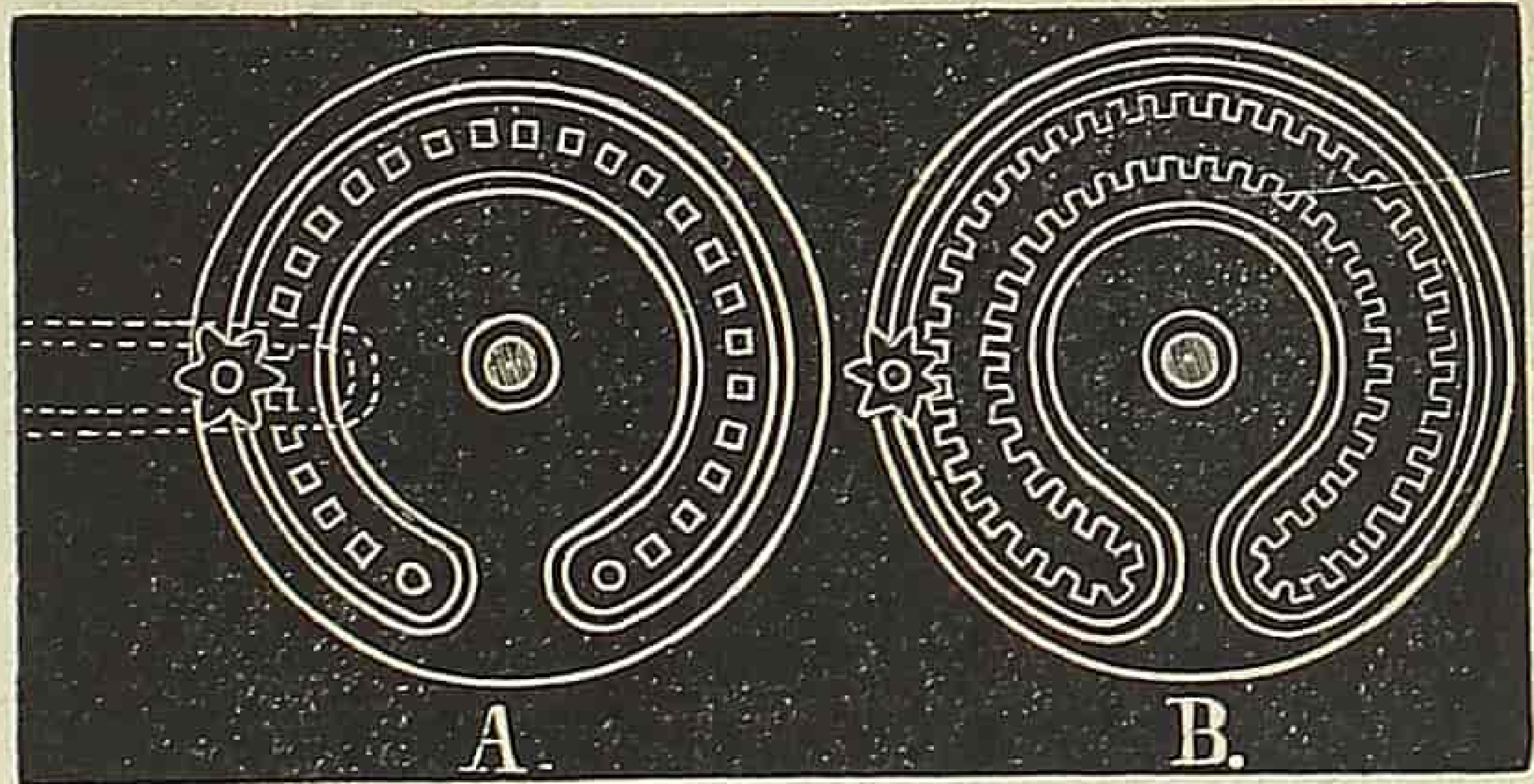
Пошто је то тако, лако је сватити дејство овог меканизма. — Кад се точак обрће у правцу стрелице, онда се његова унутарња страна таре о крила, а у сљед трења федери се савију, и тиме је свака свеза између точка и осовине прекинути, и точак се обрће без осовине.

Напротив кад се точак обрће у противном правцу, онда трење дејствује на крила да се обрћу око своих оса, но као што је дужина праве повучене из угла *J* до осе *E* такова, да се овај крај може да удали од тачке *O*, више него што је унутарњи полупречник точка *A*, то се крила одупру о унутарњу страну реченог точка, а у сљед тога точак постане чврсто сајужен са осовином, са којом се заједно даље обрће. Федери су тако распоређени и удешени, да непрестано притискују спољни уго крила уз унутарњу страну точка, и дејство је механизма одма произведено, чим се точак почне обртати у противном правцу стрелице.

8^0 *Зубчасти точкови са обртањем на изменце мењљивим [и у једном и у другом правцу].*

Ми смо видили да се два зубчаста точка обрћу у истом правцу, кад се један од њих налази са унутарње стране оног другог; а у противном правцу, кад се налазе један према другом са спољне стране.

Ако се сад један велики и један мали зубчаник тако удесе, да се мањи точак налази час са спољне час са унутарње стране већег точка; онда ће се овај последњи обртати час у једном час у другом правцу. Слика 218. показује овакову конструкцију зубчаника, коима се поменуто обртање добија.



Сл. 218.

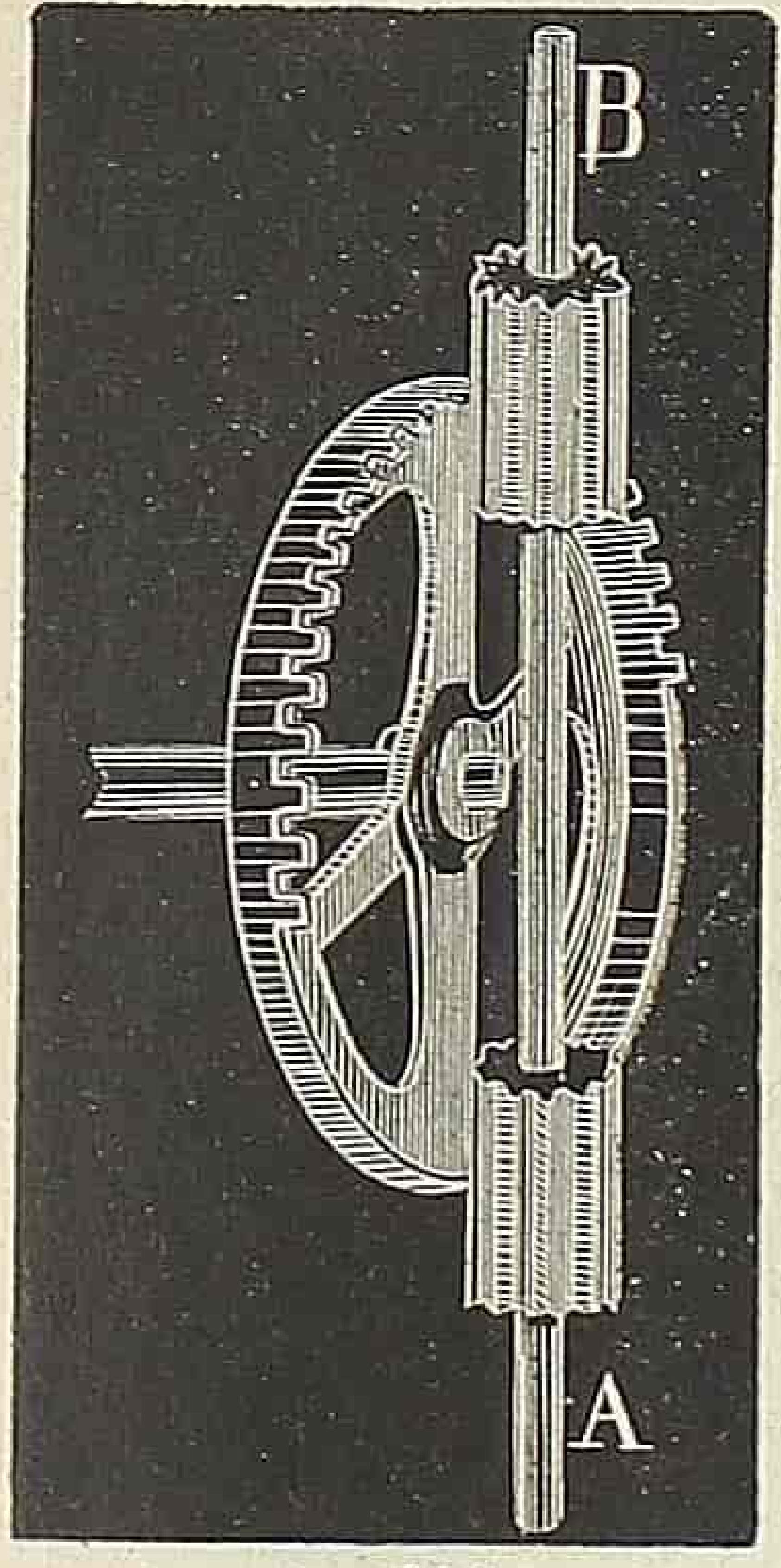
Точак *A* обичан је зубчаник са паоцима, *с'* том само разликом што је зубчање на једном месту прекинуто, и кроз овај прекид пролази мањи точак *d*; са једне на другу страну паоца. Заокружени крај осовине мањег точка, креће се по жљебу издубљеном на колуту великог точка тако, да овај мањи точак може периодично прелазити са спољне на унутарњу страну великог точка, и обратно [vice versa]. —

Због велике дужине осовине, мањи точак може се за нешто хоризонтално помицати, и тако лакше прелазити са једне стране паоца на другу. —

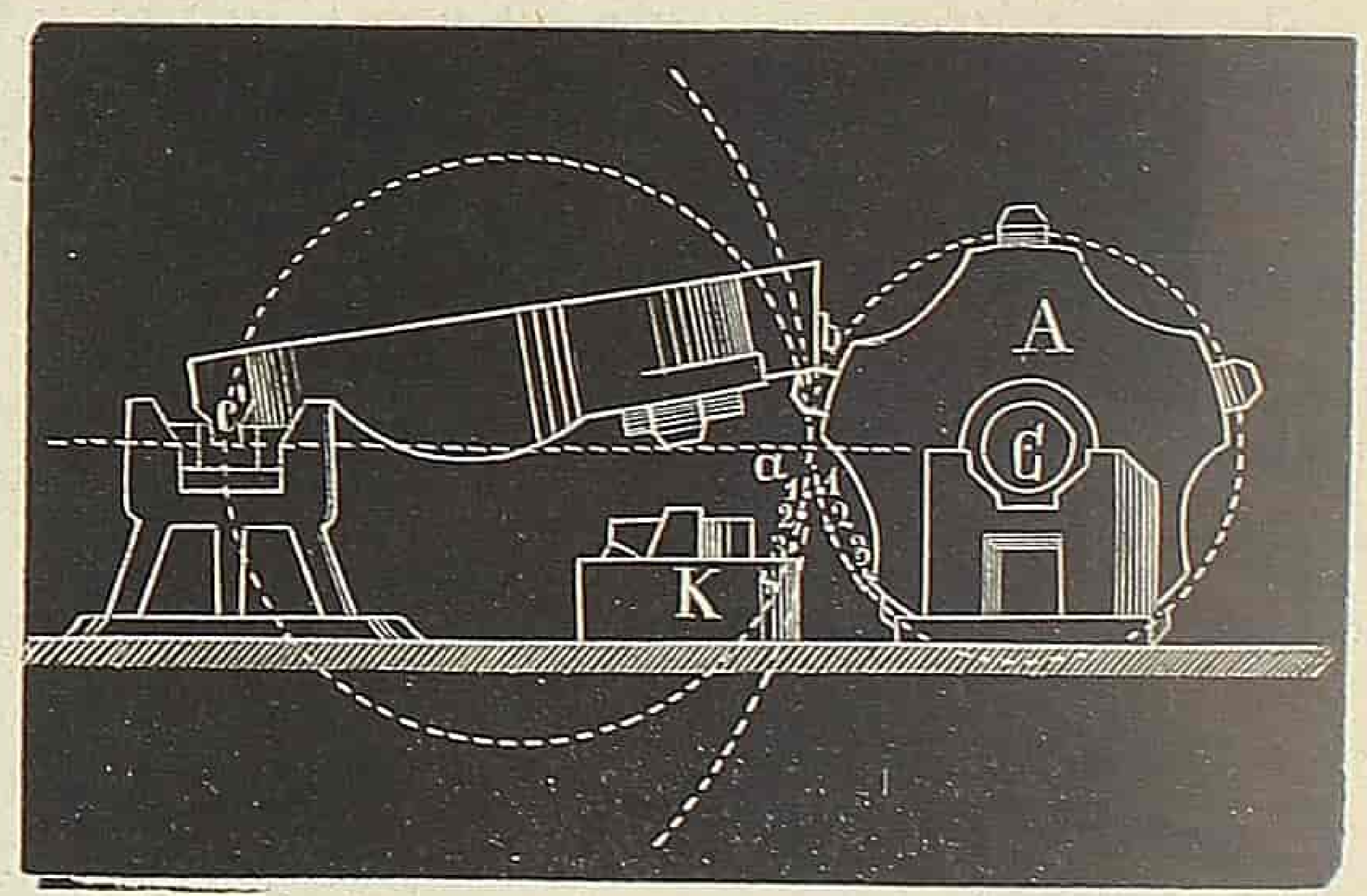
Пошто је исти основни круг како за спољне тако и унутарње зубчање, то је и отношење угловни брзина две осовине исто, ма какав био правац обртања.

Ову пробитачност нема точак *B*, кои је дупло назубчан по свом спољњем и унутарњем обиму. Отношење угловни брзина стално је дотле, док се непромени правац кретања, а чим ово буде, онда се оно мења. —

9⁰ Полу-зубчаник са два мања зубчаника Сл: 219. И код овог механизма правац обртања осовине AB нагло се мења, — Велики точак, кои је само у пола назубчан, завата наизменце за половину обрта са точком A, а за другу половину са точком B; и потоме правац обртања мења се два пута за сваки обрт великог точка.



Сл. 219.



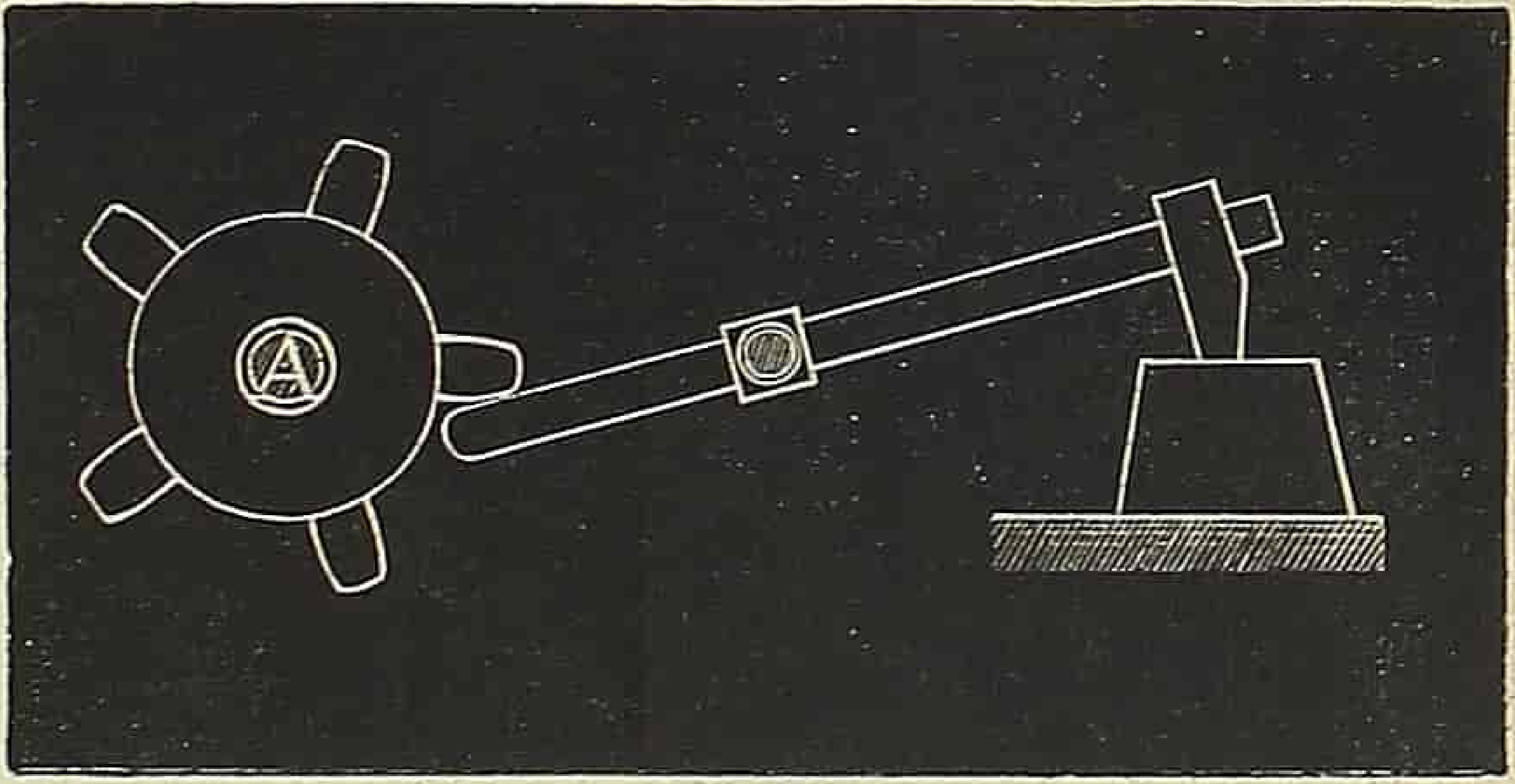
Сл. 220.

10⁰ Велики или фронтални чекић за ковање. Сл. 220, представља јасно ову махину без даљег описа. — Ми ћемо овде само да покажемо, како се у практики опредељује профил зубаца са коима је точак A снабдевен.

Из висине на коју се оће чекић да уздиже, определи се најпре дужина одговарајућег лука. Затим се узме за точак A удесни полупречник, како чекић падајући, не би ударио пре о сљедећи зубац, него што на наковањ K падне. — Пошто су ове мере опредељене, онда се опише основни круг $\overline{ca}$, круг полупречника $\overline{c'a}$, и круг пречника $\overline{c'a}$. Даље подели се овај последњи круг и круг $\overline{ca}$, почињући од a; на једнаке делове у тачкама 1, 2, 3, 4; — Из тачака подељења 1, 2, 3, 4. круга $\overline{ca}$, а са нолупречницима, који су равни тетивкама $\overline{1a}$, $\overline{2a}$, $\overline{3a}$, и т. д. круга пречника $\overline{ca}$, опишу се луци, кои своим постепеним пресецима (саставима) образују криву епициклоидну пругу, која се узме за профил зубца. —

Од a, до b, по кругу пречника $\overline{c'a}$ треба пренети лук раван луку за величину кога зубац мора уздизати чекић, а из c, као средишта, са полупречником $\overline{cb}$ описати круг, кои ће ограничити потребну дужину зубаца —

Зубци се обитно начине са правопружним фланкама, које су управљене по полупречнику, и са обе стране имају симетричне кривине, премда то није нуждно, јер само једна њина страна служи за уздизање чекића. —

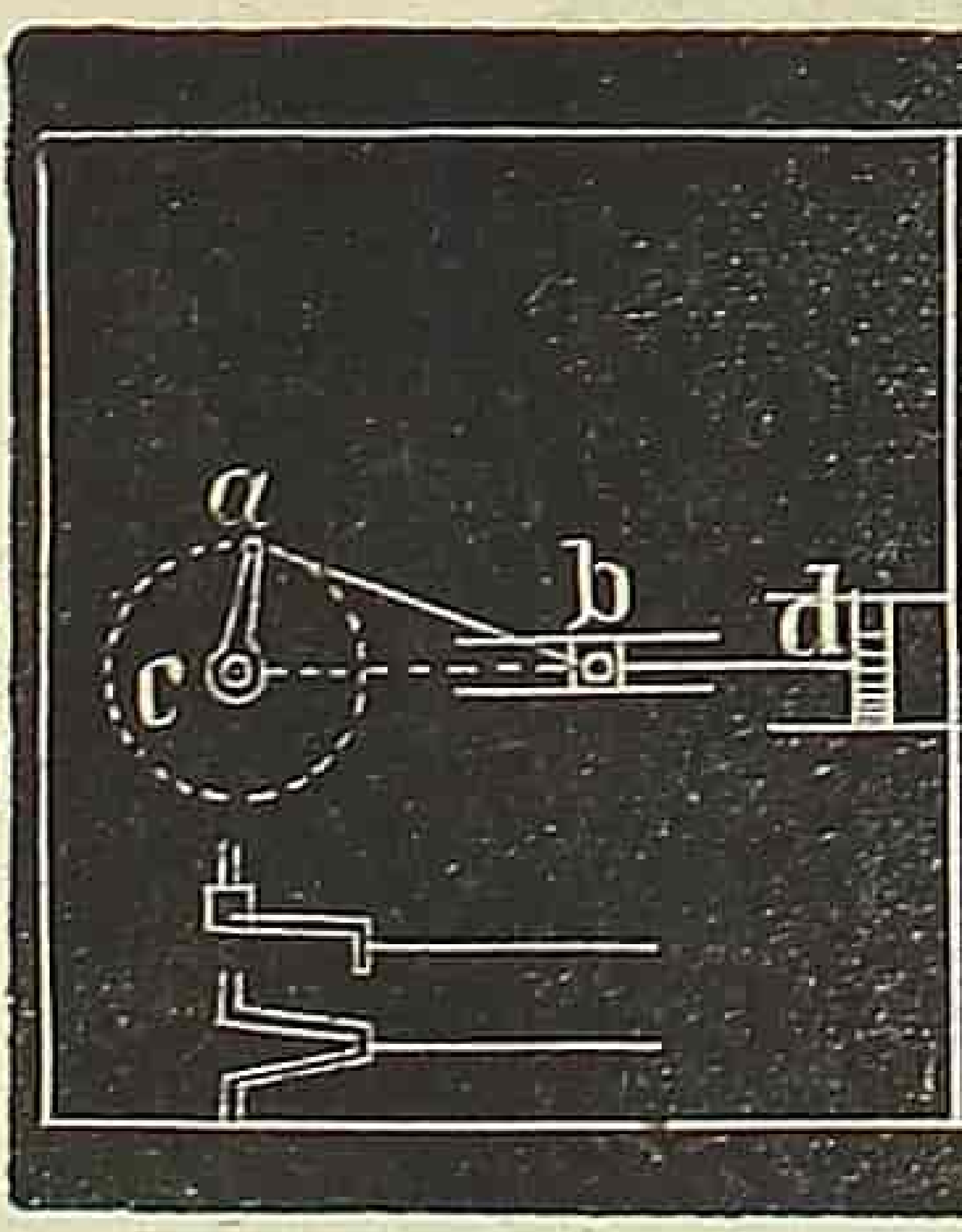


Сл. 221.

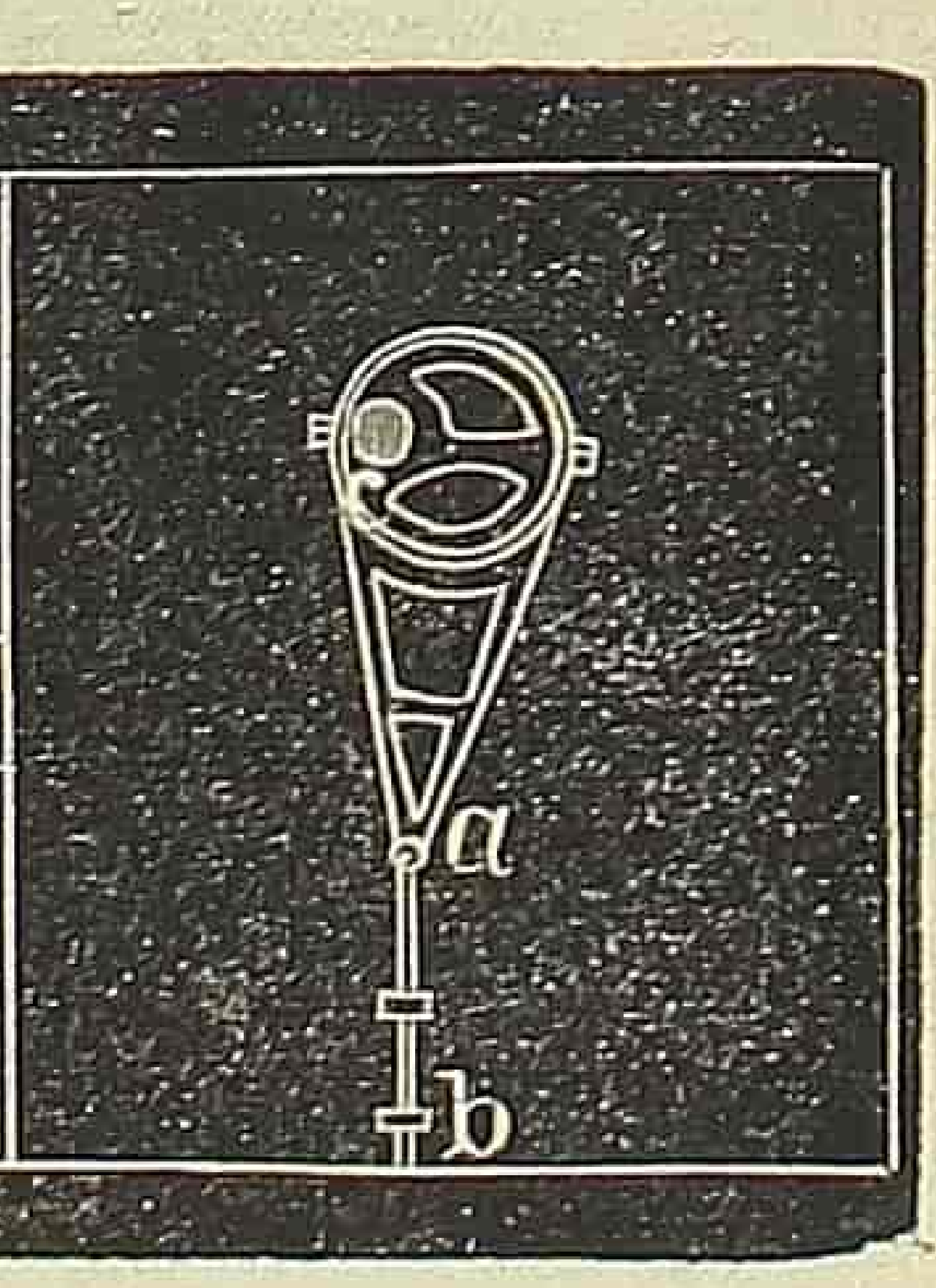
11° Мали чекић за ковање Сл: 221. И код ове махине профил зубаца, са коима је точак A снабдевен, опредељује се подобним начином. —

Сајуз непрекидног обртног и прекидног правопружног кретања, т. је час у једном час у другом правцу [тамо амо]

254. Састав оваკови кретања лако се да видити код махина представљене сликама 222, и 223 овде на страни, и сликом 113^a [види ову слику]. —

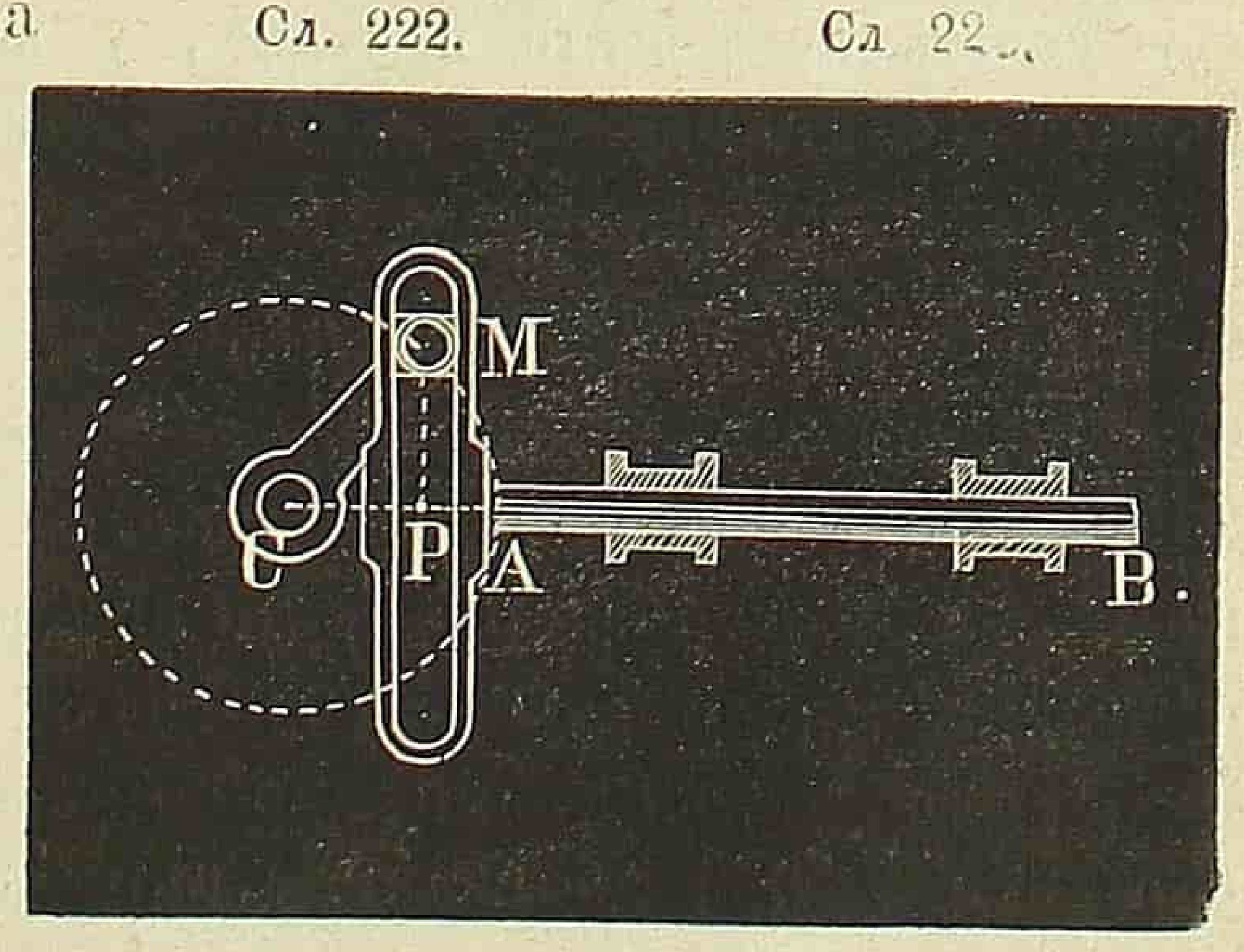


Сл. 222.

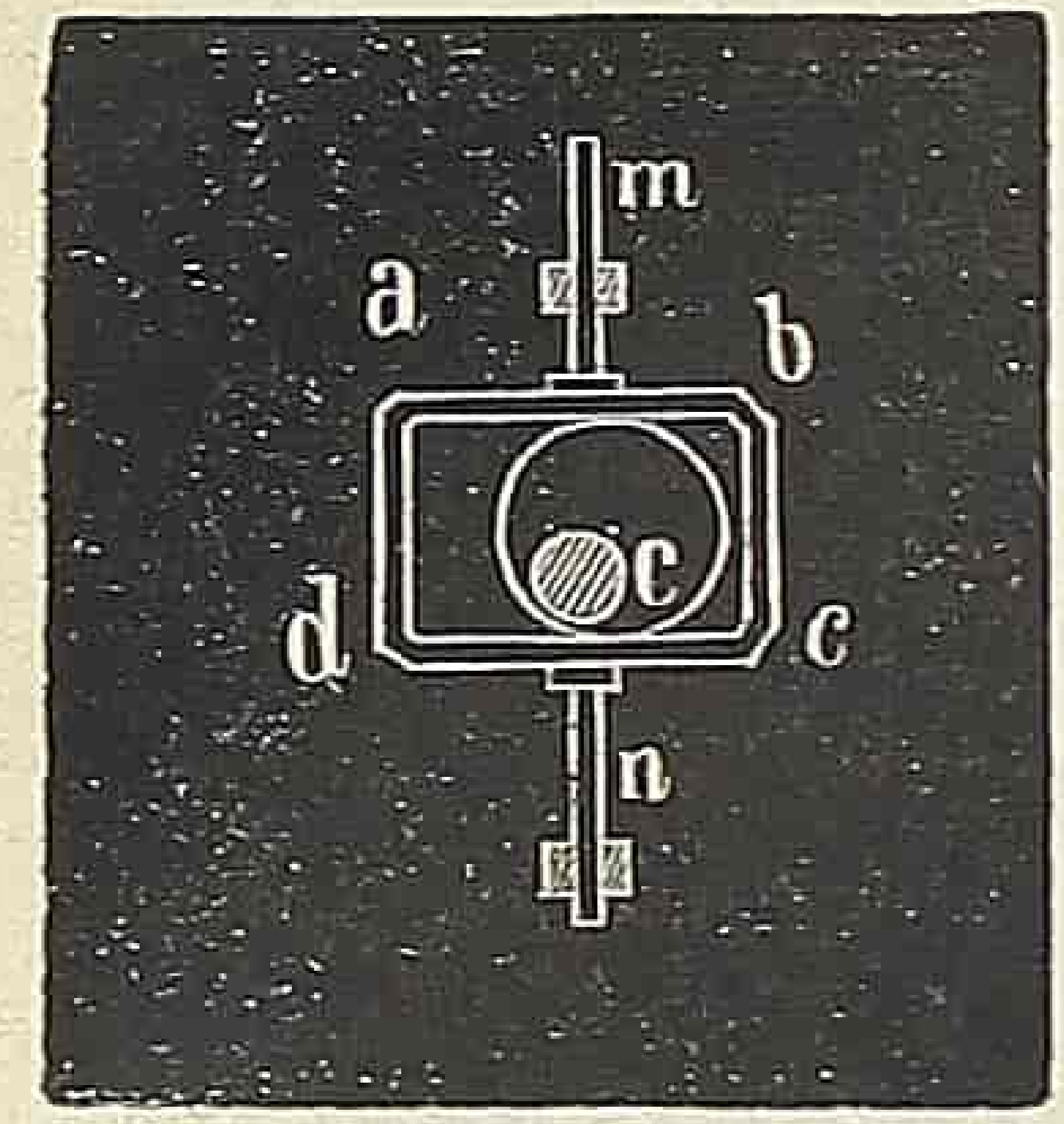


Сл 22

2° Ручка сајужена са дршком Сл. 224. — Ручка $\overline{CM}$ обрће се пуно-кружно око осе C, а држка $\overline{AB}$ креће се право-пружно у правцу управном на осу C. Ма која тачка дршке, креће се као пројекција P тачке M на правац дршке, потоме отношење брзина опредељује се по теорији,



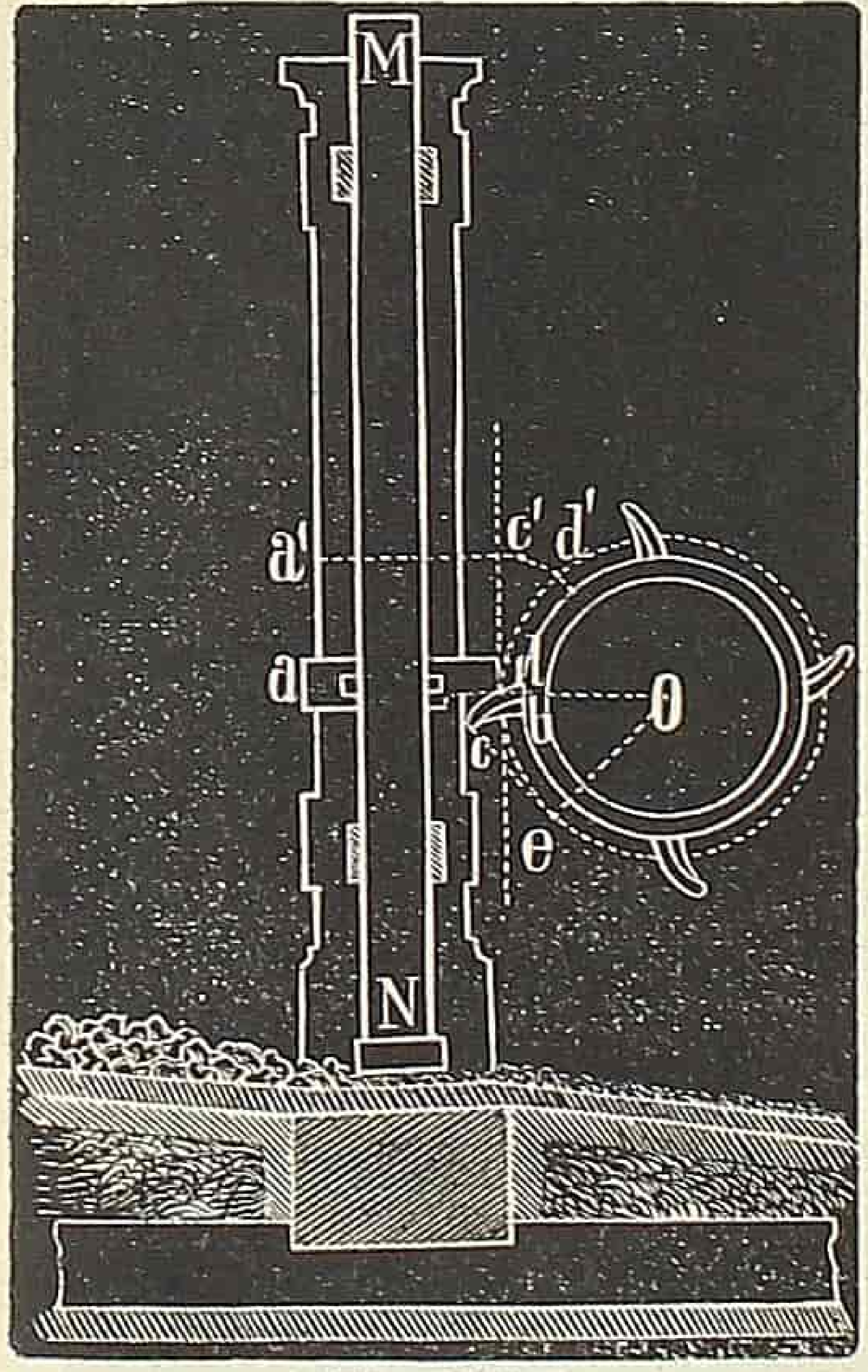
Сл. 224.



Сл. 225.

коју смо у I делу под № 26 и 67 изложили. —

То исто вреди и за кружни ексцентрик и дршку mn, сајужену са рамом $abcd$. Сл. 225. —



Сл. 226.

3^е. Меканички тучак. Сл. 226. састои се из дрвене гредице MN, која је на дољем крају окована са једном папучом од ливеног гвожђа, и точка O снабдевеног са зубцима, кои се пуно-кружно око осе O обрће. Остала конструкција тучка дознаје се лако из саме слике, и ми ћемо овде да испитамо, какав профил мора имати зубац $\overline{cb}$ према профилу палца $\overline{ad}$. —

Обично се за профил палца узима права пруга, и цео меканизам тако се удеси, да се тучак MN уздиже са брзином, која је сразмерна брзини осовине O. — Потоме профил зубца биће еволвента круга, и свака тачка овог профила долазиће постепено у додир са једном истом тачком палца. И заиста нека је $\overline{ce}$, једна ма која од нормала еволвенте $\overset{\frown}{dc}$. Ова је нормала, као што је лако видити, равна луку $\overset{\frown}{de}$ [између почетка еволвенте и тачке, у којој $\overline{ce}$, додира круг — Сад ако представимо себи, да се је осовина O за толико обрнула, да је тачка e, дошла у d; а d, у d', онда ће нормала $\overline{ce}$, заузети вертикални положај $\overline{dc'}$, и палац кои свакада мора остати хиризонталан и додирати зубац, налазиће се у $\overline{a'c'}$, дакле висина на којој се палац уздигао, биће равна премештају тачке d, по периферији круга $\overline{od}$, и његова брзина пењања биће равна брзини ове исте тачке d. —

Као што точак има врло мали број зубаца, то се може поставити услов, да сваки зубац дејствује само за дати део периферије основног круга, тако да тучак има времена пасти пре но што други зубац дође да га уздиже. Означавајући са: h висину уздизања тучка, која је обично предходно дата, са m, број зубаца точка, n број обрта осовине у једном минуту; са $t = \frac{60''}{n}$, трајање једног обрта, r полупречник $\overline{od}$ основног круга, трајање [интервал] од једног уздизања до другог биће:

$$\frac{t}{m} = \frac{60''}{mn}.$$

Но пошто пасивни одпор може за нешто мало задоцнити падање тучка, то се обично ово време увећава за $\frac{1}{6}$ да неби палац падајући ударао о зубац, кои сљедује;

Постављајући због тога:

$$\frac{6}{7}\,\frac{t}{m} = t',$$

Полупречник r основног круга биће определен овим изразом.

$$r = \frac{60\ h}{\left(\frac{6}{7}\,\frac{t}{m} - \sqrt{\frac{2\ h}{9{,}81}}\right) 6{,}28.n}$$ [1] . . . . . .

и ово је најмањи полупречник, кои се може узети, но неможе бити никакви незгода, ако се овај полупречник узме за нешто већи.

---

[1] Ако је t време за један обрт, а v брзина, онда је $vt = 2r\pi$, и $v = \frac{2r\pi}{t}$. Ако је Θ време за које се тучак диже на висину h, онда је $v\Theta = h$, и $v = \frac{h}{\Theta}$ дакле $\frac{2r\pi}{t} = \frac{h}{\Theta}$, отуда $\Theta = \frac{t\ h}{2r\pi}$. — Ако је Θ' време, за које тучак пада са висине h, онда је $h = \frac{1}{2}\, g\ \Theta'^2$ и $\Theta' = \sqrt{\frac{2\ h}{g}}$, дакле $\Theta + \Theta' = \frac{6}{7}\,\frac{t}{m} = \frac{t h}{2r\pi} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$ и

$$\text{отуда } r = \frac{th}{\left(\frac{6}{7}\,\frac{t}{m} - \sqrt{\frac{2\ h}{g}}\ 2\ \pi\right.} = \frac{60\ h}{\left(\frac{6}{7}\,\frac{t}{m} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right) 2\ \pi\ n}$$

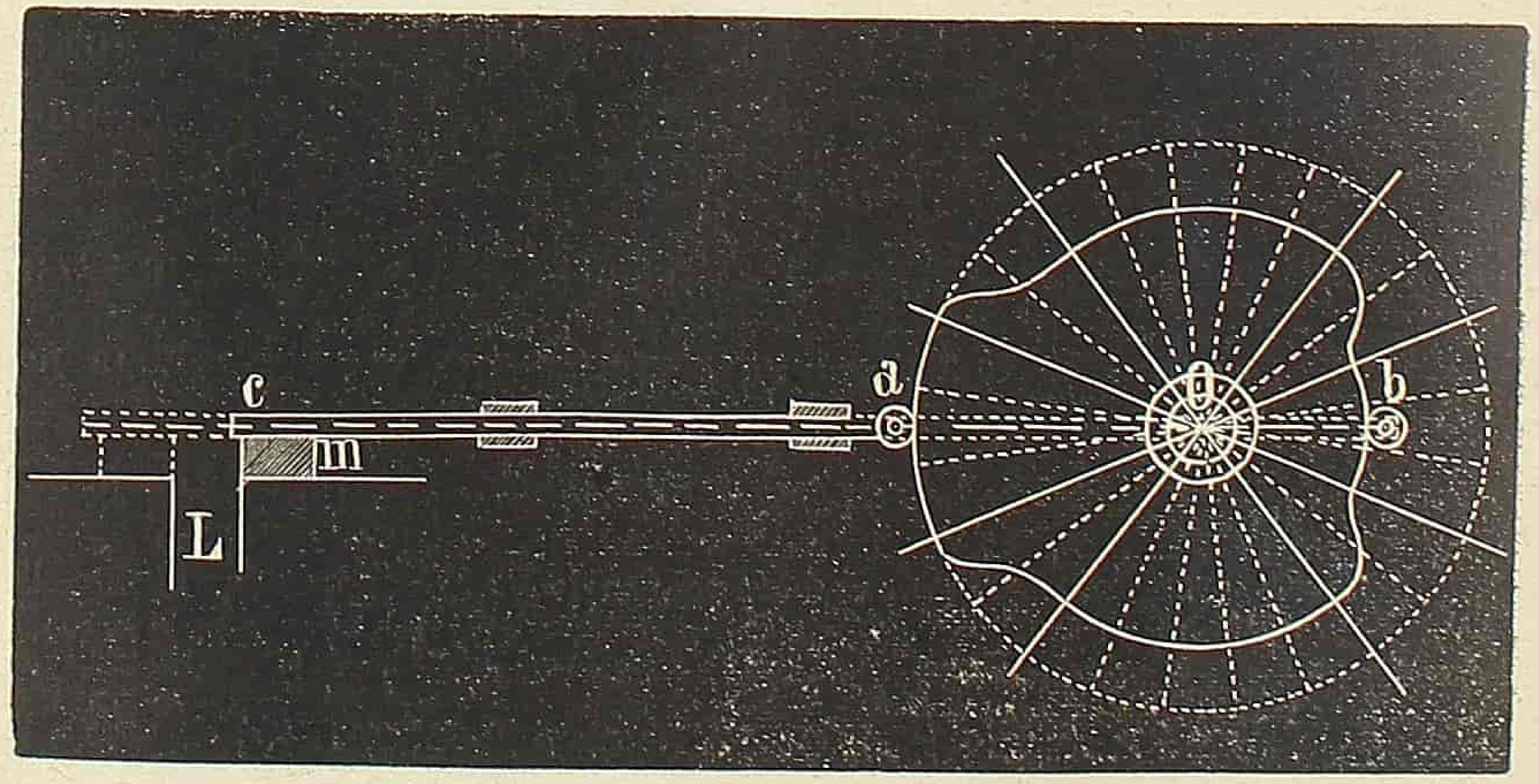
Пример. Колики мора бити најмањи полупречник основног круга за определење профила зубца неког тучка, за случај кад је: $h = 0,^m 40$, $m = 2$, $n = 26$, $t' = \frac{6}{7} \cdot \frac{60}{52} = 0,''99$, —

$$r = \frac{60.0,^m 40}{(0,99 - 0285).6,28.26} = 0,^m 217.$$

Полупречник, кои се обично употребљује, од прилике је двапут толики, колика је ова најмања гранична вредност. Ради трасирања профила зубца, треба описати круг определеног полупречника r; а затим ограничити дужину $\overset{\frown}{cb}$ криве пруге, преносећи по тангенти $\overline{dc'}$ дужину равну висини на коју се тучак има уздићи, и описујући из средишта o, осовине круг, кои би пролазио кроз тачку c' тако определену. — Остатак трасирања неподлежи никаквој тегоби. —

Ексцентрик. [*Вансредник.*]

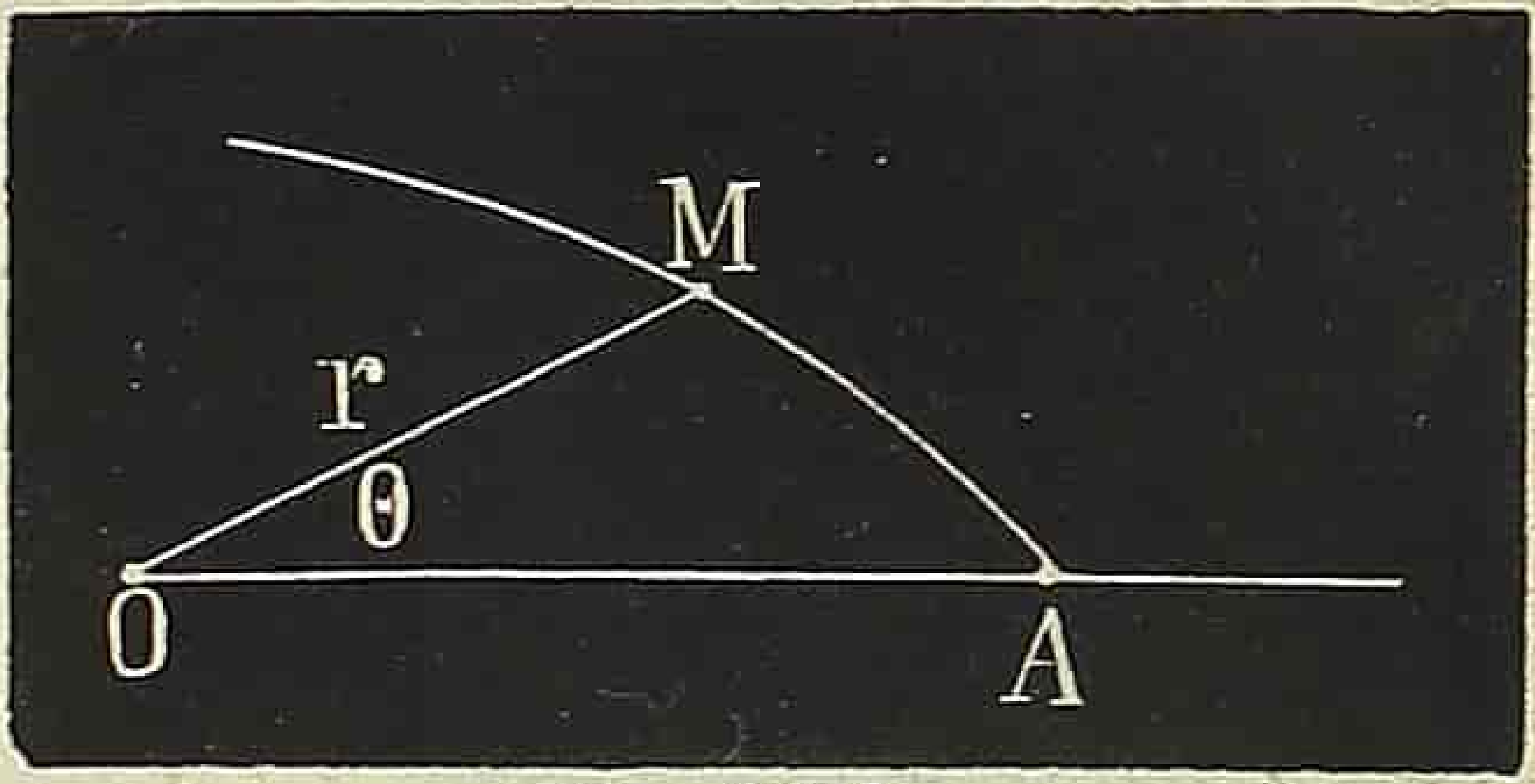
255. Главна је цјел сваког ексцентрика да произведе на изменце мењиво кретање каквог махинског органа, т. је час у једном час у противположеном правцу. — Ексцентрици могу се поделити у два главна система. —



Сл. 227.

1. Ексцентрик, кои дејствује непосредно на котуриће a и b као што слика 227 показује.

256. Нека је $r = f(\Theta)$ једначина ма које криве пруге однешене на поларне координате. — Сл: 227^{a}. — Рецимо да се ова крива пруга обрће око пола 0, са сталном угловном брзином w. — Радиуси вектори, који би се у времену t налазили у правцу осе $\overline{OA}$, од које се почињу бројати угли Θ, биће определени, ако у предходећој једначини поставимо.



Сл. 227^{a}.

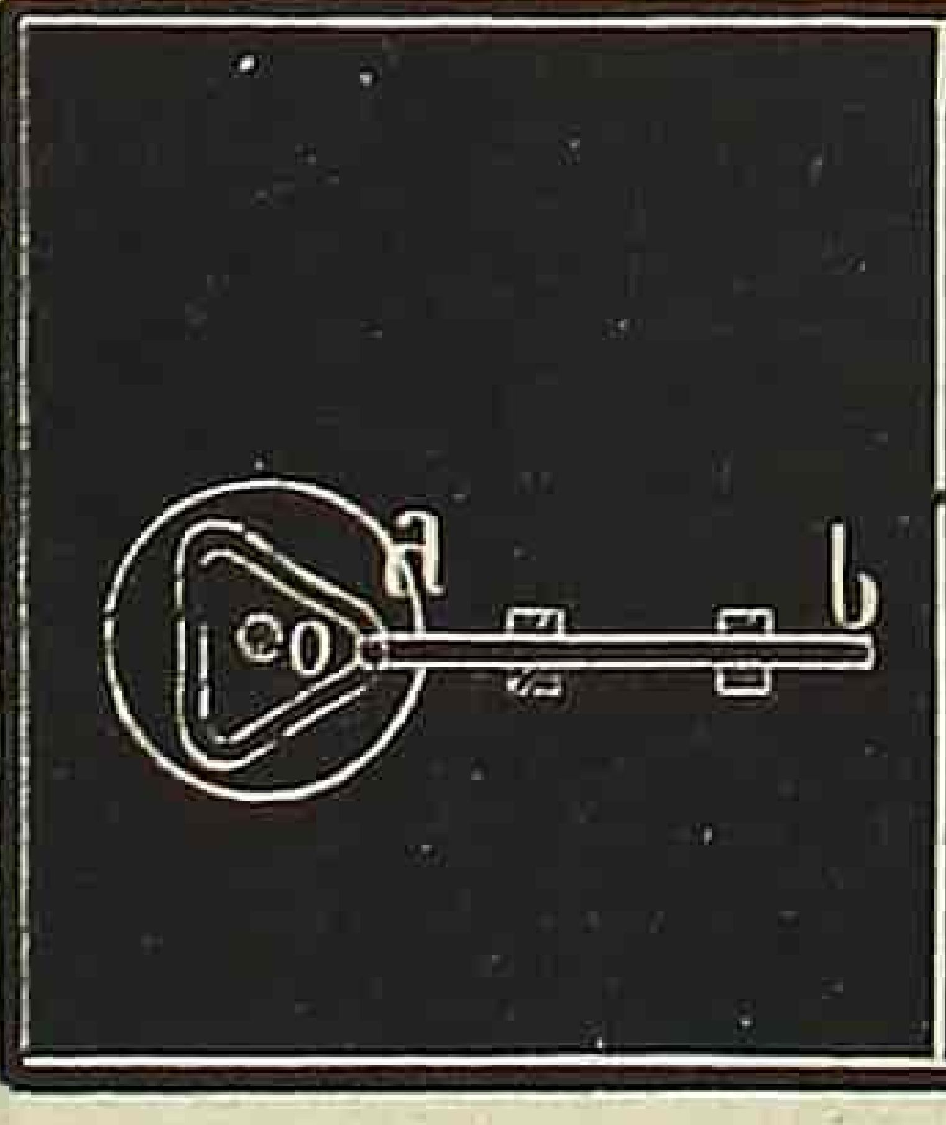
$$\Theta = wt. \qquad \text{отуда}$$
$$r = f(wt).$$

Рецимо да се по правцу $\overline{OA}$, $(\Theta = o)$ креће једна дршка но тако да се непрестано ослања на обртну криву пругу. Очевидно је да ће закон правопружног кретања ма које тачке ове дршке бити представљен једначином:

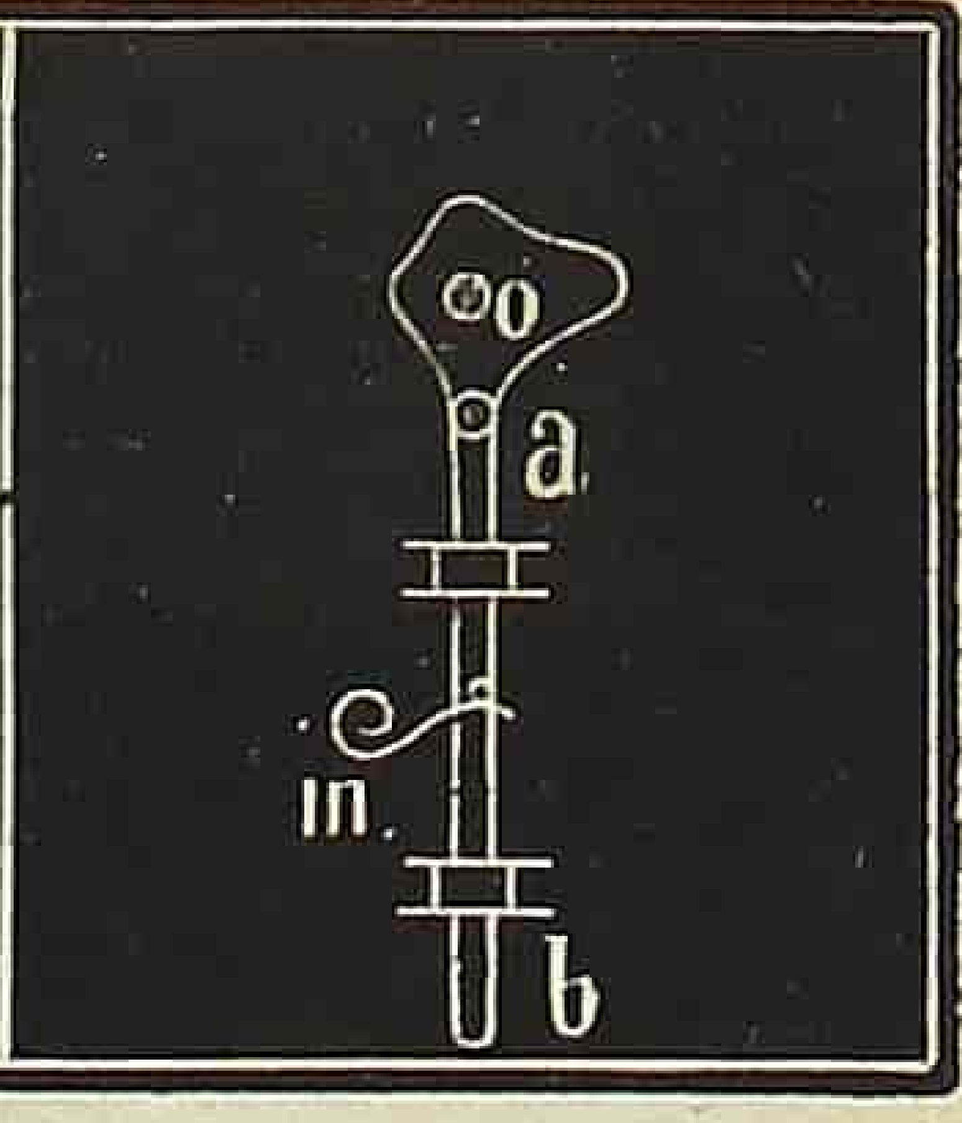
$$x = f(wt).$$

Обратно знајући закон кретања дршке, као и угловну брзину w, можемо лако да определимо профил ексцентрика. —

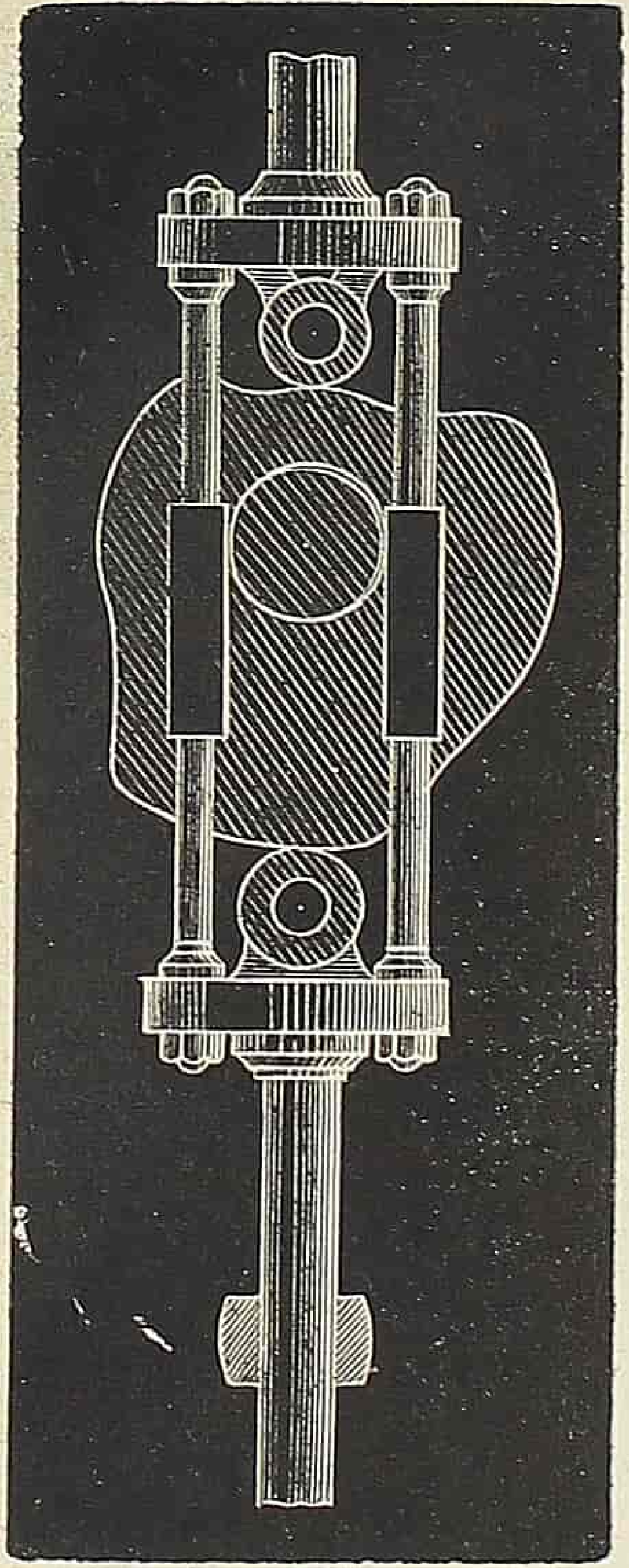
257. У опште ексцетрик дејствује на дршку посредством једног котурића, кога је оса утврђена са дршком као што је у слики 227 означено. Потоме кад је крива пруга [профил] за ексцентрик определена без обзира на котурић, онда је треба по свима њеним нормалама за толико скратити, колики је полупречник котурића. Ако се хоће да ексцентрик сам производи кретање држке и у једном и у другом правцу, без да је зато потребан нарочити меканизам, — као што је н. пр. у слики 228 употребљен федер m, кои служи да се дршка ab непрестано ослања на површину ексцентрика — онда треба наместити јошт један котурић са друге стране средишта обртања, тако како би се ексцентрик налазио између два котурића. Као што је јасно означено у Сл. 227^{b}. — У овом случају, дужина ма ког дијаметра, повучена



Сл: 229.



Сл. 228.



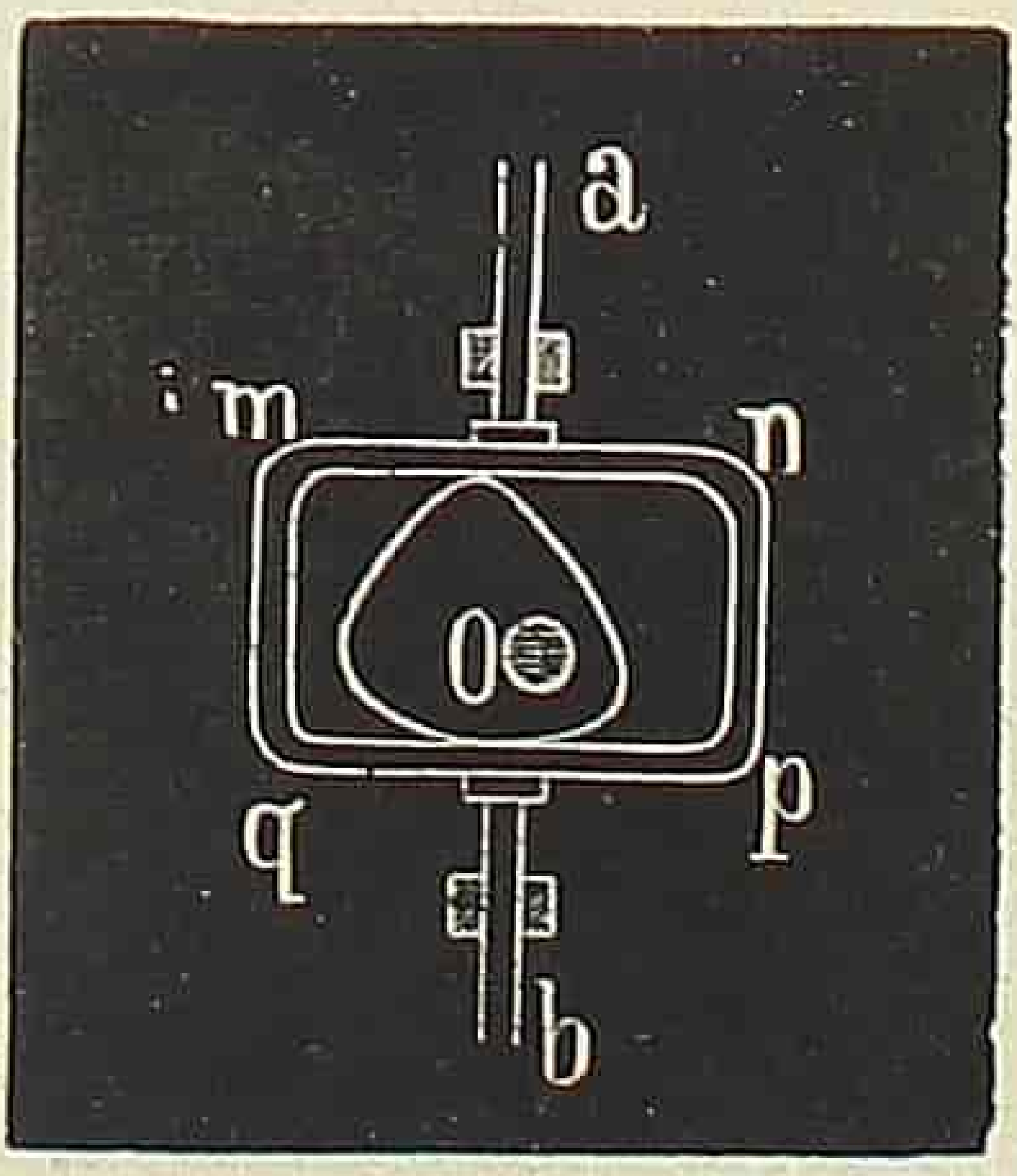
Сл. 227^b.

кроз средиште обртања, мора бити стална, и потоме довољно је да се зна само половина профила ексцентрика.

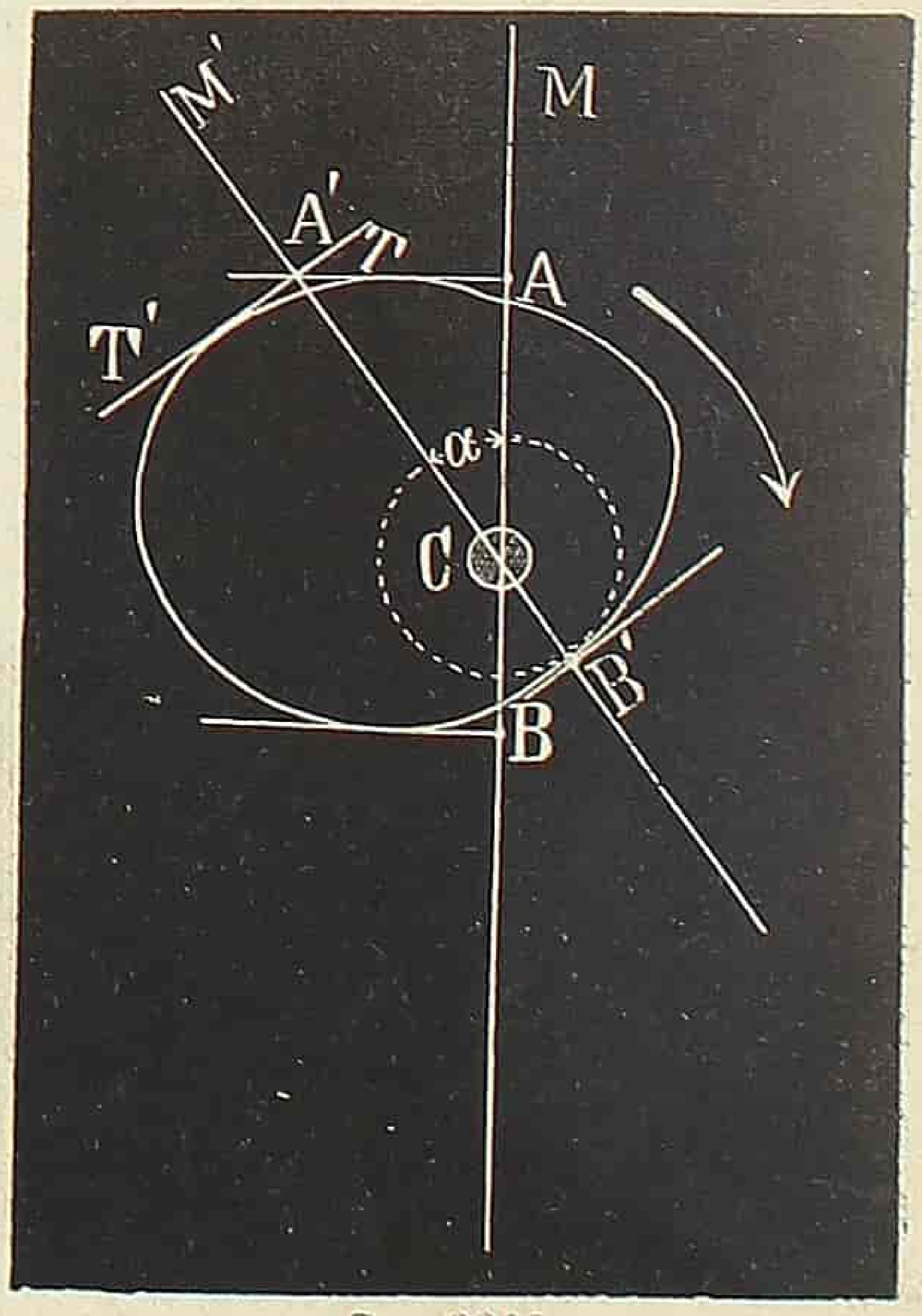
Уместо два котурића може да се крај дршке заокружи у виду дугмета, које клиза по једном олуку, издубљеном на обртном колуту као што слика 229. показује. —

2 Ексцентрик са рамом. Код овог другог система дршка *ab* сајужена је са правоуглим рамом *mnpq*, у коме се ексцентрик обрће Сл. 230. Овај потискује на изменце две стране рама, које су управне на правац дршке. —

Овде имамо приметити, да закон кретања дршке независи више од величине радиуса вектора криве пруге, која образује ексцентрик, но од одстојања између полуса и њени тангената, или што је исто, зависи од радиуса вектора одговарајућег подера



Сл. 230*a*.



Сл. 230*b*.

[Подер зове се крива пруга, која сајужава сва подножија управних повучени из средишта обртања на тангенте криве пруге. која образује ексцентрик]. —

Осим тога, ако је C оса обртања Сл: 230^b а $\overline{TA}$ горња страна рама, која тангира ексцентрик, и ако представимо обртање у правцу стрелице, онда да би могли определити, колики ће пут рам учинити, кад се ексцентрик обрне за уго $\alpha = M'CM$, треба да повучемо тангенту $\overline{T'A'}$ управно на $\overline{CM'}$, и да сравнимо одстојања $\overline{CA'}$ и $\overline{CA}$. Разлика ових одстојања биће тражени пут. — Даље ако се равноодстојне противположене тангенте налезе свакада једна од друге на једном истом одстојању, онда ће кретање рама у једном и у другом правцу бити из два периода једнака и противположена. И заиста из $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CA'} + \overline{CB'}$ сљедује $\overline{CB} - \overline{CB'} = \overline{CA'} - \overline{CA}$ што ће рећи да, пошто је ексцентрик учинио $\frac{1}{2}$ обрта, то од овог трепутка, ако даље опише угао α, и $\overline{CB}$ заузме правац $\overline{CA}$, онда ће се рам за толико исто на ниже спустити, за колико се попео при првом углу α. Ако је, осим услова да је одстојање равноодстојни тангената једно исто; ексцентрик образован од две симетричне половине, онда ће се сваки период кретања тамо амо састојати такође из два симетрична дела. —

258. Пошто смо ова општа начела поставили, ми ћемо сада мало изближе да испитамо оне ексцентрике, кои се највише употребљују. —

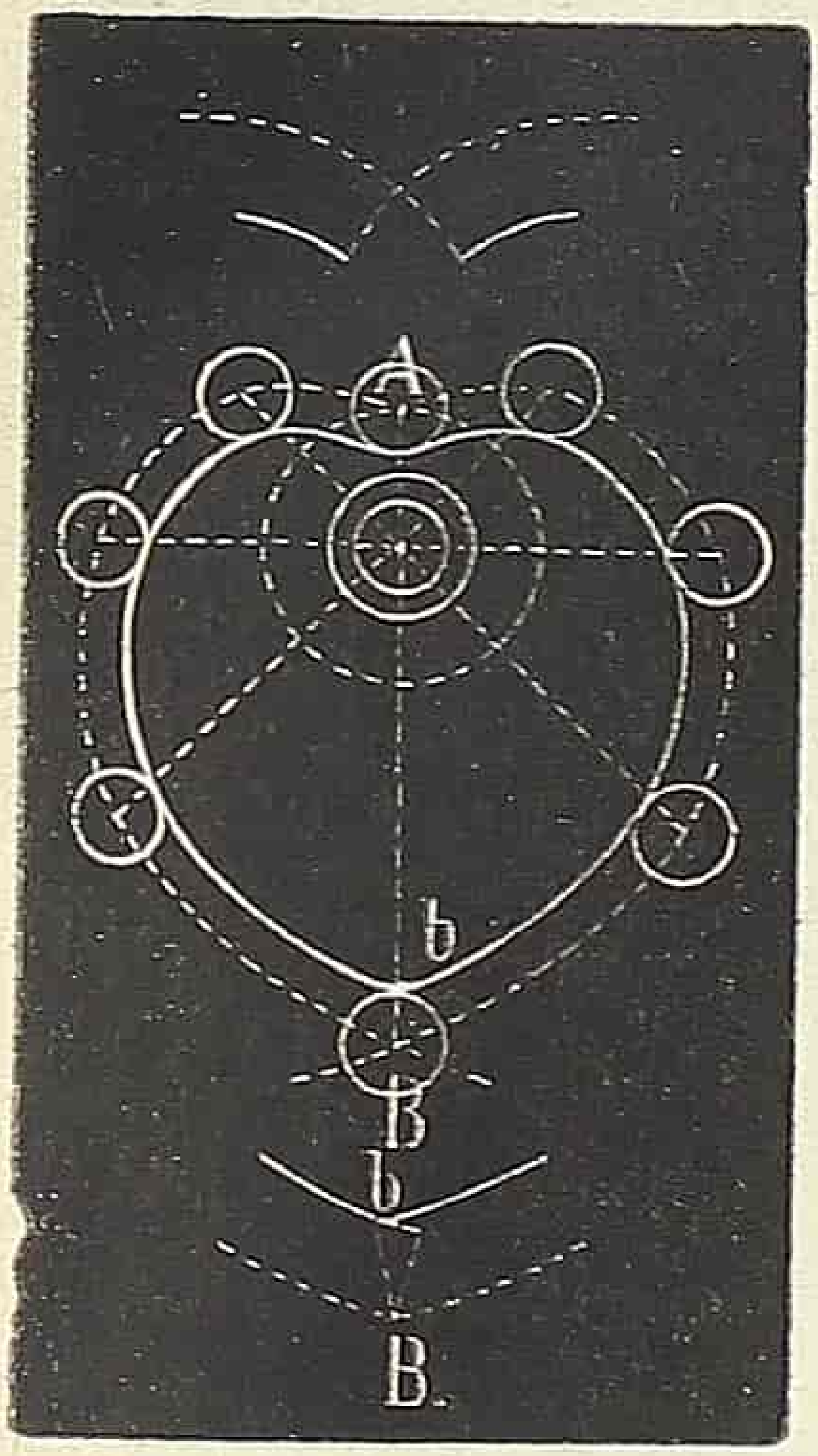
Кад је потребно да се дршка једномерно креће, онда је крива пруга $r = f(\Theta)$ спирала Архимедова [или еволвента круга, ако продужење дршке непролази кроз средиште обртања]. —

Нека је L дужина пута, кои држка пролази. Параметар спирале треба определити тако да за обрт од 180^0 увећање радиуса вектора буде равно L.

По овом услову једначина пруге биће

$$r = r_0 + L \frac{\Theta}{\pi}.$$

r_0 је повољна количина. —



Сл. 231.

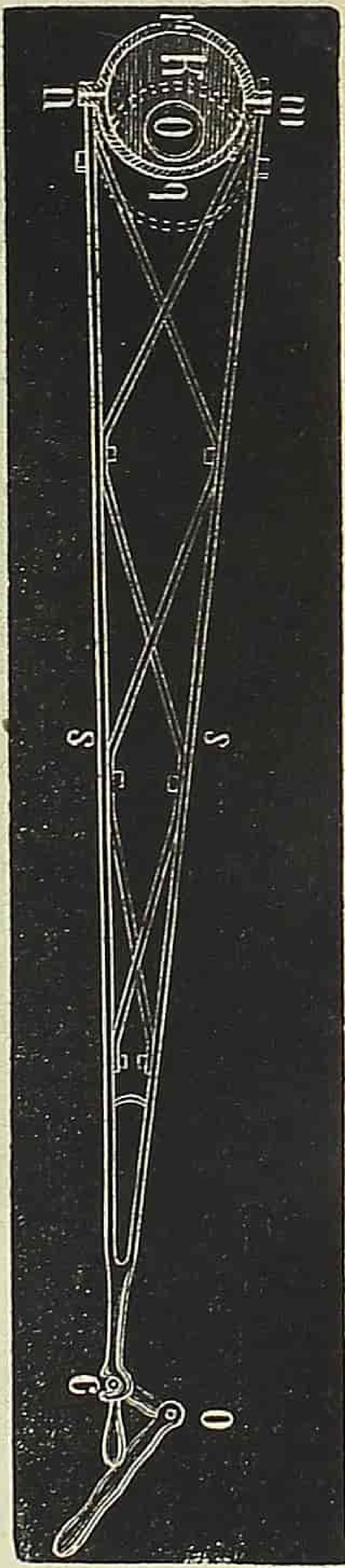
Ова једначина може да се конструише, ако се подели полукруг на известни број једнаки делова, и затим се пренесу на радиусе векторе дужине које се увећавају по аритметичкој постепености од r_0 до $r_0 + L$. — Овом конструкцијом добија се једна половина, која је са свим симетричка оној другој половини, и тако цео ексцентрик има изглед срца, као што слика 231 показује. —

Овде имамо приметити, да се брзина дршке нагло мења при свакој промени њеног правца кретања, и ово је једна врло рђава страна ексцентрика форме срца[1]. —

259. *Кружни ексцентрик.* — *Сл. 232.* Састои се из једног котура *K*, кои се ексцентрично обрће око осе *O*. — Овај котур зове се ексцентрик и обртајући се, клиза по унутарњој страни прстена *mpnq*, који је састављен из два дела *mpn*, и *nqm*, управљена међусобом двокраком дршком *mmc*. — Пошто се прстен неможе да обрће са ексцентриком, то је од њега потискиван час на једну час на другу страну, а усљед тога дршка се креће час у једном час у другом правцу (тамо амо). — Ово исто вреди и за слику 223. — Потоме кретање ма које тачке дршке, може се сматрати као кретање на пречник пројектиране тачке, која се једномерно по периферији неког круга креће (№ 26 I. део)·

---

[1] Ало би ексцентрик форме срца непосредно дејствовао на котурпће онда напред опредељена крива пруга, морала би се по већ наведеној приметби, заменути са равноодстојном кривом пругом Сл: 231, при којој се има ово приметити: Близу тачке *A*, између два крака профила постаје известна празнина, која се попуњава луком описаним из *A* као средишта а са полупречником котурића. — С друге пак стране краци криве пруге пресецају се, потоме морају се на овом месту изоставити два мала лука, кои прелазе преко тачке *b*; а у исто време у овој се тачки крива пруга мало заокружи. Ови делови ексцентрика, кои су заокружени из средишта обртања, причињавају те кретање држке више или мање застаје. —



Сл. 232.

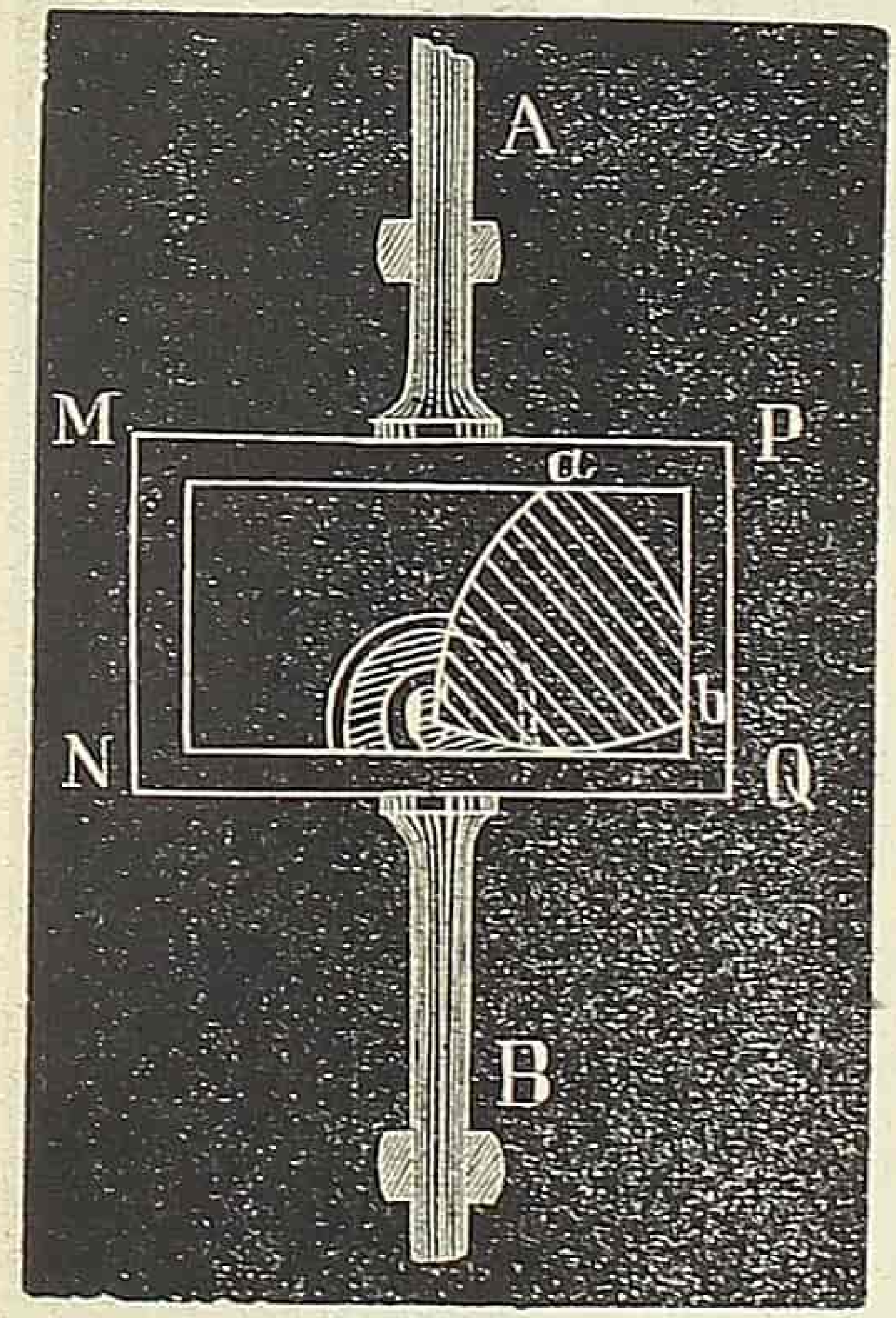
— Подобно кретање дршке може да се произведе, кад би она средством једне дугачке машке била сајужена са једном ручком. [Види слику 222 и све парне махине са нијаљком]. — Овде имамо приметити, да се код кружног ексцентрика порађа велико трење, чим би се имао већи одпор при кретању дршке да савлада; с тог гледишта, употреба ручке са машком млого је пробитачнија; зато се кружни ексцентрик употребљује кад је за кретање дршке потребна само мала снага (сила.). —

260. Ексцентрик састављен из кружни лукова. — У слики 227 профил ексцентрика састои се из три сасредна кружна лука, описана из средишта обртања са разним полупречницима. — Ови луци сајужени су међусобом кривим пругама, којих кривине морају бити једномерне. — Лако је видити да за сваки лук, рам са дршком остаје неко известно време некретан. — Отуда сљедује, да за један подпун обрт ексцентрика, котурићи имају три положаја. Кад су у средњем положају, онда плоча m затвара отвор L; а кад се налазе у два крајна положаја, онда га незатвара. — Средишни угли три кружна лука сразмерни су одговарајућем времену за које дршка остаје некретна. —

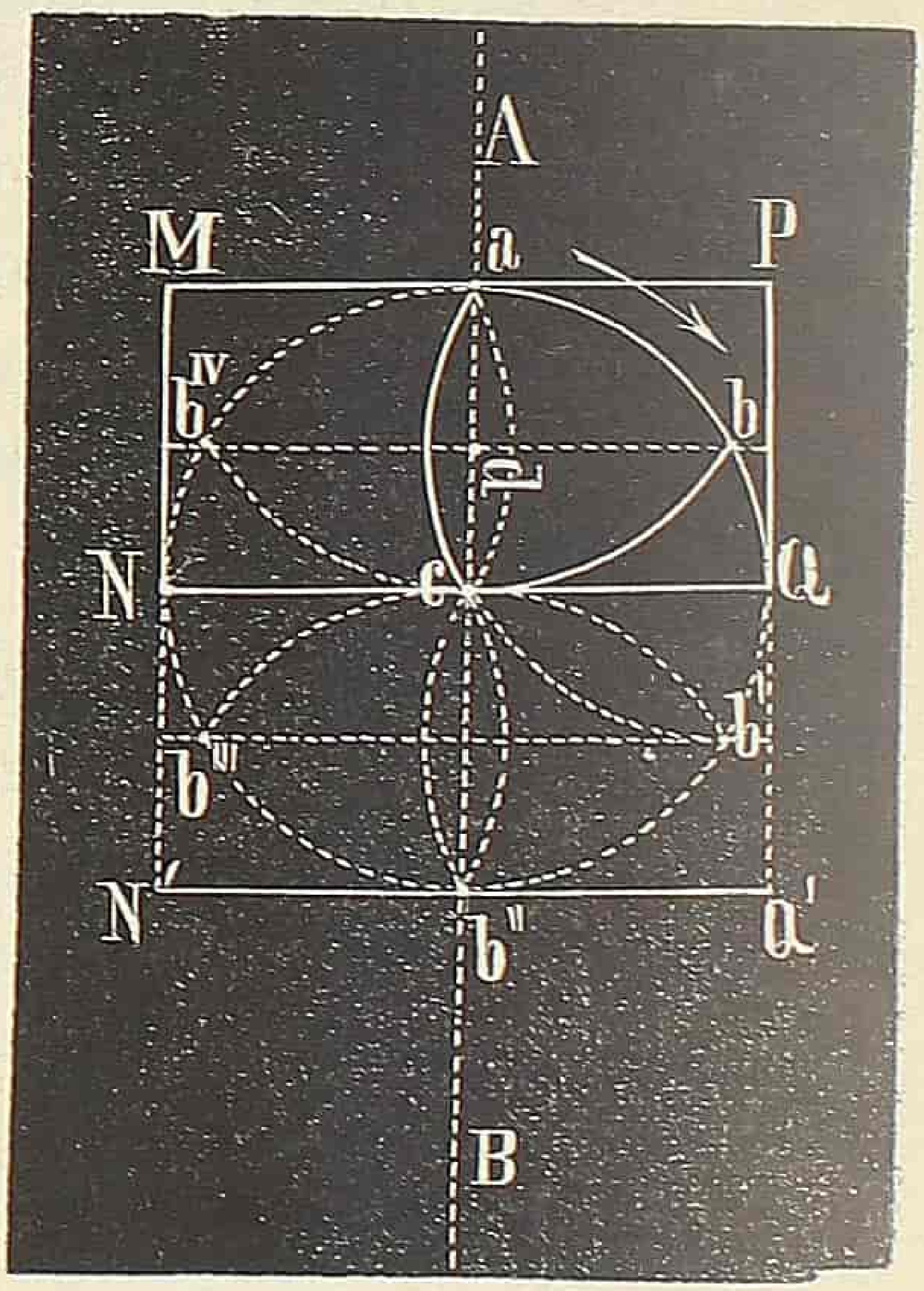
У слики 227^b профил ексцентрика састављен је из четири сасредна кружна лука, описана из средишта обртања са разним полупречницима. —

Троугли ексцентрик. — Профил овог ексцентрика састављен је из три једнака кружна лука $\widehat{ac}$, $\widehat{ab}$, и $\widehat{cb}$, описана из врхова равностраног триугла acb. Сл: 233, са полупречником раван страни триугла. Потоме сваки је лук $\frac{1}{6}$ периферије круга, кои се пресеца са остала два лука под углом од 120°.

— Овај ексцентрик обрће се око једног свог врха н. пр. c и покреће рам $MPQN$ у коме се налази, час у једном час у другом правцу [у слици у правцу AB] а тиме и дршку $\overline{AB}$, која је са рамом чврсто сајужена. — Ми ћемо сада да испитамо разне периоде овог кретања.



Сл. 233.



Сл. 233.

Први период. Рецимо да се ексцентрик обрће око осе c у правцу стрелице, а правоугли рам $MPQN$ правопружно креће у правцу $\overline{AB}$. — Лако је видити да за време обртања ексцентрика, лук $\overset{\frown}{cb}$ потискује страну $\overline{QN}$ рама, која га у c тангира, и ово потискивање траје дотле док се b непремести у b', т. ј. док тачка додира непостане b'. У овом случају ексцентрик заузео је положај cbb', и рам се спустио на ниже за половину полупречника $\overline{ac}$, јер кретање рама исто је као и кретање пројекције врха a; на праву $\overline{AB}$. — Овде имамо јошт то додати да страна $\overline{MP}$, налазећи се непрестано на једном истом одстојању од $\overline{NG}$, за време кретања прве периоде пролази кроз кретни врх a. —

Друга периода. — Ексцентрик продужујући обртање у истом правцу, потискује даље рам ивицом b', док напоследку незаузме положај $cb'b''$, а рам положај $NQN'Q'$. Кретање је у овој периоди исто као и у првој, осим тога страна $\overline{MP}$, која се налази на место $\overline{NQ}$, тангира лук $\overset{\frown}{cb'}$.

Трећа периода. — Стајање. — Ексцентрик продужујући даље обртање, непотискује више рам, и овај остаје на месту док тачка b' недође у b''' т. ј. док ексцентрик незаузме положај $cb''b''$, који је сасвим симетричан првом положају. — Од овог тренутка ексцентрик почиње потискивати страну $\overline{MP}$, која се на место $\overline{NQ}$ налази, и која постаје тангента лука $\overset{\frown}{cb'''}$. — Кретање рама бива у противположеном правцу и сасвим истоветно са предходећим кретањем, и ово кретање свршава се као и предходеће са једним застајањем, које одговара прелазу ексцентрика из положаја cb^{IV} у положај cab. —

Ако означимо са V, брзину једног кретног врха ексцентрика н. пр. врха a, са v брзину рама, са r полупречник $\overline{ac}$, а са h управну спуштену из кретног врха на пречник $\overline{ab''}$, онда ћемо за прву периоду сваког кретања у једном правцу, имати ову једначину између V и v.

$$v = \frac{V}{r} . h$$

што ће рећи: да се брзина рама има према брзини кретног врха a; као што се има ордината h, према полупречнику r, (види № 26.). — Цела дужина пута, кои рам у једном правцу пролази, равна је полупречнику r ексцентрика. —

Три у главноме описана ексцентрика Сл. 227^b, 232 и 233, употребљују се поглавито код парни махина за распоред паре и за њено дејство, о чему ћемо говорити кад будемо изучавали парне махине. —

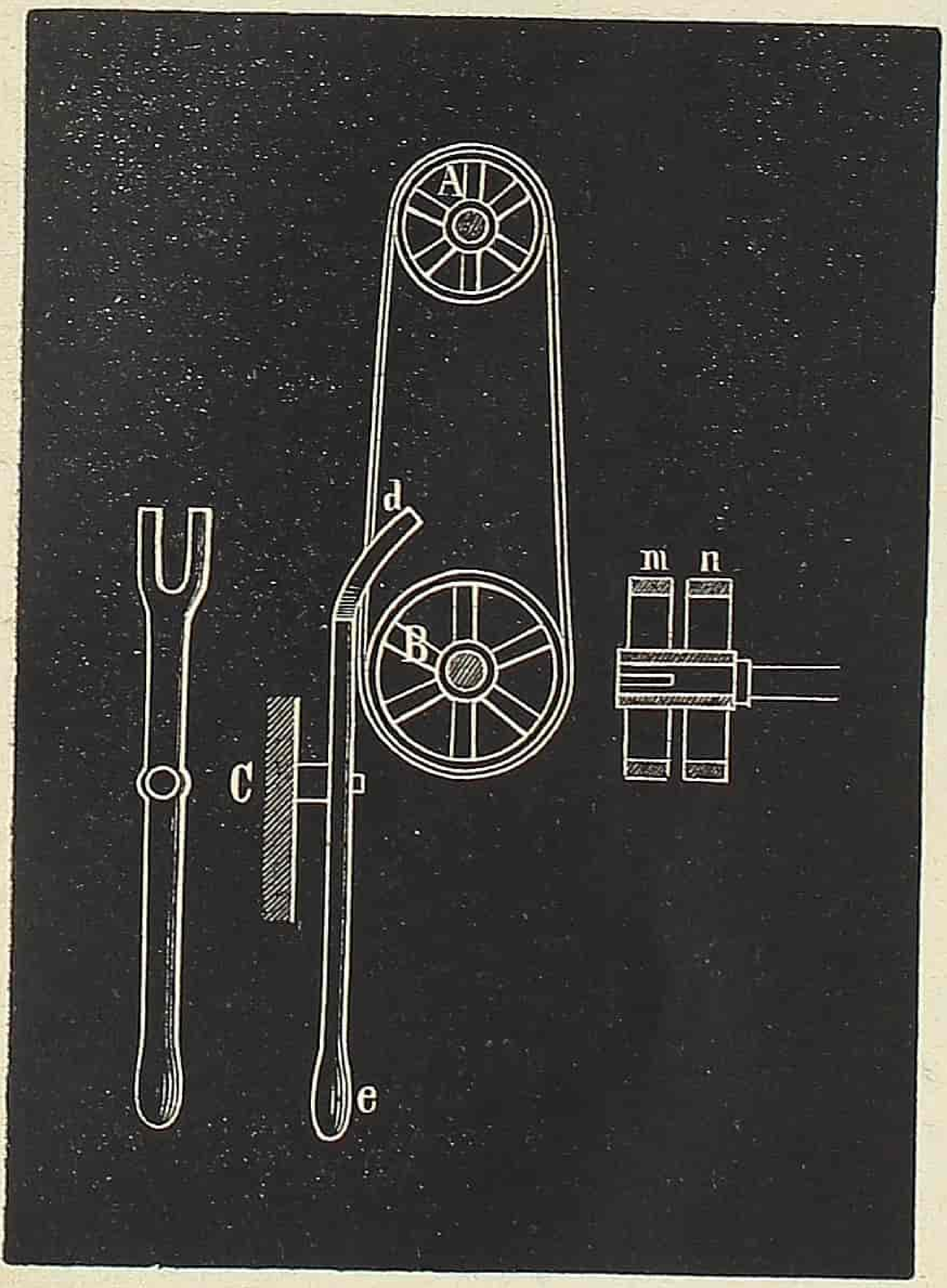
Разни органи за спој, прекид, или преиначење кретања, код поједини кретни делова какве махине

261. Ма какве природе био мотор, кои покреће многобројне и разне механизме у каквој повећој фабрики, често је потребно да се поједини механизми, или и цела махинерија, може повољно и лако у кретање да постави, или да се по-

стојеће кретање заустави или преиначи. Зато служе разни махински органи, са коима ћемо се ми сада у кратко да упознамо.

Органи за спој и прекид кретања.

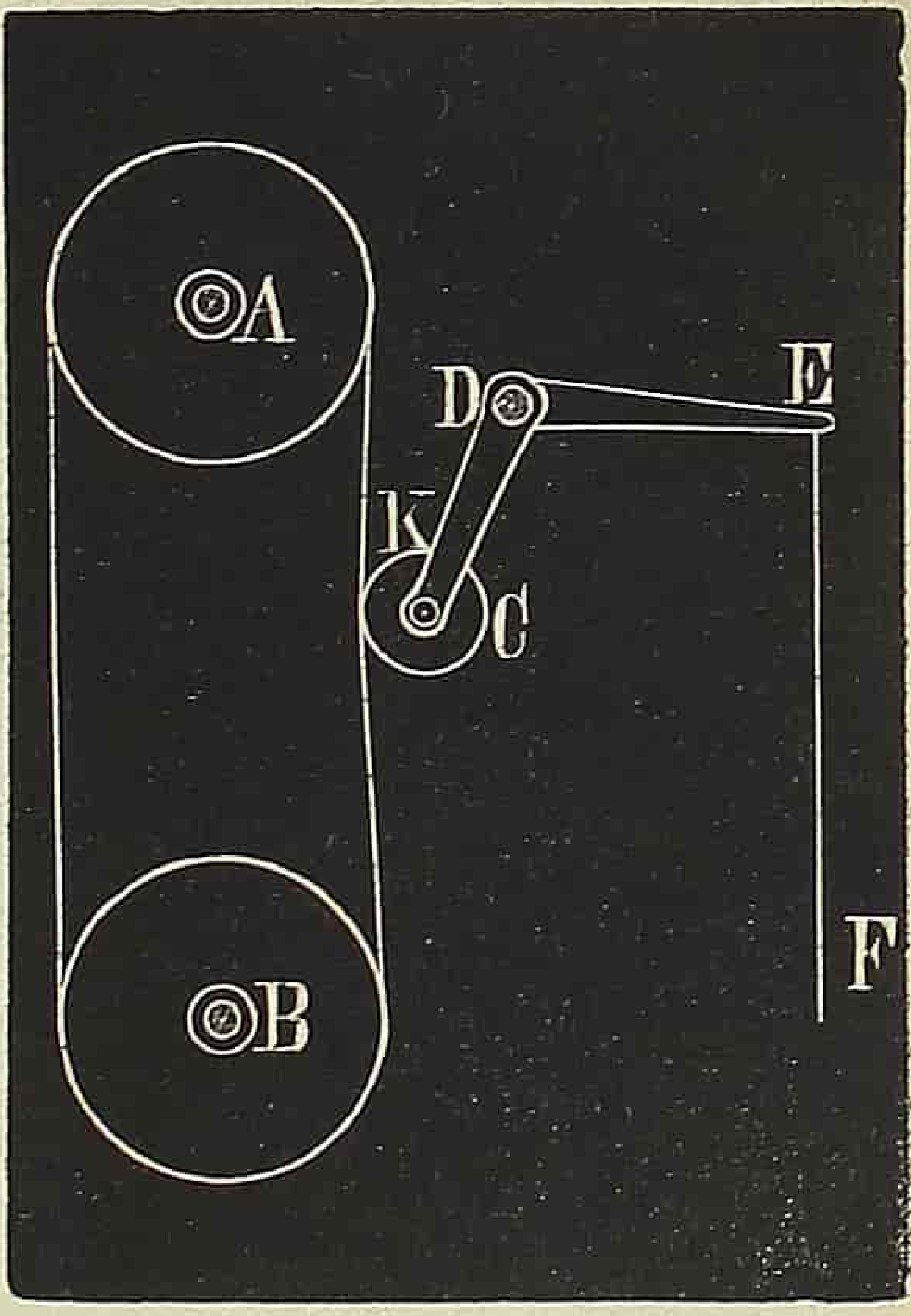
262. Спој са безкрајним каишем. Мисмо видили № 223, како се преноси кретање са једне осовине на другу равноодстојну. Даље смо казали да се једна осовина н. пр. *A* непрекидно обрће, и на њој је углављен један котур. На осовини пак *B*, налазе се два котура *m*, и *n* Сл. 234. један н.пр. *m*, тврдо углављен а други *n*, неуглављен. [гладан] — Сад кад се оће да заустави обртање осовине *B*, онда се ракљом *de* [виљушком] која је обртна око сталне осе *C*, каиш премести са углављеног на гладни котур; напротив кад се оће обртање осовине *B*, да произведе, онда се обртом ракље у противном правцу, каиш са гладног котура премести на утврђени котур. —



Сл. 234.

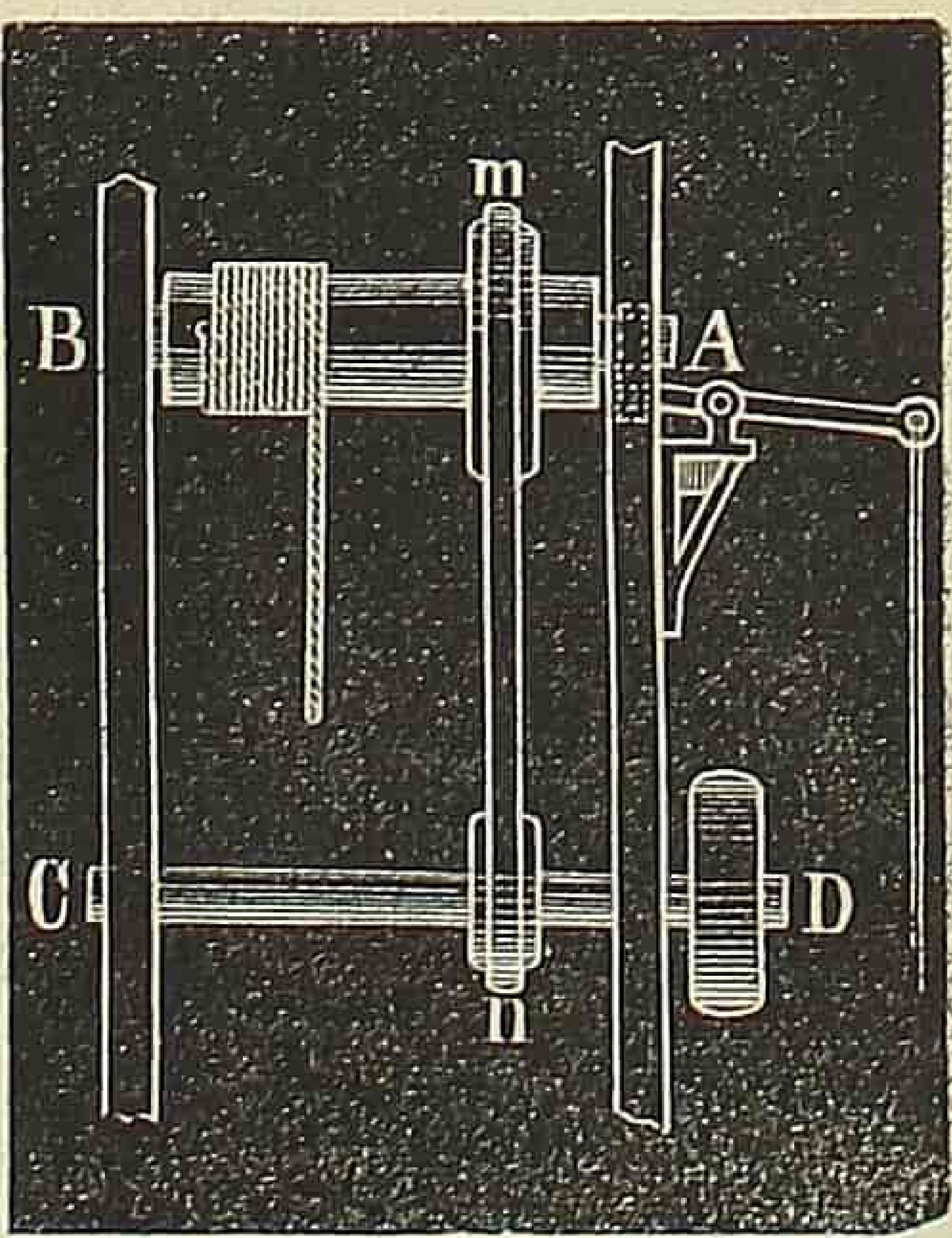
Приметба. 1° Ракља *de* мора дејствовати као што смо већ напоменули на онај струк каиша, кои долази на котур, а не на онај кои га оставља. — Доцније ћемо видити обширније зашто је то тако. 2° Углављени котур на осовини *B*, недобија нагло брзину каиша у истом тренутку кад се овај на њега премести. — Каиш почиње најпре клизати и нормална брзина углављеног котура може се постепено да произведе, ако се ракља de, буде мало по мало покретала. — Мало доцније видићемо на кои се начин ово лагано кретање ракље производи. —

262. Спој и прекид кретања може да се произведе затезањем и попуштањем безкрајњег каиша, јер пренос кретања са једног котура на други, може само онда бити, ако је каиш довољно затегнут. Ради тога употребљује се тако звани затежни котур (poulie de tension) Сл: 235. Овај котур K може да се обрће око осе C, налазеће се у крају двокраке кретке CDE, која се може обртати око сталне осе D. На другом крају E завезан је конопац, и кад се овај конопац затегне, онда котур C притискује каиш, кои се у сљед тога затеже, и тиме пренос кретања са једне осовине на другу произведе; напротив кад се конопац попусти, онда котур C, због своје тежине одвои се од каиша, кои у том случају постане лабав, и сајуз је за пренос кретања прекинут. —



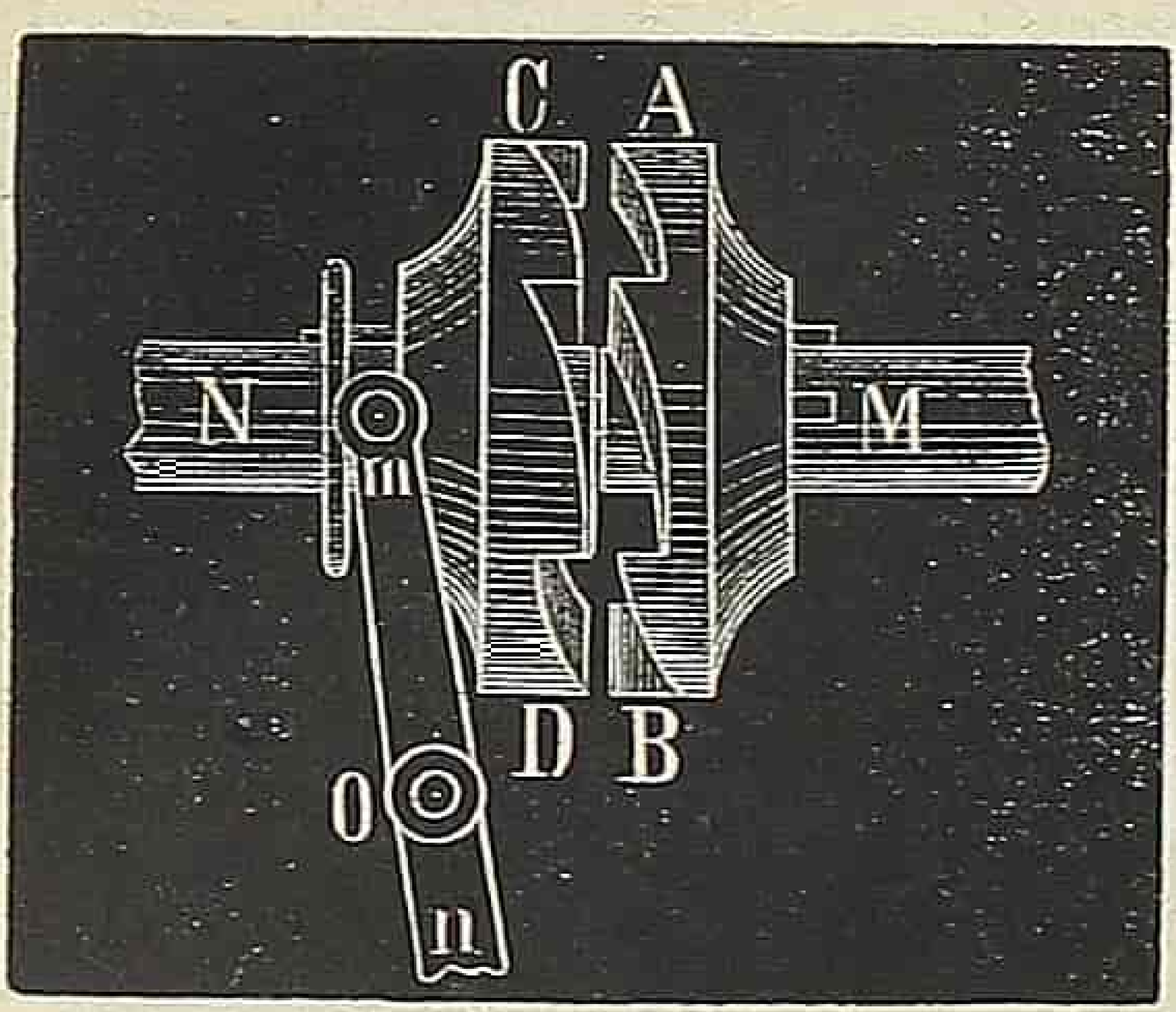
Сл. 235.

263. До истог резултата долази се, ако се лежиште једног краја једне осовине тако начини, да се може за нешто помештати по потреби у једну или другу страну. У слики 236, крај A осовине $\overline{AB}$ може се дизати и спуштати. — Кад се диже; каиш mn, затеже се, чиме се пренос кретања са једне осовине на другу производи, кад се спушта, каиш постане лабав, и сајуз је за пренос кретања прекинут. —



Сл. 236

274, Спој две осовине, које се у једном истом продужењу налазе. — За спајање овакови осовина ради једновреме-

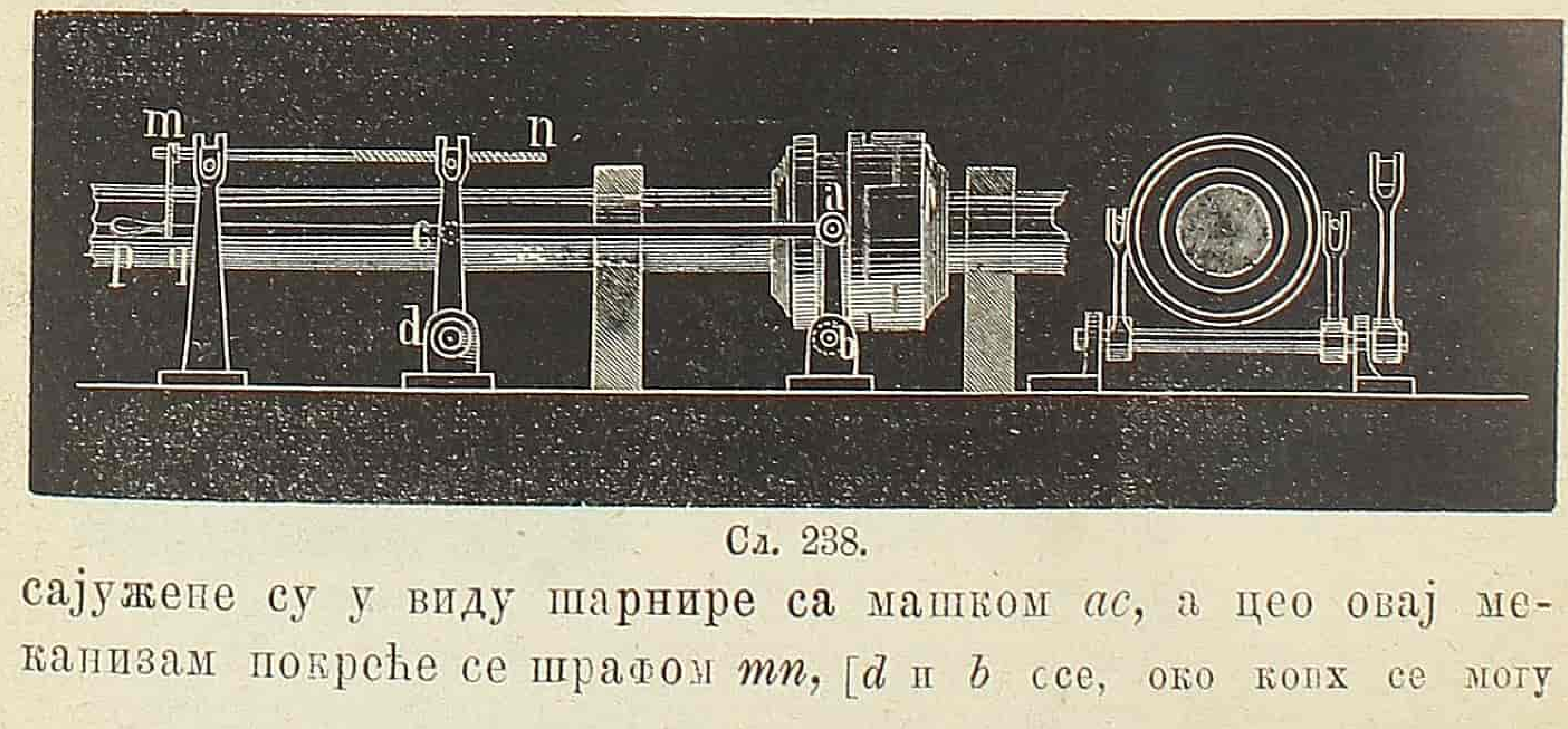


Сл. 237.

ног обртања, употребљују се тако зване зубчасте гривне *AB* и *CD* Сл: 237, које имају један исти број једнаки зуба. — Гривна *AB* утврђена је чврсто на крају моторне осовине *M*, а гривна *CD* утврђена на крају осовине *N*, може за мало по њеној дужини клизати, и само се с њом обртати. — Сад кад је потребно да се осовине споје, онда раденик примакне гривну *CD* средством двокраке кретке *mn*, до гривне *AB*, у сљед чега зуби обе гривне завате један за други и тако се осовине споје, и заједно се обрћу. Напротив кад се гривна *CD* одмакне од *AB*, онда је спој прекинут, осовина *M* обрће се и даље, а осовина *N* остаје некретна.

Овде имамо приметити да форма зуба гривана независи од никакви абсолутни правила. — Кад је правац обртања моторне осовине опредељен и свакада један исти, онда је најбоље, кад се зуби састоје из шрафни [хелисоидни], и равни површина, као што слика показује. — Код оваковн зуба, у почетку додира гривана, порађа се између шрафни површина известно трење, које за нешто ослабљава судар између гривана.

265. Код врло снажни махина, покретна гривна може да има такву тежину, да се неда лако покретати само простом кретком. — У овом случају кретка *ab* и *cd* — Сл. 238

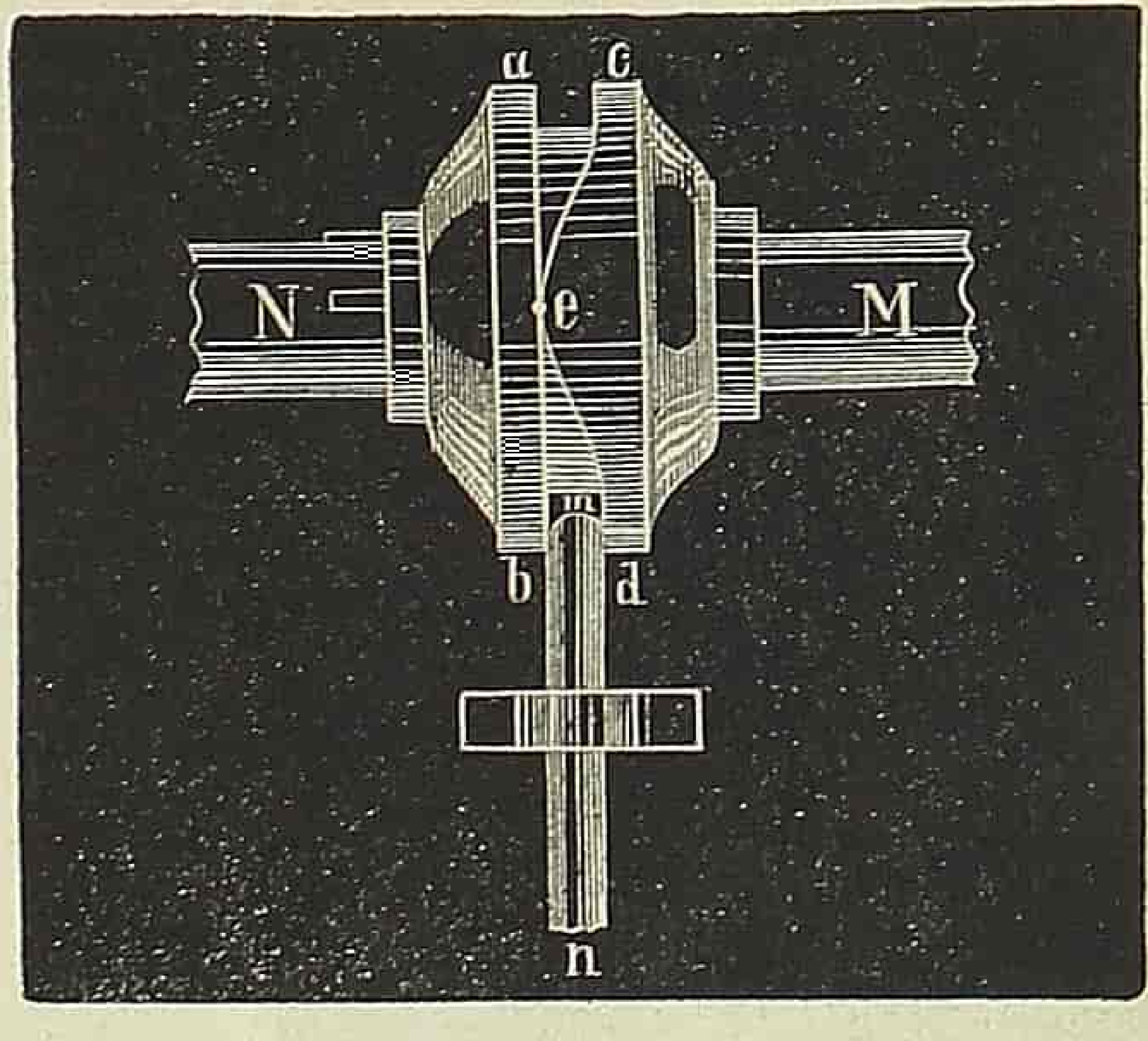


Сл. 238.

сајужене су у виду шарнире са машком *ac*, а цео овај меканизам покреће се шрафом *mn*, [*d* и *b* осе, око коих се могу да обрћу кретке *ab* и *cd*]. Лежишта шрафа обртна су око две осе тако, да се шраф нешто мало косо кретати може. — Као што слика јасно показује, овде су зуби гривана прави, а то због тога, да би се могао имати пренос кретања у једном и у противположеном правцу. — Но код овог система порађа се доста јак судар при спајању и растављању осовина.

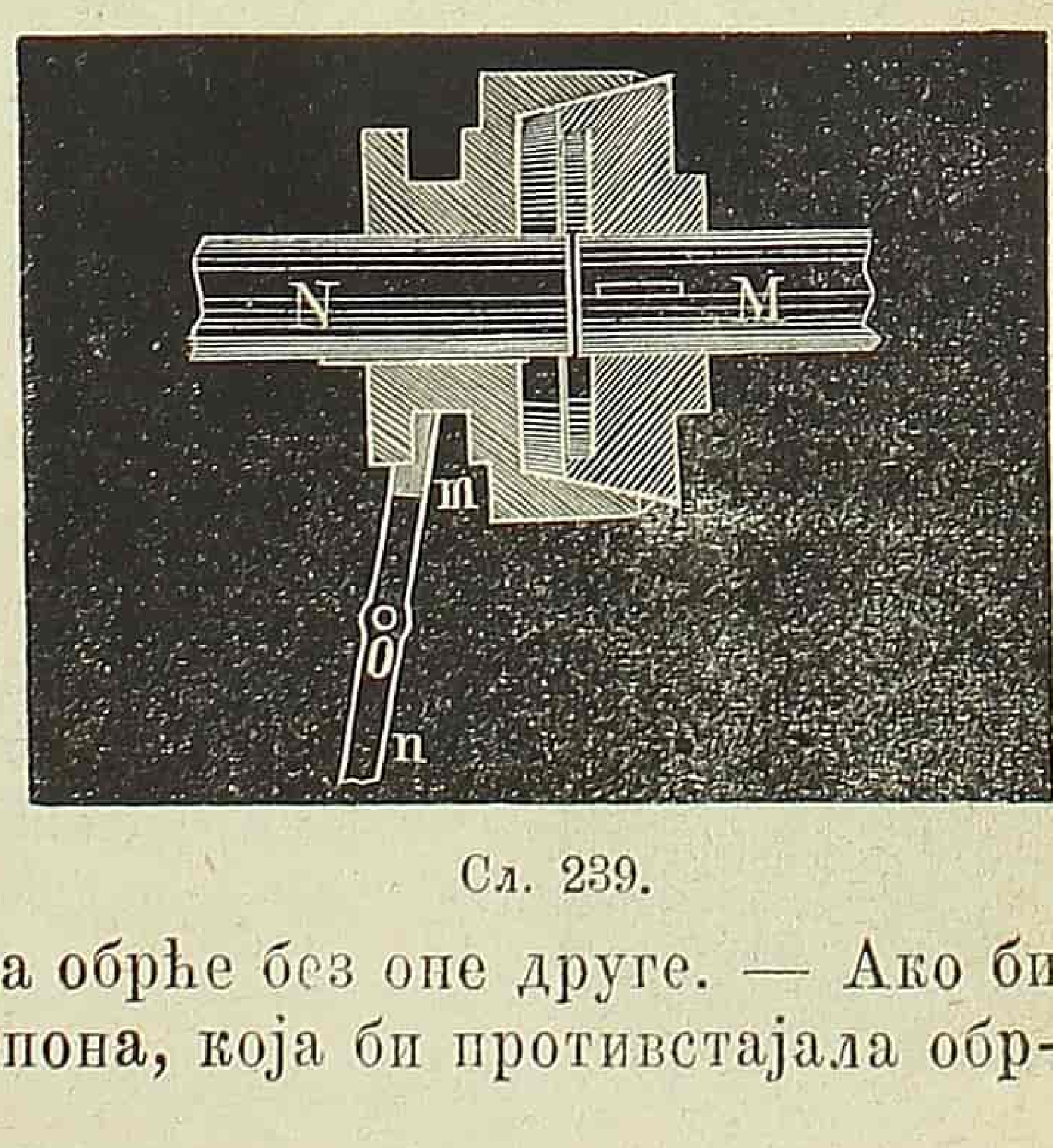
Нагли прекид кретања код снажни махина

265^{bis} Кад се укаже потреба да се на један мах заустави кретање две осовине *N* и *M* код снажни махина, онда је доста неудесна и несигурна проста рогљаста кретка, зато се две гривне снабду са раменима *ab* и *cd* која образују међусобом један отвор као што слика 238^{bis} јасно показује. — Ширина овог отвора умаљава се постепено док непостане нула у тачки *e*, периферије гривана, — Сад кад се оће обртање осовина да заустави, онда се у овај отвор нагло утисне једна јака гвоздена дршка *mn*, која је подпорама утврђена управно на осу обртана осовина. Утиском вопросне држке, гривне се разставе а тиме се прекид осовина произведе. —



Сл. 238^{bis}.

266. Спој средством фрикциони конуса. — По неки пут, зуби гривана замењени су са две једнаке коничке површине, једна конкавна а друга конвексна Сл. 239. — Утискивањем ови конуса један у други, средством двокраке кретке *mn*, порађа се таково трење, које причињава те се једна осовина неможе да обрће без оне друге. — Ако би се десила каква изузетна препона, која би противстајала обр-

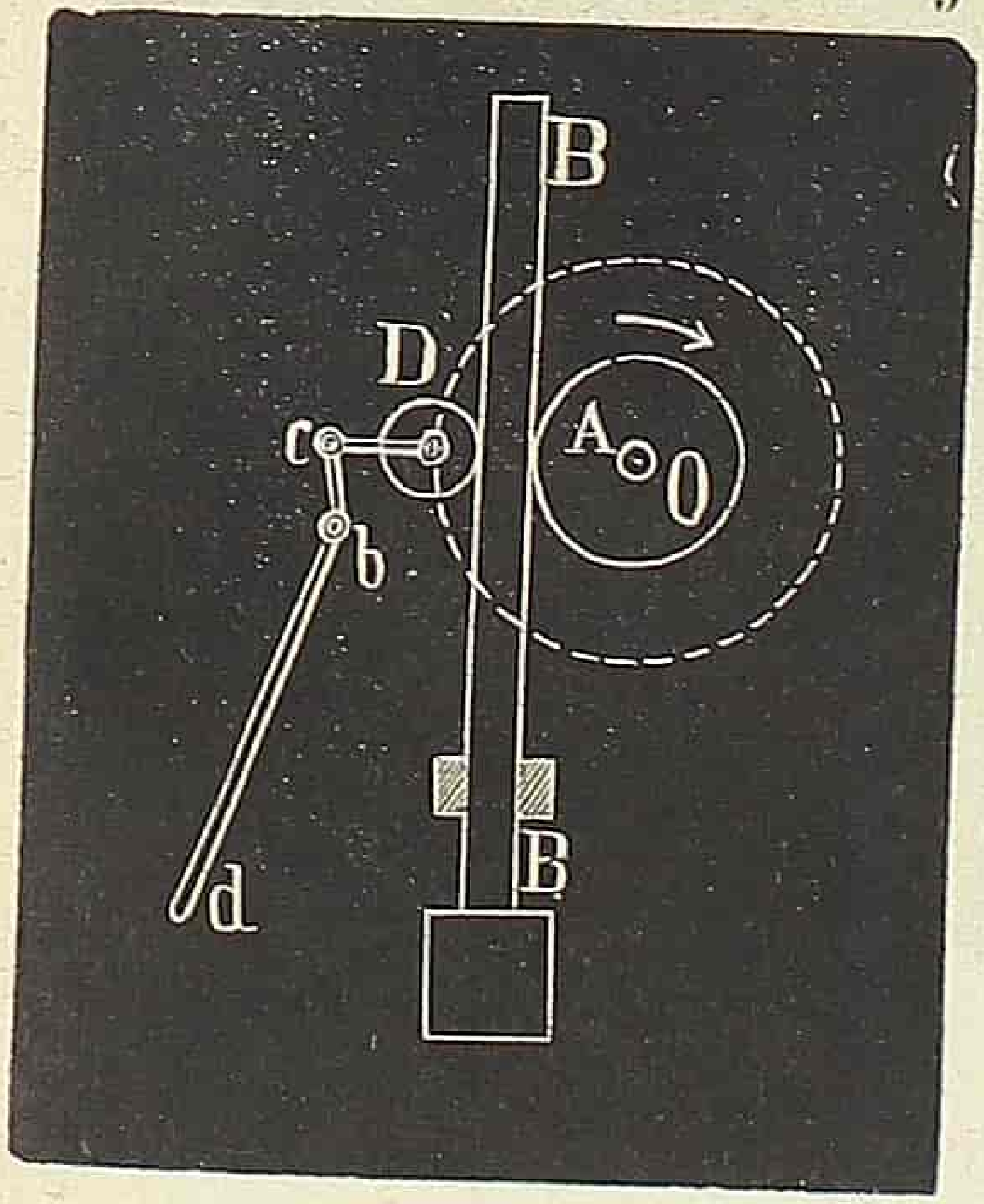


Сл. 239.

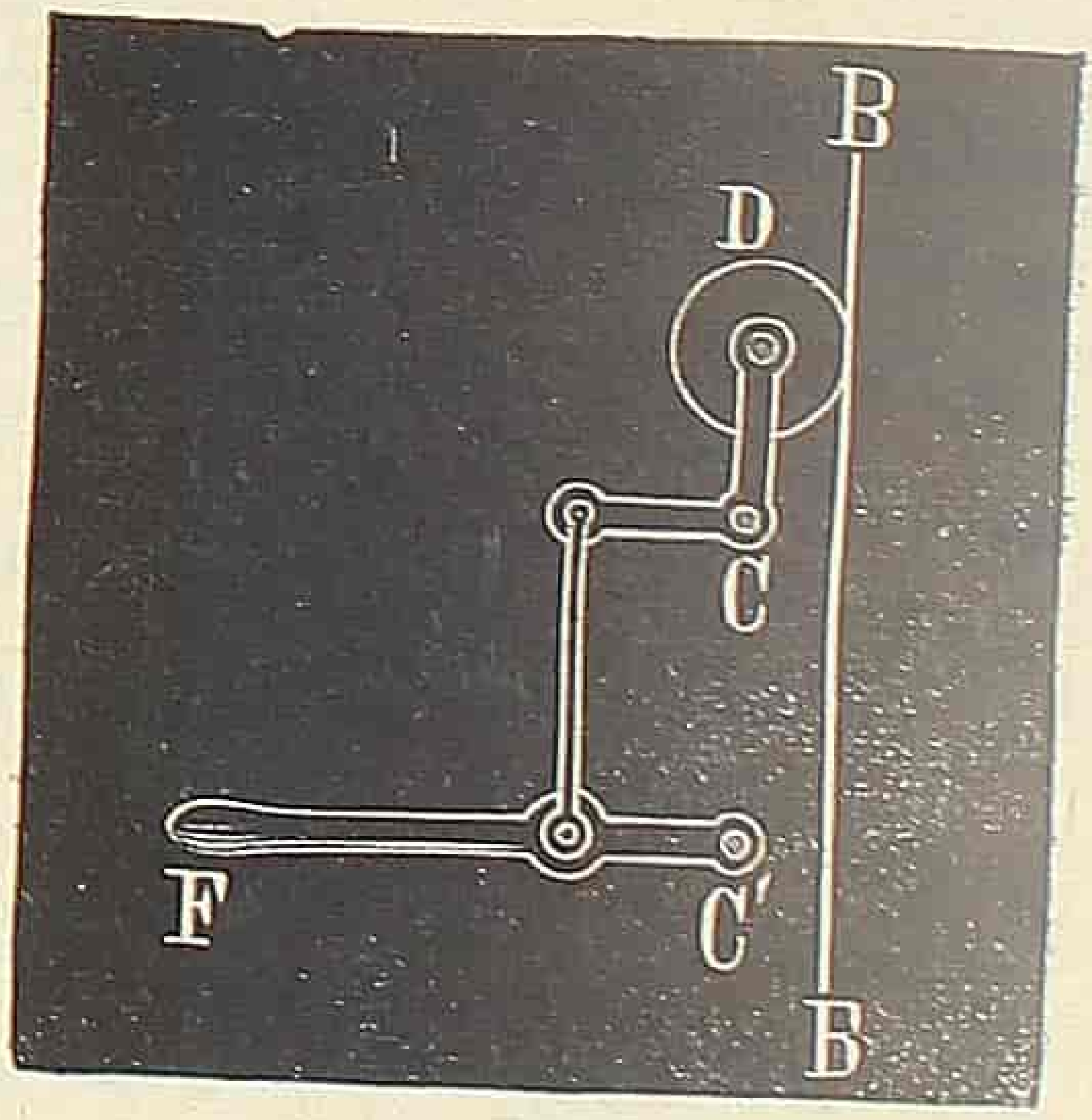
тању осовине, на коју се има кретање да пренесе, онда ће површине конуса клизати једна по другој, и такође се избећи судар и прелом осовина, или другог ког органа махине. —

267. Спој средством фрикцијони ваљака. — О оваквом споју говорили смо већ на једном месту, види слике 124 и 125. —

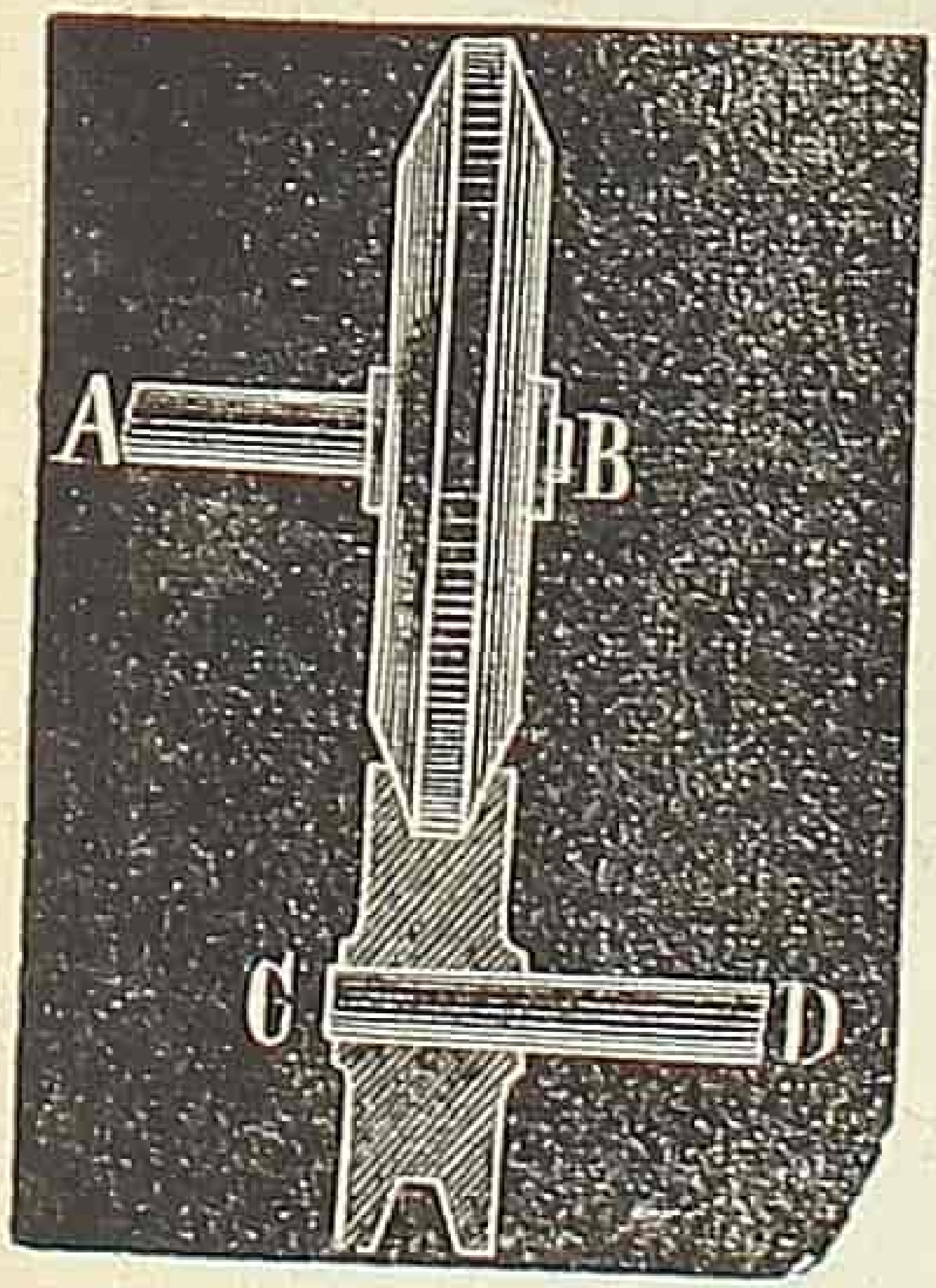
268. Спој једне обртне осовине, и једне правопружно кретајуће се држке. — Ваљак *A*, обрће се непрекидно око утврђене хоризонталне осе *O*, Сл. 240 Вертикална дршка *BB* додира га, и само се онда вертикално креће, кад је уз ваљак довољно притиснута — Да се овај тасак произведе, други ваљак *D*, сајужен је са кретком *cbd*, којас е може да обрће око сталне осе *c*. — Сад кад се кретка повуче, онда се ваљак *D* уздигне и притисне држку уз ваљак *A*, тим тиском произведе се трење између ваљка



Сл. 240.



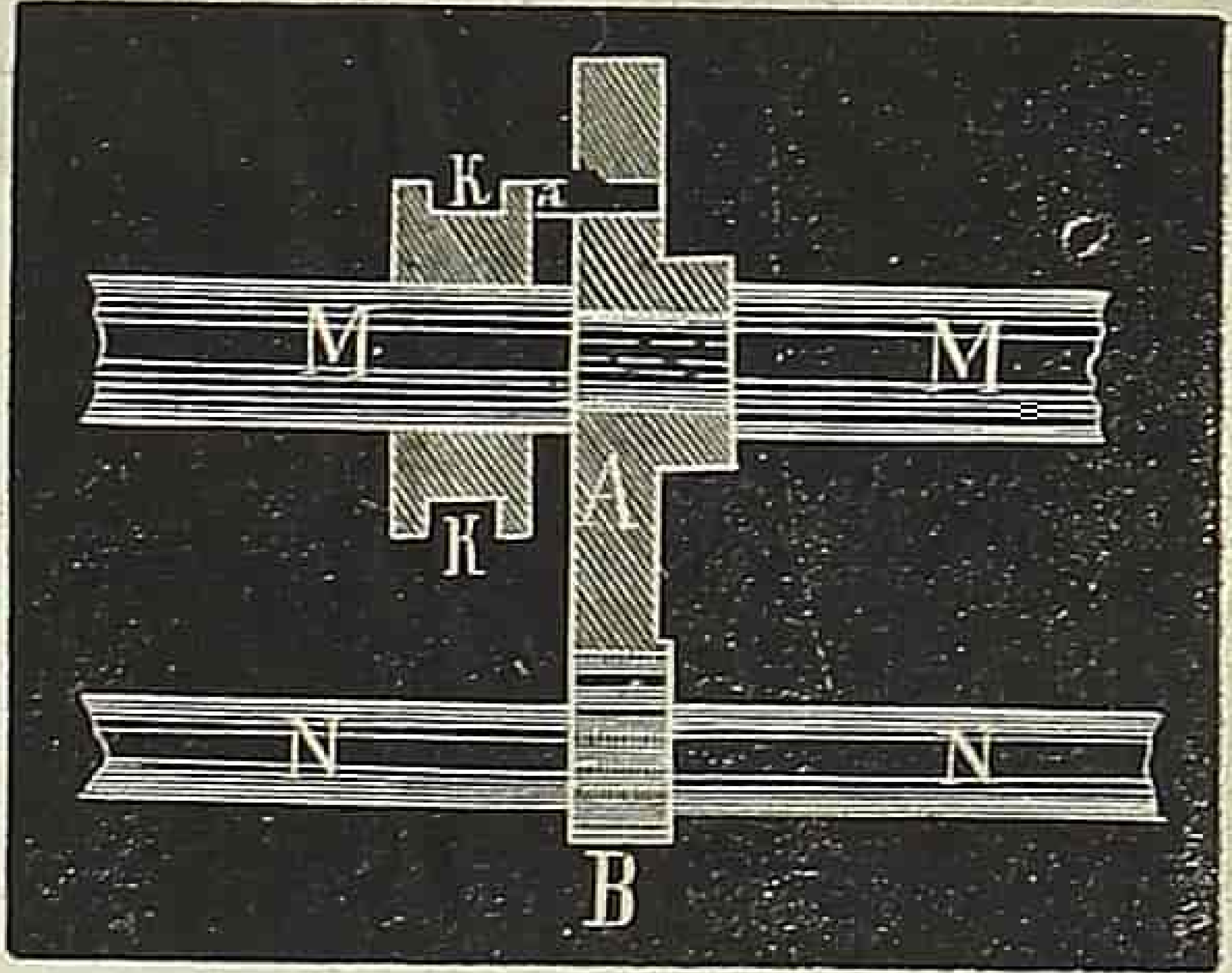
Сл. 240*a*.



Сл. 239*a*.

Слика 239*α* представља спој две равноодстојне осовине *AB* и *CD*. Овај спој има велику аналогију са предходећим спојем, и даје већу сигурност него фрикциони котури, задржавајући притом и могућност клизања за неповољни случај.

и дршке, која се у сљед тога на више пење, кад се пак кретка пусти, тисак престаје и дршка на ниже пада. Слика на страни представља вертикални чекић. — Мењајући висину са које чекић пада, добија се такав удар, какав се оће. — Кретка се може начинити и као што слика a, показује. — C и C' јесу сталне осе обртања кретке. —

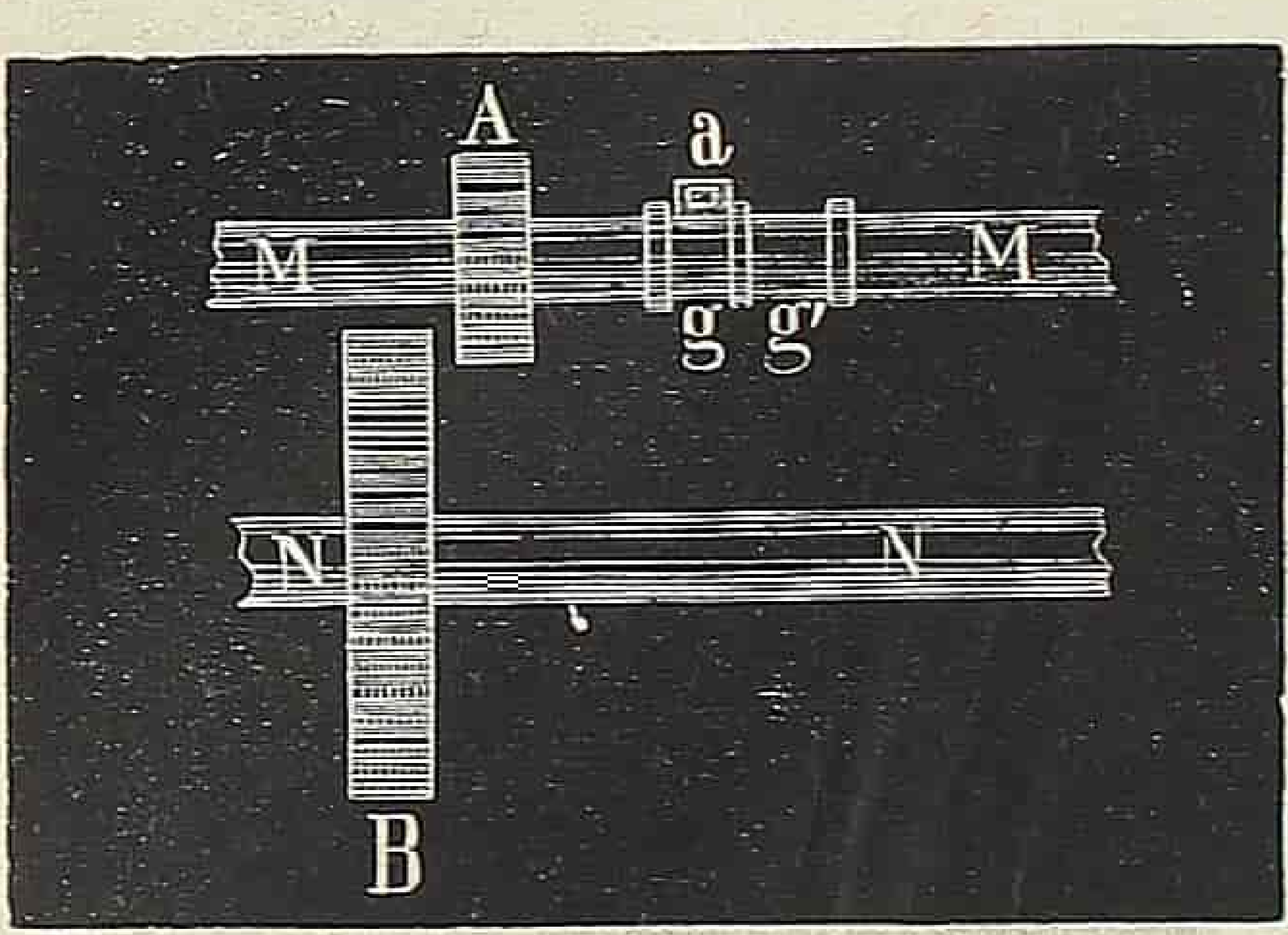


Сл. 241.

269. Спој зубчаника средством кретне гривне. Два зубчаника (Зубчаста точка) A и B налазе се на своим осовинама MM, NN, коих су геометричке осе у једној равнини Сл. 241. — Точак B утврђен на својој осовини NN, завата са точком A, кои је гладан (неуглављен) на својој осовини MM. По овој осовини може уздужно да склиза гривна KK, која служи за спој, и која се заједно са осовином обрће. — На гривни налази се зубац a, кои се утискује у једну рупу точка A, кад се оће кретање са једне осовине на другу да пренес. —

Спајање зубчаника може да се произведе на два начина. Ако мотор дејствује на осовину MM, онда се она непрекидно обрће, зубчаници пак обрћу се заједно само онда, кад је зубац гривне утиснут у напред поменуту рупу точка A, иначе оба зубчаника заједно са осовином NN, остају некретна. — Ако пак мотор дејствује на осовину NN, онда се она као и оба зубчаника непрекидно обрћу, а осовина MM, обрће се само онда кад је спој произведен. Помицање гривне KK, по осовини MM, бива обичном рачвастом кретком. —

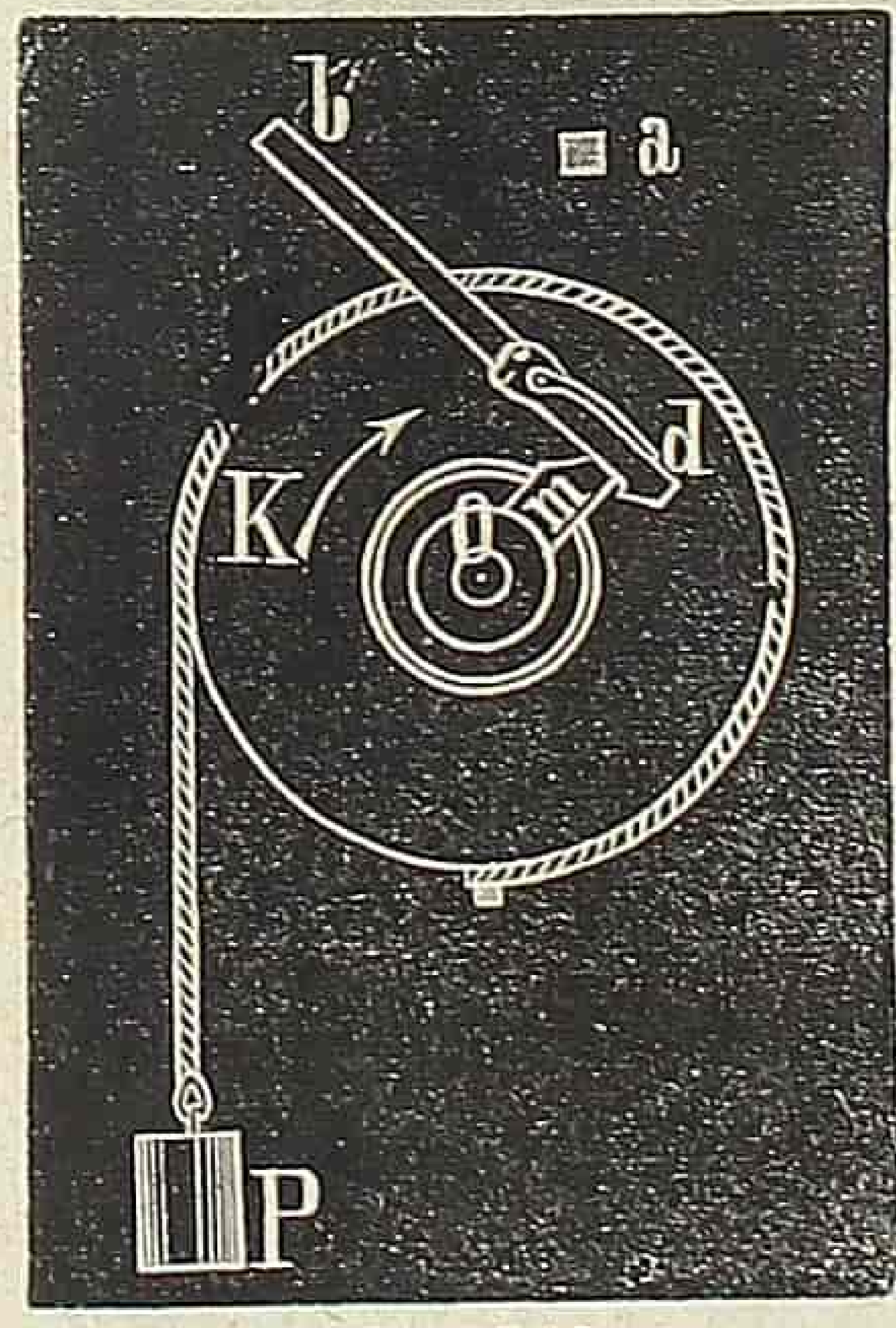
270. Спој зубчаника уздужним помицањем једне од две осовине. Сл, 242. Осовина MM, која се уздужно може покретати, има два огрљка g и g', кои служе да се положај осовине утврди, а то се чини кретком a. — Слика представља случај кад је спој прекинут. За спајање точкова, најпре се уздигне кретка a, затим се осовина MM у лево помести и



Сл. 242.

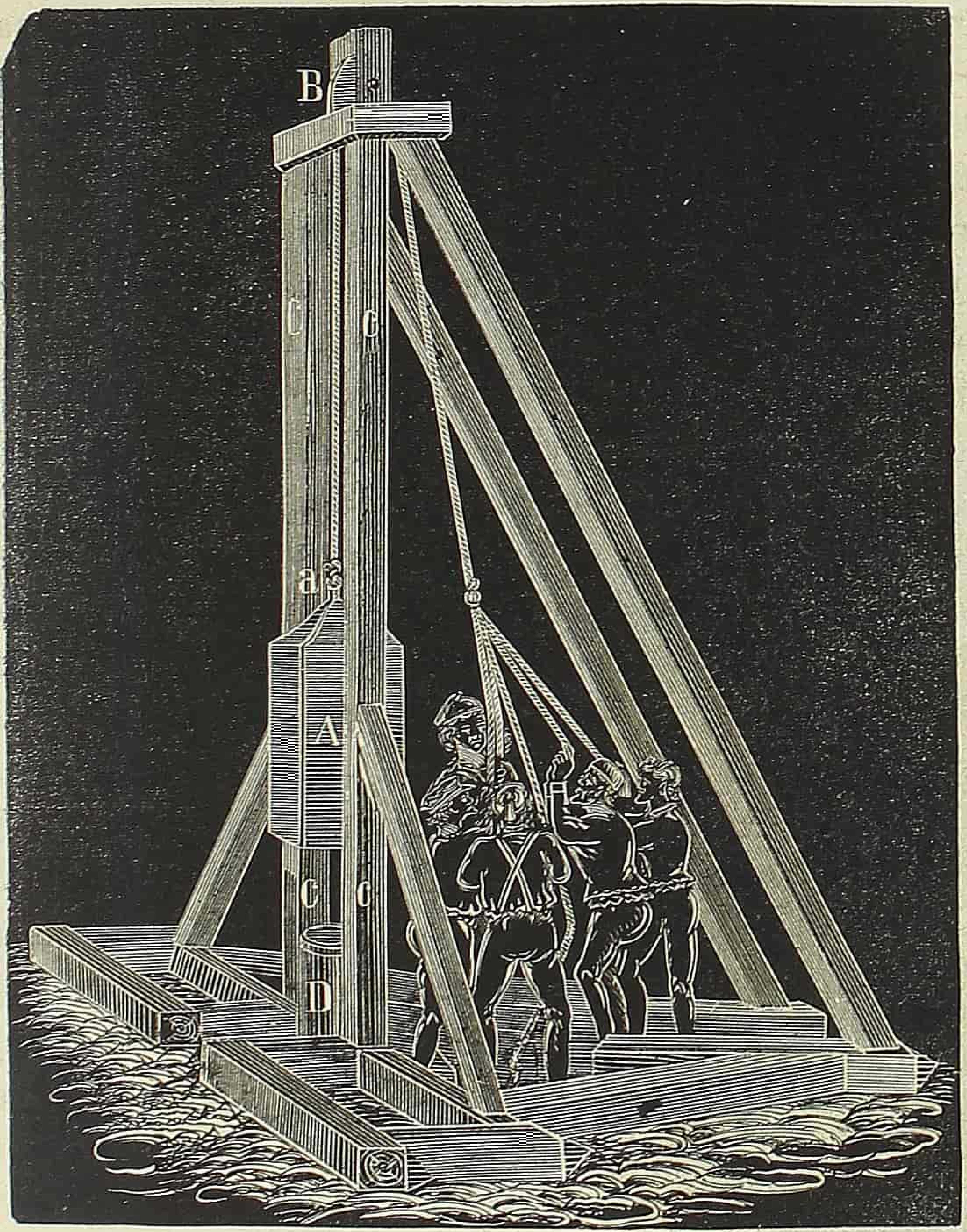
кретка на огрљак g' спусти. — Осовине могу бити и неравноодстојне. —

271. Запињачи. (Dèclics) У главноме служе за производење или нагло заустављање каквог кретања. Запињачи употребљују се поглавито код махина, које имају малу снагу, или код споредни органа велики махина. Покрет запињача по кад кад је отоматичан т. је. остављен је самој махини да га она покреће, као што то сљедећи прост пример јасно показује: хоризонтална осовина o, Сл. 243, на којој је утврђен палац (зубац) m, обрће се непрекидно у правцу стрелице. На њој је неуглављени (гладан) котур K, а на страни овог котура утврђена је оса c, једне на крају кукасте кретке b d, коју на палац притискује прудно перо (Федер) cd, тако да се котур заједно са осовином мора обртати. На котуру утврђен је један крај конопца, а на другом крају закачен је терет P, кои се при обртању осовине на више уздиже. Но у известном тренутку, крај кретке b наилази на пречагу a, и тако се кретка од палца одкачи, котур пак остављен самом себи почне се обртати у сљед терета P, у противном правцу. Но на скоро одкачени палац закачи опет за куку кретке, и котур се на ново почне да обрће у правцу стрелице. На тај начин котур се може од прилике по један пут да обрне, час у једном час у противном правцу. —



Сл. 243.

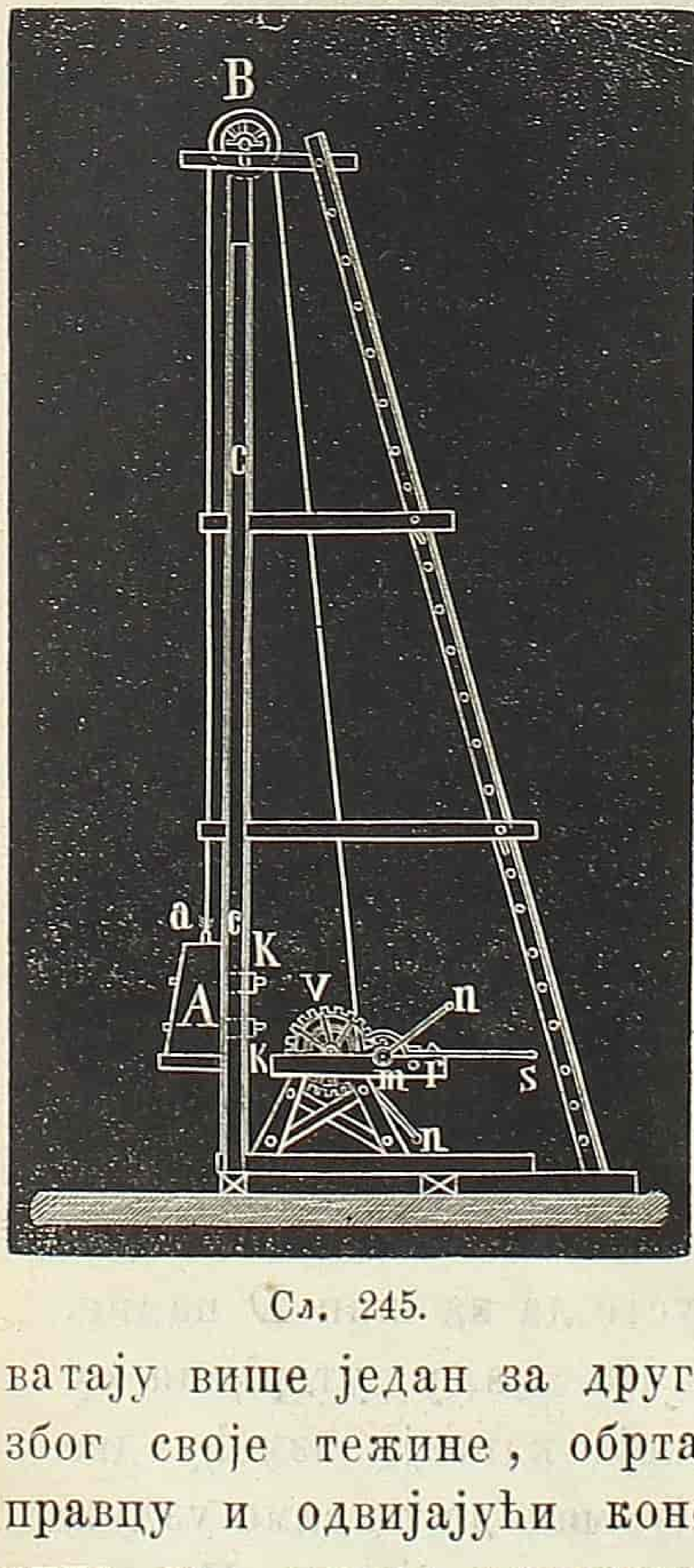
272. Махина (справа) за побијање шипова (дебелог коља). — Да се шипови у земљу побију, служи маљ, кои се на више дигне, а затим пушти да на главу шипа падне. За дизање маља, начини се од гредица особита справа као што је Сл. 244.



Слика 244.

јасно представља. На врху *a* маља *A*, утврђена је алка, за коју је везан један крај конопца. — Овај конопац прелази преко гркљана спроводног котура *B*, а затим се на ниже спушта. На другом његовом крају увезани су више други конопчића, за које вуку раденици, и тако маљ на више уздижу колико је могуће, а затим га пусте да на шип *D* падне, без да конопчиће из руку изпусте. На маљу утврђена су два клипа *K K*. (види слику 245), која клизају између две вертикалне гредице *CC*, и принуђавају маљ да се само уздуж ови гредица може на више и наниже да креће. — Потоме кад маљ пада, онда свакада вертикално удара главу шипа, ако је овај као што треба, између вертикални гредица постављен. —

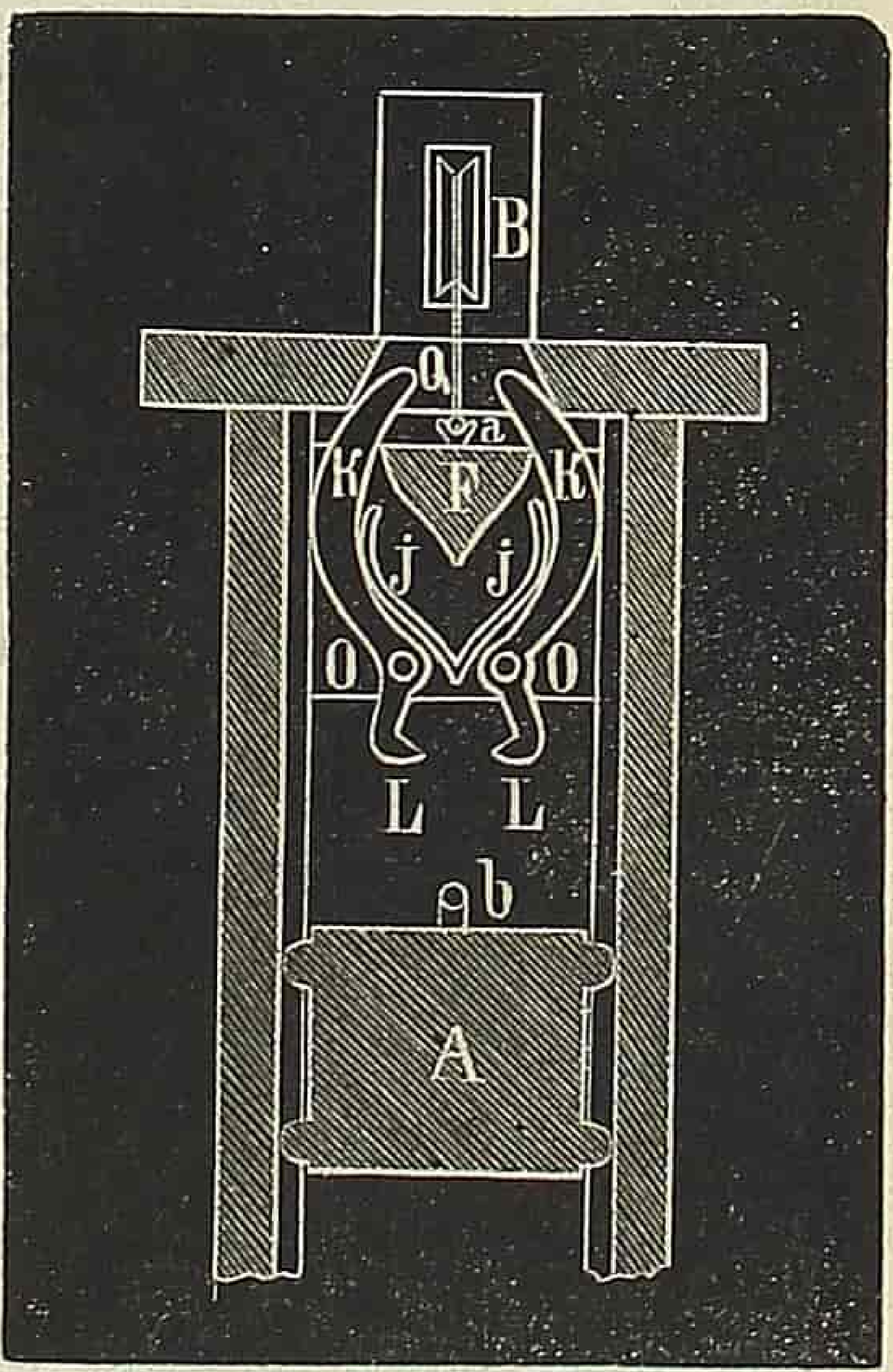
Ова справа врло је добра за почетак побијања шипова, но после кратког времена појави се млого већи одпор, кои против стаје побијању шипа, и онда се укаже безпрекословна потреба да се увећа или тежина маља, или висина на коју се маљ диже. Но ово увећање било висине било тежине маља, има своих граница, које се немогу прекорачити. — И заиста, очевидно је да се вопросна висина неможе млого увећати. Напротив, ако се узме велика тежина маља, онда ће требати и број раденика увећати да ову тежину дижу, а чим то буде, онда конопчићи за које радници вуку, биће више разсејани, и раденици осим што ће један другом узајмно сметати, неће моћи сву своју снагу као што ваља да употребе. — Зато се у место конопчића употребљује витао V са зубчастим точковима као што слика 245 показује, око кога се витла обавија конопац. — Обртајући осовину витла средством две ручке mn, маљ A може да се уздигне на висину, која се оће, ако је међутим и цела справа зато удешена. — За падање маља удешене су осовине зубчаника тако, како би се спој између њих могао повољно да произведе и прекине. Ово бива уздужним помицањем осовине m. Кад се ова осовина уздужно на подесну страну помести, онда зубчаници незахватају више један за други, и маљ ничим незȃдржан пада због своје тежине, обртајући витао у против-положеном правцу и одвијајући конопац. За уздужно помицање осовине m, служи ракљаста кретка rs, која се може хоризонтално да обрће око тачке r, и која обувата огрљак осо-



Сл. 245.

вине *m*. — Ово помицање бива тако што, као смо под № 260. навели. —

На овај начин произведено падање маља, ослабљава млого брже конопац и квари витао, нарочито ако маљ има велику тежину. Да би се то избегло употребљује се особити механизам, при ком маљ без одвијања конопца пада, а конопац се затим за себе одвије, — Ево у чему се састои тај механизам. —



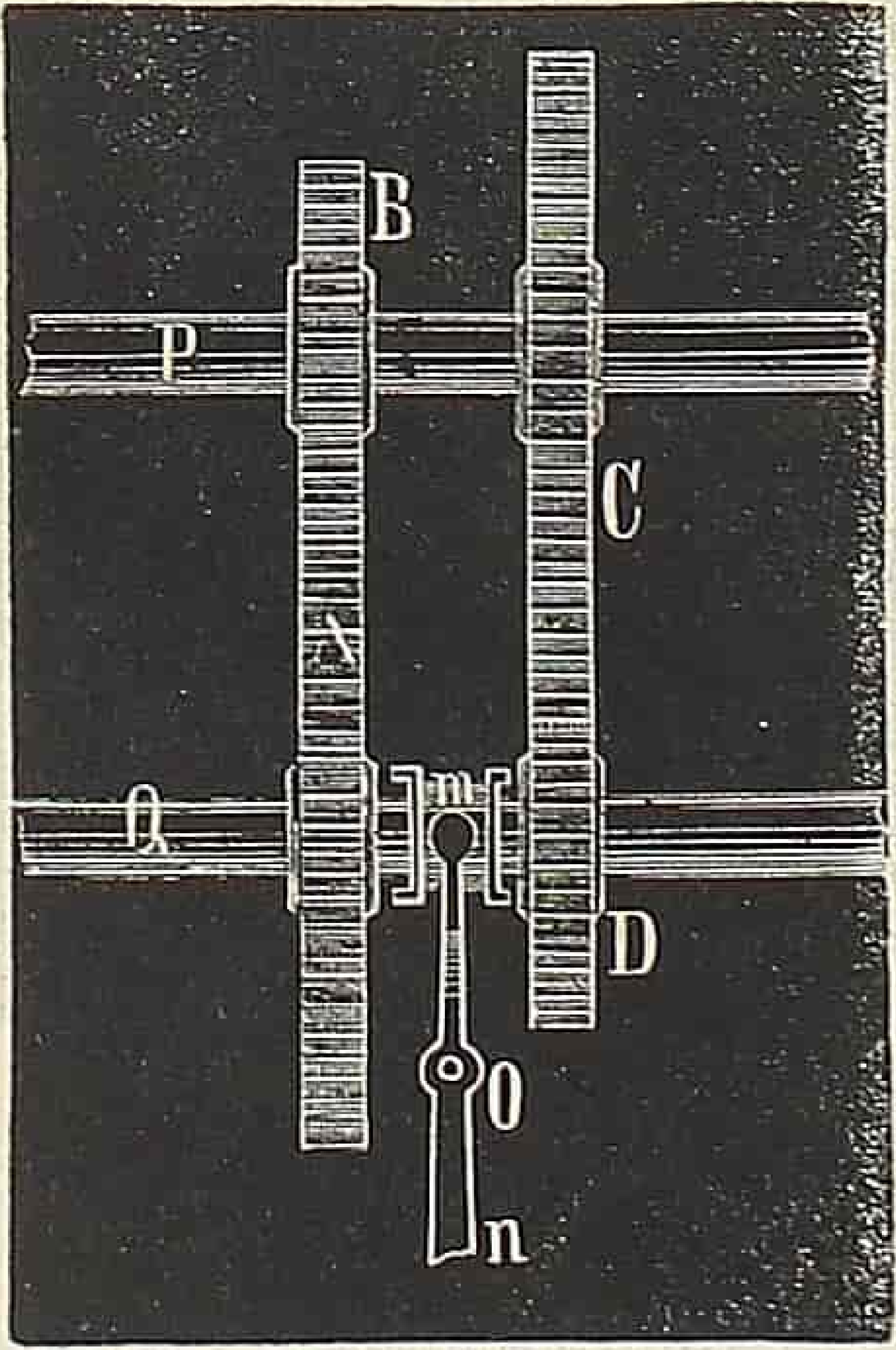
Сл. 246.

Између маља и конопца намести се справа *F* Сл. 246, која уздужно по истим вертикалним гредицама клиза као и маљ, и која је везана једним крајем конопца за окце *a*. На овој справи утврђене су кљеште *KOL*, које закачињу за окце *b* на маљу *A*. Два крака *KL* кљешта могу се обртати сваки око тачке O — Кад се крајеви *K* приближе један другом, крајеви *L* удале се један од другог, и кљеште више незакачиње за окце *b*. Два прудна пера (федера) *J* противстају да се крајеви *K* приближују, међутим ево како дејствује цео механизам:

Пошто кљеште увате за окце *b*, раденици обрћу витао и маљ се уздиже, и у тренутку кад се приближи горњем делу целе махине , онда горњи крајеви *KK* клешта удесне кривине, улазе у отвор *Q*, кои се све више и више с'ужава, Крајеви *KK* кљешта принуђени су тим отвором да се приближе, напротив крајеви *LL* отворе се, испусте маљ и тако овај, сам у сљед своје тежине падне и удар произведе. Затим се кратком *rs* (Сл. 245.) спој између зубчаника прекине и цела справа *F* у сљед своје тежине такође падне и одвије конопац. У тренутку кад справа *F* падне на маљ, кљеште се отворе због особите форме, коју имају у доњем делу, и закаче на ново за окце *b*; и сад се опет као и пређе маљ на више диже и т.д. — На овај начин побијање шипова може да се дотле продужи, докле је потребно. —

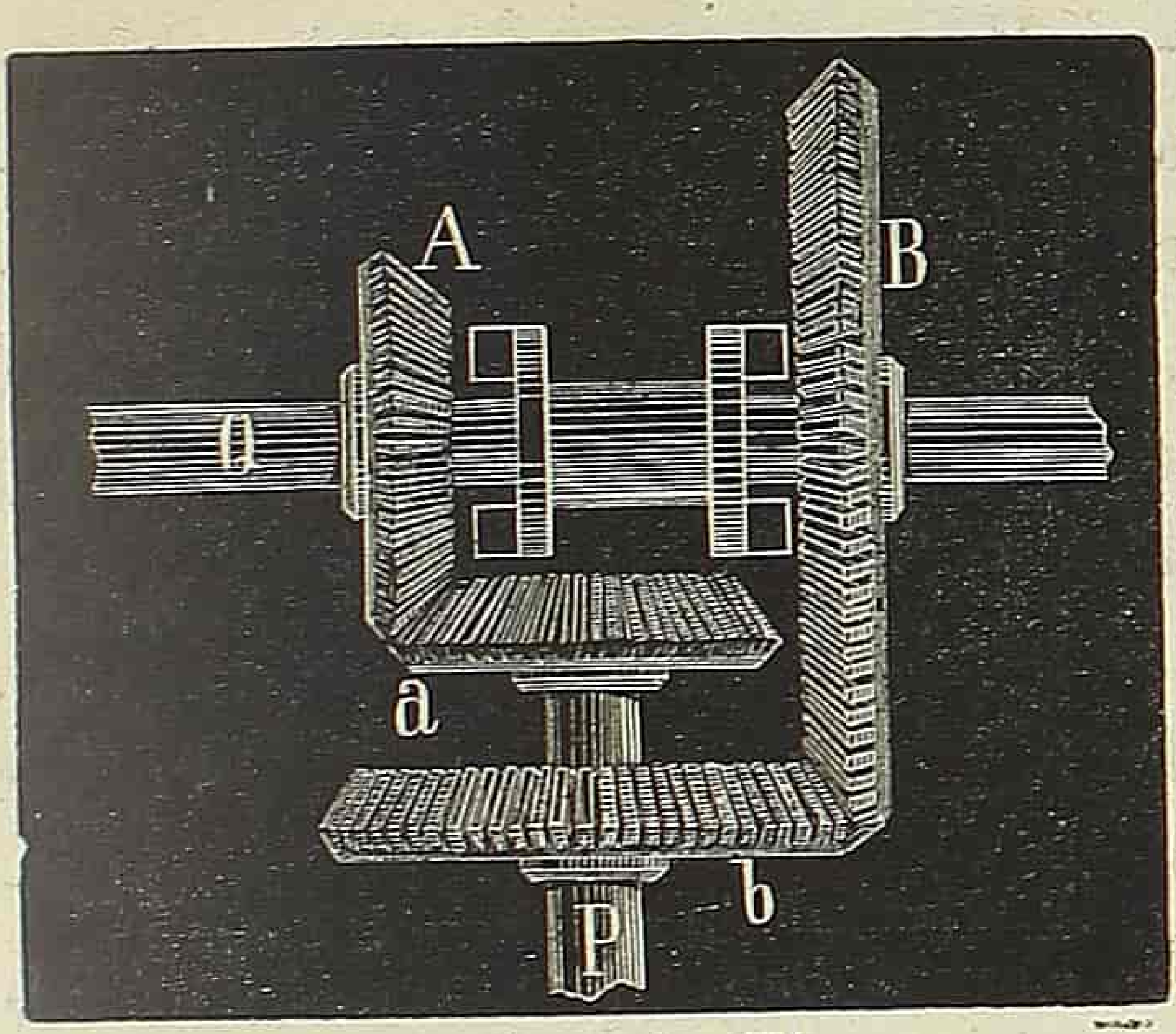
273. *Нагла промена брзина* . Код махина често је потребно да се повољно може мењати брзина какве осовине [или јошт боље отношење које постои између брзина моторне и друге које осовине]. Ради тога наместе се на вопросне осовине два или више пари зубчаника или котурова (добоша), кои се по потреби спојавају. — Често ови разни точкови, нису стално на осовинама утврђени, већ се могу скидати и по потреби са другим спремљеним замењивати. Ово се може учинити само ако се махина заустави. —

Но није свагда нуждно да се сасвим заустави онај махински орган, кога се оће брзина да промени, и замена зубчаника може да се изврши на начине које смо мапред изложили, без да се махина зауставља. — То можемо видити на сљедећим примерима. — Узмимо две осовине P и Q Сл. 247, коих се геометричке осе налазе у једној истој равнини, и нека су на овим осовинама такова два пара зубчаника, да су отношења, која постоје између њини брзина, различна. — Точкови A и D на осовини Q нису углављени; осим тога измеђ њих налази се такова гривна m, за спајање, која на обе противположене стране има зубе. — Потоме како се ова гривна кретком mon, на десну или леву страну помакне, један или други пар точкова, обртаће се као кад би сам постојао. —

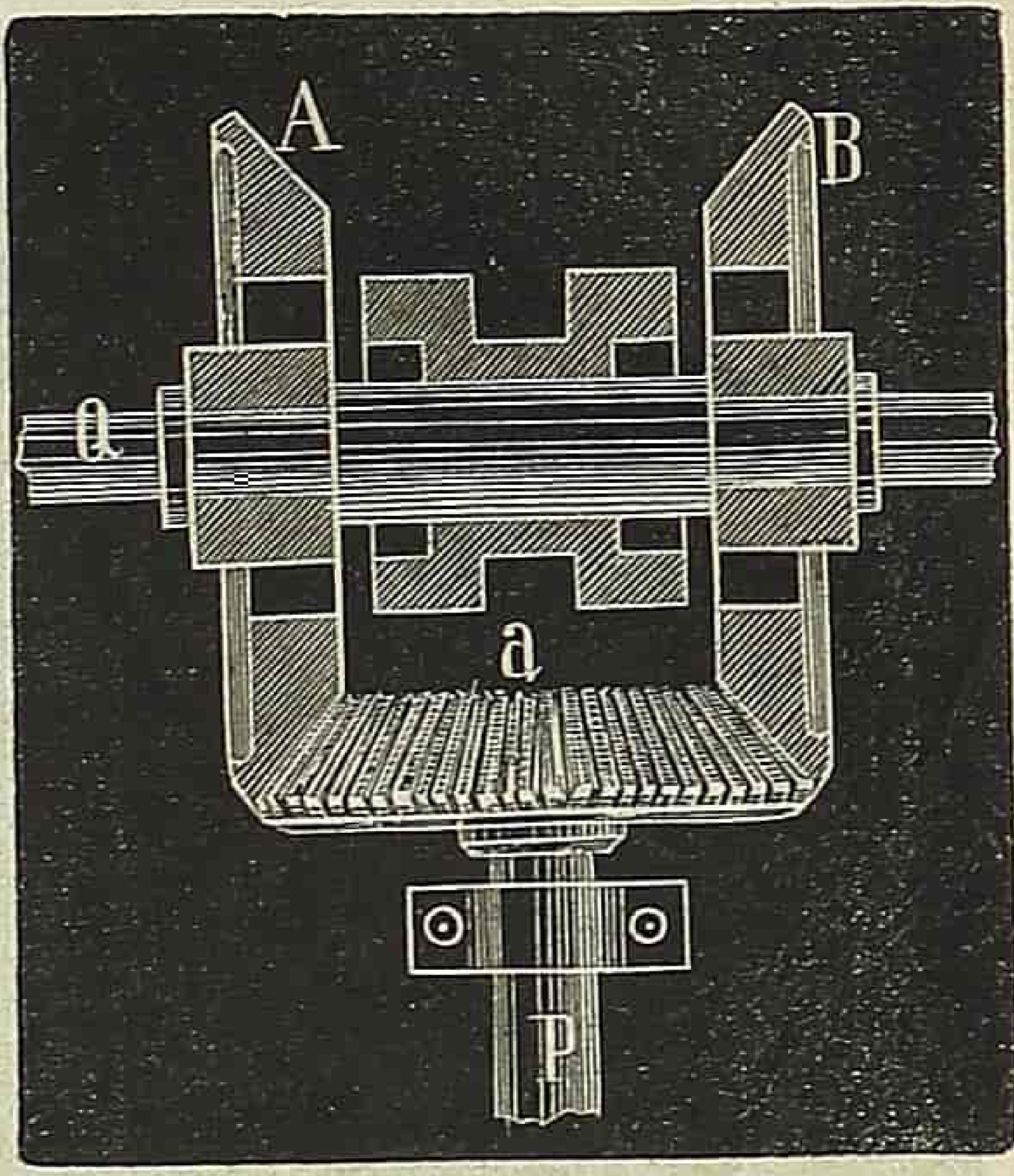


Сл. 247.

Овде имамо приметити, да кад су две осовине равноодстојне као у предходећој слики, или се пресецеју изван међупростора два зубчаника, онда помицањем гривне на једну или другу страну, мења се само отношење угловни брзина, без да се мења правац обртања. Напротив кад се осе обртања пресецају у међу простору два зубчаника као нпр, у слики 248, онда помицањем гривне од једног зубчаника до другог мења се не само



Сл. 248.

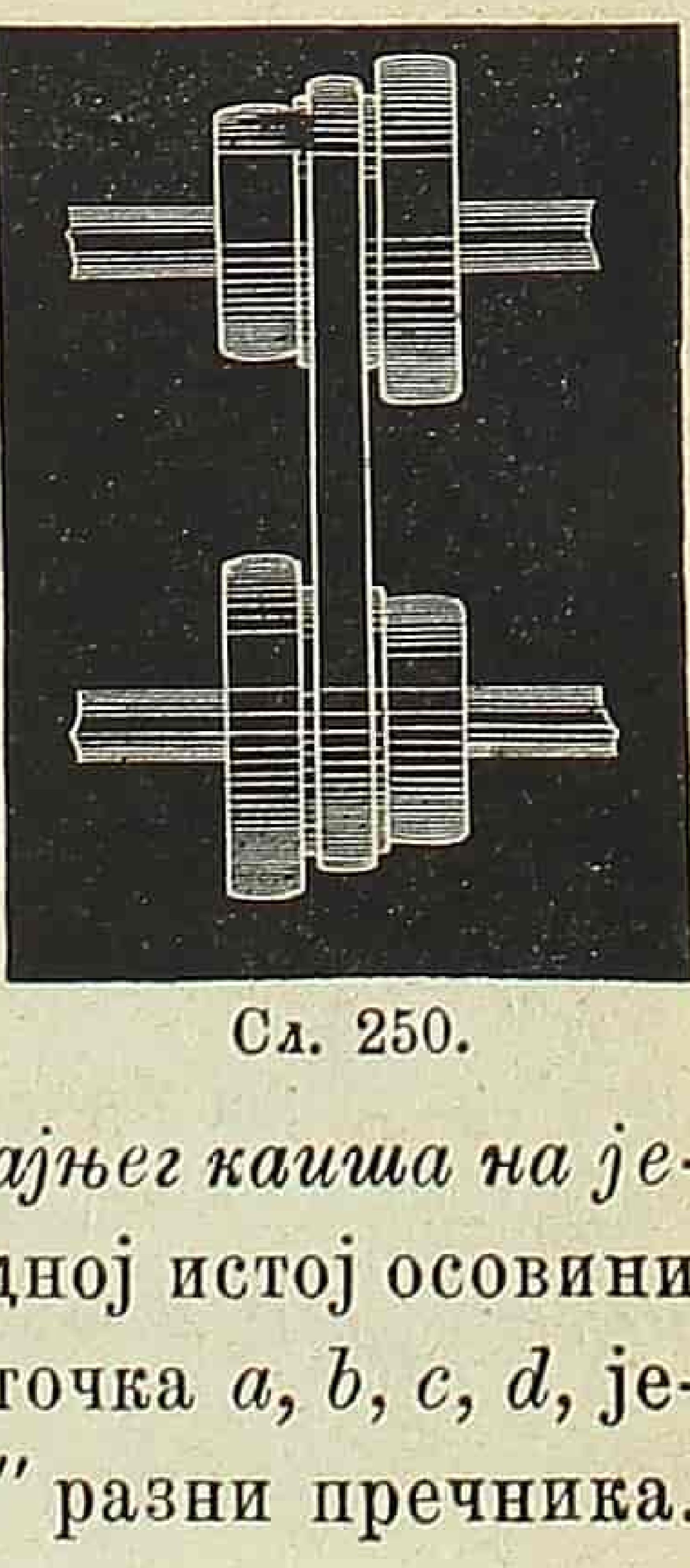


Сл. 249.

отношење угловни брзина, но и правац обртања једне осовине без да се што мења код оне друге. — Код система пак представљеног у слики 249, мења се само правац обртања једне осовине, а њена брзина остаје иста. —

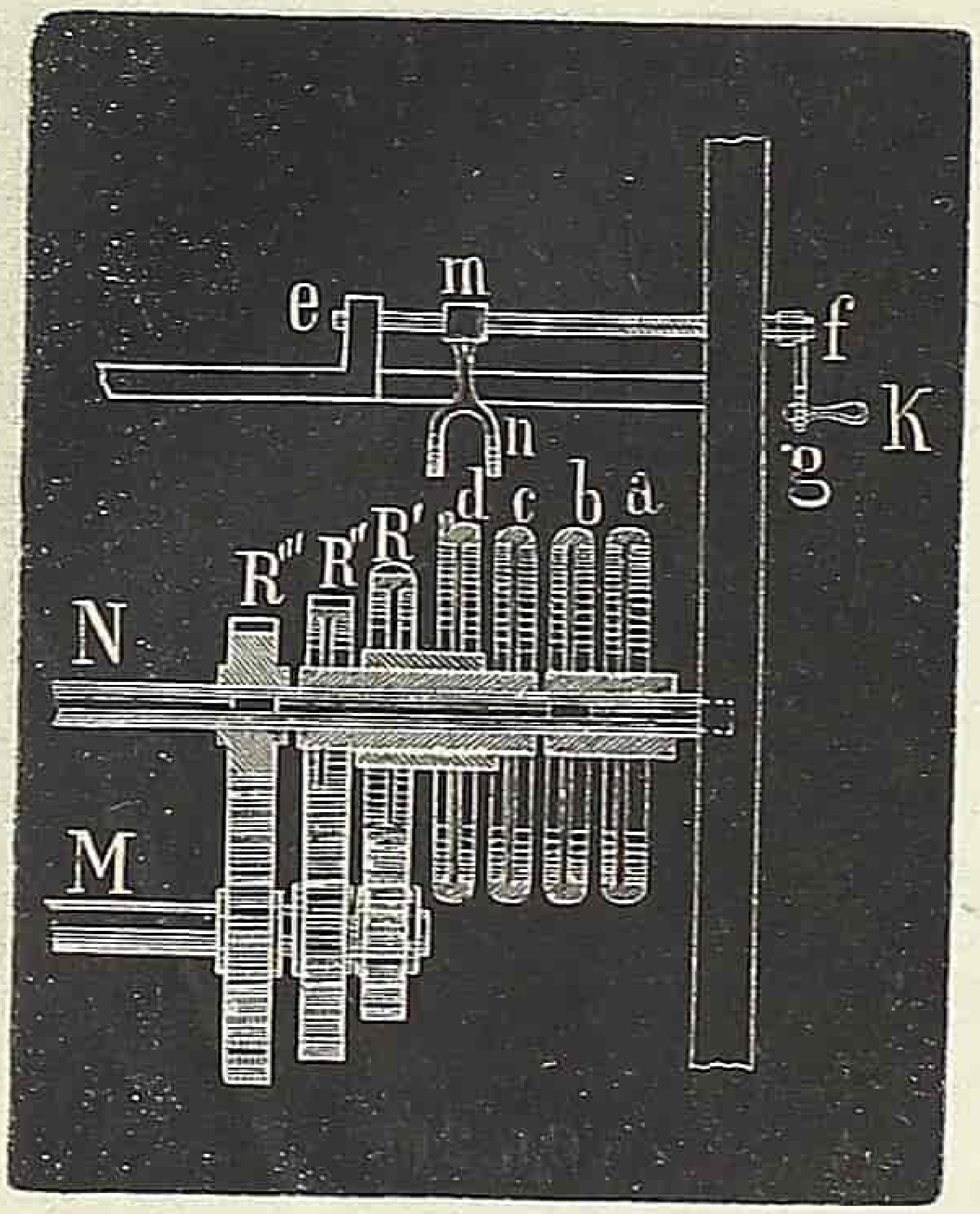
Што се тиче спајања зубчаника имамо приметити, да се ово може да произведе на два начина, потоме како мотор буде дејствовао на осовину на којој је гривна, или на осовину на којој су зубчаници утврђени. —

274. Кад се кретање преноси безкрајним каишем, онда се за промену отношења угловни брзина, наместе на две равноодстојне осовине више пари котурова, коих су пречници тако опредељени, да цела дужина каиша остане стална Сл. 250. Помоћу једне рогљасте кретке, каиш се по потреби премешта са једног пара котурова на други. — Овде имамо додати, да промена отношења угловни брзина, неможе да се произведе брзо за време обртања осовина, —



Сл. 250.

275. *Промена брзина премештајем безкрајњег каиша на једнаке једно до друго намештене котуре.* На једној истој осовини N Сл. 151, налазе се једно до друго четири, точка a, b, c, d, једнаког пречника, и три зубчаника R' R'' и R''' разни пречника.



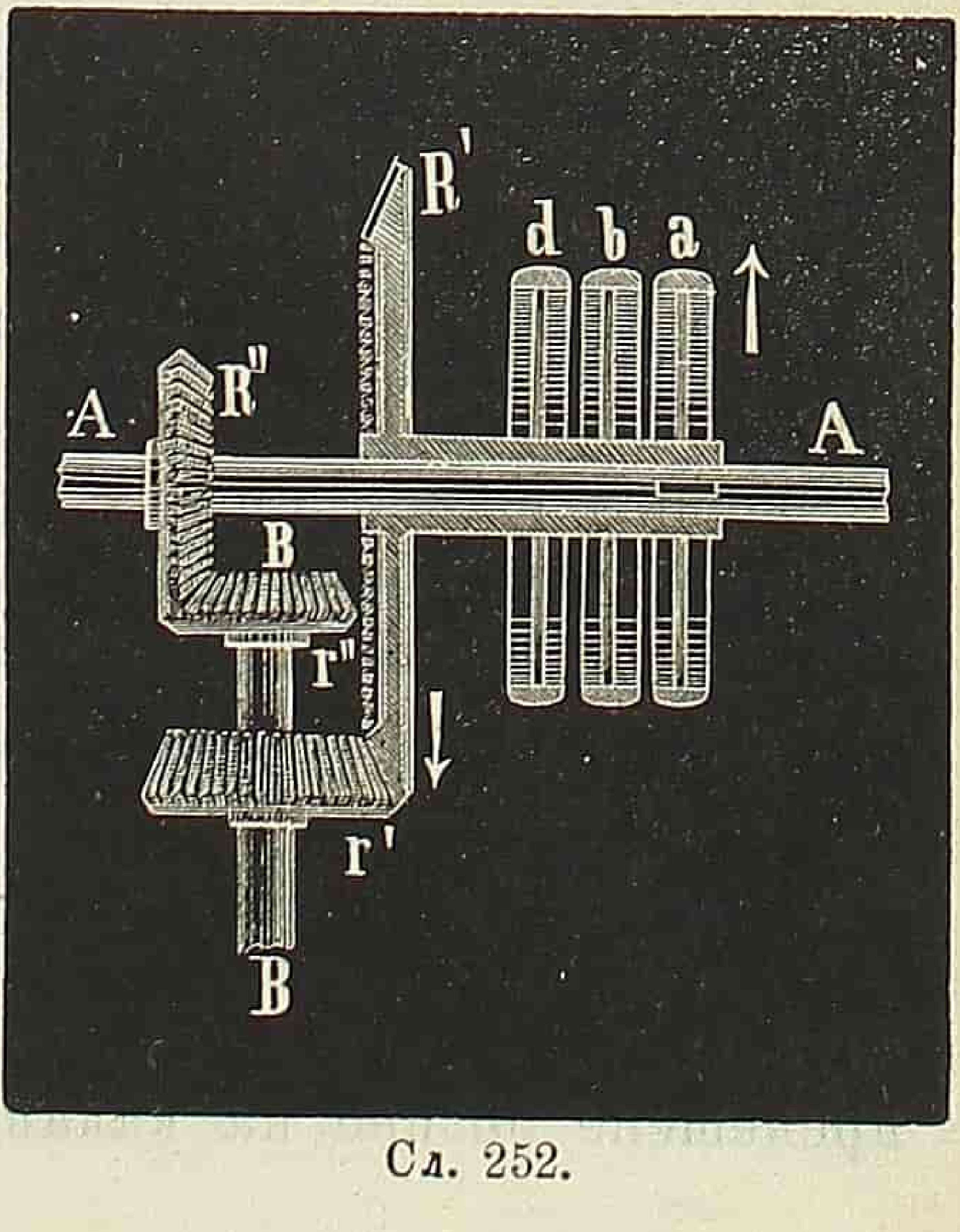
Сл. 251.

— Први котур a није углављен на осовини. Котур b и зубчаник R''' утврђени су непосредно на осовини, котур c и зуб чаник R'' утврђени су на једној ваљчастој цеви, која се слобдно око осовине N обртати може. Напослетку котур d и зубчаник R' утврђени су на другој ваљчастој цеви, која је краћа од прве, и која се око ове може обртатати. На другој осовини M равноодстојној са предходећом, налазе се утврђена друга три зубчаника r' r'' и r''', која непрестано заватају са напред именована три R' R'' и R''' и коих пречници стоје у преокренутом отношењу са пречницима прва три. Један безкрајни каиш, може се са моторног котура, кои у слики није означен редом да премешта са једног на други од напред означена четири котура a, b, c. и d. — Лако је видити да овим премештајем каиша са једног котура на други, мењају се угловне брзине две осовине N и M, а брзина моторног котура, и брзина котура на коме је непосредно каиш, остају сталне. И заиста: нека је w угловна брзина овог котура, и узмимо краткости ради да писмена R', R'', и R''' r', r'', r''', која означавају зубчасте точкове, у исто време представљају и њихове полупречнике, — Кад је безкрајни каиш на неуглављеном котуру a, онда су обе осовине у покоју. Кад је пак каиш на котуру b, онда осовина N има брзину w, а осовина M, брзину $w\frac{R'''}{r'''}$‘ брзина пак прве ваљчасте цеви, котура c, и точка R'' биће $w\frac{R'''}{r'''}\cdot\frac{r''}{R''}$; а брзина друге ваљчасте цеви, точка R', и котура d је $w\frac{R'''}{r'''}\cdot\frac{r'}{R'}$. Потоме лако се могу изнаћи брзине четири обртајућа се тела за три положаја, која безкрајни каиш може заузети, премештајући га са једног котура на други, — Ми ћемо овде узети случај, у коме би н пр. имали:

$$R' = 2\,r', R'' = r'' \text{ и } R''' = \tfrac{1}{2}\,r'''.$$

Назначење котура на коме се каиш налази	УГЛОВНЕ БРЗИНЕ			
	ПРВЕ ОСОВ.	ДРУГЕ ОСОВ.	ПРВЕ ВАЉЧАСТЕ ЦЕВИ	ДРУГЕ ВАЉЧАСТЕ ЦЕВИ.
Котур углављен на осовини . . , . . .	w	$w\frac{R'''}{r'''} = \frac{r''}{R''} = \frac{1}{2} w$	$w\frac{R'''}{r'''} \cdot \frac{r''}{R''} = \frac{1}{2} w$	$w\frac{R'''}{r'''} \cdot \frac{r'}{R'} = \frac{1}{4}\, w.$
„ „ на 1-ој цеви	$w\frac{R''}{r''} \cdot \frac{r'''}{R'''} = 2w$	$w\frac{R''}{r''} = w$	w	$w\frac{R'''}{r'''} \cdot \frac{r'}{R'} = \frac{1}{2} w$
„ „ на 2-ој цеви	$w\frac{R'}{r'} \cdot \frac{r'''}{R'''} = 4\, w$	$w\frac{R'}{r'} = 2w$	$w\frac{R'}{r'} \cdot \frac{r''}{R''} = 2\, w$	w

За премештај каиша са једног котура на други, служи рогла *n*, која каиш обувата. Ова рогла сајужена је са једном шрафницом *m* [завртка, матрица] кроз коју пролази шраф $\overline{ef}$, и која се помиче десно или лево потоме како се шраф буде обртао ручком *gk*, у једном или другом правцу. —



Сл. 252.

У речи стојећи меканизам употребљује се да се код каквог органа махинског произведе врло велика брзина, као што ћемо то доцније у динамики видити.

276. Код меканизма, кои је представљен сликом 252, на хоризонталној осовини *AA*, налазе се три једнака котура *a*, *b*, *c*, један до другог, од коих је котур *b*; неуглављен, котур *a*, углављен непосредно на самој осовини *AA*, а котур *d*, на

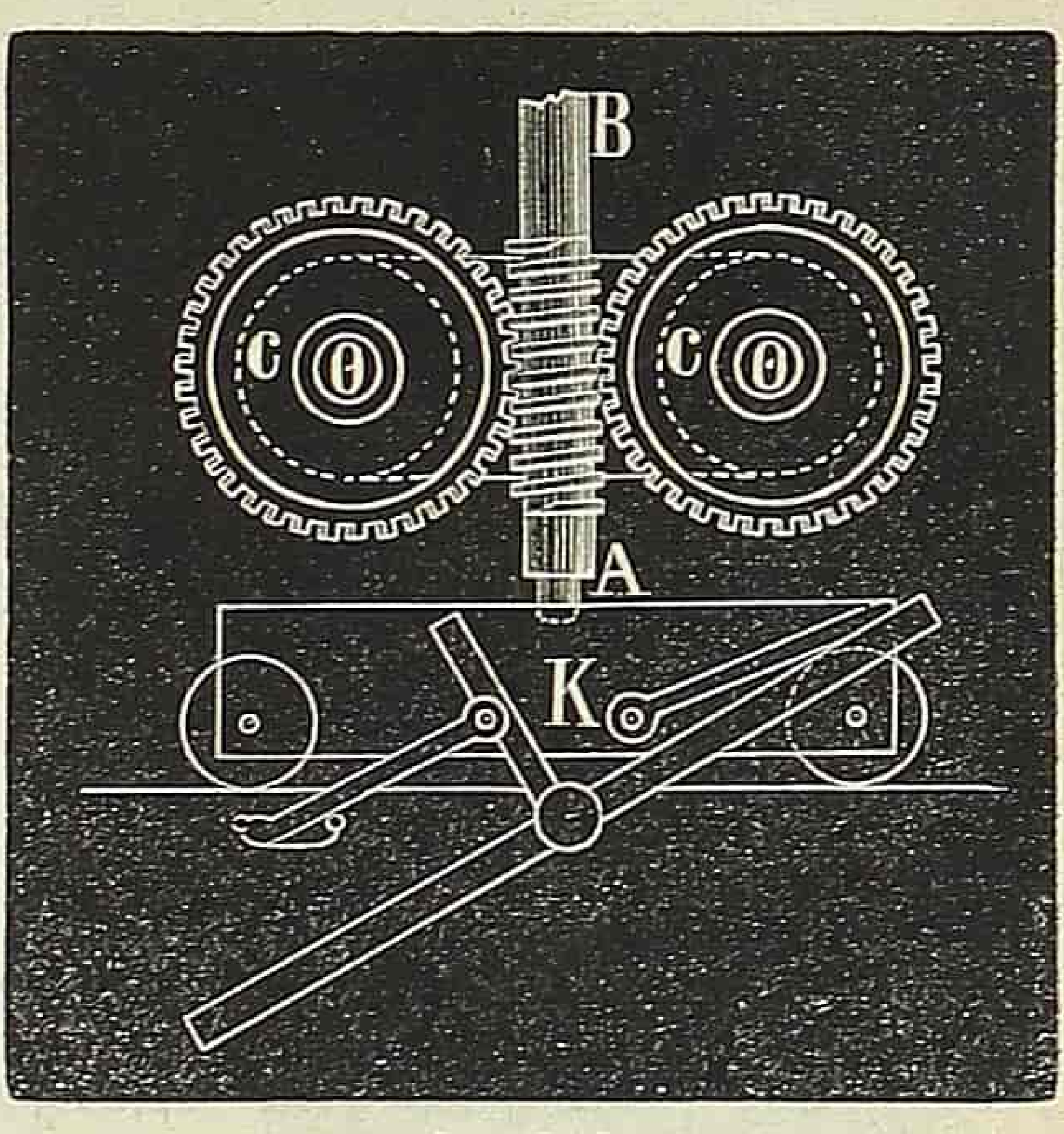
ваљчастој цеви, која се слободно око осовине обртати може. —

На истој цеви углављен је зубчаник R', кога је само пресек у слики означен. Напоследку на истој осовини а на известном одстојању утврђен је јошт један зубчасти конички точак R''. На осовини BB, која је управна на осовиниу AA, утврђена су друга два коничка зубчаста точка r'', и r', од коих први завата са точком R'', а други са точком R'. — Узмимо као и пређе да писмена R', R'', r', r'', означавају у исто време и полупречнике ових точкова, [или бројеве сразмерне бројевима њиних зуба]. Сад кад се каиш налази на котуру a, онда је угловна брзина w, овог котура у исто време и брзина осовине AA. Предпоставимо да гледајући са стране котурова, правац је ове брзине w с лева на десно; ако је то тако, онда угловна брзина вертикалне осовине BB биће $w\frac{R''}{r''}$, а ваљчасте цеви $w\frac{R''}{r''}\cdot\frac{r'}{R'}$ и правци обе ове брзине биће с десна на лево, дакле противположени правцу брзине w. — Кад се пак каиш налази на котуру d, онда је његова угловна брзина као и точка R' w, вертикалне осовине, $w\frac{R'}{r'}$, а хоризонталне, $w\frac{R'}{r'}\cdot\frac{r''}{R''}$, и правци ове две последње брзине противположени су правцу брзине w. Дакле премештајем каиша с једног котура на други, угловне брзине двеју осовина мењају се једно-времено како по правцу, тако и по величини. Лако је видити, да се овај механизам разликује од механизма слике 248 у томе, што код овог механизма, једна од две осовине непрестано се обрће у једном правцу, док међутим код механизма слике 252, само се безкрајни каиш обрће у једном правцу, а правац обртања обе осовине може се мењати.

Напослетку и овде вреди приметба наведена под № 262 за сваку промену брзине, која се (промена) производи премештајем безкрајњег каиша. —

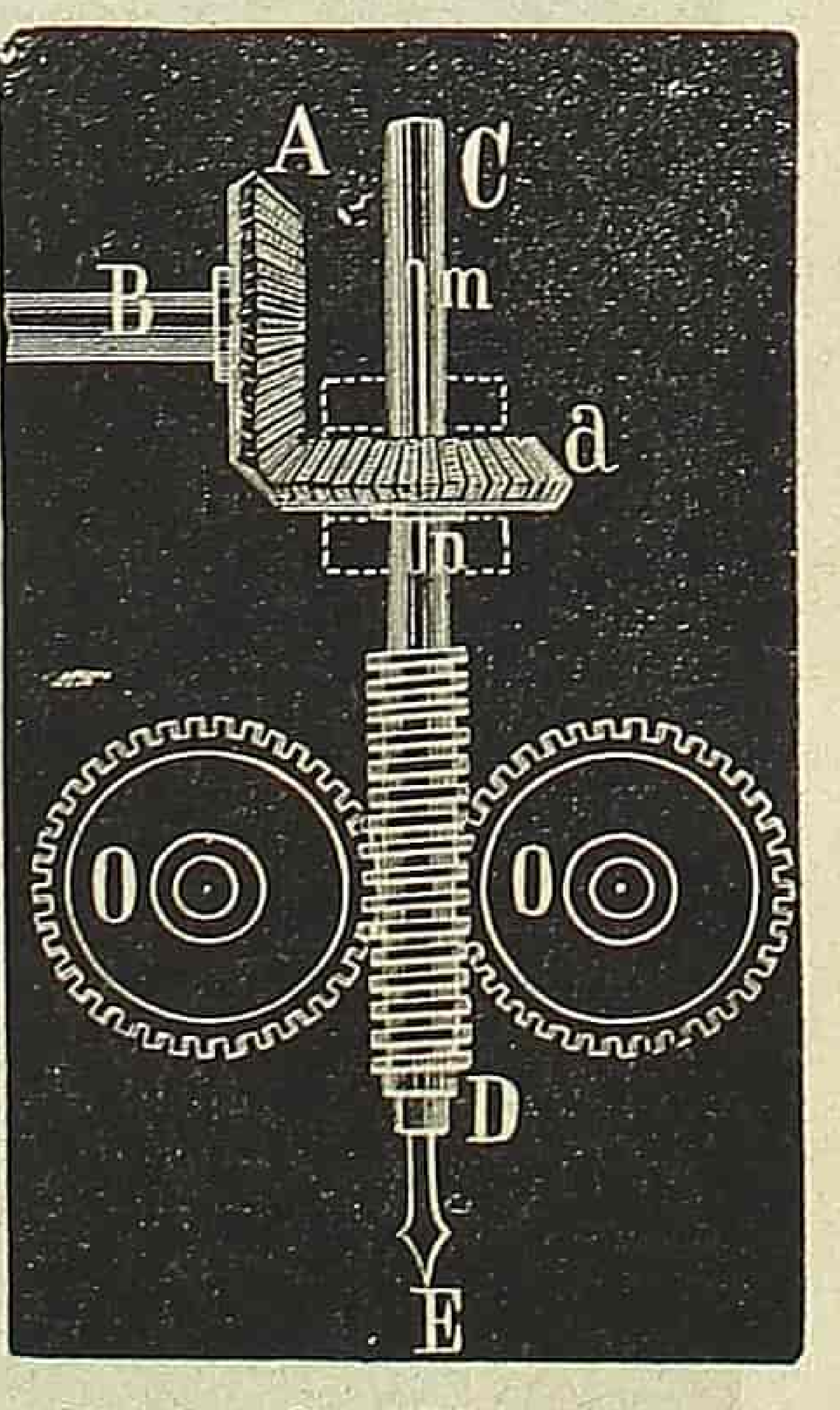
277. Код махина налази се велики број механизма, кои служе да се може нагло променути правац, или величина пренешене брзине на какав махински орган. — Од ови ме-

канизма, ми ћемо овде навести јошт само два примера. —



Сл 253.

Први пример. Безкрајни конопац обавијен је око два котура c c, Сл 254, коих су осовине равноодстојне и хоризонталне. Зактева се да се повољно може мењати правац кретања овог конопца. — Ради тога намештен је вертикално измеђ осовина котурова један безкрајни шраф AB. — На свакој осовини O налази се један зубчасти точак, и ова два точка толико су један од другог удаљена и тако удешена, да шраф може заватати како се оће, час за један час за други точак, а ово се постизава тиме што пиво A вертикалног шрафа почива на једна колица K, која се једном кретком повољно могу премештати на десно или на лево, и као што се шраф непрестано обрће у једном истом правцу, то промена његовог заватања час за један час за други точак, мења правац обртања котурова, сљедствено и правац кретања конопаца. —

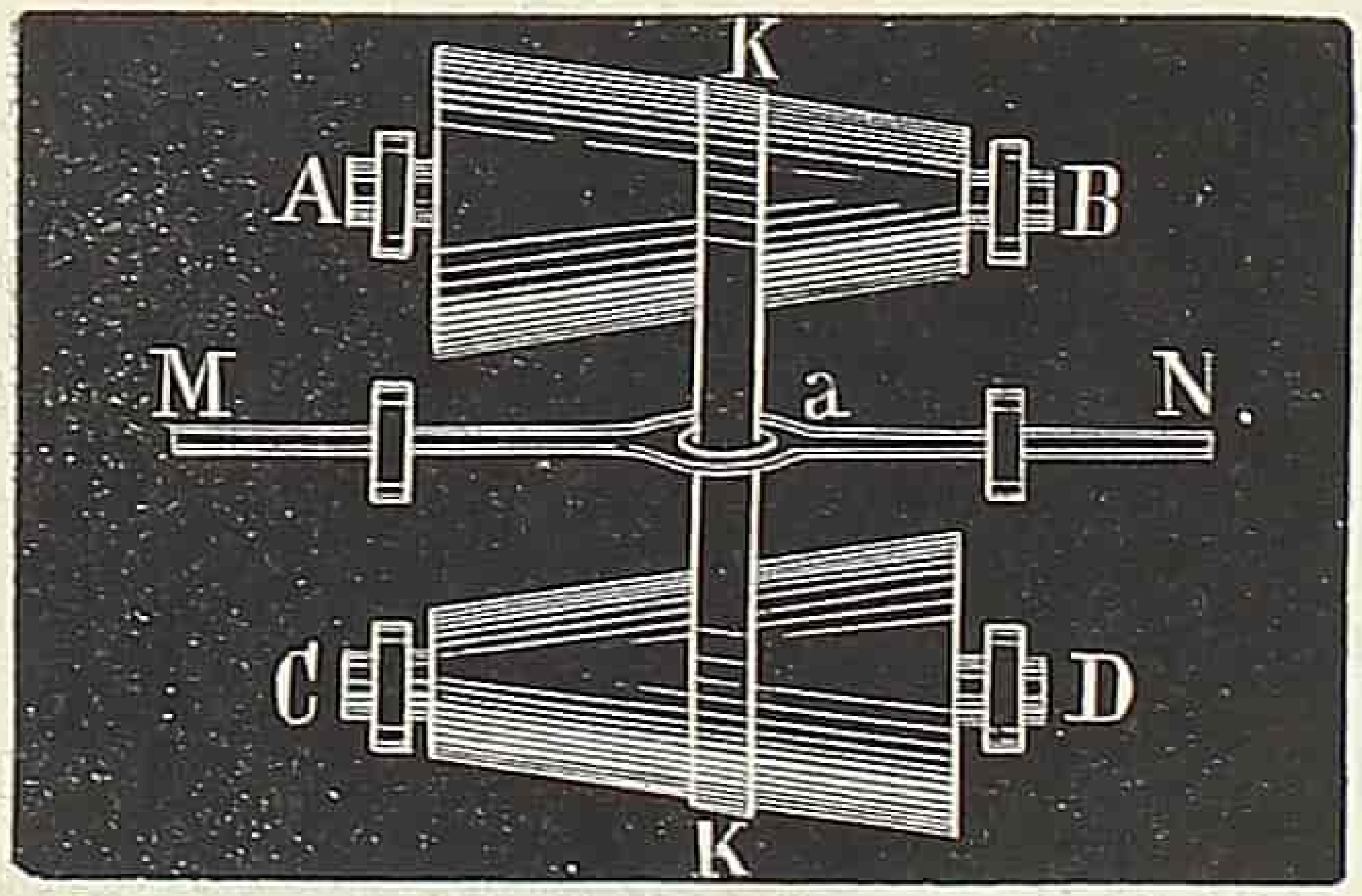


Сл. 254.

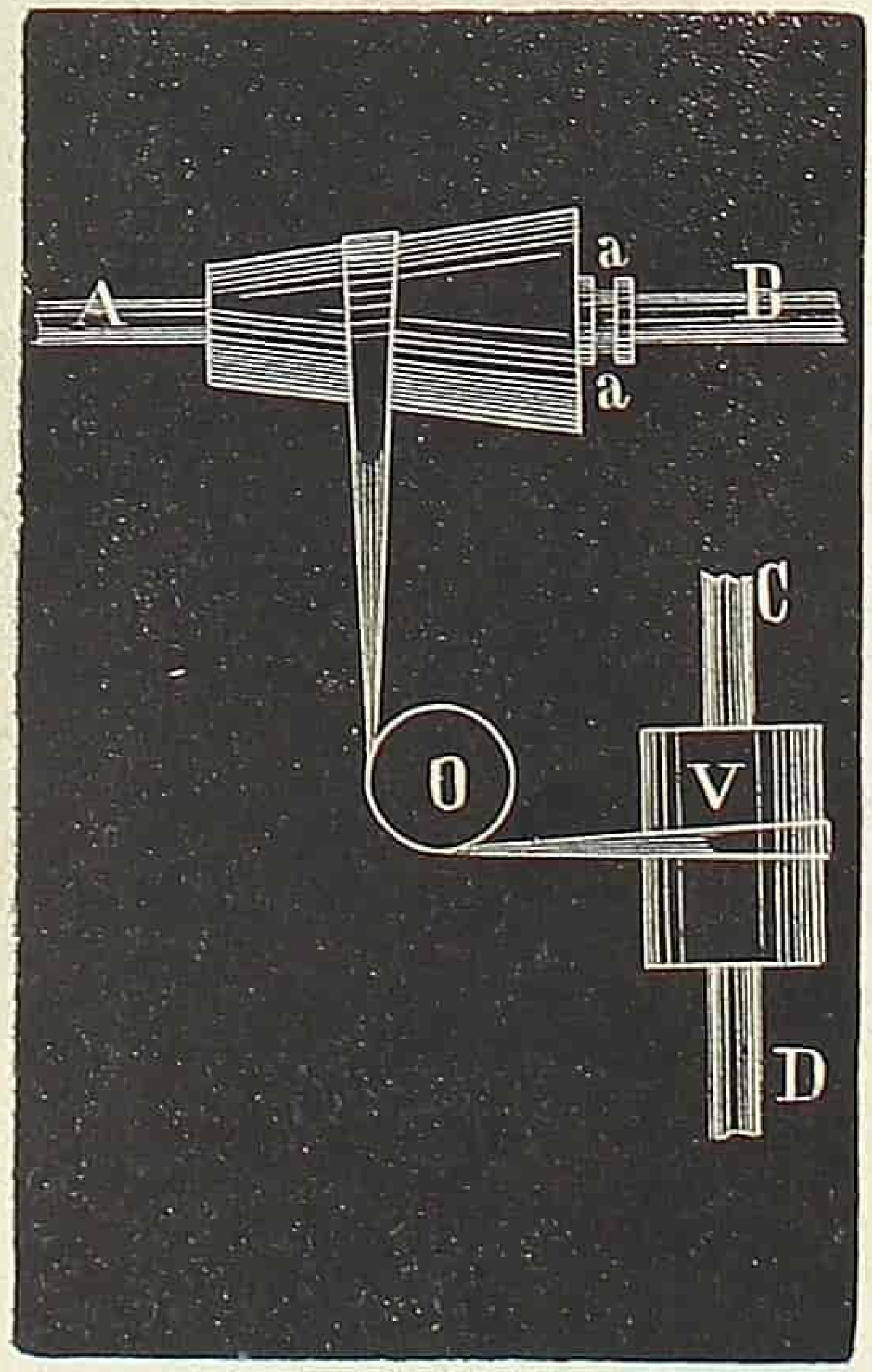
Други пример. Махина за бушење. Бургија E за бушење Сл. 254, утврђена је на долњем крају D вертикалне осовине CD, која се у сљед конички зубчасти точкова A и a брзо обрће. — Точак a, почивајући на сталним подпорама, налази се свагда у једној истој висини, и да се не би могао обртати засебно око осовине CD, то је ова по дужини изжљебљена, и у овај жљеб утиснута је призматична шипка mn, која пролази кроз окце точка a, налазеће се до саме осовине; међу тим сама осовина може се уздизати и спуштати по постепеном бушењу рупе. Долњи део осовине CD начињен је у виду шрафа, кои завата за два зубчаста точка *O O*, која се за време бушења обрћу слободно око своих осовина, т. је, нису углављена. Кад је бушење свршено, онда се ова два зубчаника особитим механизмом утврде за неко време на своим осовинама, и онда служе као шрафница (матрица) шрафу, кои обртајући се непрестано, уздиже бургију на више, и то дотле док шраф сасвим неизпадне изван точкова. — Оваква се махина обично употребљује за бушење гвожђа или другог ког метала. —

Постепено мењање брзина.

278. *Мењање брзина употребом безкрајњег каиша на два конуса,* Два једнака одбијена конуса *AB* и *CD* Сл. 255, који имају равноодстојне осе, преокренуто су положена један према другом. — Каиш *KK* сталне дужине обувата ова два конуса, и остаје непрестано затегнут, ма на ком се месту налазила равнина положена кроз средину каиша управно на осе. — Са оваковим меканизмом, отношење угловни брзина може се мењати неприметно лагано. — Каиш се утврђује у положају, кои се оће, средством дршке *MN*, на којој се налази окце *a*, за провлачење каиша, и која се може у једном или у другом правцу помицати као што слика јасно показује. —



Сл. 255.

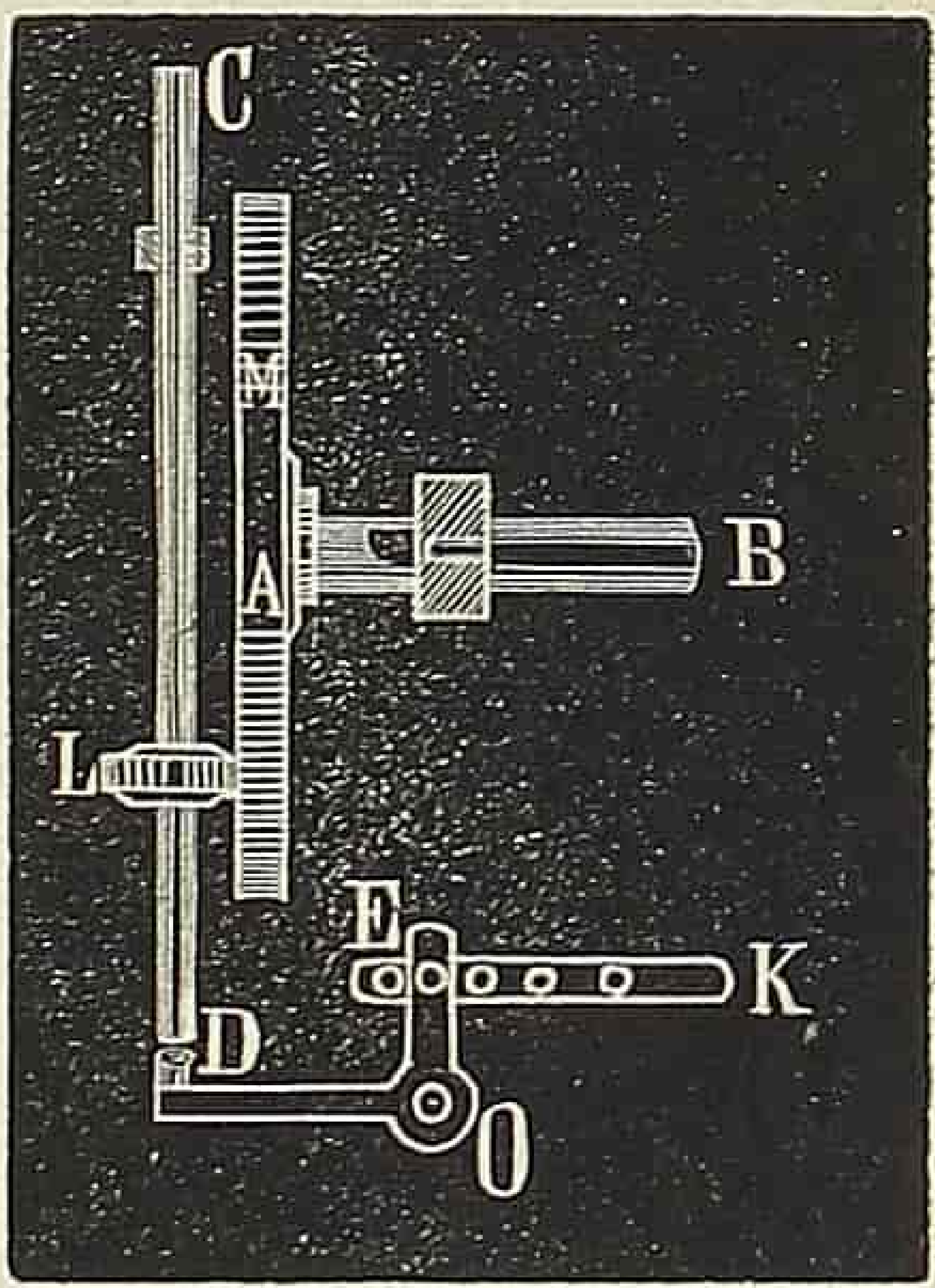


Сл. 256.

279. У место два конуса, може се узети један конус и један ваљак Сл 256 Конус налазећи се на осовини *AB* квадратног пресека, може се по њеној дужини помицати десно или лево, потоме како се оће да увећа или умали брзина безкрајњег каиша па сљедствено и брзина ваљ-

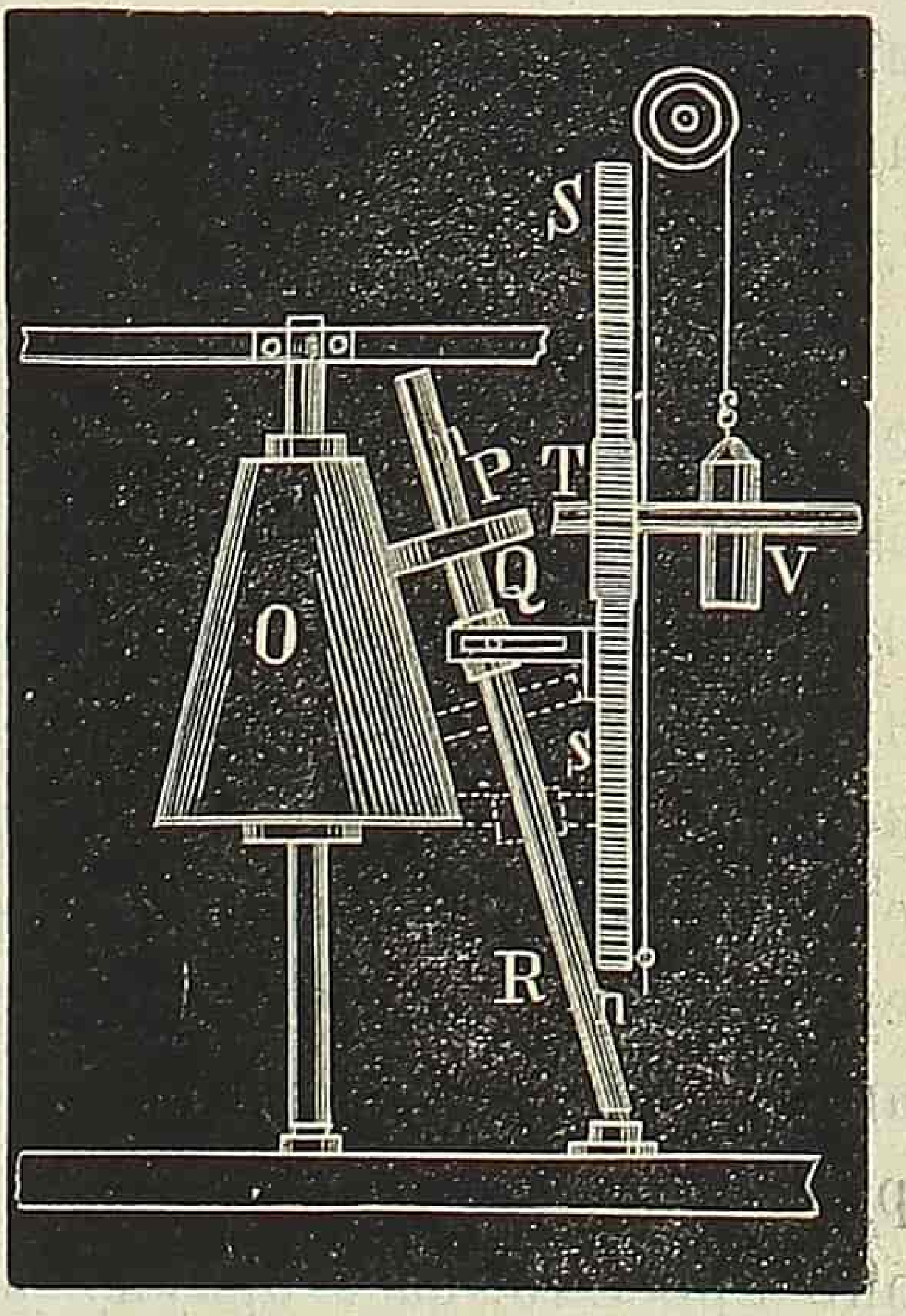
ка *V*. Ово помицање производи се једном рогљастом кретком, која обувата гркљан (огрљак) *aa*: —. Као што слика показује, осовине *AB* и *CD* ни су равноодстојне, због тога су употребљена два спроводна котура, која се у *O* пројектишу, и коих осовине клизају по вертикалним изжљебима. — [изжљеби нису у слики означени]. — Ова два котура опредељују положај двеју равнина, у коима се крећу право-пружни делови безкрајњег каиша, а у исто време служе као котури за затезање каиша [затежни котури].

280. *Промена брзине употребом фрикциони котурова*, На крају *A* осовине *AB* утврђен је котур *M* сл. 257, кои се заједно са осовином обрће. Овај котур стои у додиру са мањим котуром *L*, кои је утврђен на вертикалној осовини *CD*. Пиво *D* ове осовине обрће се у чашици, која се средством двокраке кретке *DOE* може повољно подизати или спуштати. — Потоме како се ова вертикална осовина буде подизала или спуштала, дакле како се мањи котур *L* буде приближавао или удаљавао од средишта обртања котура *M*, отношење угловни брзина оба котура умаљаваће се или увећавати.



Сл. 257.

281 Слика 258, представља подобан меканизам с том разликом, што је у место котура *M* предходеће слике, употребљен конус *O*. — *Q* ваљчаста цев на којој је котур *P*, утврђен, *mn* призматичка шипка, која је уздужно утиснута у жљеб осовине *R*. *S* кремаљера, (Зубчаница) која служи да се котур *P* на разне висине утврди. *T*. зубчаник за уздизане и спуштање котура *P*. *V* супрот терет [Gontre — poids] зубчанице и котура.



Сл. 258.

Ови и подобни меканизми употребљују се врло често, нарочито кад се врло велика брзина какве обртне осовине жели постепено да произведе. —

Меканизми за посматрање и експериментално дознавање закона каквог кретања.

282. *Мерење времена. Време се мери справама* и инструментима, кои су у физики и вишој геодезји описани. Најобичнија је справа за мерење времена шеталица, и тачан сат — Кронометар. —

283. Мерење брзине.. — Средња брзина каквог кретања, може се определити на сљедећа два начина.

1° Означе се предходно сталне тачке, а затим се сматра време, за које кретно тело пролази простор измеђ једне тачке и друге, или

2° сматрају се на путу, кои тело пролази, поједини његови положаи у известним тренутцима, кои се забележе за време кретања, затим ее измере одстојања од једног положаја до другог. — Из ови посматрања определи се по правилима, која смо у I делу кинематике изложили, средна брзина кретања. — Овде се предпоставља да је кретање скоро једно-мерно.

Осим тога постоје и разне справе и инструменти за мерење брзина разни кретања. Од свију ови справа, мићемо овде само једну да напоменемо, а то је: справа од Mattei Grosbert-а за опрeделење почетне брзине пушчаног зрна. Ова справа састои се из једне ваљчасте цеви, која се једномерно обрће око своје осе равноодстојне са осом пушчане цеви. Основице ове цеви затворене су артиом. — Пушчано зрно пролази брзо кроз цев, пробија артију, и ако означимо са w угловну брзину ваљчасте цеви, са l одстојање њени основица, са α, уго два полупречника повучена на осу обртања кроз две рупе, које је зрно пробило, са v брзуну зрна (предпостављајући ову брзину као једномерну) а са t време за које зрно пролази дужину l; онда ће бити:

$$wt = \alpha, \text{ и } l = vt \qquad \text{одкуда}$$

$$v = \frac{wl}{\alpha} \qquad \text{или}$$

$$v = nl \frac{2\pi}{\alpha}$$

означавајући са n број обрта ваљчасте цеви за секунду или јединицу времена. —

Приметба. Оса вољчасте цеви може бити и управна на осу пушчане цеви, само у овом случају, полупречник прве цеви треба да је доста велики. —

КРАЈ II. ДЕЛА.

ПРИМЕЋЕНЕ ПОГРЕШКЕ.

На страни	*у реду*		*треба*	*место*
2	7, 6, 3	одоздо	меканика	механика
"	4	"	неспадају	неспадају
"	"	"	докле	докде
3	4	"	поставио	поставио
7	2	"	тачке	тачка
10	5	"	ком	каком
11	7	одозго	које	какво
20	13	"	одговарајући	одговарајућим
"	15	"	управној	упвавној
26	1	одоздо	тачка	точка
33	13	одозго	тренутку	магновењу
35	10	"	једно-мерно	једнако
"	14	"	" "	"
"	9	одоздо	а j, је	а је
36	5	одозго	једно-мерно-мењлива	једнако-мерљива
"	11	"	једно-мерно	једнако
"	13	"	права	праве
"	17	"	једно-мерно	једнако
"	7	одоздо	" "	"
37	4	одозго	количина V_0 и j;	количине $V_0 - j$;
"	7	"	речи	рећи
"	16	"	ординатама	ординатима
38	2	одозго	једно-мерно	једнако
"	4	"	да је његова	да његева
39	12	"	h Сл. 18 у времену	h, у времену
"	5	одоздо	$h = gt\theta + \frac{1}{2} g\theta^2$	$h = gt\theta = \frac{1}{2} g\theta^2$
40	1	одозго	тачку А, Сл. 19. са	тачку А, са
"	6	"	тачке	тачки
"	11	одоздо	x	z
"	6	"	израчунати	изначунати
"	4	"	а $= 0{,}01.g$	а $= 0{,}019$
"	2	"	једно-мерно	једнако
41	5	одозго	које је потребно	које потребно
43	13	одоздо	нека	неке

На страни	*у реду*	*треба*	*место*
45	7 одозго	$\overset{\frown}{A'B'}$	$\overset{\frown}{A'B}$
„	12 „	Q'''	Q''
„	15 „	у сљед	у сљедству
„	16 „	$\overset{\frown}{A''B''}$	$\overset{\frown}{A''B'''}$
46	11 одоздо	тачке	тавке
47	14 одозго	све	две
„	5 одоздо	реелно	реално
„	3 „	тренутку	магновењу
48	18 одозго	у M'	у M_1
„	на слици 23	R	K
„	6 одоздо	јер, пошто су стране $\overline{MN}$, и $\overline{M'N'}$,	јер почем су стране $\overline{MN}$ и $\overset{\frown}{M'N'}$
49	11 одозго	$v_e = \overline{ME}$	$v_r = \overline{ME}$
50	на Слици 24	R	K
51	4 одоздо	истој	петој
56	13 одозго	пројекције	појекције
57	9 „	горереченом	гореречено
60	2 „	тачке	течка
61	5 „	координате	коордонате
63	9 одоздо	тачке	тачки
67	2 одозго	њина	њима
„	12 „	над овако	на довако
69	3 одоздо	мора	моуа
71	3 одозго	M' на диагонали $\overline{MT}$	M' на MT
„	на Слици 37	F [према A изостављено]	. . . .
„	2 одоздо	једновремени	једнонремени
75	8 одозго	ортогоналне	артогонапне
80	2 „	од тоталне	тоталне
„	16 „	Једначине	Јеначине
81	12 одоздо	изучавали	штудирали
„	4 „	J^2	j^2
83	14 одозго	налази у	налазиу
87	5 одоздо	тачку тела;	тачку; тела
89	11 „	тачком	точком
91	9 одозго	Њено	Њепо
93	1 одозго	правило	прарило
„	5 „	њеној	својој
„	19 „	„	„
„	8 одоздо	„	„
94	5 одозго	определимо	пределимо

На страни	*у реду*		*треба*	*место*
94	12	одоздо	сразмере	сразмерне
„	8	„	тачкама	тачкаама
96	10	одозго	праве	праге
„	16	одоздо	правцу	правцр
98	9	„	тренутно	трепутко
„	3	„	$\overline{MN}$	$\overline{MN}'$
99	17	„	Представимо	Предпоставимо
100	9	одозго	у њеној	у својој
„	14	одоздо	пречника	пречиика
101	7	одозго	образоване	образовање
106	11	одоздо	Слике	Слика
114	13	„	као	кав
115	15	одозго	напоследку	напоследску
„	6	одоздо	координатне	кординатне
118	11	одозго	две	дне
„	„	„	израза	изназа
122	8	одоздо	брзине	срзине
„	3	„	имамо	имаћемо
124	17	одозго	правца	превца
125	6	одоздо	противног	противног
127	11	одозго	$O'P'$	$O'P$
„	15	„	напредно	напродно
130	11	„	акцелерацију	асцелерацију
131	16	„	праве	права
„	1	одоздо	релативна	релативни
133	5	„	$Tt'nN'$	$Ft'nN'$
135	17	одозго	$v_{\text{г}}$,	v,
136	8	„	брзине	брзипе
140	1	„	$\frac{w}{w'}$	$\frac{w}{w,}$
142	15	„	њине	њиове
144	13	„	$\overset{\frown}{nm''}$	$\overset{\frown}{nm}$
146	11	„	$\sqrt{ds^2 + ds_1{}^2 - 2ds.ds_1 cos a}$	$\sqrt{ds^2 + ds_1{}^2 - 2dsds_1{}^2 cos a}$
154	13	„	њиног	њиовог
156	10	одоздо	меканички	механички
161	После Сл. 98.		ово је због тога, да се предупреди уздужни покрет осовине	„ „
168	11	одоздо	ракљастом	ракљаста
169	5	„	О. Сл. 118	О.
173	7	„	узимао	умимао
174	3	одозго	$\sqrt{1-sin^2\theta}$	$\sqrt{1-sin_2\theta}$

На страни	*у реду*		*треба*	*место*
175	5	одозго	$> BA_1 X = \gamma$	$> BA_1 X = y$
184	6	одоздо	дат био	дат би
188	13	одозго	данас	денас
196	1	„	после речи паоцима „Сл. 136“	
„	11	одоздо	О	о
197	6	„	и то	а то
„	1	„	било	и то било
203	8	одозго	профил	профел
204	7	„	дужину	дужану
„	10	„	В Пренос и т. д.	З Пренос и т. д.
212	12	„	Кремаљера	Кремаљере
218	1	„	кретања	крећања
228	15	„	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{501}$
239	14	„	витла	вишла
„	7	одоздо	„	„
240	1	одозго	„	„
„	2	„	колико се оће	колико оће
241	6	одоздо	пролази кроз завртку	пролази завртку
„	4	„	нож	нуж
243	15	одозго	предходио	предход
244	6	одоздо	$=$	$= =$
246	12-13	одозго	радиусе	радинусе
248	11	одоздо	пролаза	нролаза
253	12	„	између	измнђу
254	4	„	$\overline{AK} = V_a$	$\overline{AK} = O$
261	6	одозго	на страни MM	са стране MM
263	5	„	de;	dc;
264	15	одоздо	AB	$A'B$
266	4	„	Две	Дре
271	14	„	паока	паоца
„	8	„	„	„
273	3	одозго	обично	обитно
„		Слика	Сл. 223.	Сл. 22.
278		Слика	Сл. 230.	Сл. 230^{а}
„	1	одоздо	подножија	цодножија
289	5	одозго	Слика 240^{а}	Слика α.
„	16	одоздо	пренесе	пренес
294	6	„	пресецају	пресецеју
302	17	„	се	ее
„	3	„	брзину	брзуну
303	3	одоздо	ваљчасте	вољчасте.

Читалац ће моћи сам остале непримећене погрешке исправити.