

Б₂₁ 909

9095

ЗАПИСКИ
РУССКАГО
НАУЧНАГО ИНСТИТУТА
ВЪ БЪЛГРАДѢ.

ВЫПУСКЪ 6.

Бѣлградъ.
1932

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАПИСКИ
РУССКАГО
НАУЧНАГО ИНСТИТУТА
ВЪ БЪЛГРАДѢ.

ВЫПУСКЪ 6.

Бѣлградъ
1932,

И П О Ш А

РАССТА

НАУЧНОТО ИНСТИТУТА

В Б ВАРШАВА

ВАНДЕРКА

Варшава

1981

СОДЕРЖАНІЕ.

1. Н. Н. САЛТЫКОВЪ. Способы Монжа-Ампера и Дарбу интегрирования уравненій съ частными производными второго порядка; ихъ обобщеніе	1
2. О. Л. СТРУВЕ Федоръ Александровичъ Бредихинъ (къ столѣтію со дня рожденія)	35
3. В. ЖАРДЕЦКІЙ. Нѣкоторыя замѣчанія объ уравненіяхъ движенія неоднородной непрерывной среды	55
4. В. В. ФАРМАКОВСКІЙ. О выборѣ наивыгоднѣйшаго подъема при проектированіи желѣзнодорожныхъ линій. II	69
5. Д. В. ФРОСТЪ. Къ теоріи магнито-метрической развѣдки.	87
6. Т. В. ЛОКОТЬ. Идеи Менделя въ современномъ менделизмѣ.	135
7. М. Н. ЛАПИНСКІЙ. Боль и ея сосудистый механизмъ.	147
8. Н. Е. АКАЦАТОВЪ. Къ вопросу о заболѣваніи легкихъ, обусловливаемомъ зараженіемъ ТВС-микробами. Туберкулезная и часточная проблемы	195
9. Ю. Н. ВАГНЕРЪ. Замѣтка о интерсегментальныхъ лопастяхъ измененныхъ сегментовъ у самцевъ блохъ.	227
10. Н. Н. САЛТЫКОВЪ. Жизнь и ученые труды Д. Ф. Селиванова	239
11. Ан. Д. БИЛИМОВИЧЪ. О вращеніи произвольной матеріальной системы какъ цѣлаго	251

СОДЕРЖАНИЕ

1	И. М. САЛТЫКОВ. Спектры Аляксандра и Давыда в ультра-фиолетовом свете
35	Д. О. Д. СТОУН. Элементарные преобразования в статистике
55	Д. В. ЖАРЕНКО. Нормальные функции в теории вероятностей
89	А. В. И. ФАТМАКОВСКИИ. О выборе нормализующих функций при преобразовании случайных процессов
87	Д. Д. Е. СКОТТ. К теории кванто-метрической разности
125	В. И. В. СОНОВ. Неравенства в комбинаторике
147	Г. М. И. ГАЙНУКОВИЧ. Борн и его роль в механике
185	И. М. В. АХАТОВ. К вопросу о задавании действия, обусловленного взаимодействием ЛШ-частиц
217	В. К. И. ВАЛЕНТ. Заметки о взаимодействии волновых функций
239	И. М. И. САЛТЫКОВ. Атом и его роль в физике
251	И. А. А. КОЛМОГОРОВ. О некоторых свойствах функций



Проф. Н. Н. Салтыковъ.

СПОСОБЫ МОНЖА-АМПЕРА И ДАРБУ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА; ИХЪ ОБОБЩЕНІЕ.

1. Настоящая статья занимается методами изложенія разсматриваемыхъ теорій и ихъ обобщеніемъ.

В. Г. Имшенецкій въ III-ей главѣ своего извѣстнаго сочиненія ¹⁾, *Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes* (стр. 68), посвящаетъ рядъ интересныхъ страницъ сравненію способовъ интегрированія Монжа и Ампера.

Оба знаменитыхъ ученыхъ даютъ, въ сущности, частичные приемы интегрированія различныхъ уравненій частнаго вида. Насколько эти способы интегрированія носятъ частный характеръ, достаточно привести, для примѣра, слѣдующія два уравненія, которыя служили предметомъ изслѣдованія Эйлера.

Первое изъ нихъ имѣетъ видъ ²⁾

$$r - a^2t + \frac{bz}{x^2} = 0, \quad (1)$$

гдѣ r и t обозначаютъ соотвѣтственно частныя производныя второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

По способамъ Монжа и Ампера возможно проинтегрировать послѣднее уравненіе, только для частнаго случая, когда

$$b = 0.$$

Между тѣмъ Эйлеръ показалъ, что уравненіе (1) интегрируется во всѣхъ случаяхъ, когда коэффициентъ b имѣ-

¹⁾ Цитирую французскій переводъ этой работы, опубликованный въ 1872 г., являющейся библиографической рѣдкостью.

²⁾ Euleri. *Miscellanea Taurinensia*, T. III, p. 60.



еть какое-либо четное положительное или отрицательное значеніе.

Второе уравненіе связано съ изслѣдованіями Эйлера о распространеніи звука ³⁾; оно имѣеть видъ

$$r - t - \frac{2mp}{x} = 0, \quad (2)$$

гдѣ p обозначаетъ частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Въ своемъ третьемъ томѣ *Institutiones Calculi Integralis* Эйлеръ ⁴⁾ составилъ таблицу общихъ интеграловъ послѣдняго уравненія (2) для всѣхъ положительныхъ и отрицательныхъ значеній коэффиціента m , отъ 0 до 6, которую можно продолжить и далѣе. Эти результаты получаются, при помощи преобразованія уравненія (2) и приложенія способа интегрированія Лапласса.

Между тѣмъ изобрѣтенные затѣмъ способы интегрированія Монжа и Ампера примѣнимы къ интегрированію разсматриваемаго уравненія (2) только при значеніяхъ его коэффиціента m , равныхъ соотвѣтственно 0 и -1 ⁵⁾.

³⁾ Euleri. Opera omnia, series III, vol. 1 et series I, vol. 23.

⁴⁾ Vol. III, стр. 227. Problema 54, n^o 343.

⁵⁾ Легко замѣтить, что соотвѣтствующія уравненія

$$r - t = 0, \quad r - t + \frac{2p}{x} = 0$$

интегрируется непосредственнымъ приведеніемъ къ точнымъ производнымъ уравненіямъ. Покажемъ это на второмъ болѣе сложномъ уравненіи. Прибавивъ и отнявъ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, напишемъ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + q + \frac{z}{x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p + q + \frac{z}{x} \right) + \frac{1}{x} \left(p + q + \frac{z}{x} \right) = 0$$

Послѣднее уравненіе, какъ линейное перваго порядка относительно выраженія $p + q + \frac{z}{x}$, имѣеть общій интеграль

$$p + q + \frac{z}{x} = \frac{2}{x} \varphi'(x + y),$$

гдѣ φ' обозначаетъ производную функцію отъ произвольной функціи φ , а множитель 2 поставленъ при произвольной функціи для удобства вычисленій.

Общій интеграль полученнаго уравненія, какъ линейнаго перваго порядка, даетъ искомый общій интеграль

$$z = \frac{1}{x} [f(x - y) + \varphi(x + y)]$$

причемъ f обозначаетъ вторую произвольную функцію.

Несмотря на столь частный характер, способы интегрирования Монжа и Ампера тѣмъ не менѣе заслуживаютъ вниманія въ силу слѣдующихъ соображеній.

Труды обоихъ геометровъ хотя и не увѣнчались успѣхомъ, но все же представляютъ попытки исканія общихъ методовъ интегрированія. Поэтому эти изслѣдованія представляютъ существенные моменты въ развитіи теоріи интегрированія уравненій съ частными производными высшихъ порядковъ. Кромѣ того они даютъ интересные теоретическіе примѣры интегрированія Якобіевскихъ системъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

2. Слѣдуетъ прежде всего отмѣтить различныя по существу постановки задачи, сдѣланныя Монжемъ и Амперомъ.

Монжъ распространяетъ на линейныя уравненія второго порядка приѣмъ Лагранжа, которымъ послѣднему удалось отождествить линейное уравненіе перваго порядка, при помощи дифференціальной зависимости между дифференціалами функціональной и независимыхъ переменныхъ. Монжъ съ аналогичной цѣлью вводитъ кромѣ того выраженія дифференціаловъ первыхъ двухъ частныхъ производныхъ перваго порядка. Послѣ того полученный результатъ подвергается геометрической интерпретаціи, при помощи понятія о характеристикахъ.

Но если, для уравненія съ частными производными перваго порядка, такой приѣмъ давалъ Лагранжу вполне общій результатъ, то для уравненій второго порядка Монжъ не получаетъ аналогичнаго результата.

Наилучшее по простотѣ и ясности изложеніе способа Монжа находится въ третьемъ томѣ трактата Дарбу, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* 6). Однако вполне удачнымъ примѣромъ, долженствующимъ иллюстрировать рассматриваемую теорію, является только послѣдній, четвертый, примѣръ, изъ области механической теоріи теплоты.

Что касается первыхъ трехъ геометрическихъ задачъ, которыя приводятъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ второго порядка, то послѣднія интегрируются весьма просто. Эти уравненія представляются въ видѣ точныхъ производныхъ 7). Поэтому къ нимъ излишне примѣнять какую бы

6) Paris 1894, Chapitre V, p. 263.

7) Уравненіе развѣтывающихся поверхностей $vt - s^2 = 0$ можетъ быть написано, при помощи функціональнаго опредѣлителя, слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} = 0; \text{ отсюда } q = f(p),$$

гдѣ f — произвольная функція. Общій интеграль послѣдняго уравненія перваго порядка дается совокупностью двухъ уравненій:

то ни было теорію інтегрування, разъ ихъ общій інтеграль-
очевидентъ.

3. Способъ інтегрування Ампера исходитъ изъ дру-
гихъ соображеній нежели Монжа.

Руководящей нитью служитъ для Ампера классическое
приведеніе Коши задачи інтегрування уравненія съ част-
ными производными перваго порядка къ системѣ обыкно-
венныхъ дифференціальныхъ уравненій, при помощи весьма
удачнаго преобразованія независимыхъ переменныхъ вели-
чинъ. Однако и здѣсь обобщенное преобразование Коши не
даетъ общаго результата.

Способъ Монжа, данный имъ для линейныхъ уравне-
ній, распространяется на болѣе общій видъ такъ называе-
мыхъ уравненій типа Монжа-Ампера. И Амперовъ способъ
также даетъ болѣе или менѣе общіе результаты для этихъ
последнихъ уравненій:

$$Ar + 2Bs + Ct + D(vt - s^2) + E = 0, \quad (3)$$

гдѣ коэффициенты A, B, C, D и E представляютъ функціи
переменныхъ величинъ x, y, z, p и q , причемъ p и q обо-
значаютъ соотвѣтственно частныя производныя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Благодаря введенію новой независимой переменной, Ам-
перъ приводитъ інтегруваніе уравненія (3) къ двумъ си-
стемамъ по три дифференціальныхъ уравненія съ частными
производными перваго порядка четырехъ функцій y, z, p и q
по одной независимой переменной x ; вторая же введенная

$$z = Cx + f(c)y + \varphi(c), \quad x + f'(c)y + \varphi'(c) = 0,$$

гдѣ φ — вторая произвольная функція.

Уравненіе линейчатыхъ поверхностей съ направляющей плоскостью,
перпендикулярною къ оси z , имѣетъ видъ:

$$q^2v - 2pqs + p^2t = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \left(\frac{p}{q}\right)}{\partial x} & \frac{\partial \left(\frac{p}{q}\right)}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{p}{q} = \varphi(z), \quad y + x\varphi(z) = \psi(z),$$

гдѣ φ и ψ двѣ произвольныхъ функціи.

Наконецъ, дифференціальное уравненіе поверхностей съ плоскими
линіями кривизны, параллельными координатной плоскости yz ,

$$(1 + q^2)s - pqt = 0$$

можетъ быть написано

вспомогательная независимая переменная не фигурирует явно въ полученныхъ уравненіяхъ.

Нетрудно видѣть, что полученная система имѣетъ то же значеніе, что и система уравненій Монжа въ полныхъ дифференціалахъ; она только написана въ иныхъ обозначеніяхъ и безъ всякаго труда сводится на уравненія Монжа.

Болѣе того, если прослѣдить самый выводъ уравненій Ампера, то онъ совершенно аналогиченъ выводу Монжа. У послѣдняго автора задача приводится къ уравненію линейному относительно второй производной s (см. уравненіе (4) въ упомянутомъ выше изложеніи Дарбу). Приравнявъ нулю оба члена, независящіе отъ s получаютъ два окончательныхъ уравненія системы Монжа.

Амперъ получаетъ аналогичное уравненіе линейное относительно выраженія производной t , въ своихъ болѣе сложныхъ обозначеніяхъ (см. уравненіе (4) на стр. 70 указаннаго выше сочиненія В. Г. Имшенецкаго). Приравнявъ также нулю оба члена, независящихъ отъ t , получаемъ два уравненія, равнозначныя Монжу.

Наконецъ, обѣ системы уравненій и Монжа и Ампера легко замѣняются эквивалентной Якобіевской системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, являющейся плодомъ позднѣйшихъ работъ Якоби, Майера и ихъ послѣдователей.

Поэтому дальнѣйшая задача зависитъ отъ свойствъ послѣднихъ уравненій и методовъ ихъ интегрированія.

Въ дополненіе къ сказанному, интересно отмѣтить работу Дарбу опубликованную имъ въ 1870 году, о новомъ способѣ интегрированія уравненій съ частными производными второго порядка⁸⁾. Примѣняя къ уравненію Монжа—Ампера преобразование Ампера, Дарбу получаетъ систему уравненій

$$\frac{q}{p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{p} \right) - \frac{1}{p^3} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^2 + \frac{1}{p^2} \right] = 0,$$

т. е. даетъ интеграль:

$$q^2 + 1 = \frac{p^2}{X'^2},$$

гдѣ X обозначаетъ производную произвольной функціи X независимой переменной x .

Общій интеграль послѣдняго уравненія съ частными производными перваго опредѣляетъ искомыя поверхности совокупностью двухъ уравненій:

$$z = \sqrt{\alpha^2 + 1} X + \alpha y + f(\alpha), \quad \frac{\alpha X}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} + y + f'(\alpha) = 0,$$

гдѣ f вторая произвольная функція переменнаго параметра α .

⁸⁾ См. Théorie des Surfaces, T. IV. Nouveau Tirage. Paris 1925 Note X, p. 497.

(обозначенную числомъ (10) въ его указанномъ мемуарѣ), которую и называетъ системой Монжа.

Насколько сходны оба рассматриваемыхъ способа интегрированія можно судить изъ того, что въ современныхъ руководствахъ⁹⁾ не дѣлаютъ различія между обоими методами и излагаютъ способъ интегрированія Монжъ—Амперовскаго уравненія (3).

4. Нѣкоторые авторы находятъ преимущество Амперовскаго способа изложенія для распространенія задачи интегрированія на уравненія съ частными производными второго порядка общаго вида (см. В. Г. Имшенецкій — п^o 89 стр. 78).

Однако, въ настоящее время, идеи, положенныя въ основаніе работъ какъ Монжа такъ и Ампера, примѣняются къ уравненіямъ общаго вида и могутъ, въ различныхъ частныхъ случаяхъ, давать искомыя рѣшенія. Для соответствующихъ примѣровъ отсылаемъ къ трактату А. Р. Forsyth'a¹⁰⁾.

Такъ какъ вопросъ касается интегрированія уравненій, то успѣхъ его очень часто зависитъ отъ способа вычисленій. Поэтому, само собой разумѣется, всегда возможно пользоваться той или иной формой изъ рассматриваемыхъ двухъ эквивалентныхъ методовъ.

5. Новая постановка задачи, отличная отъ изложенныхъ, вводится Булемъ¹¹⁾.

Онъ ставитъ вопросъ о разысканіи и интегрированіи всѣхъ уравненій съ частными производными второго порядка, имѣющихъ промежуточный интеграль съ одной произвольной функціей общаго вида

$$u = f(v), \quad (4)$$

гдѣ u и v обозначаютъ функціи переменныхъ величинъ x , y , z , p и q , рассматриваемыхъ какъ независимыя.

Напишемъ производныя уравненія перваго порядка уравненія (4), по x и по y , слѣдующимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} u'_x + u_1 r + u_2 s &= f'(v) (v'_x + v_1 r + v_2 s), \\ u'_y + u_1 s + u_2 t &= f'(v) (v'_y + v_1 s + v_2 t), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

гдѣ введены обозначенія

$$u'_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p, \quad u'_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q, \dots$$

⁹⁾ См., напримѣръ, E. Goursat. Cours d'Analyse Mathématique, Quatrième édition, t. III. Paris 1927 Chapitre XXIV. Equations de Monge-Ampère p. 46.

¹⁰⁾ Theory of Differential Equations. Vol. VI, стр. 220 п^o 238 и стр. 267, п^oп^o 248—249.

¹¹⁾ G. Boole. U. d. partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Journal für d. reine u. angewandte Math. Bd. 61, Berlin, 1863, p. 309).

$$u_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial p}, \quad u_2 \equiv \frac{\partial u}{\partial q}, \dots \text{ и т. д.}$$

Очевидно изъ разсмотрѣнія уравненій (5), что результатъ исключенія изъ нихъ произвольной функции $f'(v)$ представляется въ видѣ линейнаго уравненія относительно величинъ r, s, t и $rt - s^2$.

Такимъ образомъ становится доказаннымъ, что промежуточные интегралы вида (4) допускаются только уравненіями Монжа-Ампера (3). Это условіе необходимое, но не достаточное.

6. Въ силу выведеннаго заключенія, должны имѣть мѣсто слѣдующія равенства:

$$\left. \begin{aligned} u_1 v'_y - u'_y v_1 &= A\lambda, \\ -u_1 v'_x + u_2 v'_y + u'_x v_1 - u'_y v_2 &= 2B\lambda, \\ -u_2 v'_x + u'_x v_2 &= C\lambda, \\ -u'_y v'_x + u'_x v'_y &= E\lambda, \\ -u_2 v_1 + u_1 v_2 &= D\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

гдѣ λ обозначаетъ коэффициентъ пропорціональности.

Изслѣдованіе Буля уравненій (6) упрощается слѣдующимъ образомъ.

Полученныя уравненія симметричны относительно производныхъ обѣихъ функций u и v и обладаютъ замѣчательнымъ свойствомъ.

Они даютъ по два уравненія для опредѣленія каждой изъ этихъ функций, не заключающихъ другой функции. Кромѣ того они имѣютъ одинъ и тотъ же видъ по отношенію каждой изъ функций u и v . Пятое же уравненіе (6) служитъ для опредѣленія множителя пропорціональности λ .

Чтобы убѣдиться въ этомъ, опредѣлимъ, изъ третьяго и четвертаго уравненій (6) выраженія v'_x и v'_y .

Исключеніе послѣднихъ значеній изъ первыхъ двухъ уравненій (6), въ силу послѣдней формулы (6), даетъ слѣдующія уравненія, для опредѣленія функции u :

$$\left. \begin{aligned} Au'_x u_2 + Cu'_y u_1 - Du'_x u'_y - Eu_1 u_2 &= 0 \\ 2Bu'_x u_2 + C(u_y u_2 - u'_x u_1) + Du'^2_x - Eu^2_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Разрѣшая эти уравненія относительно u'_x и u'_y (начиная съ подстановки значенія u'_y изъ перваго уравненія (7) во второе), получаемъ искомую систему двухъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} Du'_x - Cu_1 + (B \pm \sqrt{G}) u_2 &= 0, \\ Du'_y + (B \pm \sqrt{G}) u_1 - Au_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

гдѣ введено обозначеніе

$$G \equiv B^2 + DE - AC.$$

Той же системѣ уравненій (8) удовлетворяетъ и функція v . Въ этомъ легко убѣдиться, исключивъ изъ первыхъ двухъ уравненій (6) значенія u'_x и u'_y , опредѣляемые слѣдующими двумя уравненіями (6).

Такимъ образомъ функціи u и v являются различными рѣшеніями одной и той же системы линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

Слѣдовательно, сколько различныхъ паръ рѣшеній допускаетъ послѣдняя система, столько различныхъ промежуточныхъ интеграловъ имѣетъ рассматриваемое уравненіе (3). Число ихъ однако не превышаетъ двухъ.

Въ самомъ дѣлѣ, полученныя формулы (8) заключаютъ двѣ различныхъ системы уравненій, соотвѣтствующихъ одновременно верхнимъ или нижнимъ двойнымъ знакамъ. Каждая изъ этихъ системъ можетъ имѣть по три, по два или по одному различному рѣшенію. Но въ первомъ случаѣ, какъ хорошо извѣстно, обѣ системы совпадаютъ, такъ какъ тогда имѣетъ мѣсто условіе $G = 0$. Поэтому уравненіе (3) и не можетъ имѣть болѣе двухъ различныхъ промежуточныхъ интеграловъ.

Условія совмѣстности уравненій каждой изъ системъ (8) представляютъ *достаточныя* условія для ея интегрируемости, а стало быть и для существованія промежуточнаго интеграла изучаемаго вида (4).

Полученныя уравненія съ частными производными перваго порядка (8) одной неизвѣстной функціи эквивалентны указаннымъ выше уравненіямъ Монжа въ полныхъ дифференціалахъ.

Системы уравненій (8) имѣютъ Якобіевскій видъ и обладаютъ рядомъ замѣчательныхъ свойствъ. Благодаря этому Монжъ - Амперовская задача интегрированія представляетъ интересное приложеніе теоріи линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

Мы не станемъ останавливаться на этомъ вопросѣ, отсылая къ упомянутымъ выше трактатамъ В. Г. Имшенецкаго и А. Р. Forsyth'a.

7. Интересно далѣе отмѣтить, что изученіе исходной системы уравненій (7) освобождаетъ отъ введенія теоремъ Graindorge'a ¹²⁾, которыми онъ дополнилъ теорію Монжа - Ампера.

Въ самомъ дѣлѣ, достаточно принимать въ расчетъ видъ

¹²⁾ Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1872. стр 426.

даннаго уравненія (3), чтобы получать должнымъ образомъ соотвѣтствующую Якобiевскую систему.

Такъ, если уравненіе (3) линейное, т. е. $D \equiv 0$, то уравненія (7) становятся линейными относительно производныхъ u'_x и u'_y :

$$\left. \begin{aligned} Au'_x u_2 + Cu'_y u_1 - Eu_1 u_2 &= 0, \\ 2Bu'_x u_2 + C(u'_y u_2 - u'_x u_1) - Eu_2^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Сумма произведеній перваго уравненія (9) на u_2 , а втораго на $-u_1$ даетъ непосредственно:

$$Au_2^2 - 2Bu_1 u_2 + Cu_1^2 = 0.$$

Рѣшая полученное уравненіе совмѣстно съ первымъ уравненіемъ (9), находимъ, при условіи $A \gtrless 0$, слѣдующую Якобiевскую систему линейныхъ уравненій, соотвѣтствующую данному линейному уравненію съ частными производными втораго порядка:

$$\left. \begin{aligned} u_2 - \lambda_{12} u_1 &= 0, \\ u'_x + \lambda_{21} u'_y - \frac{E}{A} u_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

гдѣ введено обозначеніе

$$\lambda_{12} \equiv \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

причемъ измѣненіе порядка значковъ при λ , во второмъ уравненіи, показываетъ на измѣненіе порядка знаковъ при радикалѣ.

Если коэффициентъ $A = 0$, то оба первыхъ уравненія (10) становятся соотвѣтственно

$$u_1 = 0, \quad Cu_1 - 2Bu_2 = 0.$$

Аналогичный результатъ получается, если какой либо другой изъ коэффициентовъ B или C равняется нулю, или два одновременно равны нулю.

Само собою разумѣется, что полученныя уравненія (10) должны представлять систему двухъ совмѣстныхъ уравненій, т. е. должны быть въ инволюціи, чтобы допускать изслѣдуемые интегралы.

Между тѣмъ Буль на стр. 317 своего упомянутаго выше мемуара упускаетъ изъ виду послѣднее обстоятельство. Поэтому указываемый имъ способъ интегрированія уравненій (19), на упомянутой страницѣ, недостаточенъ.

8. Разсмотримъ, наконецъ, случай линейнаго уравненія съ частными производными второго порядка гиперболическаго вида, гдѣ

$$D \equiv A \equiv C \equiv 0, \quad 2B \equiv 1,$$

причемъ уравненіе (3) становится

$$s + E(x, y, z, p, q) = 0. \quad (11)$$

Стало-быть, наши исходныя уравненія (7) принимаютъ, въ настоящемъ случаѣ, видъ:

$$Eu_1u_2 = 0,$$

$$(u'_x - Eu_2)u_2 = 0.$$

Полагая $u_2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$, напишемъ первую Якобiевскую систему слѣдующимъ образомъ:

$$u_1 = 0, \quad u'_x - Eu_2 = 0. \quad (12)$$

Въ нашемъ предположеніи, что $u_2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$, при которомъ были выведены, изъ формулъ (6), исходныя уравненія (7), для опредѣленія функціи v , получаютъ аналогично общему случаю, тѣ же уравненія вида (12), что и для опредѣленія функціи u .

Разсмотримъ теперь второе предположеніе, что

$$u_2 = 0. \quad (13)$$

Согласно съ сказаннымъ выше, приходится, при этомъ, возвращаться къ первоначальнымъ формуламъ (6). Изъ нихъ легко получить вторую пару уравненій въ видѣ совокупности уравненія (13) и нижеслѣдующаго

$$u'_y - Eu_1 = 0. \quad (14)$$

Не трудно вывести, что второе значеніе функціи v , подобно первому случаю, также опредѣляется совокупностью уравненій (13)—(14).

Условія интегрируемости показываютъ, что каждая изъ системъ можетъ имѣть только одно рѣшеніе поэтому разсматриваемаго интеграла (4) не существуетъ.

9. Приложимъ, напริมѣръ, изложенную теорію къ уравненію Лапласса

$$S + Lp + Mq + Nz = V, \quad (15)$$

гдѣ L, M, N и V представляютъ функціи только независимыхъ переменныхъ x и y .

Уравненія (12) становятся въ этомъ случаѣ:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z} - (Lp + Mq + Nz - V) \frac{\partial u}{\partial q} = 0. \quad (16)$$

Условіе инволюціи обоихъ уравненій выражается равенствомъ

$$\frac{\partial u}{\partial z} - L \frac{\partial u}{\partial q} = 0. \quad (17)$$

Благодаря полученному уравненію (17), второе уравненіе (16) преобразовывается въ слѣдующее:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - (Mq + Nz - V) \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad (18)$$

Чтобы система изъ трехъ полученныхъ уравненій, перваго (16), (17) и (18), была Якобіевской должно удовлетворяться условіе:

$$\frac{\partial U}{\partial q} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} + LM - N = 0.$$

Полученное равенство показываетъ, что первый инвариантъ уравненія (15) долженъ равняться нулю.

Аналогичнымъ образомъ, чтобы система уравненій (13) — (14) была интегрируемой и второй инвариантъ Лапласова уравненія (15) долженъ также быть равнымъ нулю.

Такъ какъ каждая система имѣетъ по одному интегралу, то согласно съ изложенной теоріей Лапласова уравненіе (15) не можетъ имѣть промежуточнаго интеграла вида (4), гдѣ функции u и v зависятъ отъ всѣхъ переменныхъ x , y , z , p и q .

10. Изложенная теорія промежуточныхъ интеграловъ должна быть дополнена и соответствующимъ образомъ видоизмѣнена при разсмотрѣніи линейнаго уравненія

$$Ar + 2Bs + Ct + E = 0,$$

изслѣдованіемъ его промежуточнаго интеграла вида

$$u = f(v),$$

гдѣ u является функцией переменныхъ величинъ x , y , z , p и q , а v зависитъ только отъ первыхъ трехъ переменныхъ ¹³⁾.

¹³⁾ Это предположеніе соответствуетъ частному случаю, который получается изъ общей теоріи, если положить, что $v_1 = v_2 = 0$.



Нетрудно видѣть, что тогда результатъ исключенія произвольной функціи f изъ уравненій (5) даетъ дѣйствительно линейное уравненіе.

При этомъ формулы (6) упрощаются и замѣняются четырьмя слѣдующими:

$$\left. \begin{aligned} v'_y u_1 &= A\lambda, \\ -v'_x u_1 + v'_y u_2 &= 2B\lambda, \\ -v'_x u_2 &= C\lambda, \\ -v'_x u'_y + v'_y u'_x &= E\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Третья и первая формулы (19) даютъ

$$v'_x = -\frac{C}{u_1} \lambda, \quad v'_y = \frac{A}{u_1} \lambda. \quad (20)$$

Подставляя послѣднія значенія v'_x и v'_y во второе и четвертое уравненія (19), находимъ немедленно прежнія уравненія

$$Au_2^2 - 2Bu_1u_2 + Cu_1^2 = 0,$$

$$Au'_x u_2 + Cu'_y u_1 - Eu_1u_2 = 0.$$

Эти же уравненія непосредственно преобразовываются къ виду уравненій (10).

Что касается функціи v , то она въ настоящемъ случаѣ не опредѣляется тѣми же уравненіями, что функція u , такъ какъ симметричности формулъ болѣе не существуетъ. Чтобы составить уравненіе для функціи v , исключеніемъ λ изъ формулъ (20), и находимъ искомое равенство.

$$Au_2v'_x + Cu_1v'_y = 0,$$

или

$$Au_2 \frac{\partial v}{\partial x} + Cu_1 \frac{\partial v}{\partial y} + (Au_2p + Cu_1q) \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

гдѣ u_1 и u_2 выражаются при помощи найденнаго ранѣе значенія функціи u .

Само собою разумѣется, что, для возможности поставленной задачи, послѣднее уравненіе должно опредѣлять для функціи v значеніе, которое не должно зависѣть отъ переменныхъ p и q .

11. Благодаря изложенному дополненію, возможно составлять промежуточные интегралы и для гиперболическаго линейнаго уравненія (11).

Въ самомъ дѣлѣ, возвращаясь къ исходнымъ уравненіямъ (19), представляемъ ихъ, для уравненія (11), въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} v'_y u &= 0, \\ -v'_x u_1 + v'_y u_2 &= \lambda, \\ -v'_x u_2 &= 0, \\ -v'_x u'_y + v'_y u'_x &= E\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Поэтому необходимо разсмотрѣть два возможныхъ случая, которые вытекаютъ изъ перваго и третьяго уравненія (21):

$$v'_y = 0, \quad u_2 = 0, \quad (22)$$

$$v'_x = 0, \quad u_1 = 0. \quad (23)$$

Въ первомъ случаѣ, для уравненій (22), второе и четвертое уравненіе, по исключеніи, даютъ формулу, такъ какъ $v'_x \gtrless 0$,

$$u'_y - Eu_1 = 0. \quad (24)$$

Совокупность послѣдняго уравненія и второго (22) служитъ для опредѣленія функціи u .

Соотвѣтствующее значеніе функціи v опредѣляется единственнымъ первымъ уравненіемъ (22). Отсюда слѣдуетъ, что v представляетъ функцію одной переменнѣй x .

Поэтому, обозначая черезъ u соотвѣтствующее значеніе совмѣстнаго рѣшенія второго уравненія (22) и уравненія (24), если оно существуетъ, получаемъ промежуточный интеграль видъ:

$$u = f(x), \quad (25)$$

гдѣ f обозначаетъ произвольную функцію независимой переменнѣй x .

Наконецъ, второе уравненіе (21) опредѣляетъ соотвѣтственное значеніе множителя λ .

Во второмъ изъ указанныхъ случаевъ, для уравненій (23), второе и четвертое уравненія (21) опредѣляютъ функцію u при помощи второго уравненія (23) и слѣдующаго:

$$u'_x - Eu_1 = 0. \quad (26)$$

Соотвѣтствующее значеніе функціи v опредѣляется единственнымъ уравненіемъ, первымъ (23). Выраженіе v представляетъ, стало-быть, произвольную функцію одной независимой переменнѣй y .

Предположимъ, что совокупность уравненій второго (23) и (26), имѣемъ интеграль u . Въ такомъ случаѣ соотвѣтствующій промежуточный интеграль становится

$$u = \varphi(y), \quad (27)$$

гдѣ φ обозначаетъ произвольную функцію независимой переменнѣной y .

Соотвѣтствующее значеніе λ опредѣляется вторымъ уравненіемъ (21).

12. Данная теорія восполняетъ пробѣль, получающійся вслѣдствіе того, что Лапласово гиперболическое уравненіе (15) не могло вообще имѣть промежуточнаго интеграла, на основаніи изложенной теоріи промежуточныхъ интеграловъ (4).

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этой теоріи слѣдовало, на примѣръ, что Эйлерово уравненіе (2), при $m = -1$, будучи преобразовано къ гиперболическому виду, не можетъ имѣть промежуточнаго интеграла.

Между тѣмъ общій интеграль этого уравненія, данный въ подстрочномъ примѣчаніи ⁵⁾, показываетъ противное. Дѣйствительно, два производныхъ уравненія перваго порядка, взятыхъ отъ общаго интеграла, соотвѣтственно по x и по y , разрѣшаются относительно произвольныхъ функцій $f(x-y)$ и $\varphi'(x+y)$. Полученныя такимъ образомъ формулы представляютъ два промежуточныхъ интеграла.

Изложенныя въ п^o 11 разсужденія устраняютъ теперь всякое возникающее здѣсь недоразумѣніе. Дѣйствительно, первый и второй инварианты разсматриваемаго Эйлерова уравненія, приведеннаго къ гиперболическому виду, равны нулю; во-вторыхъ, уравненія (24) и (26) тождественны съ прежними (14), (12) (различіе между обоими теоріями заключается только въ опредѣленіи функціи v). Поэтому очевидно, что имѣютъ мѣсто оба промежуточныхъ интеграла вида (25) и (27), заключающихъ по произвольной функціи одной независимой переменнѣной величины.

Послѣднее заключеніе вполне согласуется съ формулами преобразованія разсматриваемаго уравненія Эйлера къ гиперболическому виду. Эти формулы показываютъ, что выраженія $x-y$, $x+y$ и должны быть взяты соотвѣтственно за новыя независимыя переменныя преобразованія.

13. Воспользуемся изложенной теоріей, чтобы вывести общій видъ линейнаго уравненія второго порядка гиперболическаго типа (11), допускающихъ промежуточные интегралы вида (25) и (27).

Напишемъ второе уравненіе (22) и (24), слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z} - E \frac{\partial u}{\partial p} = 0. \quad (28)$$

Условіе ихъ инволюціи выражается формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial p} = 0. \quad (29)$$

Если предположить, что послѣднее равенство должно уничтожаться тождественно, то, очевидно, приходимъ къ заключенію, что наше гиперболическое уравненіе (11) должно имѣть видъ:

$$S + E(x, y, p) = 0.$$

Его промежуточный интегралъ становится

$$u(x, y, p) = f(x),$$

гдѣ f обозначаетъ произвольную функцію независимой переменнѣй x , а функція u опредѣляется интегрированіемъ одного обыкновеннаго дифференціального уравненія перваго порядка между переменными p и y , причемъ x рассматривается какъ постоянный параметръ.

Аналогичный результатъ получается, если исходить изъ втораго уравненія (23) и уравненія (26), причемъ переменныя величины y и p замѣняются x и q и промежуточный интегралъ заключаетъ произвольную функцію y .

Наконецъ, если рассматриваемое уравненіе (11) должно имѣть оба промежуточныхъ интеграла (25) и (27), то оно приводится къ виду:

$$S + E(x, y) = 0.$$

Разсмотримъ теперь второе предположеніе, что равенство (29) представляетъ третье уравненіе, служащее, вмѣстѣ съ (28)-ыми, для опредѣленія функціи u .

Въ такомъ случаѣ второе уравненіе (28) принимаетъ видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \left(q \frac{\partial E}{\partial q} - E \right) \frac{\partial u}{\partial p} = 0. \quad (30)$$

Условія совмѣстности уравненія (29) съ первымъ уравненіемъ (28) и съ (30)-ымъ выражаются соотвѣтственно равенствами

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial y} + q \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial z} - E \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p} + \frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial E}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial z} = 0. \quad (32)$$

Полученныя формулы служатъ для опредѣленія функціи E . Изъ уравненія (31) слѣдуетъ, что

$$E = q\varphi(x, y, z, p) + \psi(x, y, z, p), \quad (33)$$

т. е. E является линейной функціей переменннй q , причеиъ φ и ψ представляютъ произвольныя функціи переменннхъ величинъ x, y, z и p .

Подставляя найденный общій видъ (33) функціи E въ уравненіе (32), получаемъ, что оба коэффиціента φ и ψ должны удовлетворять слѣдующей зависимости:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (34)$$

При этомъ условіи уравненіе (11) имѣетъ промежуточный интегралъ вида (25).

Для существованія интеграла вида (27) должны имѣть мѣсто аналогичныя условія, гдѣ вмѣсто переменннхъ y и q должны фигурировать переменнныя x и p .

Наконецъ, чтобы могли существовать оба разсматриваемыхъ промежуточныхъ интеграла одновременно, для этого, легко доказать, что функція E должна имѣть слѣдующій видъ:

$$E = Kpq + Lp + Mq + F, \quad (35)$$

гдѣ коэффиціенты K, L, M и F представляютъ функціи переменннхъ величинъ x, y, z , которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\partial U}{\partial z} + f(xy)x + \varphi(yz)y, \\ L &= \frac{\partial U}{\partial y} + \psi(xy)x + \varphi(yz)z, \\ M &= \frac{\partial U}{\partial x} + f(xz)z + \psi(xy)y, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} = KF - LM, \quad (37)$$

причемъ U — произвольная функція x, y, z , а f, φ и ψ представляютъ соотвѣтственно произвольныя функціи произве-

деній перемѣнныхъ величинъ xz , yz и $xу$; однако эти три функціи могутъ быть также включены въ функцію U .

Не останавливаясь на дальнѣйшемъ разсмотрѣніи послѣднихъ уравненій, ограничимся указаніемъ, что формула (37) обобщаетъ оба условія равенства нулю перваго и втораго инварианта Лапласова линейнаго уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе соотвѣтствуетъ частному случаю, когда коэффиціенты формулы (35) удовлетворяютъ условіямъ:

$$K \equiv 0, \quad F \equiv Nz, \quad (38)$$

причемъ L , M и N не зависятъ отъ z .

Такъ какъ коэффиціенты L и M удовлетворяютъ равенству:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial x},$$

то, въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ (38), формула (37) даетъ:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = N - LM.$$

Равенства каждаго изъ первыхъ двухъ членовъ третьему и представляютъ соотвѣтственно равенства нулю указанныхъ инвариантовъ.

Изложенные результаты могутъ быть найдены также и приложеніемъ теоріи касательныхъ преобразованій, или исходя изъ разсмотрѣнія различныхъ частныхъ случаевъ теоріи характеристикъ. По этому поводу отсылаемъ къ сочиненію E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, t. I, Chapitre II, pages 81 et suivantes.

14. Разсматриваемые методы интегрированія распространяются на уравненія съ частными производными втораго порядка одной функціи многихъ независимыхъ перемѣнныхъ. Vivanti и Goursat ¹⁴⁾ занимались этимъ обобщеніемъ. Въ виду сложности разсматриваемой теоріи, интересно внести нѣкоторыя упрощенія въ теорію промежуточныхъ интеграловъ.

Обозначимъ черезъ x_1, x_2, \dots, x_n независимыя перемѣнныя, а неизвѣстную функцію ихъ черезъ z , причемъ p_1, p_2, \dots

¹⁴⁾ Vivanti. Sulle equazioni a derivate parziali del secondo ordine a tre variabili indipendenti. (Mathematische Annalen, t. XLVIII p. 474).

E. Goursat. Sur les équations du second ordre à n variables analogues à l'équation de Monge—Ampère (Bulletin de la société Mathématique de France, t. XXVII p. 1).

p_n будутъ представлять ея частныя производныя перваго порядка, взятыя соотвѣтственно по независимымъ переменнымъ тѣхъ же значковъ. Наконецъ, для вторыхъ частныхъ производныхъ функціи z вводимъ обозначенія:

$$p_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \quad p_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad p_{13} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3}, \dots$$

$$\dots p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}, \dots$$

Пусть имѣемъ какое либо уравненіе общаго вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n, p_{12}, p_{13}, \dots, p_{ik}, \dots, p_{nn}) = 0, \quad (39)$$

Будемъ изслѣдовать промежуточный интеграль послѣдняго уравненія въ слѣдующемъ видѣ:

$$u_n = f(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), \quad (40)$$

гдѣ обозначенія $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$ представляютъ n функцій переменныхъ величинъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$, которыя при этомъ рассматриваются какъ независимыя между собой переменныя, а f представляетъ произвольную функцію u_1, u_2, \dots, u_{n-1} .

Формула (40) называется промежуточнымъ интеграломъ рассматриваемаго дифференціального уравненія (39), если результатъ исключенія произвольной функціи f изъ формулы (40) и ея n производныхъ перваго порядка, взятыхъ соотвѣтственно по независимымъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_n , даетъ дифференціальное уравненіе (39)

Дифференцируя уравненіе (40), получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} D_i u_n &= \sum_{k=1}^{n-1} f_k D_i u_k, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

причемъ символъ D_i обозначаетъ полную частную производную, взятую отъ какой либо функціи u по независимой переменной x_i какъ непосредственно, такъ и черезъ посредство переменныхъ величинъ z, p_1, p_2, \dots, p_n ; что же касается выраженія f_k , то оно имѣетъ значеніе частной производной перваго порядка функціи f по переменной величинѣ u_k какъ по независимой переменной.

Поэтому имѣемъ

$$D_i u_r = u'_{ri} + \sum_{s=1}^n u_{rs} p_{si},$$

причемъ введены слѣдующія сокращенныя обозначенія

$$u'_{ri} = \frac{\partial u_r}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad u_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial p_s}.$$

Само собою разумѣется, что результатъ исключенія $n-1$ неизвѣстныхъ величинъ

$$f_1, f_2, \dots, f_{n-1},$$

изъ n линейныхъ относительно этихъ величинъ уравненій (41) представляется равенствомъ нулю слѣдующаго опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} D_1 u_n & D_1 u_1 & \dots & D_1 u_{n-1} \\ D_2 u_n & D_2 u_1 & \dots & D_2 u_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ D_n u_n & D_n u_1 & \dots & D_n u_{n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

Каждый изъ элементовъ опредѣлителя, первой части полученнаго уравненія, представляетъ линейную функцію вторыхъ частныхъ производныхъ p_{si} .

Поэтому полученное равенство (42) представляетъ дифференціальное уравненіе съ частными производными второго порядка n -ой степени.

Отсюда вытекаетъ заключеніе, что дифференціальныя уравненія съ частными производными второго порядка одной неизвѣстной функціи отъ n независимыхъ переменныхъ (39), должны приводиться, вообще, къ алгебраическому уравненію n -ой степени относительно вторыхъ частныхъ производныхъ неизвѣстной функціи для того, чтобы допускать промежуточный интеграль видъ (40).

Поэтому Монжъ-Амперовское уравненіе, о двухъ независимыхъ переменныхъ, является уравненіемъ 2-ой степени, представляющимъ частный случай общаго уравненія (42).

Задача разысканія промежуточнаго интеграла (40) для даннаго уравненія (39) приводится къ вычисленію соотвѣствующихъ ему n функцій u_1, u_2, \dots, u_n .

15. Рѣшимъ послѣднюю задачу для случая, когда данное уравненіе (39) является линейнымъ относительно вторыхъ частныхъ производныхъ слѣдующаго вида

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n A_{si} p_{si} + E = 0, \quad (43)$$

гдѣ всѣ коэффициенты уравненія A_{si} и E представляютъ функціи переменныхъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n.$$

При этомъ условимся, что, при взаимномъ перемѣщеніи значковъ s и i у коэффициентовъ, величина послѣднихъ остается безъ измѣненія, т. е.

$$A_{si} = A_{is}. \quad (44)$$

Такъ какъ величина второй производной p_{si} не должна зависѣть отъ порядка дифференцированія, то имѣютъ мѣсто также равенства

$$p_{si} = p_{is}.$$

Поэтому коэффициенты уравненія (43) при вторыхъ производныхъ p_{si} удваиваются.

Кромѣ того будемъ разматривать промежуточные интегралы (40) въ предположеніи, что функціи u_1, u_2, \dots, u_{n-1} не зависятъ отъ частныхъ производныхъ перваго порядка p_s .

Обозначимъ коэффициенты разложенія определителя первой части уравненія (42) по элементамъ его перваго столбца соотвѣтственно черезъ

$$R_1, R_2, \dots, R_n.$$

Въ такомъ случаѣ уравненіе (42) можетъ быть написано слѣдующимъ образомъ:

$$\sum_{r=1}^n R_r D_r u_n = 0.$$

Если, для краткости и простоты письма, обозначимъ функцію u_n черезъ u , т. е. положимъ, что

$$u_n \equiv u, \quad (45)$$

то послѣднее уравненіе переписется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{r=1}^n R_r D_r u = 0,$$

или (измѣняя обозначеніе значка суммированія r на i)

$$\sum_{i=1}^n R_i \left(u'_i + \sum_{s=1}^n u_s p_{si} \right) = 0, \quad (46)$$

гдѣ, стало-быть, мы имѣемъ, согласно съ нашими прежними обозначеніями, что

$$u'_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} p_v, \quad u_s \equiv \frac{\partial u}{\partial p_s},$$

для всѣхъ значеній i и s , отъ 1 до n .

На основаніи введеннаго опредѣленія промежуточнаго интеграла очевидно, что уравненіе (46) можетъ отличаться отъ даннаго уравненія (43) только на нѣкоторый множитель, который мы обозначимъ черезъ λ .

Поэтому должны существовать слѣдующія равенства:

$$\sum_{i=1}^n R_i u'_i = E\lambda, \quad (47)$$

$$R_i u_i = A_{ii} \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (48)$$

$$R_\mu u_r + R_r u_\mu = 2A_{\mu r} \lambda, \quad (49)$$

причемъ μ и r принимаютъ всѣвозможныя различныя значенія отъ 1 до n .

16. Переходимъ къ составленію уравненій для опредѣленія сначала функціи u , путемъ исключенія изъ формулъ (47) и (49) выраженій всѣхъ R_i , которыя даются формулами (48) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} R_i &= \frac{A_{ii}}{u_i} \lambda, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Результатъ послѣдней подстановки въ уравненія (47) и (49) даетъ соотвѣтственно формулы:

$$\sum_{i=1}^n \frac{A_{ii} u'_i}{u_i} = E, \quad (51)$$

$$\frac{A_{\mu\mu} u_r}{u_\mu} + \frac{A_{rr} u_\mu}{u_r} = 2A_{\mu r}, \quad (52)$$

причемъ послѣднія имѣютъ мѣсто для всѣхъ различныхъ значеній указателей μ и r , отъ 1 до n .

Равенства (52) напишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$A_{rr} u_\mu^2 - 2A_{\mu r} u_\mu u_r + A_{\mu\mu} u_r^2 = 0, \quad (53)$$

Число послѣднихъ равенствъ равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Предполо-

живъ, что $A_{nn} < 0$, отдѣлимъ изъ системы (53) $n-1$ равенствъ, соответствующихъ первымъ $n-1$ значеніямъ указателя μ , отъ 1 до $n-1$, и значенію указателя r , равнаго n . Рѣшимъ эти уравненія относительно u_1, u_2, \dots, u_{n-1} . Получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} u_\mu &= \lambda_{12}^{(\mu)} u_n, \\ \mu &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

гдѣ введено обозначеніе

$$\lambda_{12}^{(\mu)} = \frac{A_{\mu n} \pm \sqrt{A_{\mu n}^2 - A_{\mu\mu} A_{nn}}}{A_{nn}}, \quad (55)$$

причемъ верхній индексъ (μ), при λ , соответствуетъ коэффициентамъ разрѣшенныхъ уравненій, а нижніе значки 1 и 2 отвѣчаютъ верхнему и нижнему, положительному и отрицательному, знакамъ при радикалѣ.

Остальныя уравненія системы (53) соответствуютъ значеніямъ значковъ:

$$r = 1, 2, \dots, n-1; \quad \mu = 1, 2, \dots, n-1.$$

Подставляемъ въ эти уравненія выраженія (54) и получающіеся изъ нихъ, замѣной μ на r , при значеніи

$$\lambda_{12}^{(r)} = \frac{A_{rn} \pm \sqrt{A_{rn}^2 - A_{rr} A_{nn}}}{A_{nn}}, \quad r < n. \quad (56)$$

Полученный результатъ подстановки выражается формулами:

$$A_{rr} \left[\lambda_{12}^{(r)} \right]^2 - 2A_{\mu r} \lambda_{12}^{(\mu)} \lambda_{12}^{(r)} + A_{\mu\mu} \left[\lambda_{12}^{(r)} \right]^2 = 0. \quad (57)$$

Такъ какъ выраженія (55) и (56) должны удовлетворять уравненіямъ, изъ которыхъ они получились, то мы имѣемъ тождества:

$$A_{nn} \left[\lambda_{12}^{(\mu)} \right]^2 - 2A_{\mu n} \lambda_{12}^{(\mu)} + A_{\mu\mu} = 0,$$

$$A_{nn} \left[\lambda_{12}^{(r)} \right]^2 - 2A_{rn} \lambda_{12}^{(r)} + A_{rr} = 0.$$

Подставимъ изъ послѣднихъ равенствъ выраженія $A_{\mu\mu}$

и A_{vv} въ равенства (57). По сокращеніи, послѣднее становится:

$$A_{pp} \lambda_{12}^{(p)} \lambda_{12}^{(r)} - A_{\mu p} \lambda_{12}^{(r)} - A_{rp} \lambda_{12}^{(p)} + A_{\mu r} = 0.$$

На основаніи формулъ (55) и (56) это равенство преобразовывается въ нижеслѣдующее:

$$A_{\mu p} A_{rp} - A_{r\mu} A_{pp} = \sqrt{A_{\mu p}^2 - A_{\mu\mu} A_{pp}} \cdot \sqrt{A_{rp}^2 - A_{rr} A_{pp}}.$$

Возвышая обѣ части послѣдняго равенства въ квадратъ, по приведеніи подобныхъ членовъ, представляемъ полученное тождество при помощи определителя (имѣя въ виду, что коэффициенты A не мѣняются своего значенія отъ измѣненія порядка значковъ).

$$\begin{vmatrix} A_{\mu\mu} & A_{r\mu} & A_{p\mu} \\ A_{\mu r} & A_{rr} & A_{pr} \\ A_{\mu p} & A_{rp} & A_{pp} \end{vmatrix} = 0, \quad (58)$$

Согласно сказанному, число написанныхъ условій равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, и они соотвѣтствуютъ различнымъ значеніямъ ν и μ , отъ 1 до $n-1$.

Полученныя формулы (58) интересны въ томъ отношеніи, что налагаютъ алгебраическія зависимости на коэффициенты разсматриваемаго линейнаго уравненія (43).

Въ этомъ состоитъ существенное отличіе разсматриваемыхъ уравненій, съ числомъ независимыхъ переменныхъ больше двухъ, такъ какъ для Монжъ-Амперовскаго уравненія указанныхъ ограниченій не существуетъ.

Для случая трехъ независимыхъ переменныхъ, формулы (58) приводятся всего къ одному условію, которое было найдено еще Эйлеромъ¹⁵⁾.

Выведенныя условія показываютъ, что квадратичная форма n переменныхъ величинъ съ коэффициентами даннаго дифференціального уравненія (43) разлагается въ произведеніе двухъ линейныхъ множителей.

Эта квадратичная форма называется сопряженной съ даннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ (43).

17. Полученная система n уравненій (51) и (54) служитъ для опредѣленія функціи u .

¹⁵⁾ L. Euleri. — Institutiones Cal. Int. Vol. III, p. 359. Problema 87.

При этомъ уравненіе (51) преобразовывается слѣдующимъ образомъ. Умножаемъ обѣ части его на u_n .

Подставляя, затѣмъ, въ полученное равенство выраженія (54) всѣхъ производныхъ u_μ , преобразовываемъ рассматриваемое уравненіе къ линейному виду

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{21}^{(i)} u_i' - \frac{E}{A_{nn}} u_n = 0, \quad (59)$$

причемъ порядокъ нижнихъ указателей при $\lambda_{21}^{(i)}$ показываетъ на измѣненіе порядка знаковъ, сравнительно съ формулой (55), для $\mu = i$.

Кромѣ того очевидно, что $\lambda_{21}^{(n)} = 1$.

Возвращаясь къ первоначальному обозначенію функции u_n (вмѣсто u), напишемъ уравненія (54) и (59) въ нижеслѣдующемъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial p_\mu} - \lambda_{12}^{(\mu)} \frac{\partial u_n}{\partial p_n} &= 0, \\ \mu &= 1, 2, \dots, n-1, \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{21}^{(i)} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u_n}{\partial z} \right) - \frac{E}{A_{nn}} \frac{\partial u_n}{\partial p_n} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

гдѣ $\lambda_{21}^{(n)} = 1$.

Полученныя уравненія (60) опредѣляютъ двѣ различныхъ системы уравненій, которыя соотвѣтствуютъ верхнимъ и нижнимъ знакамъ, въ выраженіяхъ коэффициентовъ λ .

Каждая система представляетъ совокупность n уравненій съ частными производными функции u_n , по $2n+1$ независимымъ переменнымъ величинамъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Поэтому каждая изъ системъ можетъ имѣть отъ $n+1$ до одного интеграла, въ зависимости отъ различныхъ условий интегрируемости.

Наконецъ, если уравненія (60) оказываются несовмѣстными, то изслѣдуемые промежуточные интегралы не существуютъ для даннаго линейнаго уравненія (43).

Однако условія совмѣстности уравненій (60) являются только необходимыми для интегрируемости уравненія (43), ибо задача приводится теперь къ рѣшенію вопроса о существованіи и о разысканіи остальныхъ функций u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , фигурирующихъ въ рассматриваемомъ промежуточномъ интегралѣ (40).

18. Возвращаемся съ этой цѣлью къ уравненіямъ (50). Подставляемъ въ нихъ выраженія u_i опредѣяемыя формулами (54). Возвращаясь къ первоначальному обозначенію (45) функціи u черезъ u_n , получаемъ, что

$$\left. \begin{aligned} R_i &= \frac{A_{nn} \lambda}{u_{nn}} \lambda_{21}^{(i)}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Съ другой стороны, коэффициенты R_i , согласно съ ихъ опредѣленіемъ, которое было введено выше, представляютъ коэффициенты разложенія опредѣлителя, фигурирующаго въ первой части уравненія (42), по его элементамъ перваго столбца.

Поэтому, на основаніи извѣстныхъ свойствъ опредѣлителей, сумма произведеній R_i на соотвѣтствующіе элементы параллельныхъ столбцовъ того же опредѣлителя равна нулю.

Воспользовавшись этимъ свойствомъ опредѣлителей, помножимъ обѣ части каждаго равенства (61) на соотвѣтствующіе элементы какого либо $k+1$ -аго столбца разсматриваемаго опредѣлителя и сложимъ всѣ полученныя равенства.

Въ первой части получается тождественный нуль; а во второй части отбрасывая общій множитель $\frac{A_{nn} \lambda}{u_{nn}}$ получаемъ формулы:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{21}^{(i)} D_i u_k = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1,$$

или (такъ какъ u_k зависятъ только отъ x_1, x_2, \dots, x_n, z)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{21}^{(i)} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u_k}{\partial z} \right) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1,$$

Каждое изъ полученныхъ равенствъ заключаетъ частныя производныя перваго порядка одной только неизвѣстной функціи u_k . Но, такъ какъ коэффициенты этихъ производныхъ одни и тѣ же, ибо не зависятъ отъ значка k , то, стало бытъ, всѣ искомыя функціи u_k являются интегралами одного и того же уравненія съ частными производными одной неизвѣстной функціи, которую обозначимъ черезъ v :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{21}^{(i)} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \lambda_{21}^{(i)} p_i \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (62)$$

гдѣ

$$\lambda_{21}^{(n)} \equiv 1.$$

Послѣднее уравненіе, должно имѣть n различныхъ интеграловъ.

Поэтому, достаточное условіе для существованія изслѣдуемаго промежуточнаго интеграла, заключается только въ томъ, чтобы уравненіе (62) допускало интегралы, независящіе отъ переменныхъ

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \quad (63)$$

которыя вообще могутъ входить въ коэффициенты разсматриваемаго линейнаго уравненія (43).

Наконецъ, выведенное уравненіе (62) обладаетъ еще однимъ замѣчательнымъ свойствомъ.

Первая его часть совпадаетъ съ $n+1$ первыми членами послѣдняго уравненія (60).

Такимъ образомъ, для разысканія разсматриваемаго промежуточнаго интеграла, мы имѣемъ право ограничиться интегрированіемъ только системы совмѣстныхъ уравненій (60).

Всякій разъ, когда послѣдняя имѣетъ n различныхъ интеграловъ, изъ которыхъ $n-1$ интеграловъ не заключаютъ переменныхъ (63), эти интегралы образуютъ одинъ искомый промежуточный интеграль.

Въ наиболѣе благопріятномъ случаѣ, система уравненій (60) можетъ имѣть $n+1$ различныхъ интеграловъ. Если два изъ нихъ заключаютъ переменныя (63), а остальные $n-1$ интеграловъ не содержатъ этихъ переменныхъ, то интегрируемое уравненіе (43) имѣетъ два промежуточныхъ интеграла.

Отмѣтимъ особо одинъ частный случай, когда коэффициенты A_{si} интегрируемаго уравненія (43) не заключаютъ переменныхъ (63). Въ этомъ случаѣ уравненіе (62), всегда имѣетъ $n-1$ требуемыхъ различныхъ интеграловъ, такъ какъ условіе совмѣстности уравненій (60) вводитъ дополнительное равенство:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Слѣдовательно, если каждая система совмѣстныхъ уравненій имѣетъ одинъ интеграль, съ переменными (63), то уравненіе (43) имѣетъ два промежуточныхъ интеграла.

Обѣ системы линейныхъ уравненій (60) обладаютъ замѣчательными свойствами, представляющими обобщеніе извѣстныхъ свойствъ, соотвѣтствующихъ уравненіямъ второго порядка одной неизвѣстной функціи двухъ независимыхъ переменныхъ величинъ.

Мы не станемъ останавливаться здѣсь на разсмотрѣніи указанныхъ вопросовъ.

19. Vivanti въ упомянутомъ выше своемъ мемуарѣ ограничивается разсмотрѣніемъ случая одной неизвѣстной функціи отъ трехъ независимыхъ переменныхъ величинъ.

Уравненія (68) и (69), которыя онъ вводитъ въ § 7 своего сочиненія, являются частными случаями, для $n = 3$, обѣихъ системъ (60), выведенныхъ въ настоящемъ изслѣдованіи.

Для примѣра приложимъ изложенную теорію къ линейному уравненію съ частными производными второго порядка одной неизвѣстной функціи четырехъ независимыхъ переменныхъ величинъ. Напишемъ его слѣдующимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} &Ap_{11} + A_1p_{22} + A_2p_{33} + A_3p_{44} + \\ &+ 2Bp_{34} + 2B_1p_{24} + 2B_2p_{23} + 2B_3p_{14} + \\ &+ 2B_4p_{13} + 2B_5p_{12} + F = 0. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Чтобы данное уравненіе (64) допускало изслѣдуемые промежуточные интегралы, коэффициенты его должны, прежде всего, удовлетворять алгебраическимъ условіямъ, которые выражаются формулами (58). Число этихъ условій, въ настоящемъ случаѣ, равняется тремъ.

Эти условія легко написать, такъ какъ они соотвѣтствуютъ случаю, когда поверхности второго порядка, въ системѣ однородныхъ координатъ, опредѣляемая при помощи сопряженной съ даннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ квадратичной формы, распадается на двѣ плоскости.

Послѣднее условіе представляется тремя слѣдующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} A & B_5 & B_4 \\ B_5 & A_1 & B_2 \\ B_4 & B_2 & A_2 \end{array} \right| &= 0, & \left| \begin{array}{ccc} A & B_4 & B_3 \\ B_4 & A_2 & B \\ B_3 & B & A_3 \end{array} \right| &= 0, \\ & & \left| \begin{array}{ccc} A_1 & B_2 & B_1 \\ B_2 & A_2 & B \\ B_1 & B & A_3 \end{array} \right| &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Что касается системы линейныхъ уравненій (60), то послѣдняя можетъ быть написана слѣдующимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial p_2} - \lambda_{12} \frac{\partial u}{\partial p_1} &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial p_3} - \mu_{12} \frac{\partial u}{\partial p_1} &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial p_4} - \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial p_1} &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_{21} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \mu_{21} \frac{\partial u}{\partial x_3} + \nu_{21} \frac{\partial u}{\partial x_4} + \\
 + (p_1 + \lambda_{21} p_2 + \mu_{21} p_3 + \nu_{21} p_4) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{F}{A} \frac{\partial u}{\partial p_1} &= 0,
 \end{aligned} \right\} (66)$$

причемъ коэффициенты этихъ уравненій имѣютъ значенія:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_{12} &= \frac{B_5 \pm \sqrt{B_5^2 - AA_1}}{A}, \\
 \mu_{12} &= \frac{B_4 \pm \sqrt{B_4^2 - AA_2}}{A}, \\
 \nu_{12} &= \frac{B_3 \pm \sqrt{B_3^2 - AA_3}}{A}.
 \end{aligned} \right\} (67)$$

Если предположить, что данное уравненіе (64) имѣетъ постоянные коэффициенты, то Аналитическая Геометрія можетъ способствовать составленію неограниченнаго числа линейныхъ уравненій вида (64), которыя легко могутъ быть проинтегрированы.

Возьмемъ для примѣра, слѣдующее линейное уравненіе второго порядка, съ четырьмя независимыми переменными:

$$\left. \begin{aligned}
 p_{11} + 8p_{22} + p_{33} + p_{44} + \\
 + 2p_{34} + 6p_{24} + 6p_{23} + \\
 + 2p_{14} + 2p_{13} + 6p_{12} + m &= 0,
 \end{aligned} \right\} (68)$$

гдѣ m представляетъ постоянную величину.

Легко убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ, что всѣ три необходимыя условія (65) удовлетворяются тождественно.

Что касается формулъ (67), то онѣ, для нашего уравненія (68), опредѣляютъ слѣдующія значенія:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2,$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \nu_1 = \nu_2 = 1.$$

Поэтому первая система (66) принимает видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial p_2} - 4 \frac{\partial u}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial p_3} - \frac{\partial u}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial p_4} - \frac{\partial u}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_4} +$$

$$+ (p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4) \frac{\partial u}{\partial z} - m \frac{\partial u}{\partial p_1} = 0.$$

Вторая же система отличается отъ написанной только двумя уравненіями, первымъ и четвертымъ, которыя должны быть замѣнены соотвѣтственно слѣдующими уравненіями:

$$\frac{\partial u}{\partial p_2} - 2 \frac{\partial u}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + 4 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_4} +$$

$$+ (p_1 + 4p_2 + p_3 + p_4) \frac{\partial u}{\partial z} - m \frac{\partial u}{\partial p_1} = 0.$$

Условія совмѣстности уравненій каждой изъ двухъ полученныхъ системъ вводятъ по пятому уравненію въ каждую систему, а именно:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Въ такомъ случаѣ система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, эквивалентная первой полученной системѣ, становится

$$dp_1 = -4dp_2 - dp_3 - dp_4 - m dx_1$$

$$dx_2 = 2dx_1, \quad dx_3 = dx_1, \quad dx_4 = dx_1.$$

Четыре интеграла послѣдней системы опредѣляются формулами:

$$p_1 + 4p_2 + p_3 + p_4 + mx_1 = C_1,$$

$$x_2 - 2x_1 = C_2, \quad x_3 - x_1 = C_3, \quad x_4 - x_1 = C_4.$$

Поэтому первый промежуточный интегралъ даннаго дифференціального уравненія съ частными производными второго порядка (68) напишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$p_1 + 4p_2 + p_3 + p_4 + mx_1 = f_1' (x_2 - 2x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1),$$

гдѣ f_1' обозначаетъ частную производную по первому аргументу отъ произвольной функціи f трехъ входящихъ въ нее переменныхъ аргументовъ. Мы вводимъ такое обозначеніе произвольной функціи для удобства послѣдующихъ вычисленій.

Прилагая аналогичныя вычисленія ко второй вспомогательной системѣ совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка функціи u , находимъ второй промежуточный интегралъ, который на прежнихъ основаніяхъ напишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4 + mx_1 = \varphi_1' (x_2 - 4x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1),$$

гдѣ φ_1' обозначаетъ частную производную по первому аргументу произвольной функціи φ трехъ входящихъ въ нее переменныхъ аргументовъ.

Само собою разумѣется, что оба промежуточныхъ интеграла представляютъ систему двухъ совмѣстныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка искомой функціи z .

Разрѣшая эти интегралы относительно p_1 и p_2 , приходимъ къ Якобіевской системѣ двухъ уравненій, которыя напишемъ сокращенно слѣдующимъ образомъ:

$$p_1 + p_3 + p_4 + mx_1 = 2\varphi_1' - f_1',$$

$$p_2 = \frac{1}{2} (f_1' - \varphi_1').$$

Соотвѣтствующая система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ становится

$$dx_3 = dx_1, \quad dx_4 = dx_1,$$

$$dz = (2\varphi_1' - f_1' - mx_1) dx_1 + \frac{1}{2} (f_1' - \varphi_1') dx_2.$$

Первыя два уравненія даютъ немедленно интегралы

$$x_3 - x_1 = \alpha, \quad x_4 - x_1 = \beta,$$

гдѣ α и β обозначаютъ произвольныя постоянныя величины.

Поэтому, въ силу найденныхъ двухъ интеграловъ, третье уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ можетъ быть написано слѣдующимъ образомъ:

$$d(2z) = -2mx_1 dx_1 + f_1'(x_2 - 2x_1, \alpha, \beta) d(x_2 - 2x_1) - \\ - \varphi_1'(x_2 - 4x_1, \alpha, \beta) d(x_2 - 4x_1).$$

Интеграль послѣдняго уравненія становится

$$2z = -mx_1^2 + f(x_2 - 2x_1, \alpha, \beta) - \varphi(x_2 - 4x_1, \alpha, \beta) + \gamma,$$

гдѣ γ обозначаетъ произвольную постоянную величину.

Поэтому искомый общій интеграль даннаго дифференціального уравненія (68) выражается слѣдующимъ образомъ, при помощи найденныхъ интеграловъ,

$$\left. \begin{aligned} 2z + mx_1^2 = f(x_2 - 2x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1) - \\ - \varphi(x_2 - 4x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1) + \psi(x_3 - x_1, x_4 - x_1), \end{aligned} \right\} (69)$$

гдѣ f , φ и ψ обозначаютъ три произвольныя функціи.

Легко убѣдиться, при помощи непосредственныхъ вычисленій, что результатъ исключенія всѣхъ трехъ произвольныхъ функцій, изъ полученнаго уравненія (69) и его производныхъ первыхъ двухъ порядковъ, даетъ одно только данное уравненіе (68).

Поэтому, дѣйствительно, формула (69) представляетъ искомый общій интеграль.

20. Предыдущее изложеніе ограничено изученіемъ интегрированія исключительно линейныхъ уравненій.

Но изложенная теорія можетъ быть распространена и на обобщенныя Монжъ-Амперовскія уравненія n -ой степени съ частными производными второго порядка одной неизвѣстной функціи n независимыхъ переменныхъ.

Исходнымъ пунктомъ этого изслѣдованія долженъ послужить указанный выше общій видъ такихъ уравненій (42).

21. Возвращаемся теперь опять къ уравненіямъ съ двумя независимыми переменными, чтобы изложить рядъ соображеній относительно изслѣдованій Дарбу. Внесенное имъ новое понятіе, въ рассматриваемую область интегрированія уравненій съ частными производными второго порядка, касается условій совмѣстности послѣднихъ уравненій.

Возьмемъ систему двухъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} r + f(x, y, z, p, q, s) &= 0, \\ t + \varphi(x, y, z, p, q, s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Согласно съ терминологіей С. Ли послѣдняя система уравненій находится въ инволюціи, если функціи f и φ удовлетворяютъ тождественно слѣдующимъ условіямъ: ¹⁶⁾

$$\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 1, \quad (D_y f) = \frac{\partial f}{\partial s} (D_x \varphi), \quad (71)$$

гдѣ символы $D_y f$, $D_x \varphi$ обозначаютъ соотвѣтственно полныя частныя производныя функцій f и φ , взятые соотвѣтственно по независимымъ переменнымъ x и y , какъ непосредственно такъ и черезъ посредство переменныхъ величинъ z , p и q ; скобки же, въ которыя заключены эти производныя, указываютъ на результатъ исключенія изъ нихъ величинъ вторыхъ производныхъ r и t , при помощи данныхъ уравненій (70).

Условія (71) выводятся, какъ извѣстно, изъ предположенія, что четыре производныхъ уравненій перваго порядка, полученныхъ дифференцированиемъ уравненій (70) по независимымъ переменнымъ x и y не опредѣляютъ величины четырехъ частныхъ производныхъ функціи z третьяго порядка, т. е.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}. \quad (72)$$

Составляемъ указанныя производныя уравненія, которыя напишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + D_x f &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + D_y f &= 0, \\ \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + D_x \varphi &= 0, \\ \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + D_y \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

гдѣ символы $D_x f$ и $D_y \varphi$ имѣютъ значеніе аналогичное указаннымъ выше обозначеніямъ.

¹⁶⁾ E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. T. II. Paris 1898 p. 48.

Принимая во вниманіе тождества

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y},$$

напишемъ уравненія (73), при помощи сокращенныхъ обозначеній слѣдующимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} r_x + f_s r_y + D_x f &= 0, \\ s_x + f_s s_y + D_y f &= 0, \\ s_y + \varphi_s s_x + D_x \varphi &= 0, \\ t_y + \varphi_s t_x + D_y \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} (74)$$

гдѣ нижніе значки обозначаютъ переменныя величины, по которымъ берутся частныя производныя отъ соотвѣтствующихъ выраженій, при которыхъ эти значки находятся.

Легко видѣть, что въ силу введенныхъ тождествъ (71), третье уравненіе (74) оказывается алгебраическимъ слѣдствіемъ второго уравненія (74).

Такимъ образомъ система уравненій (74) приводится къ системѣ трехъ независимыхъ между собой уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} + f_s \frac{\partial r}{\partial y} + D_x f &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial x} + f_s \frac{\partial s}{\partial y} + D_y f &= 0, \\ \frac{\partial t}{\partial x} + f_s \frac{\partial t}{\partial y} + f_s D_y \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} (75)$$

Въ случаѣ условій инволюціи С. Ли, интегрированіе уравненій (70) сводится на интегрированіе системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Это доказательство обычно достигается при помощи преобразованія Ампера независимыхъ переменныхъ величинъ.

Однако форма выведенныхъ уравненій (75) дѣлаетъ этотъ результатъ очевиднымъ, не требуя для его утвержденія какого либо доказательства.

Въ самомъ дѣлѣ, формулы (75) представляютъ уравненія типа Шарпи (Якоби). При этомъ система уравненій Шарпи

немедленно получается отъ присоединенія къ формуламъ (75) слѣдующихъ очевидныхъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} + f_s \frac{\partial q}{\partial y} - s - f_s t &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} + f_s \frac{\partial p}{\partial y} - r - f_s s &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x} + f_s \frac{\partial z}{\partial y} - p - f_s q &= 0. \end{aligned} \right\} (76)$$

Система обыкновенныхъ уравненій, соответствующая системѣ уравненій Шарпи (75)—(76) имѣетъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{dy}{f_s} = \frac{dz}{p + f_s q} = \frac{dp}{r + f_s s} = \frac{dq}{s + f_s t} = \\ &= \frac{dr}{-D_x f} = \frac{ds}{-D_y f} = \frac{dt}{-f_s D_y \varphi}. \end{aligned} \right\} (77)$$

Какъ хорошо извѣстно изъ теории уравненій Шарпи, написанная система обыкновенныхъ уравненій (77) имѣетъ въ числѣ своихъ интеграловъ (частныхъ) также и данныя уравненія (70). Такъ какъ послѣднія опредѣляютъ значенія r и t въ видѣ функцій остальныхъ переменныхъ величинъ, то звенья системы (77), заключающія dr и dt , могутъ быть отброшены. Исключивъ изъ остальныхъ уравненій (77) значенія r и t , опредѣляемые данными уравненіями (70), мы получаемъ систему, которая и рассматривается для интегрированія уравненій (70).

О. Л. Струве.

ФЕДОРЪ АЛЕКСАНДРОВИЧЪ БРЕДИХИНЪ.

(Къ столѣтію со дня его рожденія).

Восьмого декабря этого, 1931-го года, по новому стилю, исполнится сто лѣтъ со дня рожденія одного изъ величайшихъ русскихъ ученыхъ — Федора Александровича Бредихина. Заслуги Бредихина передъ астрономіей были оцѣнены еще при его жизни, но пожалуй только теперь, черезъ 70 лѣтъ послѣ появленія его магистерской диссертациі „О хвостахъ кометъ“, мы можемъ вполне оцѣнить весь размахъ его творчества.

Въ работахъ Бредихина больше всего поражаетъ смѣлость мысли: онъ не останавливается ни передъ какими затрудненіями. Напротивъ, всѣ мельчайшія детали интересовали его, и изъ кажущагося хаоса необъяснимыхъ явленій онъ воздвигъ стройную систему, носящую теперь названіе „Бредихинской теоріи кометныхъ хвостовъ“.

Интересно отмѣтить, что громаднѣйшій успѣхъ работъ Бредихина въ области изученія кометъ отразился на всемъ дальнѣйшемъ развитіи русской астрономіи. Изученіе кометъ стало какъ-бы привилегіей русскихъ ученыхъ. Достаточно отмѣтить, что большинство работъ молодыхъ русскихъ астрономовъ — начиная съ дипломныхъ статей при университетахъ и кончая крупными мемуарами на степень доктора астрономіи — такъ или иначе занимались кометной астрономіей. Еще и теперь вліяніе Ф. А. Бредихина сказывается въ томъ, что большинство печатныхъ работъ о кометахъ принадлежитъ перу русскихъ авторовъ. Въ Россіи слѣдуетъ отмѣтить въ особенности работы С. В. Орлова, одного изъ астрофизиковъ новаго Московскаго Астрофизическаго Института *). Всего только три года тому назадъ въ трудахъ этого учрежденія появился мемуаръ Орлова подъ заглавіемъ: „Механическая теорія кометныхъ формъ“. Въ предисловіи ав-

*) Астрофизическій Институтъ былъ основанъ въ 1921 году благодаря усиліямъ проф. В. В. Стратонова.

торъ говоритъ между прочимъ: „Громадный трудъ, выполненный Э. А. Бредихинымъ и его учениками, требуетъ продолженія по выработанному систематическому плану и дополнительныхъ вычисленій, открывая собою широкій путь для дальнѣйшихъ изслѣдованій“. Недостатокъ мѣста и времени не позволяетъ мнѣ остановиться болѣе подробно на работахъ С. В. Орлова, А. Я. Орлова, Покровскаго и многихъ другихъ выдающихся современныхъ русскихъ астрономовъ. Я не могу, однако, не отмѣтить еще одного духовнаго ученика Бредихина, а именно Н. Ф. Бобровникова, профессора астрономіи при университетѣ въ Delaware, Ohio, U. S. A. Бобровниковъ въ значительной степени расширилъ теорію Бредихина, примѣнивъ къ изученію кометъ новѣйшіе результаты теоріи квантовъ въ физикѣ. Вотъ что Бобровниковъ пишетъ о настоящемъ видѣ кометной астрономіи *) „Физическая теорія кометъ находится теперь въ состояніи измѣненія, какъ почти всякая другая область астрономіи. Она покоится на основныхъ свойствахъ матеріи и лучистой энергіи и слѣдовательно зависитъ отъ дальнѣйшаго развитія физики. Труды Бредихина лучше всего могутъ быть оцѣнены въ свѣтѣ тѣхъ представленій о кометахъ, которыя были весьма развиты въ его время. Многіе изслѣдователи того времени считали кометные хвосты чѣмъ-то нематеріальнымъ, оптическимъ быть можетъ явленіемъ или «отрицательной тѣнью» (Сэръ Джонъ Гершель). Бредихинъ показалъ, что кометные хвосты состоятъ изъ вещества двигающагося согласно съ основными принципами механики. Онъ логически развилъ идеи о кометахъ Бесселя и классифицировалъ громадное количество отдѣльныхъ явленій...“

Трудно въ условіяхъ зарубежья писать обзоръ о жизни и о научной работѣ русскаго ученаго. Когда профессоръ Николай Николаевичъ Салтыковъ предложилъ мнѣ составить настоящій обзоръ для чествованія въ день столѣтія со дня рожденія Бредихина, я не отдавалъ себѣ отчета въ томъ, насколько трудно собрать свѣдѣнія о чловѣкѣ умершемъ сравнительно не такъ давно — въ 1904 г. Въ различныхъ заграничныхъ журналахъ этого послѣдняго и слѣдующаго, 1905 г. появились коротенькія замѣтки о смерти „des berühmten russischen Astronomen Th. Bredichin“. Директоръ Пулковской Обсерваторіи, О. А. Баклундъ напечаталъ въ германскомъ журналѣ „Astronomische Nachrichten“ короткую статью о жизни Бредихина. Большинство же другихъ изданій просто перепечатало этотъ некрологъ. Благодаря любезности директора Морской Обсерваторіи въ Washington'ѣ мнѣ удалось получить

*) Publications of the Astronomical Society of the Pacific 40, 188, 1928. (переводъ съ англійскаго).

экземпляръ довольно рѣдкаго заграницей „Русскаго Астрономическаго Календаря на 1905 годъ“, издаваемаго Кружкомъ Любителей физики и астрономіи въ Нижнемъ Новгородѣ. Вотъ въ этомъ то календарѣ я и нашель весьма цѣнную біографію Бредихина, составленную однимъ изъ его наиболѣе выдающихся учениковъ, старшимъ астрономомъ Пулковской Обсерваторіи С. К. Костинскимъ. Тамъ же напечатаны статьи К. Покровскаго о кометной теоріи Бредихина и о его теоріи метеорныхъ потоковъ, а также рѣчь, произнесенная на похоронахъ профессоромъ Московскаго Университета В. К. Цераскимъ. Другая весьма обстоятельная біографія Бредихина была опубликована его ученикомъ R. Jacgermann'омъ въ журналѣ „Naturwissenschaftliche Rundschau“ за 1904 годъ. Въ дальнѣйшемъ я буду свободно пользоваться этими матеріалами.

Ө. А. Бредихинъ родился 26 ноября 1831 года (по старому стилю) въ городѣ Николаевѣ, Херсонской губерніи. Онъ происходилъ изъ стараго дворянскаго рода и предки его были стольниками въ Москвѣ, и за заслуги были жалованы въ 1613 году и позже, помѣстьями въ Курской, Костромской и Херсонской губерніяхъ. Прадѣдъ Өедора Александровича былъ капитанъ-поручикомъ Преображенскаго полка при Екатеринѣ II. Дѣдъ его служилъ въ конной гвардіи, а отецъ служилъ въ Черноморскомъ флотѣ и между прочимъ участвовалъ при взятіи турецкихъ крѣпостей Тульчи и Силистріи, во время войны 1827 года. Мать Өедора Александровича была урожденная Рогуля сестра адмирала Рогули, второго коменданта Севастополя во время его осады.

Первоначальное обученіе Бредихинъ получилъ въ имѣніи родителей въ Херсонскомъ уѣздѣ подъ руководствомъ отставнаго директора Херсонской гимназіи, кандидата математическихъ наукъ З. С. Соколовскаго. Затѣмъ въ 1845 г. Бредихинъ поступилъ въ благородный пансіонъ при Ришельевскомъ Лицеѣ въ Одессѣ, а въ 1851 году онъ поступилъ на физико-математическій факультетъ Московскаго Университета.

Будучи студентомъ въ Москвѣ Өедоръ Александровичъ занимался главнымъ образомъ физикой, а въ послѣдніе годы и астрономіей, подъ руководствомъ профессора Драшусова. Въ это время онъ впервые началъ посѣщать астрономическую обсерваторію на Прѣснѣ, въ которой онъ провелъ больше тридцати лѣтъ. Въ 1857 году Өедоръ Александровичъ былъ назначенъ исполняющимъ должность адъюнкта по кафедрѣ астрономіи; въ 1862 году онъ былъ удостоенъ степени магистра за диссертацию „О хвостахъ кометъ“. Первые печатныя статьи Бредихина появились въ 1861 году въ журналѣ „Astronomische Nachrichten“ подъ заглавіемъ „Quel-

ques mots sur les queues des comètes“, „Sur la direction des comètes de 1844 III et de 1853 III“ и „Berichtigung eines Fehlers in Bessel's Abhandlung über Cometenschweife“. Мы видимъ, что уже въ самыхъ первыхъ своихъ работахъ Бредихинъ посвящаетъ свое вниманіе строенію кометныхъ хвостовъ. Можно думать, что появленіе въ 1858 году блестящей кометы Донати натолкнуло его именно на этотъ путь. Странная форма кометнаго хвоста не могла не заинтриговать вниманіе молодого ученаго. Уже давно было извѣстно, что „кометные лучи бѣгутъ предъ солнечными лучами“. Сенека говоритъ, что „Comae radios solis effugiunt“, а китайскій астрономъ Ма-туанъ-линъ высказалъ законъ: „у кометы, которая находится къ востоку отъ Солнца, хвостъ по отношенію къ головѣ направленъ тоже къ востоку; если же комета является на западѣ отъ Солнца, то и хвостъ направленъ къ западу“. Однако, хотя общія характеристики кометныхъ хвостовъ были хорошо извѣстны въ началѣ девятнадцатаго вѣка, въ деталяхъ отдѣльныя кометы сильно отличаются другъ отъ друга: есть кометы съ болѣе или менѣе прямыми хвостами, направленными почти въ точности по радіусу-вектору отъ солнца; въ другихъ — хвостъ расходится вѣеромъ отъ головы; наконецъ въ третьихъ — хвосты болѣе или менѣе изогнуты, напоминая по своему строенію дымъ, исходящій изъ трубы движущагося парохода.

Истолковать всѣ эти разнообразныя явленія кометныхъ хвостовъ является дѣломъ далеко не простымъ. Дѣло въ томъ, что мы наблюдаемъ явленія въ проекціи на небесную сферу, тогда какъ на самомъ дѣлѣ они происходятъ въ пространствѣ трехъ измѣреній. Кромѣ того, въ этомъ пространствѣ все движется. Наблюдатель естественно отмѣчаетъ явленія въ системѣ координатъ, находящейся въ покоѣ для земли (геоцентрическія координаты). Но по отношенію къ землѣ движеніе кометы является чрезвычайно сложнымъ, такъ какъ дѣйствуютъ на нее прежде всего силы исходящія изъ Солнца. Не входя въ подробности можно отдать себѣ отчетъ въ томъ, что для детальнаго изученія кометныхъ хвостовъ необходимо избрать систему координатъ, для которой явленія представятся въ наиболѣе простомъ видѣ. Эта трудная математическая задача была разрѣшена Бесселемъ и Бредихинымъ. Оба исходятъ изъ предположенія, что Солнце обладаетъ не только силой притяженія, но и силой отталкиванія. Каково физическое объясненіе этой отталкивающей силы можно и не знать при рѣшеніи математической задачи о строеніи кометныхъ хвостовъ. Однако, благодаря работамъ знаменитаго московскаго физика И. Н. Лебедева теперь едва ли ктонибудь серьезно сомнѣвается въ томъ, что отталкивающая сила, которую вычислялъ Бредихинъ, является свѣтовымъ давленіемъ.

Способъ Бредихина въ сущности состоитъ въ томъ, что онъ предполагаетъ существованіе отталкивающей силы, исходящей отъ Солнца и мѣняющейся обратно пропорціонально квадрату разстоянія. Величину же отталкивающей силы онъ вычисляетъ на основаніи лучшихъ имѣвшихся въ его распоряженіи наблюденій. При этомъ сразу же оказалось, что отношеніе отталкивающей силы къ силѣ притяженія не одинаково во всѣхъ кометахъ, и что даже въ одной и той же кометѣ часто можно наблюдать совмѣстное существованіе нѣсколькихъ различныхъ величинъ этого отношенія. Такъ какъ сила Ньютоновскаго тяготѣнія зависитъ только отъ массы Солнца (такъ какъ масса кометы чрезвычайно мала), то отсюда Бредихинъ вывелъ заключеніе, что въ кометахъ существуютъ различные виды вещества — пыль, газы, различные химическіе элементы или соединенія, — на которыя дѣйствуютъ различныя силы отталкиванія. Этотъ результатъ отлично согласуется съ гипотезой Лебедева о свѣтовомъ давленіи, такъ какъ послѣднее зависитъ не только отъ лучистой энергіи Солнца, но и отъ физическихъ особенностей того вещества, на которое оно дѣйствуетъ.

Въ дальнѣйшемъ Бредихину удалось показать, что числовыя значенія отталкивающихъ силъ, встрѣчающихся въ кометахъ, распределены не случайнымъ образомъ, а могутъ быть разбиты на нѣсколько опредѣленныхъ группъ. Каждой группѣ соотвѣтствуетъ хвостъ вполне опредѣленнаго типа.

Бредихинъ самъ различалъ три типа кометныхъ хвостовъ. Существуютъ ли въ дѣйствительности столь ясно выраженные типы, трудно сказать. Мнѣнія современныхъ ученыхъ по этому вопросу не вполне сходятся.

С. В. Орловъ различаетъ пять типовъ:

Типъ хвоста	Отношеніе силы отталкивающей къ притягательной	Описание
0	1000—4000	Тонкіе лучи, расположенные вѣеромъ отъ Солнца.
I	22.3 п	Величины ускореній кратныя числу 22.3. Хвосты расположены близко къ радіусу-вектору ядра. Легкое искривленіе въ сторону, обратную движенію кометы.
II	2.5—0.5	Имѣютъ форму изогнутаго воловьего рога.
III	0.3—0.0	Рѣзко отклонены отъ радіуса-вектора въ сторону обратную движенію.
A	0.0	Аномальные хвосты направленные въ сторону Солнца.

Теорія Бредихина сразу же открыла возможность для ряда дальнѣйшихъ работъ. Дѣйствительно, если кометы раз-

личныхъ типовъ состоятъ изъ различнаго вещества, то желательнo примѣнить къ нимъ методы спектральнаго анализа. Бредихинъ самъ положилъ основы этого способа, и онъ справедливо можетъ считаться первымъ русскимъ спектроскопистомъ астрофизикомъ. Громадное развитіе физики, и въ особенности изученія атомныхъ и молекулярныхъ спектровъ со времени смерти Бредихина, позволяетъ думать, что дальнѣйшіе успѣхи въ области изученія кометъ будутъ сдѣланы именно при помощи спектральнаго анализа.

Недостатокъ времени не позволяетъ мнѣ болѣе детальнымъ образомъ остановиться на научныхъ работахъ Бредихина. Могу только бѣгло упомянуть его работы о происхожденіи метеорныхъ потоковъ, которыя являются логическимъ продолженіемъ его работъ о кометахъ. Подробный списокъ трудовъ Бредихина данъ мною въ концѣ этой статьи. Я не ручаюсь за то, что въ немъ нѣтъ пропусковъ, но думаю, что всѣ наиболѣе важныя статьи включены въ него. Чрезвычайная работоспособность Бредихина бросается въ глаза при прочтеніи этого списка. Замѣтно также то предпочтеніе, которое онъ въ теченіе всей своей жизни отдавалъ изученію кометъ.

Едва ли можетъ быть сомнѣніе въ томъ, что московскій періодъ является наиболѣе блестящимъ въ жизни Бредихина. Въ 1865 году онъ получилъ степень доктора астрономіи за работу о „Возмущеніяхъ кометъ независящихъ отъ планетныхъ притяженій“.

Съ 1857 и до 1866 г. Бредихинъ работалъ на астрономической обсерваторіи Московскаго Университета, находившейся тогда подъ управленіемъ сперва Драшусова и затѣмъ Б. Я. Швейцера. По словамъ современниковъ, Бредихинъ въ это время особенно выдавался какъ блестящій лекторъ и популяризаторъ. Въ 1866 году, вслѣдствіе нѣкоторыхъ недоразумѣній частнаго характера со Швейцеромъ, онъ оставилъ Московскую обсерваторію и отправился на годъ въ Италію. Тамъ онъ особенно сблизился со знаменитымъ астрофизикомъ Секки. Связь съ итальянскими учеными Бредихинъ сохранилъ и позже. Онъ былъ въ теченіе многихъ лѣтъ членомъ Итальянскаго Общества Спектроскопистовъ и напечаталъ рядъ статей въ журналъ этого общества.

Въ 1872 г. Бредихинъ былъ избранъ ординарнымъ профессоромъ Университета Св. Владиміра въ Кіевѣ, но уже въ 1873 г., послѣ смерти Швейцера, былъ приглашенъ директоромъ обсерваторіи въ Москву. Какъ видно изъ библиографическаго списка его трудовъ, за время завѣдыванія имъ Московской Обсерваторіей, т. е. съ 1873 г. и до 1890 г., онъ напечаталъ болѣе 150 самостоятельныхъ статей и издалъ 12 томовъ „Annales de l'Observatoire de Moscou“.

Помимо чисто научной дѣятельности Бредихина слѣдуетъ отмѣтить и дѣятельность учебную. Ѳедоръ Александровичъ былъ замѣчательнымъ профессоромъ и съ полнымъ правомъ онъ считается главой и основателемъ русской астрономической школы. Изъ учениковъ Бредихина многіе стали выдающимися учеными. Знаменитый академикъ А. А. Бѣлопольскій, былъ помощникомъ Бредихина въ 1878 г. Тогда же подъ его руководствомъ работалъ Витольдъ Карловичъ Цераскій (ставшій позже директоромъ Московской Обсерваторіи), извѣстный своими работами о переменныхъ звѣздахъ. Я позволю себѣ процитировать здѣсь слова произнесенныя А. А. Бѣлопольскимъ въ рѣчи, читанной имъ въ общемъ собраніи Академіи Наукъ, 4 сентября 1904 года:

„Ѳедоръ Александровичъ всегда любилъ молодежь и всегда она его окружала до самой смерти. Отъ него исходила школа молодыхъ астрономовъ. Онъ прямо очаровывалъ своихъ учениковъ своею личностью, своимъ остроуміемъ, веселой и живой бесѣдой, тонкою наблюдательностью и необыкновенною простотою обращенія: въ бесѣдѣ съ нимъ забывалось его высокое научное и общественное положеніе. Я до сихъ поръ вспоминаю о времени моего пребыванія въ обсерваторіи въ Москвѣ, въ его обществѣ, въ его семьѣ, какъ о времени самомъ отрадномъ въ моей жизни. Тамъ впервые послѣ университета я понялъ, что значитъ трудъ, одухотворенный идеей, трудъ упорный, систематическій. Тамъ я впервые узналъ, что такое научный интересъ. Ѳедоръ Александровичъ заражалъ своею научною дѣятельностью, своимъ примѣромъ, и это была истинная школа, истинный университетъ для начинающаго. Интересъ же къ наукѣ былъ у Ѳедора Александровича огромный. Когда онъ брался за работу, то забывалъ и объ обществѣ и объ университетѣ: въ это время онъ манкировалъ на лекціяхъ и былъ недоступенъ для знакомыхъ“.

А вотъ что говоритъ другой ученикъ Бредихина, старшій астрономъ Пулковской Обсерваторіи, С. Костинскій:

„Изъ своихъ личныхъ воспоминаній я могу привести эпизодъ ярко иллюстрирующій его пламенный научный интересъ и упорство въ трудѣ. Въ 1889 году появилась одна телескопическая комета, какъ оказалось потомъ — періодическая, которая внезапно раздѣлилась на цѣлыхъ пять частей. Какъ разъ въ это время Ѳедоръ Александровичъ очень интересовался вопросомъ объ образованіи новыхъ кометъ путемъ дѣленія старыхъ на части подъ вліяніемъ различныхъ причинъ, и понятно, что не было предѣловъ его радости при такомъ удачномъ подаркѣ судьбы! Онъ сейчасъ же началъ собирать всѣ опубликованныя наблюденія отдѣльныхъ частей кометы и предложилъ мнѣ, тогда студенту IV курса физи-

ко-математическаго факультета, заняться подъ его руководствомъ вычисленіемъ ихъ относительныхъ путей въ пространствѣ. Съ самаго начала мы обратили вниманіе на то обстоятельство, что вблизи своего афелія комета прошла очень близко къ Юпитеру, и слѣдовательно можно было предположить, что ея разрывъ обуславливался приливнымъ дѣйствіемъ этой планеты. Мнѣ хорошо помнится то утро, когда я пришелъ къ Ѳедору Александровичу съ оконченными вычисленіями относительной орбиты наиболѣе яркаго спутника кометы; услышавъ мои шаги въ передней, онъ выбѣжалъ изъ кабинета навстрѣчу и крикнулъ еще издали вмѣсто всякаго привѣтствія: „ну говорите скорѣй, какое Δi ?“ (т. е. разность наклонностей къ эклиптикѣ орбитъ главной кометы и ея спутника). И узнавъ, что Δi исчезающе мало, т. е. что обѣ части кометы движутся въ одной плоскости, какъ и слѣдовало ожидать на основаніи сказаннаго выше, Ѳедоръ Александровичъ чуть не прыгаль отъ восторга. Затѣмъ онъ предложилъ мнѣ немедленно приняться за вычисленія орбиты второго спутника, а также за опредѣленіе мѣста пересѣченія орбитъ спутниковъ съ орбитой самой кометы, чтобы рѣшить вопросъ о времени и мѣстѣ разрыва кометы. Мы оба сейчасъ же засѣли въ его кабинетъ и вычисляли болѣе 12 часовъ подрядъ, причемъ Ѳедоръ Александровичъ гналъ всѣхъ приходившихъ къ нему по дѣламъ и еле согласился удѣлить самое короткое время на обѣдъ. Въ концѣ концовъ мы убѣдились, что орбиты спутниковъ и главной кометы дѣйствительно пересѣкаются близко въ одной точкѣ и притомъ лежащей недалеко отъ афелія кометы, стало быть первоначальная гипотеза получила очень вѣское подтвержденіе! Я ушелъ тогда отъ Ѳедора Александровича усталый, но полный энтузіазма и жажды дѣятельности и гордый сознаниемъ, что лично принималъ хотя и небольшое участіе въ раскрытіи научной истины... Такъ умѣлъ покойный назабвенный учитель, своимъ примѣромъ и энтузіазмомъ, раздуть въ молодой душѣ искру благородной научной гордости! Мнѣ хорошо извѣстно, что подобные случаи неоднократно повторялись и ранѣе, и значительно позднѣе этого времени, съ другими учениками и сотрудниками Ѳедора Александровича“.

Въ 1889 году О. В. Струве покинулъ должность директора Главной Николаевской Астрономической Обсерваторіи въ Пулковѣ. Передъ своимъ уходомъ Струве выдвинулъ кандидатуру Бредихина въ качествѣ своего преемника *

*) Насколько мнѣ извѣстно, это вліяніе со стороны О. В. Струве на назначеніе Бредихина въ Пулково, еще не было отмѣчено въ астрономической литературѣ. Я помню изъ рассказовъ моего отца, проф. Л. О. Струве, что Императоръ Александръ III, весьма благосклонно относившійся къ Пулковской Обсерваторіи, въ частномъ разговорѣ спросилъ моего дѣда,

Весной 1890 г. Бредихинъ былъ избранъ ординарнымъ академикомъ Петербургской Академіи Наукъ, а въ декабрь того же года состоялось его назначеніе директоромъ Пулковской Обсерваторіи.

На этой должности Федоръ Александровичъ остался около пяти лѣтъ. Въ 1895 году онъ вышелъ въ отставку, но продолжалъ жить въ Петербургѣ, гдѣ и продолжалъ свои занятія въ качествѣ академика. Однако до самой своей смерти онъ оставался въ близкой связи съ Пулковымъ. Онъ содѣйствовалъ, своимъ вліяніемъ и научнымъ авторитетомъ, при разрѣшеніи вопроса объ открытіи отдѣленія въ Одессѣ; онъ помогаль при оборудованіи экспедицій на Новую Землю и на Шпицбергенъ и пожертвоваль обсерваторіи прекрасный фотографическій телескопъ — Бредихинскій астрографъ, которымъ и теперь съ успѣхомъ пользуются Пулковскіе астрономы.

Въ 1902 г. Бредихинъ учредиль премію за научныя работы по тесріи кометъ.

Незадолго до его смерти была напечатана книга одного изъ его учениковъ Р. О. Егермана подъ заглавіемъ „Prof. Dr. Th. Bredichin's Mechanische Untersuchungen über Cometenformen“ (St.-Petersburg, 1903). Эта книга въ 500 страницъ является систематическимъ изложеніемъ теоріи Бредихина и до сихъ поръ считается наиболее важнымъ пособіемъ въ этой области. На первой страницѣ мы читаемъ: „Der an der Moscauer Universitäts-Sternwarte vom Akademiker Th. Bredichin zum Andenken an seinen vorzeitig verschiedenen Sohn Demetrius Bredichin (Cand. Math.) gestifteten astronomischen Prämie gewürdigt“.

Бредихинъ былъ однимъ изъ основателей Московскаго Математическаго Общества. Онъ былъ почетнымъ членомъ Московскаго Общества Любителей Міровѣдѣнія, членомъ Леопольдино-Каролинской Академіи въ Германіи, почетнымъ членомъ Королевскаго Астрономическаго Общества въ Лондонѣ и Астрономическаго Общества въ Ливерпулѣ. Въ 1890 году по его почину было организовано Русское Астрономическое Общество, и онъ былъ избранъ первымъ его предсѣдателемъ. Въ 1890 году онъ работаль въ комиссіи при Академіи Наукъ на предметъ открытія перваго Русскаго Геодезическаго Института. Въ послѣдніе мѣсяцы своей жизни Бредихинъ изучаль движеніе потока метеоровъ въ Персеѣ. За два мѣсяца до смерти онъ сдѣлаль сообщеніе въ Акаде-

Отто Васильевича, кого онъ хотѣль бы видѣть на посту директора, и что дѣдъ указаль Царю на Бредихина. Какъ извѣстно, назначеніе Бредихина состоялось именно вслѣдствіе „ясно выраженного желанія покойнаго Императора Александра III“ (Некрологъ составленный С. Костинскимъ).

міи Наукъ объ отталкивающей силѣ въ кометахъ 1893 года (Rordame) и 1903 IV (Borelly).

Федоръ Александровичъ скончался 1-го мая 1904 года въ 5 ч. 40 м. вечера, въ Петербургѣ. Онъ былъ похороненъ въ фамильномъ склепѣ, около церкви Богоявленія въ усадьбѣ Погость, недалеко отъ г. Кинешмы, Костромской губ.

Yerkes Observatory,
The University of Chicago.

Списокъ печатныхъ трудовъ Ф. А. Бредихина.

1. Quelques mots sur les queues des comètes. — *Astronomische Nachrichten* 54, 289, 1861.
2. Anmerkung: Berichtigung eines Fehlers in Bessels Abhandlung über Cometenschweife. — *Astronomische Nachrichten* 54, 292, 1861.
3. Sur la direction des queues des comètes de 1844 III et de 1853 III. — *Astronomische Nachrichten* 55, 145, 1861.
4. О хвостахъ кометъ. Москва, 1862.
5. Возмущенія кометъ, происходящія отъ сопротивленія эфира. 1863.
6. Position de la comète de 1858 V tirée des observations faites à l'observatoire de Moscou 1863.
7. Изліянiя вещества изъ ядра большой кометы 1862 года Москва. 1864.
8. Возмущенія кометъ, независящія отъ планетныхъ притяженій. Москва. 1864.
9. Отклоненія отвѣса въ Московской губерніи. — *Русскій Вѣстникъ*, 1864.
10. Колебаніе кометнаго ядра. — *Математическій Сборникъ* 2, (18) 1867.
11. Нѣсколько словъ по поводу новой теоріи г. Любимова. *Математическій Сборникъ* 6. 1872.
12. In Bezug auf den Artikel des Herrn Lubimoff. — 1873.
13. Кометы, 1871. *Природа* 2, Москва, 1873.
14. Osservazioni spettroscopiche del sole fatte nell'estate 1872. — *Memorie della Società degli spettroscopisti Italiani* 2, 81, 1873.
15. Observations faites au cercle méridien (Schweizer, Bredichin, Khandricoff) depuis le 23 Oct. 1858 — 28 Dec. 1861. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 1, 1874.
16. Osservazioni spettroscopiche del sole fatte nell'estate ed autunno del 1873. — *Memorie della Società degli spettroscopisti Italiani* 3, 39, 1874.
17. Fenomini osservati della Cometa Coggia (Lettera del prof.

- T. Bredichin). — Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani 3, 57, 1874.
18. Beobachtungen der Flora (8) auf der Moskauer Universitäts - Sternwarte. — Astronomische Nachrichten 83, 174, 1874.
 19. Рисунки кометы Коджиа и ея спектры. Москва, 1874.
 20. Observations spectroscopiques du soleil faites pendant l'été de 1872 et 1873. Moscou 1873, 1874.
 21. Observations sur le Jupiter. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 1-re livraison, 1, 1875.
 22. Etoiles filantes du mois d'août 1874. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 1-re livr. 8, 1875.
 23. Mesures micrométriques de la déclinaison de Junon. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 1-re livraison, 26, 1875.
 24. Table auxiliaire pour le calcul des réfractions. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 1-re livr., 32, 1875.
 25. Observations spectroscopiques du soleil en 1874. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 1-re livr., 38, 1875.
 26. Observations astronomiques et physiques sur la comète de 1874 III. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 1-re livr., 80, 1875.
 27. Osservazioni spettroscopiche del sole fatte nel 1874. — Memorie della Società degli spettroscopisti Italiani 4, 45 1875.
 28. Spectre des nébuleuses. — Memorie della Società degli spettroscopisti Italiani 4, 109, 1875.
 29. Beobachtungen des Cometen c 1874 (Coggia). — Astronomische Nachrichten 85, 10, 1875.
 30. Messungen von Deklinationsdifferenzen zwischen Juno und in der Nähe liegenden Sternen. — Astronomische Nachrichten 85, 58, 1875.
 31. Beobachtungen des Encke'schen Cometen. — Astronomische Nachrichten 85, 366, 1875.
 32. Berichtigung einer Beobachtung desselben Cometen 1875, April 5. — Astronomische Nachrichten 85, 383, 1875.
 33. Beobachtung des Encke'schen Cometen. — Astronomische Nachrichten 86, 9, 1875.
 34. Observations spectroscopiques du soleil en 1875. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2-me livr. 1, 1876.
 35. Observations de la comète d'Encke. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2-me livr. 27. 1876.
 36. Observations sur le Jupiter. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2 me livr. 42, 1876.
 37. Spectre des nébuleuses. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2-me livr. 60, 1876.

38. Observations de Mars en opposition. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2-me livr. 65, 1876.
39. Sur l'équation personnelle absolue. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2-me livr. 69, 1876.
40. Etoiles filantes du mois d'août 1875. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2-me livr. 73, 1876.
41. Inégalités de la vis micrométrique du grand réfracteur. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2-me livr. 75, 1876.
42. Observations des nébuleuses. — Annales de l'Observatoire de Moscou 2, 2-me livr. 114, 1876.
43. Osservazioni spettroscopiche del sole fatte nel 1875. — Memorie della Società degli spettroscopisti Italiani 5, 4, 1876.
44. Sur la queue normale de la comète 1862 II. — Memorie della Società degli spettroscopisti Italiani 5, Appendix, 165, 1876; Astronomische Nachrichten 88, 253, 255, 1876.
45. Sur la queue anormale de la comète 1862 III. — Astronomische Nachrichten 87, 239, 1876.
46. Sur la queue normale de la comète c. 1874 III (Coggia). — Astronomische Nachrichten 88, 219, 1876.
47. Спектральныя линіи планетарныхъ туманностей. — Математическій Сборникъ, Москва 1876.
48. Sur les formes anormales dans le développement des comètes. — Annales de l'Observatoire de Moscou 3, 1-re livr. 1, 1877.
49. Sur la queue de la comète de 1874 c. — Annales de l'Observatoire de Moscou 3, 2-me livr. 1, 1877.
50. Sur la parallaxe de l'étoile nébuleuse H. IV. 37. — Annales de l'Observatoire de Moscou 3, 2-me livr. 91, 1877.
51. Observations spectroscopiques du soleil en 1876. — Annales de l'Observatoire de Moscou 3, 2-me livr. 110.
52. Spectre des nébuleuses planétaires. — Annales de l'Observatoire de Moscou 3, 2-me livr. 120, 1877.
53. Observations de Jupiter en 1876. — Annales de l'Observatoire de Moscou 3, 2-me livr. 127, 1877.
54. Mesures micrométriques de quelques groupes d'étoiles. — Annales de l'Observatoire de Moscou 3, 2-me livr. 145, 1877.
55. Sur la queue de la comète 1862 II. — Astronomische Nachrichten 89, 23, 1877.
56. Sur les formes anormales dans le développement des comètes. Comète de 1861—1862. — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 1-re livr. 34, 1878.
57. Spectre de la comète de 1877 (b). — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 1-re livr. 104, 1878.
58. Observations de Mars en opposition de 1877. — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 2-me livr. 1, 1878.

59. Mesures micrométriques du groupe de Persée. — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 2-me livr 5, 1878.
60. Observations de la comète de 1877, b (Winnecke). — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 2-me livr. 71, 1878.
61. Observations de la comète de 1877, c. — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 2-me livr. 75, 1878.
62. Observations de Jupiter en 1877. — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 2-me livr. 77, 1878.
63. Observations spectroscopiques du soleil en 1877. — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 2-me livr. 89, 1878.
64. Sur l'éclipse totale de Lune du 23 août 1877. — Annales de l'Observatoire de Moscou 4, 2-me livr. 85, 1878.
65. Sur la comète de 1877, b (Winnecke). — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 1-re livr. 72, 1878.
66. Sur la queue de la comète de 1860, III. — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 1-re livr. 79, 1878.
67. Sur la comète de Halley (1835). — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 1-re livr. 90, 1878.
68. Remarque générale sur les comètes. — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 1-re livr. 96, 1878.
69. Sur la force qui produit les queues des comètes. — *Astronomische Nachrichten* 93, 237, 1878.
70. Remarques générales sur les comètes. — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 2-me livr. 29, 1879.
71. Recherches sur les queues des comètes. — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 2-me livr. 46, 1879.
72. Sur la constitution probable des queues des comètes. — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 2-me livr. 137, 1879.
73. Observations de Jupiter en 1878. — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 2-me livr. 140, 1879.
74. Observations spectroscopiques du soleil en 1878. — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 2-me livr. 146, 1879.
75. Mesures micrométriques d'Algol. — Annales de l'Observatoire de Moscou 5, 2-me livr. 151, 1879.
76. Recherches sur les queues des comètes. — Annales de l'Observatoire de Moscou 6, 1-re livr. 44, 1879.
77. Sur la constitution des comètes. — Annales de l'Observatoire de Moscou 6, 1-re livr. 59, 1879.
78. Observations de la comète de Brorsen. — Annales de l'Observatoire de Moscou 6, 1-re livr. 100, 1879.
79. Position de la comète de 1858 V. — Annales de l'Observatoire de Moscou 6, 1-re livr. 104, 1879.
80. О хвостахъ кометъ. — С Петербургъ, 1879.
81. Sur les queues des comètes. — *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg* 25, 310, 1879.
82. Sur la force répulsive pour les comètes (Schreiben an den Herausgeber). *Astronomische Nachrichten* 94, 79, 1879.

83. Mouvement de la matière cométaire sur une hyperbole convexe vers le soleil. — *Astronomische Nachrichten* 94, 143, 1879.
84. Schreiben an den Herausgeber (Comet Brorsen). — *Astronomische Nachrichten* 95, 15, 1879.
85. Sur la constitution probable des queues des comètes. — *Astronomische Nachrichten* 95, 27, 1879.
86. Ueber den rothen Fleck auf Jupiter (Schreiben an den Herausgeber). — *Astronomische Nachrichten* 95, 383, 1879.
87. Sur la résistance de l'éther produite par le mouvement de translation du système solaire. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 6, 2-me livr. 20, 1880.
88. Observations spectroscopiques du soleil. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 6, 2-me livr. 86, 1880.
89. Observations de Jupiter. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 6, 2-me livr. 95, 1880.
90. Recherches sur les queues des comètes. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 7, 1-re livr. 1, 1880.
91. The tails of comets (Correspondence Moskow Observatory 1880, May 9). — *The Observatory* 3, 454, 1880.
92. Observations de la comète de Brorsen faites à Moscou. — *Astronomische Nachrichten* 96, 41, 1880.
93. Schreiben an den Herausgeber (betreffend Cometenschleife). — *Astronomische Nachrichten* 97, 265, 1880.
94. Spectre de la comète de Harting. — *Astronomische Nachrichten* 98, 271, 1880.
95. Suppléments à mes recherches sur les queues des comètes. *Annales de l'Observatoire de Moscou* 7, 2-me livr. 54, 1881.
96. Observations spectroscopiques du soleil en 1880. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 7, 2-me livr. 79, 1881.
97. Observations de quelques comètes. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 7, 2-me livr. 90, 1881.
98. Observations de Jupiter en 1880. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 7, 2-me livr. 94, 1881.
99. Observations de la comète de 1861 (2). — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 7, 2-me livr. 105, 1881.
100. Sur la comète de 1825, IV. — *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani* 10, 300, 1881.
101. Sur les queues des comètes b et c 1881. — *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani* 10, 310, 1881.
102. Sur la constitution de Jupiter. — *Astronomische Nachrichten* 99, 25, 1881.
103. Note: L'aurore polaire du 12 août 1880 à Wladimir. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 7, 2-me livr. 109, 1881.
104. Sur les queues des comètes. — *Copernicus* 1, 99, 1881.
105. Expériences faites avec le pindule à reversion. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 8, 1-re livr. 31, 1882.

106. Recherches sur les comètes de 1881 b et c et de 1825, IV. — Annales de l'Observatoire de Moscou 8, 1-re livr. 57, 1882.
107. Observations spectroscopiques du soleil en 1872. — Annales de l'Observatoire de Moscou 8, 2-me livr. 1, 1882.
108. Observations spectroscopiques du soleil en 1873. — Annales de l'Observatoire de Moscou 8, 2-me livr. 37, 1882.
109. Sur les queues des comètes 1881 III et IV. — Astronomische Nachrichten 101, 161, 1882.
110. Les vapeurs du sodium dans la comète 1882 Wells. — Astronomische Nachrichten 102, 207, 1882.
111. Recherches sur les Comètes b et c 1881. — Copernicus 2, 1, 1882.
112. Note supplémentaire sur les Comètes b et c (III et IV) 1881. — Copernicus 2, 56, 1882.
113. Sur le milieu résistant. — Annales de l'Observatoire de Moscou 9, 1-re livr. 18, 1883.
114. Recherches sur la comète de 1882 a (Wells). — Annales de l'Observatoire de Moscou 9, 1-re livr. 24, 1883.
115. Note sur le pendule à réversion. — Annales de l'Observatoire de Moscou 9, 1-re livr. 103, 1883.
116. Observations spectrales du soleil en 1881 (Th. Bredichin et A. Bélopolsky). — Annales de l'Observatoire de Moscou 9, 2-me livr. 35, 1883.
117. Recherches sur la grande comète de 1882 II. — Annales de l'Observatoire de Moscou 9, 2-me livr. 48, 1883.
118. Observations de Jupiter en 1881—1882. — Annales de l'Observatoire de Moscou 9, 2-me livr. 110, 1883.
119. Observations de quelques comètes. — Annales de l'Observatoire de Moscou 9, 2-me livr. 114, 1883.
120. Sur la grande comète de 1882. — Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani 12, 72, 1883.
121. Recherches sur la grande comète de 1882, II. — Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani 12, 93, 1883.
122. Note sur la queue du I type de la comète 1882, II. — Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani 12, 191, 1883.
123. Les ondes cosmiques dans la comète 1882, II. — Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani 12, 197, 1883; Astronomische Nachrichten 106, 217, 1883.
124. Sur quelques anomalies apparentes dans la structure des queues cométaires. — Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani 12, 277, 1883.
125. Sur la grande comète de septembre 1882, II. — Astronomische Nachrichten 105, 129, 1883.

126. Sur la queue du premier type de la comète de 1882 II. — *Astronomische Nachrichten* 106, 177, 1883.
127. Calcul des éphémérides des queues cométaires. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 10, 1-re livr. 1, 1884; *Astronomische Nachrichten* 107, 293, 1884.
128. Note sur la queue du I type de la comète de 1882, II. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 10, 1-re livr. 7, 1884.
129. Sur l'hypothèse des ondes cosmiques, composée pour l'explication des formes cométaires. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 10, 1-re livr. 13, 1884.
130. Sur les syndynames et les synchrones dans les comètes et quelques remarques concernant mes recherches sur les formes cométaires. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 10, 1-re livr. 75, 1884.
131. Les syndynames et les synchrones de la comète Pons-Brooks (1883—1884). — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 10, 2-me livr. 97, 1884; *Memorie della Società degli spettroscopisti Italiani* 13, 145, 1884.
132. Sur la queue du I type de la comète de 1744. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 10, 2-me livr. 142, 1884.
133. Note supplémentaire sur la comète Pons-Brooks. — *Annales de l'Observatoire de Moscou* 10, 2-me livr. 149, 1884.
134. Sur quelques anomalies apparentes dans les queues cométaires. — *Astronomische Nachrichten* 107, 379, 1884.
135. Les ondes cosmiques formant le queue de la grand comète de 1882. — *Astronomische Nachrichten* 108, 1, 1884.
136. Sur quelques remarques concernant mes recherches sur les comètes. — *Astronomische Nachrichten* 109, 281, 1884.
137. Quelques formules de la théorie des comètes. — *Société Impériale des Naturalistes à Moscou. Bulletin* 30, 3, 1884.
138. Sur la grande comète de 1811. — *Société Impériale des Naturalistes à Moscou* 30, 58, 1884.
139. Sur les têtes des comètes — *Société Impériale des Naturalistes à Moscou*, 30, 79, 1884.
140. Sur la Comète 1882 I. — *Copernicus* 3, 41, 1884.
141. Recherches sur la Comète de 1882 II. — *Copernicus* 3, 81, 1884.
142. Note sur la queue du premier type de la comète 1882 II. — *Copernicus* 3, 117, 1884.
143. Quelques notes sur les comètes; Réponse à M. Schwedoff. *Copernicus* 3, 121, 184.
144. Beobachtungen der totalen Mondfinsternis 1884 Oct. 4 und von Sternbedeckungen während derselben. — *Astronomische Nachrichten* III, II, 1885.
145. Nouvelles recherches sur les comètes. — *Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série*, 1-re livr. 1, 1886.
146. Révision des valeurs numériques de la force répulsive. — *Société Impériale des Naturalistes à Moscou* 60, 1, 1886.

147. Sur les oscillations des jets d'émission dans les comètes. — Société Impériale des Naturalistes à Moscou 60, 93, 1886.
148. Sur les grandes comètes de 1886. — Société Impériale des Naturalistes à Moscou 62, 1, 1887.
149. Sur la grande comète de 1886, f (Barnard). Société Impériale des Naturalistes à Moscou 1, 42, 1887.
150. Sur les grandes comètes de 1886. — Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série 1, 2-me livr. 1, 1888.
151. Sur la grande comète de 1886, f (Barnard). — Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série 1, 2-me livr. 7, 1888.
152. Sur la grande comète de 1887, I. — Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série 1, 2-me livr. 29, 1888.
153. Note supplémentaire sur la grande comète de 1887, I. — Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série 1, 2-me livr. 125, 1888.
154. Beobachtungen von Sternbedeckungen während der totalen Mondfinsternis 1888 Jan. 28. — Astronomische Nachrichten 118, 313, 1888.
155. Quelques remarques sur l'origine des météores. — Bulletin Astronomique de l'observatoire de Paris 5, 1888.
156. Quelques remarques sur l'origine des météores. — Astronomische Nachrichten, 120, 249, 1889.
157. Quelques mots sur l'origine des comètes périodiques. — Astronomische Nachrichten 120, 331, 1889.
158. Sur la grande comète de 1887, I. — Société Impériale des Naturalistes à Moscou 2, 261, 545, 1889.
159. Quelques propriétés remarquables des courants météoriques. — Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft 24, 273, 1889.
160. Наблюдения надъ качаніями поворотнаго маятника Репсольда, произведенныя въ селѣ Желтухинѣ и Б. Шереметьевкѣ. — Извѣстія Императорскаго Русскаго Географическаго Общества 25, 178, 1889.
161. Sur l'origine des comètes périodiques. — Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série 2, 1-re livr. 1, 1890; Société Impériale des Naturalistes à Moscou 3, 181, 1890.
162. Sur l'origine des étoiles filantes. — Annales de l'Observatoire de Moscou, Deuxième série 2, 1-re livr. 18, 1890; Société Impériale des Naturalistes à Moscou 3, 1, 1890.
163. Sur les propriétés importantes des courants météoriques. — Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série 2, 1-re livr. 135, 1890; Société Impériale des Naturalistes à Moscou 3, 629, 1890.
164. Sur les compagnons de la comète 1889, V (Brooks, juillet 6). — Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série 2, 1-re livr. 158, 1890.

165. Note sur la queue anormale de la comète de 1889, I. — Annales de l'Observatoire de Moscou. Deuxième série 2, 1-re livr. 164, 1890.
166. Sur les phénomènes extraordinaires présentés par la grande comète de 1882. — Mélanges mathématiques et astronomiques 7, 1-re livr. 1890.
167. Sur les compagnons de la comète 1889 V (Brooks juillet 6). — Astronomische Nachrichten 123, 321, 1890.
168. Sur les phénomènes extraordinaires présentés par la grande comète de 1882. Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 34, 37, 1892.
169. Sur les Perséides observés en Russie en 1890. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 34, 231, 1892.
170. Sur les radiants des Andromédides. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 34, 419, 1892.
171. О физическихъ перемѣнахъ въ небесныхъ тѣлахъ. С.-Петербургъ 1893.
172. Ueber die Bieliden der Jahre 1872, 1885 und 1892. — Astronomische Nachrichten 132, 159, 191, 1893.
173. Sur les Perséides observés en Russie en 1892 et 1894. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 35, 457, 1894.
174. Sur la dispersion des points radiants des météores. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 35, 189, 1894.
175. Sur les orbites des Biélides. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 35, 585.
176. О физическихъ перемѣнахъ въ небесныхъ тѣлахъ. — Записки Императорской Академіи Наукъ 74, 112, 1894.
177. Sur les Perséides observés à Poulkovo en 1893. Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 1, 33, 1894.
178. Les isodynames et les synchrones de la comète 1893, IV. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 1, 165, 1894.
179. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 1, 541, 1894.
180. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 7, 3-me livr. (528, 541), 1894.
181. Mouvement des substances émises par les comètes 1893, II et 1893, IV. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 2, № 5 (293), 383, 1895.
182. Sur les Perséides observés en Russie en 1891—95. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg 2, 139, 1895.

183. Комета Энке. — Извѣстія Императорской Академіи Наукъ 2, V—VI, 1895.
184. Variations séculaires de l'orbite de la comète 1862 III et de ses orbites dérivées. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 3, 251, 1895.
185. Variations séculaires de l'orbite de la comète 1862 III et de ses orbites dérivées. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 31, 1896.
186. Sur l'origine et les orbites du système des Aquarides. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 4, № 4, 345, 1896.
187. Sur quelques système de météores. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 5, № 5, 337, 1896.
188. Sur les valeurs de la répulsion solaire subie par la substance cométaire. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg 6, № 5 (483), 1897.
189. О вращеніи Юпитера съ его пятнами. — Извѣстія Императорской Академіи Наукъ 7, 235, 1897.
190. О попыткахъ экспериментальнаго воспроизведенія кометныхъ явленій. — Извѣстія Императорской Академіи Наукъ 8, № 3, 173, 1898. Переводъ Егермана: Ueber die Versuche zur experimentellen Reproduktion der Kometenerscheinungen. — Naturwissenschaftliche Rundschau 18, 325, 1903.
191. О солнечной коронѣ. — Извѣстія Императорской Академіи Наукъ 9, 179, 1898.
192. Sur les radiants composés (dits stationnaires) des étoiles filantes. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 12, № 1, 95, 1900.
193. Sur les radiants composés (dits stationnaires) des étoiles filantes. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 13, № 2, 189, 1900.
194. По вопросу о введеніи новаго стиля въ Россіи. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 12, XXVII, 1900.
195. Ueber stationäre Radianten von Sternschunppenfällen. — Astronomische Nachrichten 151, 379, 1900; 152, 47, 1900.
196. Sur la comète 1899 I (Serift). — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 14, № 5, 483, 1901.
197. Sur la comète 1901, I. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 15, № 5, 451, 1901.
198. Sur le rôle de Jupiter dans la formation des radiants composés. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 16, № 3, 53, 1902.
199. Sur le rôle de Jupiter dans la formation des radiants simples. — Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de

- St.-Pétersbourg 17, № 5, 167, 1902.
200. Sur le rôle de Jupiter dans la formation des radiants composés. — *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani* 31, 167, 1902.
201. Les queues de la comète australe de 1901. — *Bulletin de la Société astronomique de France* 16, 223, 1902.
202. Ueber den Schweif des Cometen 1901, I. — *Astronomische Nachrichten* 158, 219, 1902.
203. Etudes sur l'origine des météores cosmiques et la formation de leurs courants. — St.-Pétersbourg, 1903.
204. Schreiben betreffend Kometen 1903 c. — *Astronomische Nachrichten* 162, 387, 1903.
205. Sur les grandes valeurs de la force répulsive du soleil. — *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg* 20, № 1, 39, 1904.

В. Жардецкій.

НѢКОТОРЫЯ ЗАМѢЧАНІЯ ОБЪ УРАВНЕНІЯХЪ ДВИЖЕНІЯ НЕОДНОРОДНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЫ.

1. *Понятіе однородности.*

Понятіе однородности и неоднородности непрерывной среды, въ особенности матеріальной системы, встрѣчается въ Механикѣ въ двухъ различныхъ смыслахъ. Во-первыхъ, различаютъ тѣла однородныя или неоднородныя по веществу (по структурѣ), изъ котораго они состоятъ, во-вторыхъ, по плотности. Такъ что тѣло однородное въ одномъ можетъ быть неоднороднымъ въ другомъ смыслѣ этого слова.

Прежде всего приведемъ опредѣленіе одинаковой структуры, которое мы находимъ у Helmholtz'a ¹⁾, и которое представляется намъ наиболѣе строго отвѣчающимъ строенію Рациональной Механики. Оно состоитъ въ слѣдующемъ: „непрерывная масса обладаетъ одинаковой структурой, если во всѣхъ мѣстахъ конгруэнтныя и одинаковыя области подъ дѣйствіемъ однихъ и тѣхъ же внѣшнихъ вліяній показываютъ одинаковыя деформаци и одинаковыя сопротивленія. Можно было бы короче опредѣлить слѣдующимъ образомъ: масса обладаетъ одинаковой структурой, если во всѣхъ мѣстахъ связь между деформацией (Strain) и силами упругости (Stress) выражается одинаковымъ закономъ (хотя бы еще неизвѣстнымъ)“.

На основаніи этого опредѣленія считаемъ тѣло однороднымъ, если упомянутый законъ одинаковъ для всѣхъ его частей, и неоднороднымъ, когда мѣняется этотъ законъ отъ одной части къ другой. Очевидно, что плотность помимо самого вида закона зависитъ и отъ рода вещества и дѣйствующихъ силъ.

Отмѣтимъ здѣсь для примѣра употребленія понятія однородности въ различныхъ смыслахъ, что вообще въ классиче-

¹⁾ Н. Helmholtz. Vorlesungen über theoret. Physik. B. II. S. 56.

скихъ изслѣдованіяхъ о фигурахъ равновѣсія неоднородной вращающейся жидкой массы до Пуанкаре и Ляпунова включительно, рассматривается случай неоднородности только по плотности и при томъ допущеніи, что послѣдняя есть функція только давленія. Это легко установить по основному уравненію, которымъ пользуются упомянутые изслѣдователи, справедливому только при этой предпосылкѣ. Между тѣмъ рядъ изслѣдованій въ той же области по существу относится къ неоднородности другого характера.

2. Общія уравненія движенія непрерывной среды.

Возьмемъ въ данной средѣ нѣкоторый объемъ V ограниченный поверхностью S и обозначимъ: черезъ \vec{F} равнодѣйствующую объемныхъ силъ, рассчитанную на единицу массы, въ нѣкоторой точкѣ, черезъ \vec{F}_s равнодѣйствующую поверхностныхъ силъ на единицу поверхности съ даннымъ направлениемъ нормали, черезъ ρ плотность и \vec{w} — ускореніе.

Тогда

$$(1) \quad \int_V \rho \vec{w} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_S \vec{F}_s dS,$$

если допустить, что силы \vec{F}_s подчиняются закону равенства дѣйствія и противодѣйствія. Поверхностныя силы $\vec{F}_s dS$ зависятъ вообще не только отъ выбранной точки на поверхности S , но и отъ направленія нормали, т. е.

$$\vec{F}_s = \text{fonct}(\vec{r}, \vec{n}),$$

гдѣ \vec{r} есть векторъ опредѣляющій положеніе точки, а \vec{n} — ортъ внутренней нормали. Эту функціональную зависимость можно вообще задавать произвольно; въ согласіи съ принципомъ Даламбера будетъ и линейная зависимость \vec{F}_s отъ \vec{n} . Кромѣ того, какъ извѣстно, на основаніи закона момента количествъ движенія доказывается симметричный характеръ таковой. Слѣдовательно, мы можемъ положить

$$(2) \quad \vec{F}_s = \vec{n} \Phi,$$

гдѣ Φ есть тензоръ ²⁾:

²⁾ Если положить, что Φ вообще есть аффиноръ и допустить какъ аксіому, что онъ переходитъ въ тензоръ (аксіома Boltzmann-a), то какъ слѣдствіе получится справедливость закона момента количествъ движенія; M. G. Hamel. Die Axiome der Mechanik. S. 9. Hand. d. Physik. B. V. 1927.

$$(3) \quad \Phi \begin{cases} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{cases}$$

$$Y_x = X_y, \quad Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x.$$

Обозначая

$$d\vec{s} = \vec{n} dS,$$

мы можемъ написать уравнение (1) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int_V \varrho \vec{w} dV = \int_V \varrho \vec{F} dV + \int_S d\vec{s} \Phi.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на V и предположимъ, что V стремится къ нулю. Тогда

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \varrho \vec{w} dV}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \varrho \vec{F} dV}{V} + \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S d\vec{s} \Phi}{V}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \varrho \vec{w} dV}{V} = \varrho \vec{w}$$

и

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \varrho \vec{F} dV}{V} = \varrho \vec{F},$$

а

$$(4) \quad \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S d\vec{s} \Phi}{V} = \nabla \Phi$$

принадлежитъ къ числу пространственныхъ производныхъ вида

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \sigma \times d\vec{s}}{V},$$

гдѣ знакъ \times обозначаетъ различные виды умноженія вели-

чинъ σ и вектора $d\vec{s}$ ³⁾.

Если тензоръ Φ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$(5) \quad \Phi = \vec{i} \cdot \vec{G}_1 + \vec{j} \cdot \vec{G}_2 + \vec{k} \cdot \vec{G}_3.$$

гдѣ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ орты трехъ ортогональныхъ осей, а векторы

$$\vec{G}_1 = X_x \vec{i} + X_y \vec{j} + X_z \vec{k},$$

$$\vec{G}_2 = Y_x \vec{i} + Y_y \vec{j} + Y_z \vec{k},$$

$$\vec{G}_3 = Z_x \vec{i} + Z_y \vec{j} + Z_z \vec{k},$$

то

$$(6) \quad \nabla\Phi = \vec{i} \operatorname{div} \vec{G}_1 + \vec{j} \operatorname{div} \vec{G}_2 + \vec{k} \operatorname{div} \vec{G}_3.$$

Итакъ уравненія движенія любой непрерывной среды можно написать въ слѣдующей векторіальной формѣ:

$$(7) \quad \rho \vec{w} = \rho \vec{F} + \nabla\Phi,$$

или въ скалярной

$$(8) \quad \begin{cases} \rho w_x = \rho X + \operatorname{div} \vec{G}_1 \\ \rho w_y = \rho Y + \operatorname{div} \vec{G}_2 \\ \rho w_z = \rho Z + \operatorname{div} \vec{G}_3. \end{cases}$$

Кромѣ нихъ мы имѣемъ условіе непрерывности:

$$(9) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

гдѣ \vec{v} — скорость.

Уравненія (9) и (7) или (8) опредѣляютъ движеніе непрерывной среды, а независимо отъ агрегатнаго состоянія, въ которомъ она находится, если рѣчь идетъ о матеріальной средѣ. Но сила $\nabla\Phi$ можетъ зависѣть отъ этого состоянія, какъ и вообще отъ свойствъ среды. Для установленія связи между ними рассматривается аффиноръ, который характеризуетъ деформацію среды:

³⁾ См. напр. J. Spielrein. Lehrbuch der Vektorrechnung S. 307. 1916.

$$(10) \quad A \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

гдѣ u, v, w проекціи смѣщенія точки на координатныя оси. Обозначимъ его тензоръ черезъ:

$$(11) \quad T \begin{cases} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_z, \end{cases}$$

гдѣ

$$(12) \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Такъ какъ Φ есть тензоръ, то обычно ищется его связь съ тензоромъ T , а не съ аффиноромъ A . Связь эта по аналогіи съ закономъ Гука постулируется въ видѣ линейной зависимости компонентъ тензора Φ отъ компонентъ тензора T въ общемъ случаѣ упругой среды. Другими словами мы тензоръ Φ считаемъ линейной однородной тензоріальной функцией тензора T .

Напишемъ это условіе въ видѣ равенства:

$$(13) \quad \Phi = LT,$$

обозначая черезъ L операторъ:

$$L \begin{cases} a_{11} \dots a_{16} \\ \dots \dots \dots \\ a_{61} \dots a_{66} \end{cases},$$

имѣющій 36 компонентъ и переводящій линейно компоненты T въ компоненты Φ ¹⁾:

4) Если считать компоненты тензоровъ Φ и T координатами двухъ векторовъ въ 6-мѣрномъ пространствѣ, то аффиноръ L даетъ линейную зависимость между этими двумя векторами. См. также частные случаи равенства (13) для упругихъ изотропныхъ и пластичныхъ тѣлъ — A. Nadai. *Plastizität und Erddruck* (Hand. d. Physik. H. Geiger und K. Scheel, B. VI. S. 467. 1928).

$$X_x = a_{11}\epsilon_x + a_{12}\epsilon_y + a_{13}\epsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{xz} + a_{16}\gamma_{yz}.$$

При этой предпосылкѣ дальнѣйшія преобразованія уравненій (7) и (8) будутъ относиться къ средамъ обладающимъ свойствомъ упругости.

При помощи закона (13) установлена, слѣдовательно, связь между силами упругости, деформациями и тѣми свойствами среды, которыя еще должны быть выражены особенностями оператора L .

Основываясь на второмъ изъ цитированныхъ опредѣленій Helmholtz'a, мы должны различать два случая: 1) если среда однородна, то операторъ L есть постоянная во всѣхъ точкахъ ея величина, 2) если L есть функція положенія (т. е. координатъ, а помимо того можетъ содержать и другія величины), то это и значитъ, что среда неоднородна. Въ этомъ случаѣ законъ (13) мѣняется отъ точки до точки. Конечно можно представить себѣ и болѣе сложную неоднородную среду, допуская что самый видъ связи между силами упругости и деформацией мѣняется отъ одной части среды до другой, а не выражается повсюду равенствомъ (13).

При дальнѣйшей классификаціи различаются вещества или среды изотропныя и анизотропныя. Первыя опредѣляются такъ: онѣ имѣютъ одинаковыя свойства во всѣхъ направленіяхъ, или — эластичное тѣло будетъ изотропнымъ, если во-первыхъ, любая его сферическая или кубическая часть будучи подвергнута равномерному давленію со всѣхъ сторонъ, не будетъ деформирована, а только одинаково сжата, во-вторыхъ, если она при тангенціальныхъ силахъ испытаетъ чистую деформацию, безъ сжатія или расширенія⁵⁾. Какъ извѣстно, эластично-изотропное тѣло будетъ изотропно и по отношенію къ оптическимъ, электрическимъ и термическимъ явленіямъ⁶⁾.

Такъ какъ свойства среды характеризуются видомъ оператора L , то изотропная среда должна очевидно прежде всего опредѣляться условіемъ, чтобы L отъ каждой точки во всѣхъ направленіяхъ было одинаково, т. е., чтобы компоненты L не мѣнялись отъ одной точки до другой. Такимъ образомъ неоднородная по структурѣ среда не можетъ быть изотропной. Это слѣдуетъ и изъ второго опредѣленія изотропности. Очевидно, что вообще предположеніе о неоднородности среды по плотности, которая имѣетъ мѣсто даже независимо отъ давленій, соотвѣтствуетъ допущенію неоднородности.

⁵⁾ W. Thomson and Tait. Treatise on natural philosophy. P. II. p. 218. 1912.

⁶⁾ H. Helmholtz. I. c. V. II. S. 135; обратное не всегда справедливо.

родности по структурѣ. Специальное же допущеніе, что среда обладаетъ одними и тѣми же упругими свойствами во всѣхъ точкахъ, несмотря на различную плотность (при различномъ составѣ), должно внушать сомнѣнія.

Задавая различными способами компоненты L будемъ находить уравненія, соотвѣтствующія различнымъ средамъ. Такъ, напримѣръ, извѣстнымъ соотношеніемъ между компонентами L , соотвѣтствуютъ различные классы кристалловъ. Въ этихъ случаяхъ уменьшается число различныхъ компонентъ, которое для изотропныхъ тѣлъ равняется только двумъ.

Итакъ при выводѣ уравненій движенія опредѣленныхъ матеріальныхъ системъ, какъ и вообще непрерывныхъ средъ, изъ общихъ уравненій (7) или (8) приходится опираться на равенство (13) или его замѣняющее, которое стоитъ въ связи съ первымъ изъ смысловъ однородности. При этомъ конечно, какъ мы видимъ, главную роль играютъ не какія-нибудь химическія, оптическія и т. п. свойства, а законъ, которымъ опредѣляются силы упругости. Что же касается однородности по плотности, то она зависитъ не только отъ свойствъ среды, но и отъ всего движенія и силъ, такъ какъ ρ принадлежитъ къ числу функцій, подлежащихъ опредѣленію изъ всей системы уравненій, которыя характеризуютъ движеніе среды. Само собой разумѣется, что изъ этого исключается тотъ идеальнѣйшій случай, когда среда заранѣе предполагается несжимаемой. До настоящаго времени считаются полностью изслѣдованными только три вида уравненій движенія непрерывныхъ системъ: идеальной и вязкой жидкостей и идеальнаго упругаго тѣла ⁷⁾. Хотя уже нѣкоторые допущенія для вязкой жидкости могутъ вызывать сомнѣнія, напримѣръ, видъ характеристическаго уравненія, на которомъ мы остановимся дальше.

Очевидно, что самый простой случай непрерывной среды тотъ, когда тензоръ упругихъ силъ сводится къ единичному I , умноженному на нѣкоторый скаляръ $-p$, а это соотвѣтствуетъ условію, что векторъ $\nabla\Phi$ имѣетъ потенциалъ. Для того же, чтобы $\nabla\Phi$ было градиентомъ нѣкотораго скаляра, необходимо удовлетворить уравненіе

$$(14) \quad [\nabla, \nabla\Phi] = 0$$

или, принимая во вниманіе уравненіе (6)

$$(14') \quad [\text{grad div } \vec{G}_1, \vec{i}] + [\text{grad div } \vec{G}_2, \vec{j}] + [\text{grad div } \vec{G}_3, \vec{k}] = 0$$

⁷⁾ R. v. Mises. Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua (Verhandl. d. 3. Internat. Kongr. für Technische Mechanik. Stockholm. 24—29 Aug. 1930. T. II, s. 3. Въ этомъ докладѣ перечислены и современныя попытки создать новые виды идеализированныхъ средъ.

Откуда получаемъ скалярныя условія:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Y_z}{\partial z \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 X_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Y_z}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Y_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial z} = 0. \end{cases}$$

Для идеальной жидкости

$$(16) \quad X_y = Y_z = Z_x = 0,$$

и изъ уравненій (15) находимъ условія

$$(15') \quad \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z \partial y}; \quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial z},$$

которыя будутъ удовлетворены, если положимъ

$$(17) \quad X_x = Y_y = Z_z = -p,$$

гдѣ функція p непрерывна и имѣетъ непрерывныя производныя до второго порядка включительно. Отсюда однако еще не слѣдуетъ, что это единственно возможный случай удовлетворяющій условіямъ (15).

Только что разсмотрѣнный видъ упругихъ силъ, какъ извѣстно, связанъ съ изотропностью среды. Поэтому, если упругія силы сводятся только къ давленію, какъ это имѣетъ мѣсто для идеальныхъ жидкостей, это можетъ быть только въ однородной относительно структуры средѣ. Слѣдовательно для неоднородной среды, которая по существу не можетъ быть изотропной, теряется представленіе о давленіи какъ скалярѣ, а вмѣсто послѣдняго появляется тензоръ упругихъ силъ.

Замѣтимъ еще, что, если мы хотимъ привести соотвѣтствіе условія (17) и (13), то должчы имѣть ввиду, что (13) допускается для бесконечно малыхъ смѣщеній изъ положенія среды безъ упругихъ напряженій, въ то время какъ для жидкости предполагаемъ, что и въ состояніи покоя существуетъ давленіе (гидростатическое). Тогда слѣдовало бы въ уравненіи (13) писать

$$(18) \quad \Phi = -pI + LT,$$

для $X_x, X_y \dots$ — конечныхъ и u, v, w — проекцій скоро-

сти ν ; для вязкой жидкости и принимается такое соотношение. Подъ давлением p при этомъ подразумѣвается часто среднее арифметическое изъ трехъ главныхъ напряженій. Очевидно, что это есть новая предпосылка, и для случая движенія всякой жидкости нѣтъ давления какъ скаляра, а снова выступаетъ величина тензоріального характера.

Какъ мы видѣли, свойства самой среды должны выразиться въ значеніяхъ компонентъ оператора L . Очевидно, что эти компоненты должны еще зависѣть отъ выбора координатныхъ осей, ибо L переводитъ компоненты тензора T относительно опредѣленныхъ осей въ компоненты тензора Φ . Какъ извѣстно, при помощи закона сохранения энергіи доказывается, что L — симметричный операторъ. Тотъ же результатъ получается при предпосылкѣ о существованіи потенциала упругихъ силъ. Слѣдовательно, въ самомъ общемъ случаѣ можетъ быть 21 различная компонента. Для различныхъ классовъ анизотропныхъ средъ (кристалловъ) и это число соотвѣтственно понижается. Но при этомъ остается вопросъ, сколько же въ дѣйствительности, по нашимъ предпосылкамъ, нужно величинъ, чтобы опредѣлить эти свойства, независимо отъ координатныхъ системъ.

Легко показать, что въ общемъ случаѣ переходъ отъ тензора T къ тензору Φ опредѣляется шестью величинами. Ихъ можно выбрать слѣдующимъ образомъ, принимая во вниманіе, что всякій тензоръ вполне опредѣленъ соотвѣтствующей поверхностью второго порядка⁸⁾. При этомъ компоненты тензора T въ общемъ случаѣ даны не равенствами (12), а общими выраженіями, содержащими и члены второй степени относительно компонентъ аффинора A .

Пусть $M\xi\eta\zeta$ главный тріедръ тензора T , компоненты котораго по отношенію къ этому тріедру находятся въ схемѣ:

$$(19) \quad T \begin{cases} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{cases} .$$

Очевидно, что оси $M\xi\eta\zeta$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ можно найти, если мы знаемъ аффиноръ A . Пусть $M\xi_1\eta_1\zeta_1$ главный тріедръ тензора Φ , который для этого тріедра опредѣленъ схемой

$$(20) \quad \Phi \begin{cases} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_1 \end{cases} .$$

⁸⁾ А. Билимовић. Геометријске основе рачуна са диадама. I Диада и аффинор, стр. 139. Београд. 1930.

Для того, чтобы преобразовать поверхность второго порядка соответствующую тензору T в поверхность соответствующую тензору Φ , очевидно нужно знать шесть величинъ, на примѣръ, три угла Euler-а, которыми опредѣляется положеніе тріедра $M\xi_1\eta_1\zeta_1$ по отношенію къ $M\xi\eta\zeta$, и три отношенія полуосей эллипсоидовъ.

Обозначимъ эти углы черезъ φ , ψ , ϑ и положимъ

$$(21) \quad X_1 = l\varepsilon_1, \quad Y_1 = m\varepsilon_2, \quad Z = n\varepsilon_3.$$

Тогда шесть чиселъ: φ , ψ , ϑ , l , m , n , которыя мы будемъ называть *характеристическими*, вполне опредѣляютъ преобразование тензора T въ Φ въ наиболѣе общемъ случаѣ и зависятъ только отъ свойствъ среды.

Если по данному тензору T будутъ найдены X_1 , Y_1 , Z_1 и тріедръ $M\xi_1\eta_1\zeta_1$, то можно вычислить и компоненты X_x , Y_y . . . тензора Φ въ любой заданной системѣ координатъ.

Такимъ образомъ въ общемъ случаѣ движенія непрерывной среды въ уравненіяхъ (8) и (9) помимо четырехъ искомымъ функцій x , y , z , ϱ (или v_x , v_y , v_z , ϱ) будетъ еще шесть неизвѣстныхъ характеристическихъ чиселъ. Слѣдовательно появляется необходимость еще въ шести уравненіяхъ. R. Mises (l. c.) указываетъ, что, такъ какъ уравненія движенія непрерывной среды содержатъ шесть неизвѣстныхъ компонентъ тензора Φ , то нужны дополнительныя условія связывающія эти компоненты съ плотностью, временемъ, векторомъ положенія, скоростью и ихъ производными. Конечно, съ точки зрѣнія чисто математической, т. е. для того, чтобы получить систему столькихъ уравненій, сколько неизвѣстныхъ функцій, это вполне допустимо. Но вообще представляется затруднительнымъ выражать физическія свойства среды или матеріальной системы въ зависимости отъ опредѣленной координатной системы. На примѣръ, въ частномъ случаѣ идеальной жидкости мы вѣдь имѣемъ дополнительное условіе $\varrho = f(p)$, въ которое не входятъ никакія величины, связанныя съ нѣкоторой координатной системой.

3. Характеристическія уравненія.

Въ общемъ случаѣ, къ уравненіямъ (8) и (9) нужно присоединить шесть уравненій, въ которыхъ дается связь между величинами опредѣляющими свойства среды. Если, на примѣръ, не вводитъ въ нихъ другія величины, кромѣ φ , ψ , ϑ , l , m , n и ϱ , то мы можемъ написать эти „характеристическія“ уравненія въ слѣдующемъ видѣ:

$$(22) \quad f_i(\varphi, \psi, \vartheta, l, m, n, \varrho) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Тогда очевидно система десяти уравнений (8), (9), (22) может послужить для нахождения десяти неизвестных функций: $x, y, z, \varrho, \varphi, \psi, \vartheta, l, m, n, \varrho$.

Въ частнымъ случаяхъ, что зависитъ отъ предпосылокъ относительно свойствъ среды, число этихъ функций можетъ быть меньше десяти.

Остановимся на нѣкоторыхъ замѣчаніяхъ касающихся извѣстныхъ характеристическихъ уравненій.

Въ случаѣ идеальной жидкости мы имѣемъ лишь одну дополнительную функцію p , которая связана съ плотностью уравненіемъ

$$(23) \quad \varrho = f(p).$$

Этотъ видъ характеристическаго уравненія появляется при всѣхъ предпосылкахъ относительно идеальной упругой жидкости, т. е. при слѣдующихъ ея свойствахъ: однородности по структурѣ, изотропности и справедливости равенствъ (16) и (17) при конечныхъ перемѣщеніяхъ. При этихъ допущеніяхъ уравненія движенія принимаютъ извѣстный видъ, въ которомъ содержится пятая функція p . Но нужно имѣть въ виду, что вообще эта функція только и существуетъ при вышеуказанныхъ предпосылкахъ. Р. Duhamel⁹⁾ указываетъ, что видъ характеристическаго уравненія не внушаетъ никакихъ сомнѣній лишь въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ: 1) жидкость несжимаема ($\varrho = \text{const.}$), 2) жидкость идеальна, упруга и совершенный проводникъ теплоты, такъ что находится въ изотермическомъ состояніи и 3) она — полный непроводникъ теплоты. Тогда имѣетъ мѣсто уравненіе (23). Если же задавать, какъ это часто дѣлается, характеристическое уравненіе въ видѣ:

$$(24) \quad \chi(\varrho, p, \theta) = 0,$$

гдѣ θ температура, то появленіе этой шестой функціи координатъ и времени должно повлечь составленіе шестого уравненія.

Послѣднее берется изъ термодинамики, на примѣръ по Duhamel-у (l. c.):

$$(25) \quad cd\theta - \frac{l}{\varrho^2} d\varrho = 0,$$

⁹⁾ Р. Duhamel. Hydrodynamique. Elasticité. Acoustique p. p. 99—103. Paris. 1891. Этимъ замѣчаніемъ я хотѣлъ бы дополнить сказанное по этому вопросу въ моей статьѣ: „О перманентномъ вращеніи изолированной жидкой массы“ (Зап. Русск. Научн. Инст. въ Бѣлградѣ, вып. 4, стр. 55, 1931).

гдѣ s — удѣльная теплота при постоянномъ объемѣ, l — теплота расширенія. А тогда, исключая θ изъ уравненій (24) и (25), снова приходимъ къ характеристическому уравненію вида (23).

Помимо температуры часто вводятъ въ характеристическое уравненіе и другія величины какъ, напримѣръ, нѣкоторые параметры, характеризующіе различный химическій составъ и т. п. По существу подобнаго вида характеристическія уравненія должны были бы относиться къ неоднороднымъ по структурѣ тѣламъ. Но, какъ мы видѣли, понятіе давленія какъ скаляра относится лишь къ идеальной изотропной и однородной по составу жидкости. Слѣдовательно: во-первыхъ, въ такой средѣ мы вмѣсто скаляра p будемъ имѣть тензоръ давленій, а, во-вторыхъ, уравненія движенія неоднородной жидкости и даже однородной анизотропной не совпадаютъ съ уравненіями для идеальной изотропной жидкости. Поэтому и такія характеристическія уравненія теряютъ строгость классической механики. При новыхъ допущеніяхъ, говоря, напримѣръ, о жидкостяхъ неоднородныхъ, „очень мало“ отличающихся отъ однородныхъ, систему подобнаго уравненій можно было бы считать приближенной. Тогда слѣдовало бы конечно въ каждомъ конкретномъ случаѣ отыскивать и степень приближенности. Если сохранить терминологию V. Вѣркнес-а¹⁰⁾, то можно назвать баротропными жидкости, въ которыхъ поверхности одинаковой плотности совпадаютъ съ поверхностями одинаковаго давленія (характеристическое уравненіе (23)), но бароклиными жидкостями нужно назвать тѣ, для которыхъ это условіе не выполняется. Это можетъ имѣть не только тотъ смыслъ, что эти два семейства поверхностей не совпадаютъ, но и что поверхностей $p = \text{const.}$ нѣтъ, такъ какъ нѣтъ и p (давленія) какъ скаляра.

И для вязкой жидкости строго выведены лишь уравненія, когда она несжимаема. Если же взять сжимаемую вязкую жидкость, то нужно присоединить характеристическое уравненіе, напримѣръ (23), а это, какъ указалъ W. Voigt¹¹⁾ тоже внушаетъ сомнѣнія, по тѣмъ же соображеніямъ, которыя сейчасъ изложены.

Наконецъ, въ теоріи упругости роль характеристическихъ уравненій приписывается условіямъ Saint-Venant-а. Эти условія, какъ извѣстно, связываютъ компоненты тензора T , которыя не являются вполнѣ независимыми, такъ какъ ихъ производныя должны удовлетворять шести дифференціальнымъ уравненіямъ. Если принять законъ Гука, то можно выразить $\epsilon_x \dots \gamma_{yz}$ черезъ $X_x \dots Z_z$, компоненты тензора Φ ,

¹⁰⁾ См. P. Appell. Traité de méc. rat. T. III. p. 562. 1924.

¹¹⁾ W. Voigt. Kompendium der theoretischen Physik. S. 463. B. I. 1895.

и коэффициенты оператора L . Подставляя найденныя выраженія въ условія Saint-Venant-a, мы получаемъ шесть уравненій, которыя должны удовлетворять $X_x \dots$, ихъ производныя и остальные величины сюда входящія.

Очевидно, что приведенное разсужденіе тѣсно связано съ закономъ Гука и, слѣдовательно, съ возможностью исключить $\epsilon_x \dots$ изъ условій Saint-Venant-a, и конечно снова съ координатной системой.

Можно также при помощи условій Saint-Venant-a получить новыя, которыя будутъ связывать главныя деформаціи и углы главныхъ осей эллипсоида деформацій съ координатными осями. Для этого нужно лишь въ условіяхъ Saint-Venant-a подставить вмѣсто $\epsilon_x \dots \gamma_{xy}$ ихъ выраженія черезъ $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Очевидно, что и эта постановка вопроса не является наиболѣе общей, такъ какъ въ ней лежитъ предпосылка о специальномъ видѣ функциональной зависимости тензоровъ Φ и T .

4. Система уравненій опредѣляющихъ движеніе неоднородной среды.

Итакъ, резюмируя вышесказанное, мы приходимъ къ слѣдующей системѣ уравненій въ общемъ видѣ, которыми опредѣляется движеніе непрерывной неоднородной среды:

1) Три уравненія движенія, эквивалентныя векторіальному

$$(7) \quad \rho \dot{w} = \rho \vec{F} + \nabla \Phi,$$

2) уравненіе непрерывности

$$(9) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

3) уравненія, дающія связь (законъ, который является одной изъ предпосылокъ) внутреннихъ силъ съ перемѣщеніемъ среды; ихъ можно задать, какъ зависимость между тензоромъ Φ и афиноромъ A или, какъ это вообще принято, тензоромъ T :

$$(26) \quad \Phi = \text{fonct. } A \quad \text{или} \quad \Phi = \text{fonct. } T.$$

Этой связью уже выражаются нѣкоторыя свойства среды, напримѣръ, ея однородность или неоднородность, упругость и т. д. Въ болѣе общемъ случаѣ, конечно, нужно принять во вниманіе, что тензоръ Φ можетъ зависѣть не только отъ тѣхъ деформацій, которыя происходятъ въ данный моментъ, но и отъ напряженнаго состоянія тѣла безъ

таковыхъ. Обозначая послѣднее его значеніе черезъ Φ_* будемъ имѣть

$$(26') \quad \Phi = \Phi_* + \text{fonct. } A.$$

При этомъ, слѣдовательно, вводится шесть новыхъ неизвѣстныхъ величинъ — компоненты тензора Φ_* .

Если мы предположимъ, что компоненты тензора Φ_* зависятъ отъ всего предыдущаго состоянія сферы (принципъ наслѣдственности), то получимъ изъ системы (7) систему интегродифференціальныхъ уравненій V. Volterra ¹²⁾. Въ наиболѣе простомъ случаѣ „линейной наслѣдственности“ появляются новыя неизвѣстныя величины — коэффициенты наслѣдственности.

Когда заданы силы (\vec{F}), система предыдущихъ уравненій, въ которой неизвѣстныя компоненты тензора Φ въ трехъ уравненіяхъ (7) могутъ быть замѣнены при помощи системы (26) компонентами T (или A) и величинами входящими сюда, будетъ содержать слѣдующія неизвѣстныя функціи: координаты частицъ среды (x, y, z), плотность ρ и столько величинъ независимыхъ, сколькими опредѣляется переходъ отъ A къ Φ . Специальными условіями относительно среды можно вводить дополнительныя характеристическія числа, помимо тѣхъ шести, о которыхъ мы говорили выше.

4) Поэтому, обозначая вообще характеристическія числа черезъ $\eta_1 \dots \eta_n$, мы должны дать еще n уравненій характеристическихъ.

$$(27) \quad f_i (\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n) = 0 \quad i = 1, 2 \dots n,$$

которыя могутъ содержать и другія величины, какъ плотность, наприимѣръ, что зависитъ отъ физическихъ свойствъ среды. Послѣднія мы, очевидно, должны считать заданными.

5) Кромѣ приведенныхъ должны быть еще заданы и пограничныя и начальныя условія.

Къ сожалѣнію недоступность въ настоящій моментъ необходимой литературы, какъ работъ С. W. Oseen-а объ анизотропныхъ жидкостяхъ и другихъ, не даетъ мнѣ возможность остановиться болѣе подробно на развитіи ряда вопросовъ связанныхъ съ вышеизложеннымъ. Но я надѣюсь въ другой работѣ продолжить эти изслѣдованія, въ особенности въ направленіи классификаціи различныхъ средъ.

¹²⁾ V. Volterra. Leçons sur les fonctions de lignes. Paris. 1913, p. 88 и др. труды.

Проф. В. В. Фармаковскій.

О ВЫБОРѢ НАИВЫГОДНѢЙШАГО ПОДЪЕМА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЖЕЛѢЗНОДОРОЖНЫХЪ ЛИНІЙ.

Часть II¹⁾.

Сравненіе вариантовъ трасъ.

I. Введеніе.

Вопросъ о выборѣ наивыгоднѣйшаго подъема при проектированіи желѣзнодорожныхъ линій и въ частности вопросъ о сравненіи вариантовъ трасъ продолжаетъ интересовать специалистовъ и за послѣднее время литература предмета обогатилась еще весьма цѣнными работами профессора К. Р. Савича²⁾, благодаря которымъ автору удалось значительно усовершенствовать тотъ способъ рѣшенія задачи, который имъ былъ предложенъ ранѣе¹⁾, и довести его до той степени точности, которая дѣлаетъ его практически приемлемымъ и весьма простымъ и удобнымъ въ примѣненіи на практикѣ. Поэтому я и позволяю себѣ еще разъ злоупотребить вниманіемъ читателей и изложить мое рѣшеніе задачи.

Коммерческой характеристикой всякой жел. дор. линіи является сумма $A + M + N$, гдѣ

A — годовые расходы службы капитала, затраченнаго на постройку (проценты и погашеніе),

M — годовые расходы транспорта

и *N* — годовые расходы по содержанію и ремонту линіи.

¹⁾ Часть I см.: Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ, вып. 4, стр. 127—151 (подъ тѣмъ же заглавіемъ).

²⁾ Prof. K. Savić. Zugförderungskostenkoeffizient als Vergleichsmaßstab der verschiedenen Eisenbahnlіnien „Verkehrstechnische Woche“, № 49, 1930.

Проф. К. Савичъ. Проблеми грађења и експлоатације железница (литограф.) 1931.

Проф. К. Савичъ. Наивыгоднѣйшій вѣсь поѣзда и сравненіе вариантовъ ж. д. трасъ. „Инженеръ“, № 4-5, 1931 г. Бѣлградъ.

Тотъ вариантъ трасы является наивыгоднѣйшимъ, для котораго сумма $A+M+N$ оказывается наименьшей. Это положеніе не вызываетъ теперь уже никакихъ возраженій.

Опредѣленіе членовъ A и N не представляетъ затрудненій и здѣсь мы на этомъ не будемъ и останавливаться, между тѣмъ для вычисленія члена M — расходовъ транспорта — примѣняются различные приемы и въ выборѣ этихъ приемовъ и лежитъ, такимъ образомъ, центръ тяжести задачи выбора наивыгоднѣйшаго варианта трасы.

Въ ранѣе указанной русской работѣ проф. К. Савичъ предлагаетъ принимать это M (у Савича S), какъ

$$M = ns \sum \alpha t,$$

гдѣ n — число паръ поѣздовъ въ годъ,

t — время хода поѣзда по данной линіи туда и обратно,

s — стоимость одного поѣздо-часа при полномъ напряженіи паровоза,

и α — коэффициентъ напряженности паровоза, который для участковъ, гдѣ паровозъ работаетъ съ полнымъ форсированіемъ, равенъ $\alpha = 1$; при уменьшеніи форсированія паровоза α уменьшается до своего наименьшаго значенія, когда регуляторъ на паровозѣ закрытъ и такимъ образомъ форсированіе рѣшетки V/R является минимальнымъ. Законъ измѣненія α проф. К. Савичъ принимаетъ какъ линейную зависимость α отъ подъема $S^0/_{00}$.

Какъ видно изъ изложеннаго, способъ сравненія вариантовъ трасъ, предложенный проф. К. Р. Савичемъ, представляетъ способъ логически совершенно правильный и практически достаточно точный, а потому и заслуживающій полного вниманія специалистовъ. По самому своему существу онъ представляетъ значительное усовершенствованіе способа von Borries-а³⁾, а именно: 1) вмѣсто вычисленія виртуальныхъ коэффициентовъ (по времени хода поѣзда) у von Borries-а, что не даетъ возможности непосредственно сравнивать полученные результаты съ значеніями членовъ A и N , у проф. К. Савича мы получаемъ расходы транспорта M въ денежныхъ единицахъ, что позволяетъ намъ брать характеристическую сумму $A+M+N$ и 2) способъ проф. К. Савича учитываетъ непостоянство форсированія паровоза, чего до сихъ поръ не учитывали другіе способы сравненія трасъ и что между тѣмъ иногда имѣетъ рѣшающее значеніе.

³⁾ См. Зап. Рус. Научн. Инст., вып. 4, стр. 129 — въ первой части моей работы.

Единственное, что можно выставить противъ метода проф. К. Р. Савича — это то, что онъ не доведенъ до конца, т. е., что не составлены таблицы или графиконы для практическаго пользованія методомъ со стороны рядовыхъ инженеровъ-трассировщиковъ, которые не достаточно владѣютъ методами тяговыхъ расчетовъ, чтобы самимъ продѣлывать индивидуальныя расчеты времени хода поѣзда и т. д. Кромѣ того нельзя закрывать глаза на то, что составленіе такихъ таблицъ или графиковъ представляетъ для метода Савича весьма значительныя затрудненія, особенно если примѣнять такъ называемые точные способы расчета времени хода ⁴⁾.

Это обстоятельство было причиной того, что инж. П. Миленковичъ, директоръ отдѣленія по постройкѣ ж. д. въ Югославіи, предложилъ мнѣ такъ обработать мой прежній методъ, чтобы имъ легко могли бы пользоваться рядовые инженеры отдѣленія.

Методъ автора, примѣняемый уже въ теченіи нѣсколькихъ лѣтъ ⁵⁾ и описанный въ I части моей работы, состоитъ въ томъ, что расходы транспорта M принимаются равными

$$M = \frac{B}{\epsilon}$$

гдѣ B — стоимость топлива на поѣздную службу въ годъ, а ϵ — коэффициентъ, представляющій отношеніе между расходами на топливо и суммой всѣхъ расходовъ транспорта.

Примѣчаніе: въ I части работы подъ ϵ понималось отношеніе расходовъ на топливо ко всѣмъ расходамъ эксплуатаціи; при такомъ (старомъ) пониманіи значенія ϵ конечно меньше; мы усвоили новое пониманіе ради аналогіи съ коэффициентомъ α Савича; по существу отъ этого ничего не мѣняется.

Такъ какъ значенія коэффициента ϵ несомнѣнно переменны и не могутъ не зависѣть отъ подъема $S^0/00$ (или вѣрнѣе отъ степени форсированія паровоза), а между тѣмъ законъ измѣненія ϵ въ функціи отъ S , т. е. $\epsilon = \varphi(S^0/00)$ не былъ нами выясненъ, то задача нахождения наивыгоднѣйшаго подъема для линіи съ постояннымъ профилемъ я рѣшалъ при помощи практическихъ предѣловъ для ϵ , т. е. по значеніямъ ϵ_{\max} и ϵ_{\min} и это рѣшеніе давало обычно практически допу-

⁴⁾ Напр. графическій расчетъ времени хода по способу А. И. Липца или подобн.

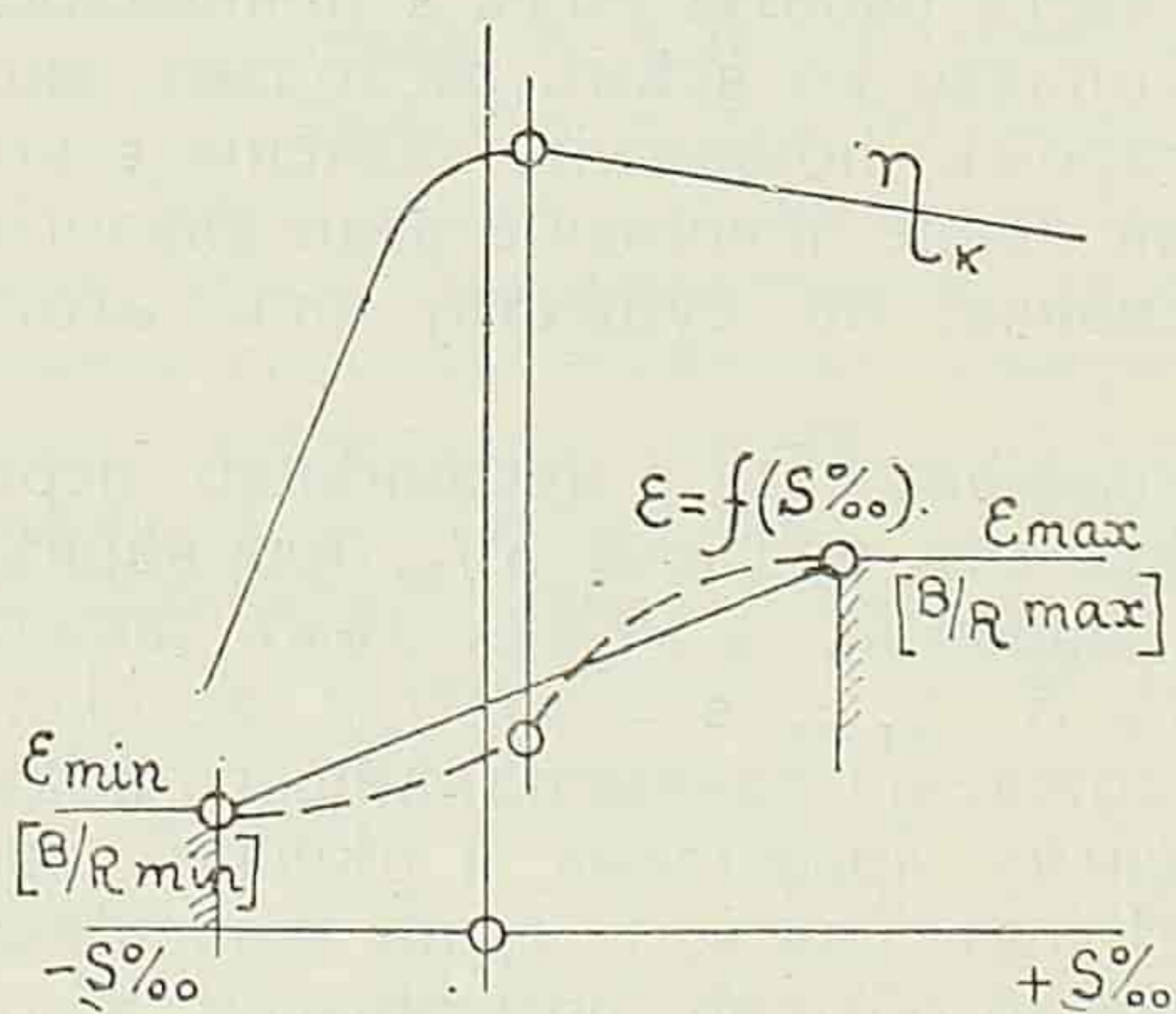
⁵⁾ Впервые предложеніе ввести коэффициентъ ϵ для вычисленія расходовъ транспорта сдѣлано авторомъ еще въ 1923 г., см. „Инженеръ“ (Бѣлградъ) № 1, стр. 23, гдѣ онъ обозначенъ β (въ отношеніи ко всѣмъ расходамъ эксплуатаціи).

стимулю степень точности. Между тѣмъ я самъ считалъ свой способъ недостаточно точнымъ и разработаннымъ для случая выбора наивыгоднѣйшаго варианта трасъ и находилъ, что пользоваться имъ съ успѣхомъ въ этомъ случаѣ можно будетъ лишь тогда, „когда мы сможемъ построить достаточно точно $\varepsilon = \varphi(S^0/_{00})$ “ (ч. I, стр. 151).

Работа проф. К. Р. Савича, въ которой введенъ аналогъ коэффициента ε — коэффициентъ неравномерности форсирования паровоза α — натолкнула меня на мысль усовершенствовать свой методъ введеніемъ зависимости $\varepsilon = \varphi(S^0/_{00})$, аналогично $\alpha = f(S^0/_{00})$ у проф. Савича. Это было тѣмъ проще сдѣлать, что проф. К. Савичъ ясно показалъ (при другомъ случаѣ, а именно при обменѣ мнѣніями по поводу моей работы о наивыгоднѣйшемъ форсированіи паровознаго котла ⁶⁾, что значеніе коэффициента ε зависитъ отъ форсирования рѣшетки паровоза B/R и только отъ нея, ибо всѣ другіе параметры остаются постоянными и независимыми отъ профиля пути $S^0/_{00}$.

При дальнѣйшемъ рѣшеніи задачи считаемъ установленными слѣдующія основныя положенія:

1) Въ грузовомъ (тяжеломъ) направленіи мы принимаемъ максимальное допустимое форсированіе рѣшетки (въ нашихъ примѣрахъ $B/R=470 \text{ kg/m}^2\text{h}$) и по немъ опредѣляемъ наибольшій вѣсъ поезда Q_1 при напередъ заданной минимальной скорости на наиболѣе тяжеломъ подъемѣ $S_1^0/_{00}$ (въ нашихъ примѣрахъ $V_1 = 15 \text{ km/h}$) при тягѣ паровозомъ опредѣленнаго типа (въ примѣрахъ паровозъ 1—Е—О Ю. Д. Ж. Д.).



Фиг. 1.

3) Принято, что зависимость $\varepsilon = \varphi(S^0/_{00})$ имѣетъ линейный характеръ въ предѣлахъ между значеніями ε_{\max} при B/R_{\max}

Это опредѣляетъ намъ число паръ поѣздовъ въ сутки $n = \frac{\Pi_1}{Q_1 p}$, гдѣ Π_1 — пропускная способность дороги въ грузовомъ направленіи въ брутто-тоннахъ въ годъ, а p — число рабочихъ дней въ году ($p \cong 300$).

2) Максимальное допустимое форсированіе рѣшетки паровоза принимается въ соотвѣтствіи съ типомъ паровоза и сортомъ топлива ⁶⁾.

⁶⁾ W. F a r m a k o w s k y. Die betriebswirtschaftlichste Arbeitslage Lokomotivkessels. „Glaser's Annalen“, 1930, № 1281, стр. 115.

и ϵ_{\min} при B/R_{\min} , которое мы имѣемъ при закрытомъ регуляторѣ. Это предположеніе, правда, не вполне точно и въ дѣйствительности законъ измѣненія ϵ въ функціи отъ $S^0/_{00}$ имѣетъ характеръ, изображенный на фиг. 1, пунктиромъ, что объясняется съ одной стороны постоянствомъ величины удѣльнаго сопротивленія отъ единицы измѣренія подъема $S(L+T+Q)_{s=1} = \text{const}$ и характеромъ измѣненія величины полезнаго дѣйствія котла η_k , кривая котораго даетъ перегибъ при $B/R \cong 150$ и при дальнѣйшемъ уменьшеніи B/R значеніе η_k рѣзко падаетъ.

4) Перечень расходовъ транспорта задержанъ у насъ по проф. К. Савичу ⁷⁾, а именно мы учитываемъ нижеслѣдующіе расходы:

- | | |
|---|------------------------|
| a) Стоимость топлива | } Паровозные матеріалы |
| b) Стоимость воды | |
| c) Стоимость смазки | |
| d) Стоимость активного паровозо-часа, съ принятіемъ во вниманіе расходовъ службы капитала въ отношеніи паровоза, депо и главныхъ мастерскихъ; матеріаловъ и рабочей силы въ депо; стоимости капитальнаго ремонта въ главныхъ мастерскихъ. | |
| e) Стоимость активныхъ вагоно-часовъ. | |
| f) Стоимость поѣздного персонала. | |

Въ большинствѣ случаевъ мы задерживаемъ и конкретныя значенія отдѣльныхъ факторовъ по проф. Савичу, лишь исправляя ихъ тамъ, гдѣ это мнѣ казалось необходимымъ.

II. Опредѣленіе значеній ϵ_{\max} и ϵ_{\min} .

Въ дальнѣйшемъ мы опредѣляемъ значенія ϵ_{\max} при $B/R = 470 \text{ kg/m}^2\text{h}$ и ϵ_{\min} при $B/R = 85 \text{ kg/m}^2\text{h}$ при закрытомъ регуляторѣ, учитывая, что при этомъ измѣняется по величинѣ только группа расходовъ a), b), c) и остается постоянной группа расходовъ b), e) и f), если всѣ расходы мы относимъ къ паровозо-часу, т. е. часу работы паровоза во главѣ поѣзда въ движеніи, ибо такимъ образомъ установить значенія ϵ_{\max} и ϵ_{\min} не представляетъ никакихъ затрудненій.

- a) Стоимость топлива (уголь $h_{\text{п}} = 4500 \text{ kcal/kg}$).

Наивыгоднѣйшее наибольшее форсированіе рѣшетки принято $B/R = 470 \text{ kg/m}^2\text{-часъ}$. Поэтому часовой расходъ угля при $R = 5 \text{ m}^2$ составляетъ

⁷⁾ Кромѣ схемы расчета по проф. К. Р. Савичу существуетъ много иныхъ схемъ расчета, см. напр.: С. Capelle, A. Baumann u. R. Feindler: *Zugbildungskosten, Zugförderungskosten und ihre Wechselbeziehungen*. TWB. Heft 41.

Ehrensberger. Die Kosten einer Zugfahrt in Abhängigkeit von der Fahrweise und der Anstrengung des Triebfahrzeuges. *Organ. f. F. d. E.* 1931, Heft 21—22.

2,35 t/часъ, а съ добавленіемъ 8% на растопку и поддержаніе пара на стоянкахъ — 2,54 t/часъ. Стоимость 1 t угля, принимая во вниманіе основную цѣну на рудникѣ за 1 t — 220 дин./t, и добавляя стоимость транспорта съ рудника до депо, расходы храненія, разгрузки и нагрузки на тендеръ получаемъ 1 t франко тендеръ паровоза 285 дин./t, что даетъ часовой расходъ на топливо $285 \cdot 2,54 = 723,90 =$ кругло 724 дин./часъ.

б) Стоимость воды.

При нормальной испарительной способности нашего угля $D/B = 4$ расходъ пара составляетъ $4 \cdot 2,35 = 9,400$ kg. Увеличиваемъ это на 10%, считаясь съ расходами поливки угля, чистки паровоза и потерь воды инжекторами и пара предохранительными клапанами и свисткомъ. Такимъ образомъ расходъ воды $9,4 \cdot 1,1 = 10,34$ m³/часъ, что при цѣнѣ воды 2,5 дин./m³ составляетъ расходъ $2,5 \cdot 10,34 = 25,85$ дин./часъ.

с) Стоимость смазки.

Количество потребленной смазки принимаемъ по 1 kg на всякую 1 t сожженного топлива, а стоимость смазки — 4,5 дин./kg. Тогда расходы на смазку составляютъ всего $4,5 \cdot 1,5 \cdot 2,54 = 17,15$ дин./часъ.

А всего по пунктамъ а), б) и с) — т. е. расходы на паровозные матеріалы составляютъ $723,90 + 25,85 + 17,15 = 766,90 =$ кругло 767 дин./часъ.

$$b = 767.$$

При закрытомъ регуляторѣ мы принимаемъ расходъ топлива въ 425 kg/часъ и такимъ образомъ получаемъ аналогично:

а) стоимость топлива	$285 \cdot 0,4725 = 134,66$	дин./часъ
б) „ воды	$1,1 \cdot 4,0 \cdot 4,375 \cdot 2,5 = 4,81$	„
с) „ смазки	$1,08 \cdot 4,5 \cdot 1,5 \cdot 0,4375 = 3,19$	„

Суммарно 142,66 „

то есть при закрытомъ регуляторѣ расходы на паровозные матеріалы составляютъ только 142,66 дин./часъ

$$b_0 = 142,66.$$

д) Стоимость активного паровозо-часа.

При вычисленіи стоимости активного паровозо-часа (то есть часа во главѣ поѣзда) надо принимать во вниманіе амортизацію стоимости паровоза, паровознаго депо, главныхъ мастерскихъ и стоимость ремонта паровоза въ годъ и эту годовую стоимость раздѣлить на число активныхъ паровозо-часовъ въ годъ.

1) Амортизація стоимости паровоза.

Цѣна паровоза 1 — Е — 0 франко фабрика 2.100,600 дин./шт. Сюда надо прибавить расходы около надзора за постройкой и приѣмкой и транспортные расходы 164.400 дин./шт., а всего 2.265,000 дин./шт. Считая нормальный срокъ службы паровоза 25 лѣтъ и стоимость его послѣ 25 лѣтъ службы всего 5% отъ первоначальной, получаемъ стоимость, подлежащую амортизаціи $0,95 \cdot 2.265,000 = 2.151,750$ дин./шт. Къ числу паровозовъ, необходимыхъ по графику, необходимо прибавить еще 15% отъ числа паровозовъ на паровозы больные, въ капитальномъ ремонтѣ и резервные. Такимъ образомъ стоимость одного рабочаго паровоза надо считать $1,15 \cdot 2.151,750 = 2.474,513$ дин./шт, что при амортизаціи въ 25 лѣтъ изъ 7% годовыхъ на долгъ даетъ $0,0858 \cdot 2.474,513 = 212,313$ дин./шт. въ годъ.

2) Амортизація стоимости деповскихъ устройствъ

Принимаемъ, что депо должны принять 30% всѣхъ паровозовъ и что одно мѣсто въ депо со всѣми устройствами, какъ то поворотный кругъ, водоснабженіе и т. д. обходится около 150000 дин./стойло. Тогда сумма, приходящаяся на 1 паровозъ въ работѣ составляетъ $0,3 \cdot 1,15 \cdot 150000 = 51,750$ дин./шт., что при прежнихъ нормахъ амортизаціи (ввиду потребности до-

вольно частыхъ перестроекъ и расширній депо) составляетъ на 1 рабочей паровозъ въ годъ $0,0858.51750 = 4440$ дин./паровозо-годъ.

3) Амортизація стоимости главныхъ мастерскихъ.

Считаемъ, что паровозныя мастерскія, пропускающія до 150 паровозовъ въ годъ капитальнаго ремонта, стоятъ не менѣе 25000000 динаровъ. Амортизируя эту сумму въ 50 лѣтъ съ 7% интереса на остающуюся неамортизованной сумму получаемъ годовой расходъ на 1 отремонтированный паровозъ $\frac{0,0725.250000000}{150} = 120000$ дин., а считая, что каждый паровозъ проходитъ черезъ капитальный ремонтъ примѣрно разъ въ пять лѣтъ,

получаемъ на 1 рабочей паровозъ $120000.1,15.1/5 =$ кругло 27000 дин./годъ - пар.

4) Стоимость капитальнаго ремонта паровоза въ главныхъ мастерскихъ.

По даннымъ М. П. С. стоимость капитальнаго ремонта, падающая на 1 инвентарный паровозъ въ годъ, включая матеріаль, рабочую силу и расходы по страхованію рабочихъ, составляетъ 229350 дин., т. е. на нашъ паровозъ въ работѣ надо принимать $1,15.229350 = 263753$ дин./пар.-годъ.

5) Матеріалы и рабочая сила въ депо (малый и текущій ремонтъ).

По даннымъ М. П. С. принимаемъ на 1 инвентарный паровозъ 1 00 дин./мѣсяцъ на рабочую силу (сюда надо еще прибавить 8,5% на страхованіе рабочихъ) и по 1664 дин./годъ на матеріалы. Тогда расходъ по этой статьѣ на 1 рабочей паровозъ составляетъ $1,15 (12.1,085.1800 + 1664) =$

$$= 28854 \text{ дин./пар.-годъ, а всего по пунктамъ 1—5 получаемъ}$$

$$212313 + 4440 + 27000 + 263753 + 28854 = 536360 \text{ дин./пар.-годъ.}$$

Число активныхъ паровозо-часовъ во главѣ поѣзда принимаемъ 1600 въ годъ, тогда стоимость одного активнаго паровозо-часа составляетъ $\frac{536360}{1600} =$ кругло 335 дин./акт. пар.-часъ.

е) Стоимость активныхъ вагоно-часовъ.

Этотъ расходъ сравнительно незначителенъ и онъ въ дальнѣйшемъ простоты ради не дифференцированъ по тоннажу поѣзда, а принятъ въ среднемъ для поѣзда изъ 29 товарныхъ вагоновъ (стоимость 1 вагона 58500 дин.) и 1 служебнаго вагона (135000). При амортизаціи 95% стоимости въ теченіи 25 лѣтъ и при 7% интереса на неамортизованный капиталъ получаемъ годовую стоимость одного вагона

$$0,95 \frac{29.58500 + 135000}{30} \cdot 0,085 = 4976 \text{ дин./вагоно-годъ.}$$

Стоимость ремонта вагона принимаемъ на основаніи данныхъ М. П. С. около 2945 дин./вагоно-годъ. При работѣ вагона въ году 280 дней по 24 ч. стоимость одного активнаго вагонъ-часа составляетъ $\frac{4976 + 2945}{280.24} = 1,17$ дин./а. вагонъ-часъ, а поѣзда изъ 30 вагоновъ $1,17.30 = 35,1$ дин./часъ.

ф) Стоимость поѣздного персонала.

Принимаемъ къ учету слѣдующій поѣздной персоналъ:

1 машинистъ	= 2750 дин./мѣс.
2 ксчегара \times 1650	= 3300 "
1 главный кондукторъ	= 2750 "
20 кондукторовъ и тормазильщиковъ \times 1500	= 30000 "

Всего = 38800 "

а съ начисленіемъ 8,5% на страхованіе — 42098 дин./мѣс. При числѣ актив-

ныхъ (въ поѣздѣ) часовъ службы 134 въ мѣсяцъ получаемъ часовую стоимость поѣздного персонала $\frac{42098}{134} = 314$ дин./часъ.

g) Р е к а п и т у л я ц і я.

Общая сумма расходовъ транспорта такимъ образомъ составляетъ въ часъ

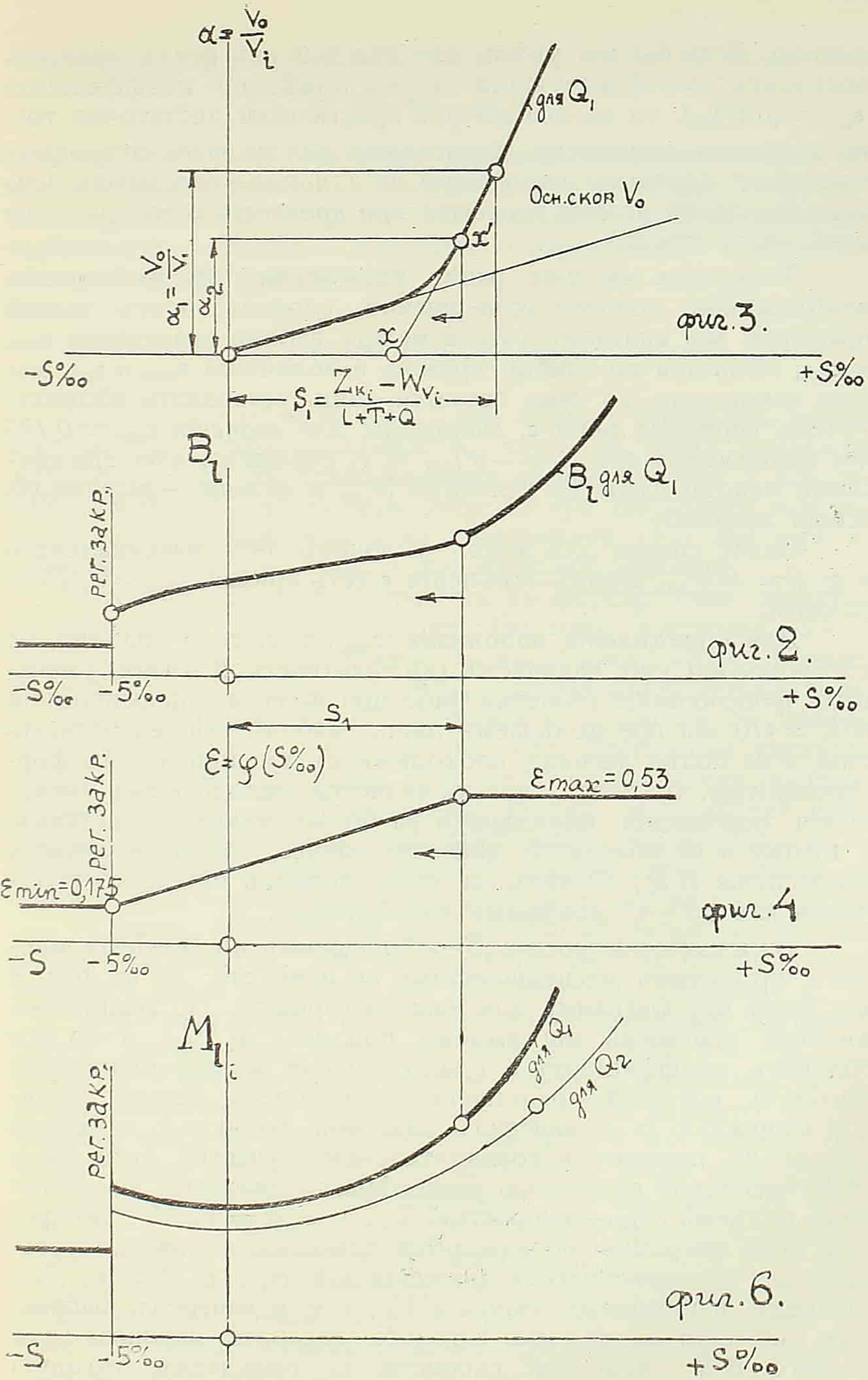
Расходы.	При полномъ напряженіи паровоза при $B/R=470$	При закрытомъ регуляторѣ $B/R=85$.
1. Паровозные матеріалы: топливо, вода, смазка	$b = 767,00$	$b_0 = 145,66$
2. Стоимость паровоза	335,00	335,00
3. Стоимость вагоновъ	35,10	35,10
4. Стоимость персонала	315,00	315,00
Сумма расходовъ въ часъ	$m = 1434,50$	$m_0 = 810,26$
Значеніе коэффиціента ϵ :	$\epsilon_{\max} = \frac{b}{m} = 0,53$	$\epsilon_{\min} = \frac{b_0}{m_0} \approx 0,175$

Такимъ образомъ для нашего паровоза являются установленными значенія $\epsilon_{\max} = 0,53$ при $B/R = 470 \text{ kg/m}^2\text{h}$ и $\epsilon_{\min} = 0,175$ при закрытомъ регуляторѣ. Онѣ вычислены, исходя изъ часовой стоимости работы паровоза, но онѣ, конечно, не измѣнятся, если мы въ дальнѣйшемъ будемъ все относить не къ единицѣ времени, а къ поѣздо-километру, разъ только, конечно, будетъ установлено, что паровозъ работаетъ при этихъ крайнихъ режимахъ работы. Въ промежуткѣ же между этими крайними значеніями ϵ мы будемъ считать, что ϵ мѣняется, примѣрно, по закону прямой, какъ это раньше было указано.

III. Построеніе закона $\epsilon = \varphi(S^0/_{00})$ и опредѣленіе расходовъ транспорта въ динарахъ на километръ въ годъ.

На стр. 140—144 первой части нашей работы нами былъ указанъ способъ построенія кривыхъ расхода топлива на поѣздо-километръ какъ функціи подъема $S^0/_{00}$. Поэтому безъ повторенія описанія построенія этихъ кривыхъ, мы ограничиваемся здѣсь приведеніемъ на фиг. 2 одной изъ подобныхъ кривыхъ расхода топлива⁸⁾. Простой переменной масштаба ор-

8) Въ дальнѣйшемъ мы даемъ только методъ, а потому ограничиваемся построеніемъ лишь одной примѣрной кривой для состава поѣзда Q_1 вмѣсто цѣлаго снопа кривыхъ для разныхъ составовъ.



динать эти же кривыя дають намъ и стоимость паровозныхъ материаловъ B_1 на 1 поѣздо-километръ (т. е. угля, воды и

смазки). Если бы мы умѣли для каждой изъ этихъ кривыхъ построить соответствующій законъ измѣненія коэффициента $\epsilon_Q = \varphi(S^0/_{00})$, то мы бы легко и практически достаточно точно получили стоимость транспорта для соответствующихъ поѣздовъ, притомъ отнесенную на 1 поѣздо-километръ, что представляетъ особыя удобства при практическомъ сравненіи вариантовъ трассъ.

Такъ какъ мы уже ранѣе упомянули, что въ первомъ приближеніи, которое совершенно удовлетворяетъ задачѣ практики, мы считаемъ, что ϵ между своими значеніями ϵ_{\max} и ϵ_{\min} мѣняется по закону прямой, а величины ϵ_{\max} и ϵ_{\min} мы уже вычислили, то намъ остается лишь установить абсциссы точекъ перелома линіи ϵ . Положеніе для значенія $\epsilon_{\min} = 0,175$ мы принимаемъ при $S = -5^0/_{00}$, т. е. считаемъ, что при движеніи поѣзда внизъ по уклонамъ $5^0/_{00}$ и больше — регуляторъ всегда закрытъ.

Иначе говоря для всѣхъ уклоновъ отъ максимальнаго и до $S = -5^0/_{00}$ законъ измѣненія ϵ есть прямая $\epsilon_{\min} = 0,175 = \text{const}$.

Для опредѣленія положенія ϵ_{\max} , т. е. того подъема, на которомъ мы уже начинаемъ (въ практической жизни) уменьшать форсированіе рѣшетки [ибо при полномъ форсированіи $B/R = 470$ мы преодолеваемъ лишь наиболѣе тяжелые подъемы, а на болѣе легкихъ проходимъ съ уменьшеннымъ форсированіемъ, что автоматически является послѣдствіемъ уменьшенія пополненія цилиндровъ на болѣе легкихъ участкахъ, а потому и ослабленнаго дѣйствія конуса, что и вызываетъ уменьшеніе B/R]. Отвѣтъ на этотъ вопросъ мы легко получаемъ изъ „ $S-\alpha$ “ діаграммъ von Boggies-a.

Такъ какъ построеніе „ $S-\alpha$ “ діаграммъ по Boggies-у многимъ читателямъ неспеціалистамъ не извѣстно, то на фиг. 3 мы даемъ эту діаграмму для нашего паровоза. По абсциссамъ въ этой діаграммѣ мы имѣемъ подъемы $\pm S^0/_{00}$, а по оси ординатъ коэффициентъ α („виртуальный коэффициентъ von Boggies-a), который представляетъ отношеніе между основной скоростью (т. е. напередъ заданной скоростью движенія поѣзда на прямомъ и горизонтальномъ участкѣ пути V_0) и дѣйствительной скоростью равномернаго движенія на затяжномъ подъемѣ $S^0/_{00}$ — скоростью V_i , т. е. $\alpha = V_0/V_i$. Построеніе этой діаграммы производится помощью основного уравненія для установившагося движенія поѣзда, т. е. $Z = W$. Для напередъ выбраннаго значенія V_i , т. е. и напередъ выбраннаго значенія α , мы изъ тягового паспорта паровоза (для даннаго $B/R = 470$) при скорости V_i получаемъ тяговую силу паровоза Z_{k_i} и отнявъ отъ нея сопротивленіе поѣзда при скорости V_i на прямой горизонтали, то есть, отнявъ

$$W_{V_i} = w_{Q_{V_i}} Q + w_{L_{V_i}} (L + T), \text{ получимъ ту часть силы тяги}$$

$$Z_{K_i} - W_{V_i} = W_i,$$

которая при данной скорости движениа V_i можетъ быть использована для преодоленія подъема. Это $W_i = (L + T + Q) \cdot S_i$, поэтому подъемъ S_i ‰, который отвѣчаетъ нашему напередъ выбранному значенію α для нашего паровоза ($L + T$) и нашего вѣса поѣзда Q , равенъ

$$S_i \text{ ‰} = \frac{Z_{K_i} - W_{V_i}}{L + T + Q}.$$

Кривая „ $S-\alpha$ “ пересѣкаетъ ось абсцисъ справа отъ начала координатъ и это показываетъ, что для всѣхъ подъемовъ меньшихъ, чѣмъ соответствующая абсцисса точки x пересѣченія кривой „ $S-\alpha$ “ съ осью абсцисъ при сохраненіи той же скорости движениа, что и на горизонтали (V_0) мы уже не должны примѣнять полного форсированія рѣшетки.

Практически этотъ переломъ въ форсированіи рѣшетки не происходитъ такъ внезапно. Поэтому діаграмма „ $S-\alpha$ “ ограничивается снизу прямой съ наклономъ, который опредѣляется $\alpha = 1,15$ при $S = 10$ ‰, которая сопрягается плавно со всѣми кривыми „ $S-\alpha$ “. Начиная отъ точекъ x' , обозначенныхъ знакомъ \leftarrow и налѣво мы уже фактически уменьшаемъ форсированіе рѣшетки. Это чисто практическая поправка въ діаграммахъ „ $S-\alpha$ “ оправдана вполне долготной практикой германскихъ ж. д., гдѣ діаграммами von Borries-a пользовались широко для вычисленій времени хода поѣзда въ теченіи двухъ десятковъ лѣтъ, да и сейчасъ еще пользуются.

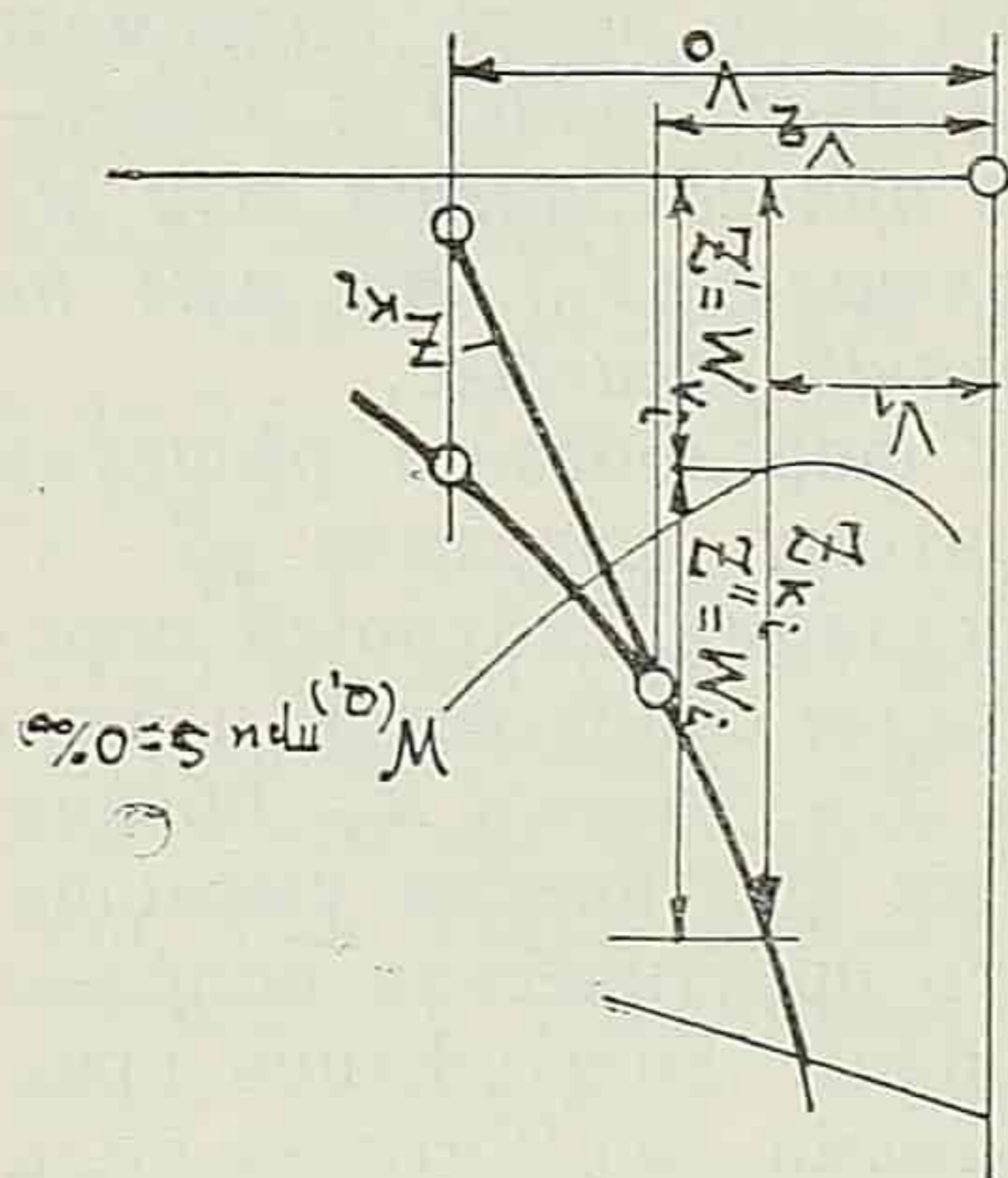
Такимъ образомъ на $S-\alpha$ діаграммѣ легко установить крайнее положеніе для ϵ_{\max} и тогда уже не представляетъ никакого труда перенести эти положенія на діаграмму ϵ .

Какъ результатъ примѣненія вспомогательной діаграммы „ $S-\alpha$ “ мы на фиг. 4 получаемъ пакетъ ломаныхъ $\epsilon = \varphi(S$ ‰), которыя и используемъ теперь въ связи съ діаграммой фиг. 2 расхода паровозныхъ матеріаловъ B_1 . Для cadaго состава поѣзда, какъ на фиг. 2, такъ и на фиг. 4 мы имѣемъ свои независимыя кривыя. На фиг. вычерчена лишь одна кривая.

Опредѣливъ крайнее положеніе ϵ_{\max} мы для этой точки изъ „ $S-\alpha$ “ діаграммы находимъ соответствующую скорость движениа V и отмѣчаемъ при найденной скорости V на тяговой характеристикѣ паровоза точку, отъ которой при дальнѣйшемъ увеличеніи скорости при облегченіи подъема мы уже пользуемся уменьшеннымъ форсированіемъ рѣшетки. Для cadaго вѣса поѣзда Q_i мы получаемъ свою точку. Минимальное форсированіе рѣшетки ($B/R_{\min} = 85$) мы принимаемъ при закрытомъ регуляторѣ на уклонѣ -5 ‰ (и боль-

шихъ) при скорости движенія около $V_0 = 35-40$ км/часъ независимо отъ вѣса поѣзда. Въ промежуткѣ скоростей V_2 до V_0 , то есть, въ періодѣ уменьшенія силы тяги, вслѣдствіе уменьшенія B/R мы считаемъ, что сила тяги можетъ быть уменьшаема по закону прямой. Тяговая характеристика паровоза представлена съ указаннымъ исправленіемъ на фиг. 5. Она и служитъ намъ для составленія кривыхъ расхода топлива, представленныхъ на фиг. 2, по формулѣ (см. часть I, стр. 140—142)

$$B_1 = 1,35 C_{i(V_i)} \cdot \frac{Z_{i(V_i)}}{270} \cdot \eta_k \frac{h_u \cdot B/R \cdot R}{i_1 - i_0}.$$



Фиг. 5

Послѣ всего сказаннаго не представляетъ труда построить и кривыя расходовъ транспорта (см. фиг. 6) по уравненію

$$M_{1i} = B_{1i} / \epsilon_i$$

гдѣ B_{1i} и ϵ_i должны, конечно, всякій разъ быть взяты для одного и того же Q_t и $S^0/_{00}$.

Такимъ образомъ мы получаемъ $M_{1i} = f(S^0/_{00})$ въ динарахъ на 1 поѣздо-километръ. Теперь нужно взять во вниманіе число поѣздовъ въ сутки n . Та же фи-

гура 6 можетъ послужить для произвольнаго числа поѣздовъ въ сутки лишь при помощи измененія масштаба ординатъ. Кромѣ того для полученія годовыхъ расходовъ транспорта на 1 километръ нашей линіи при движеніи въ грузовомъ направленіи мы должны еще полученныя значенія умножить на число рабочихъ дней въ году p (обычно принимаютъ 300), т. е.

$$M_{\text{груз.}} \frac{\text{дин.}}{\text{км.-год.}} = npM_{1i}$$

(съ постояннымъ $S^0/_{00}$) въ грузовомъ направленіи. Если паровозъ и въ обратномъ направленіи работаетъ при томъ же максимальномъ напряженіи рѣшетки ($B/R = 470$), что и въ грузовомъ направленіи, что не всегда имѣетъ мѣсто, то для вычисленія расходовъ транспорта въ обратномъ направленіи пользуемся тѣмъ же графикомъ фиг. 6 и при его помощи находимъ

$$M_{\text{обратн.}} \frac{\text{дин.}}{\text{км.-год.}} = npM'_{1i}$$

т. е. находимъ и полную стоимость транспорта, отнесенную на 1 км. пути въ годъ

$$M = M_{\text{груз.}} + M_{\text{обратн.}} = np[M_{1i} + M'_{1i}]$$

На фиг. 6 обращаетъ на себя вниманіе нѣкоторое незначительное повышеніе расходовъ транспорта M_{1i} на мелкихъ уклонахъ ($2-5\%$) по сравненію съ таковыми же расходами на горизонтали. Это является результатомъ нашего завѣдомо ошибочнаго допущенія измѣненія коэффициента ϵ по закону прямой (см. фиг. 1), а не по выпукло-вогнутой кривой. Однако эта ошибка почти совершенно нечувствительна при сравненіи вариантовъ и кромѣ того легко можетъ быть и исправлена.

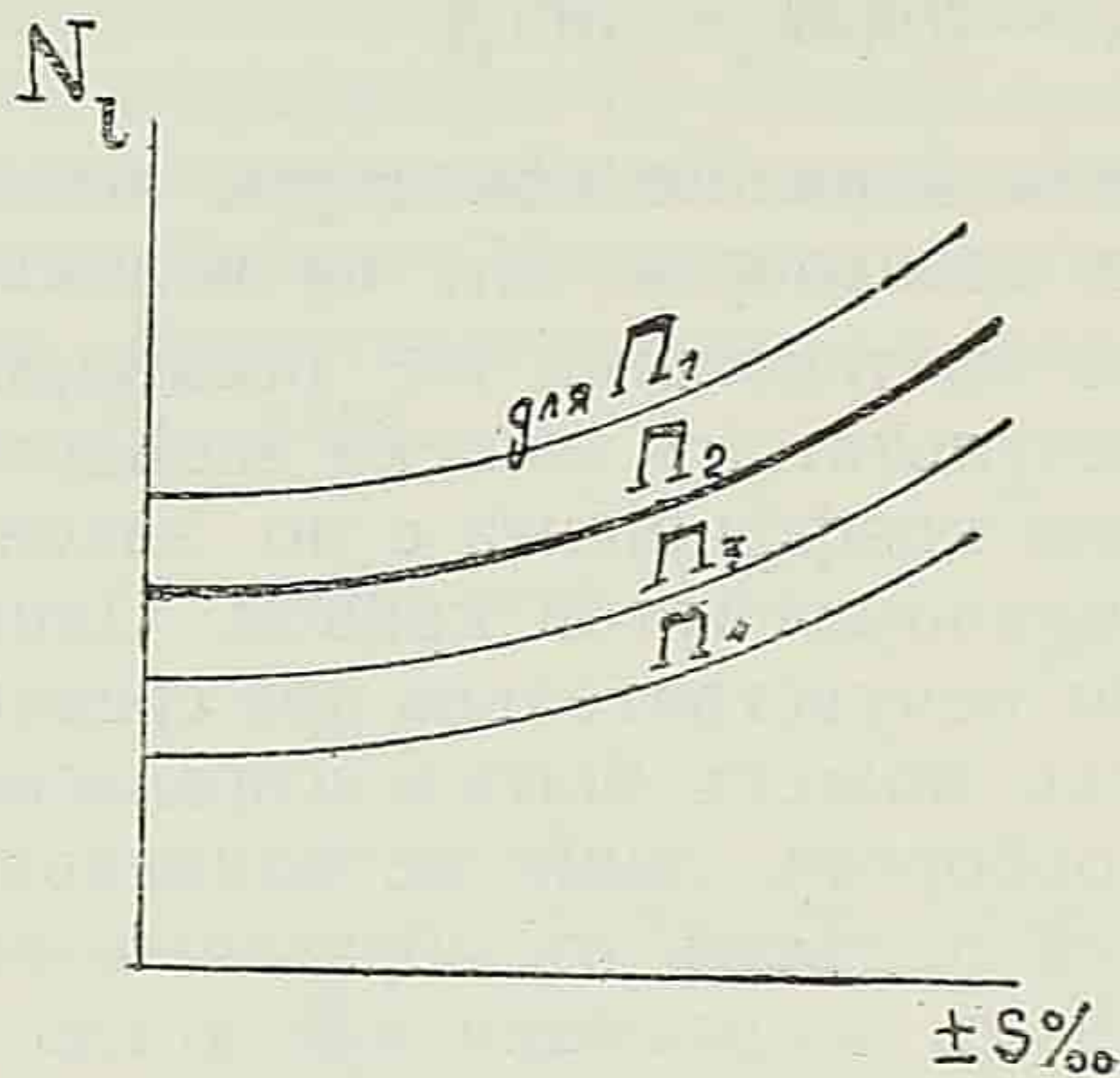
Въ случаѣ, если или грузооборотъ линіи не одинаковъ въ обѣ стороны, или мѣродавный подъемъ въ обратномъ направленіи иной, чѣмъ въ грузовомъ направленіи или когда и то и другое имѣетъ мѣсто одновременно, часто получается, что (такъ какъ число поѣздовъ въ обратномъ направленіи предполагается при рѣшеніи задачи равнымъ n , какъ и въ грузовомъ направленіи) форсированіе рѣшетки для обратнаго направленія $B'/R \neq B/R$. Въ этомъ случаѣ вопросъ нѣсколько усложняется и требуетъ построенія еще нѣсколькихъ графиковъ, что и описано въ отдѣлѣ VIII. Пока же ограничиваемся случаемъ $B'/R = B/R$, для котораго, такимъ образомъ, графикъ фиг. 6 даетъ непосредственно расходы транспорта M въ динарахъ въ годъ на 1 км. пути въ зависимости отъ подъема $S\%$.

V. Годовые расходы на содержаніе и ремонтъ пути.

Годовые расходы на ремонтъ и содержаніе пути многіе авторы, какъ напр. проф. К. Р. Савичъ⁹⁾, принимаютъ въ прямой линейной зависимости отъ годового движенія въ тонно-километрахъ (въ обоихъ направленіяхъ) и независимыми отъ величины $S\%$ подъема линіи. Другіе первенствующее значеніе вліянія на расходы содержанія и ремонта пути приписываютъ величинѣ подъема, ибо съ увеличеніемъ подъема увеличивается угонъ рельсъ и износъ головокъ рельсъ и шпаль. Особо замѣтное вліяніе въ этомъ смыслѣ имѣетъ торможеніе поѣздовъ на уклонахъ. Статистическія свѣдѣнія въ этомъ смыслѣ недостаточно обработаны, но практическія наблюденія подтверждаютъ съ несомнѣнностью зависимость этой группы

⁹⁾ „Инженеръ“ № 4—5, 1931, стр. 2 и слѣд.

расходовъ отъ подъемовъ. Нашъ графикъ, воспроизводимый на фиг. 7 составленъ съ учетомъ вліянія и величины годового движенія и величины подъемовъ. Какъ исходный матеріалъ кромѣ общихъ статистическихъ свѣдѣній послужили также матеріалы, собранные по указаніямъ инж. Огняна Кузмановича (въ то время помощника министра П. С.) специально для возможности учета вліянія величины подъемовъ на расходы по содержанию и ремонту пути.

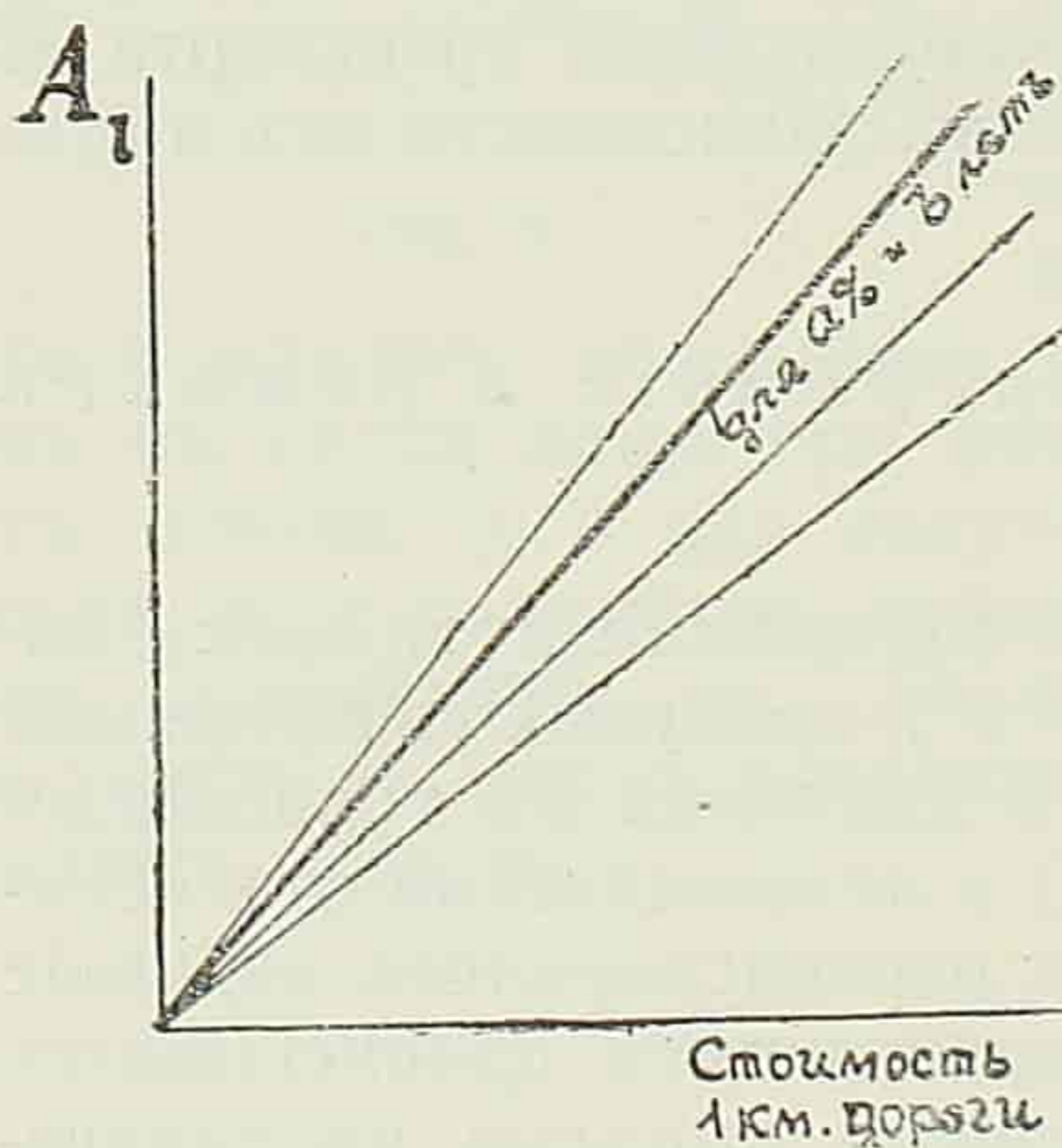


Фиг. 7.

Эти расходы N въ графикѣ фиг. 7 должны быть даны въ динарахъ на 1 километръ въ годъ.

VI. Группа расходовъ службы капитала.

Группа расходовъ службы капитала, т. е. годовыя отчисления на амортизацію инвестиціоннаго капитала и на выплату процентовъ на неамортизованную часть долга представлена помощью графика фиг. 8 въ зависимости отъ стоимости постройки одного километра пути.



Фиг. 8.

Нормально можно для данного времени (ввиду отсутствія долгосрочнаго кредита), принимать амортизацію въ $b = 25$ лѣтъ и интересъ $a = 7\%$ годовыхъ. Соответствующая линия на графиконѣ вычерчена жирною. Такимъ образомъ по ординатамъ мы имѣемъ расходы службы капитала A въ динарахъ на 1 километръ въ годъ.

VII. Наивыгоднѣйшій вариантъ трасы.

Послѣ изложеннаго мы легко находимъ пользуясь графиками фиг. 6, 7 и 8 сумму

$$(M + N + A) \text{ дин./км.-годъ}$$

для cadaго элемента трасы l_i съ постояннымъ $S\%$ и за-

тѣмъ суммируемъ для всей длины трасы. Та траса въ коммерческомъ смыслѣ является наивыгоднѣйшей, для которой эта сумма является наименьшей, т. е. та, для которой

$$\sum_{i=0}^{i=L} (M+N+A)_i l_i \text{ дин./год.}$$

окажется имѣющей наименьшее численное значеніе. Такимъ образомъ для случая одинаковой напряженности паровоза при работѣ въ обѣ стороны линіи вопросъ рѣшается весьма легко и такъ какъ графики фиг. 6, 7 и 8 даютъ расходы на километръ въ годъ, то кромѣ этихъ графиковъ намъ нуженъ только сокращенный продольный профиль сравниваемыхъ вариантовъ.

VIII. Особенности задачи и ея рѣшеніе для случая неодинаковой форсировки паровоза въ обѣ стороны.

Нѣкоторыя дополнительныя затрудненія при рѣшеніи задачи являются, когда паровозъ не одинаково напряженъ на мѣродавныхъ подъемахъ въ „грузовомъ“ и обратномъ направленіи. Эта неодинаковость форсированія паровоза можетъ явиться результатомъ или неодинаковаго грузооборота въ обѣ стороны линіи, или при одинаковомъ грузооборотѣ — вслѣдствіе неодинаковости показателей мѣродавныхъ подъемовъ: могутъ быть неодинаковы одновременно и показатели мѣродавныхъ подъемовъ и грузооборотъ; наконецъ могутъ быть неодинаковы и скорости V_{1S_1} и V_{2S_2} , предписанныя на мѣродавныхъ подъемахъ.

Въ этихъ случаяхъ надо установить и для тяжелаго и для легкаго направленія форсированіе рѣшетки, причемъ для тяжелаго направленія мы имѣемъ грузооборотъ $\Pi_1 \frac{\text{бр.} \cdot \text{т.}}{\text{г.}}$, вѣсь поѣзда Q_1 , опредѣленный по мѣродавному подъему S_1 ; скорость движенія V_{1S_1} ($= 15$ км./ч.), и число паръ поѣздовъ въ сутки $n = \Pi_1 / Q_1 p$, гдѣ $p =$ число рабочихъ дней въ году. Выборъ Q_1 производимъ по максимальному допущенному форсированію рѣшетки $B_1/R = 470$ въ нашихъ примѣрахъ.

Вѣсь поѣзда Q_2 для обратнаго, легкаго, направленія опредѣляется по числу паръ поѣздовъ n и грузообороту Π_2 какъ

$$Q_2 = \Pi_2 / np.$$

Получивъ вѣсь поѣзда Q_2 и имѣя въ заданіи величину мѣродавнаго подъема S_2 и рекомендуемую скорость движенія по этому подъему V_{2S_2} , которая для малыхъ (особенно отрицательныхъ) значеній S_2 можетъ быть и значительно больше V_{1S_1} , можемъ подсчитать общее сопротивленіе поѣзда

$$W_{2S_2} = W_{(L+T) V_2} + W_{Q V_2} + (L + T + Q) S_2.$$

При установившемся движеніи это сопротивление равно силѣ тяги, развиваемой паровозомъ, т. е. $Z_{2S_2} = W_{2S_2}$.

Съ другой же стороны изъ уравненія мощности имѣемъ

$$Z_{2S_2} = \frac{270 N_i}{V_2} = \frac{270 D_2 / C_{i(V_2)}}{V_2},$$

откуда получаемъ

$$D_2 = \frac{Z_{2S_2} \cdot V_2 \cdot C_{i(V_2)}}{270} = \frac{W_{2S_2} \cdot V_2 \cdot C_{i(V_2)}}{270},$$

гдѣ C_{iV_2} есть расходъ пара на 1 л. с.-часъ при скорости V_2 .

Далѣе изъ уравненія продуктивности котла

$$D = \eta_k B/R \cdot R \cdot \frac{h_u}{i}$$

имѣемъ для нашего случая:

$$B_2/R = \frac{D_2 \cdot i}{\eta_{k(V_2)} \cdot R \cdot h_u} = \frac{W_{2S_2} \cdot V_2 \cdot C_{i(V_2)} \cdot i}{270 \cdot R \cdot h_u \cdot \eta_{k(B_2/R)}}$$

гдѣ $\eta_{k(B_2/R)}$ — полезное дѣйствіе котла при форсированіи B_2/R .

Имъ сперва приходится задаться, пользуясь кривой $\eta_k = f(B/R)$, а затѣмъ повторить расчетъ при болѣе точно выбранномъ значеніи $\eta_{k(B_2/R)}$.

$h_u \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ — теплотворная способность топлива и

$i \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ — количество калорій, потребное для полученія 1 kg рабочего пара.

Такимъ образомъ у насъ опредѣлилось значеніе B_2/R для легкаго направленія¹⁰⁾.

Когда B_2/R выбрано, то на основаніи значенія B_2/R составляемъ характеристику силы тяги нашего паровоза, а по ней составляемъ 1) $S - \alpha$ диаграмму von Borgies-a и 2) кри-

¹⁰⁾ Если бы случайно получилось $B_2/R > B_1/R$, то значить оцѣнка „тяжелого“ направленія сдѣлана неправильно — направленіе, для котораго B/R больше, является тяжелымъ.

вую расхода топлива; 3) законъ измѣненія ϵ_2 , причемъ, конечно, необходимо еще по ранѣ приведенной схемѣ вычислить значеніе $\epsilon_{2\max}$, которое будетъ $\epsilon_{2\max} < \epsilon_{1\max}$ и 4) на основаніи графиковъ 2 и 4 составить кривую расходовъ транспорта M_2 для обратнаго направленія и для вѣса поѣзда Q_2 .

Такимъ образомъ рѣшеніе нашей задачи является въ этомъ случаѣ пока частично индивидуальнымъ, ибо мы пользуемся общими графиками фиг. 6, 7 и 8 для опредѣленія M_1 и должны еще построить индивидуальный графикъ для опредѣленія M_2 . Послѣ построенія кривой M_2 мы для нашихъ сравниваемыхъ вариантовъ ищемъ суммы

$$\sum_{i=0}^{i=L} \left[(M_1 + N + A) l_i + M_2 l_i' \right]$$

и останавливаемся на томъ вариантѣ трасы, который даетъ наименьшее численное значеніе этой суммы.

Индивидуальные графики для M_2 могутъ быть составлены и заранѣе для различныхъ форсированій B/R съ малымъ интерваломъ (напр. $B_1' - B_2'' = 50 \text{ kg/m}^2\text{h}$) и для широкихъ границъ B/R отъ 50 до 500 $\text{kg/m}^2\text{h}$; тогда задача выбора наивыгоднѣйшаго варианта трасы становится столь же простою, какъ и въ случаѣ одинаковой напряженности паровоза въ обѣ стороны.

Подобные графиконы и составляются сейчасъ въ Отдѣленіи по постройкѣ ж. д. для дорогъ нормальной колеи и паровоза 1—Е—О.

Въ заключеніе считаю долгомъ принести мою благодарность инженеру Отдѣленія по постройкѣ жел. дор. въ Югославіи — Еленѣ Михайловнѣ Ристичъ-Гортинской, которая выполнила всѣ необходимые расчеты для составленія графиковъ, а также и вычертила таковыя для надобности Отдѣленія по постройкѣ ж. д.

Д. В. Фростъ.

КЪ ТЕОРИИ МАГНИТОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗВѢДКИ.

Вступленіе.

При магнитометрическихъ изысканіяхъ важно не только найти то или другое мѣсторожденіе полезнаго ископаемаго, но и опредѣлить глубину его залеганія, форму и размѣры, чѣмъ и опредѣляется рентабельность дальнѣйшей разработки.

Въ своей диссертациі на тему „Изслѣдованія по теоріи изысканія магнитныхъ рудъ“, защищенной въ Петроградскомъ Горномъ Институтѣ въ 1913 году, авторъ настоящей статьи путемъ математическаго изслѣдованія вывелъ правила для опредѣленія положенія разыскиваемаго мѣсторожденія въ предположеніи сильно магнитныхъ рудъ, что давало право пренебрегать индуцирующимъ вліяніемъ земнаго магнетизма.

Въ настоящее время, какъ извѣстно, при точныхъ и чувствительныхъ инструментахъ, магнитометрической методъ развѣдки примѣняется во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ имѣется хотя бы слабое различіе въ пермеабильности или сусцептибильности рудъ и окружающихъ горныхъ породъ. Ясно, что въ этомъ случаѣ мы должны учитывать вліяніе и земнаго магнетизма.

Въ Извѣстіяхъ Института Прикладной Геофизики за 1926—28 годъ появилась большая работа профессора И. Бахурина „Магнитное поле тѣлъ правильной формы съ точки зрѣнія магнитометріи“, гдѣ онъ, подобно автору выше цитированной диссертациі, рассматриваетъ вліяніе магнитныхъ мѣсторожденій въ формѣ эллипсоида вращенія, какъ наиболее общей.

Цѣлью настоящей статьи является желаніе показать, что и въ случаѣ слабо магнитныхъ мѣсторожденій, гдѣ мы должны учитывать индуктивное вліяніе земнаго магнитнаго поля, когда конечно теоретическое изслѣдованіе и получа-

емя формулы дѣлаются много сложнѣе, все же возможно прийти къ тѣмъ же по существу выводамъ, которые даны въ упомянутой диссертаци.

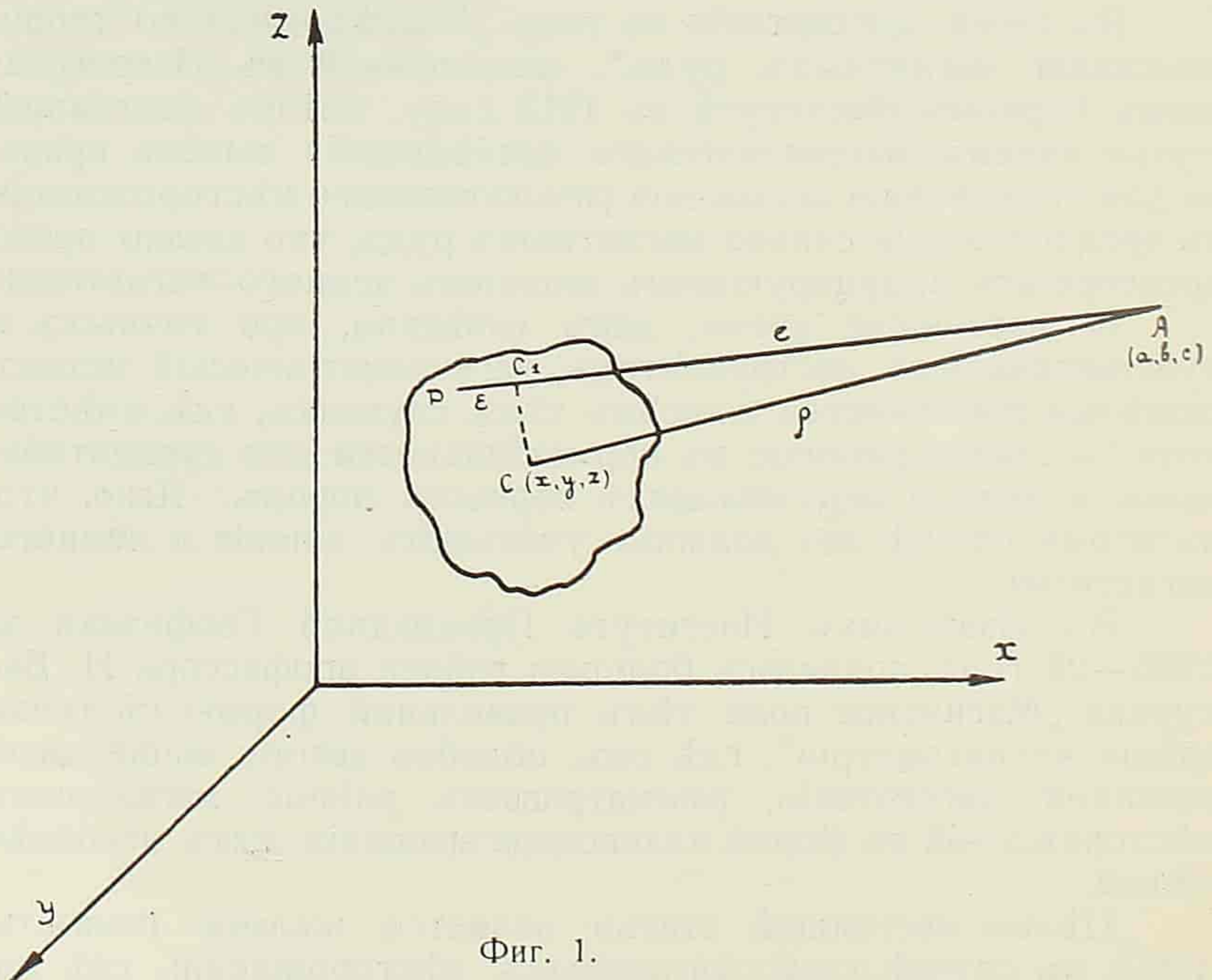
Предлагая эту статью вниманію инженеровъ и практиковъ, авторъ счелъ необходимымъ дать и выводъ формулъ дѣйствія хомогеннаго магнитнаго эллипсоида вращенія.

Слѣдуя въ этой части въ общемъ изложенію Dr. Neumann въ его книгѣ „Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus“, авторъ стремился по возможности сократить и упростить выводы и расширить ихъ на всѣ возможные случаи формы и положенія эллипсоида.

Дѣйствіе равномерно намагниченнаго эллипсоида.

1. Дѣйствіе магнитной молекулы на внѣшнюю точку.

Возьмемъ безконечно малую молекулу (фиг. 1) съ центромъ въ точкѣ $C(x, y, z)$ и внѣшнюю точку $A(a, b, c)$. Магнитный потенциалъ какой нибудь точки P молекулы съ ко-



Фиг. 1.

ординатами $x+x_1, y+y_1, z+z_1$ и магнитной массой μ_1 въ отношеніи точки A будетъ

$$(1) \quad q_1 = \frac{\mu_1}{e},$$

гдѣ

$$(2) \quad e^2 = (a-x-x_1)^2 + (b-y-y_1)^2 + (c-z-z_1)^2.$$

Обозначимъ разстояніе центра молекулы и точки A

$$(3) \quad \varrho^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

и положимъ, что

$$e = \varrho + \varepsilon.$$

Такъ какъ ε величина весьма малая, то можемъ написать

$$(4') \quad q_1 = \frac{\mu_1}{e} = \frac{\mu_1}{\varrho + \varepsilon} = \mu_1 \frac{\varrho - \varepsilon}{\varrho^2 - \varepsilon^2} = \frac{\mu_1}{\varrho^2} (\varrho - \varepsilon).$$

Для опредѣленія магнитнаго потенціала всей молекулы суммируемъ выраженія для всѣхъ точекъ молекулы

$$q = \frac{1}{\varrho^2} \sum \mu_1 (\varrho - \varepsilon).$$

Такъ какъ

$$\sum \mu_1 = 0 \quad \text{и} \quad \sum \mu_1 \varrho = 0,$$

то

$$(4) \quad q = -\frac{1}{\varrho^2} \sum \mu_1 \varepsilon.$$

Разлагая выраженіе для ε въ рядъ, получимъ

$$\varepsilon = e - \varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial x} x_1 + \frac{\partial \varrho}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \varrho}{\partial z} z_1$$

и, вставляя это значеніе въ формулу 4, имѣемъ

$$q = -\frac{1}{\varrho^2} \sum \mu_1 \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} x_1 + \frac{\partial \varrho}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \varrho}{\partial z} z_1 \right).$$

Обозначимъ магнитный моментъ въ направленіи осей координатъ

$$(5) \quad \sum \mu_1 x_1 = \alpha \quad \sum \mu_1 y_1 = \beta \quad \sum \mu_1 z_1 = \gamma$$

тогда получимъ

$$q = - \left[\frac{1}{e^2} \frac{\partial e}{\partial x} \alpha + \frac{1}{e^2} \frac{\partial e}{\partial y} \beta + \frac{1}{e^2} \frac{\partial e}{\partial z} \gamma \right]$$

или

$$(6) \quad q = \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y} \beta + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z} \gamma.$$

2. Дѣйствіе конечнаго магнита на какую либо точку.

Выдѣлимъ изъ нашего магнита весьма малый объемъ ω , въ которомъ содержится n молекулъ и для котораго вслѣдствіе его малости e имѣетъ одно и то же значеніе. Чтобы получить потенциалъ объема ω , нужно суммировать въ формулѣ 6 магнитные моменты, т. е.

$$\sum \alpha = n\alpha_0 \quad \sum \beta = n\beta_0 \quad \sum \gamma = n\gamma_0,$$

гдѣ $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ среднія арифметическія значенія моментовъ. Если обозначимъ черезъ k число молекулъ въ единицѣ объема, т. е. положимъ $n = k\omega$ и обозначимъ

$$k\alpha_0 = \alpha \quad k\beta_0 = \beta \quad k\gamma_0 = \gamma,$$

имѣемъ

$$\sum \alpha = n\alpha_0 = k\omega\alpha_0 = k\omega \frac{\alpha}{k} = \omega\alpha,$$

а потому изъ выраженія 6 получимъ

$$q = \omega \left[\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y} \beta + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z} \gamma \right]$$

и для всего магнита

$$Q = \sum \omega \left[\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y} \beta + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z} \gamma \right].$$

Если α, β, γ слѣдуютъ опредѣленному закону при измѣненіи положенія объема $\omega = dx dy dz$, то можемъ написать

$$(7) \quad Q = \iiint dx dy dz \left[\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y} \beta + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z} \gamma \right].$$

Слагающія силы нашего магнита въ отношеніи точки A , получаемъ изъ формуль

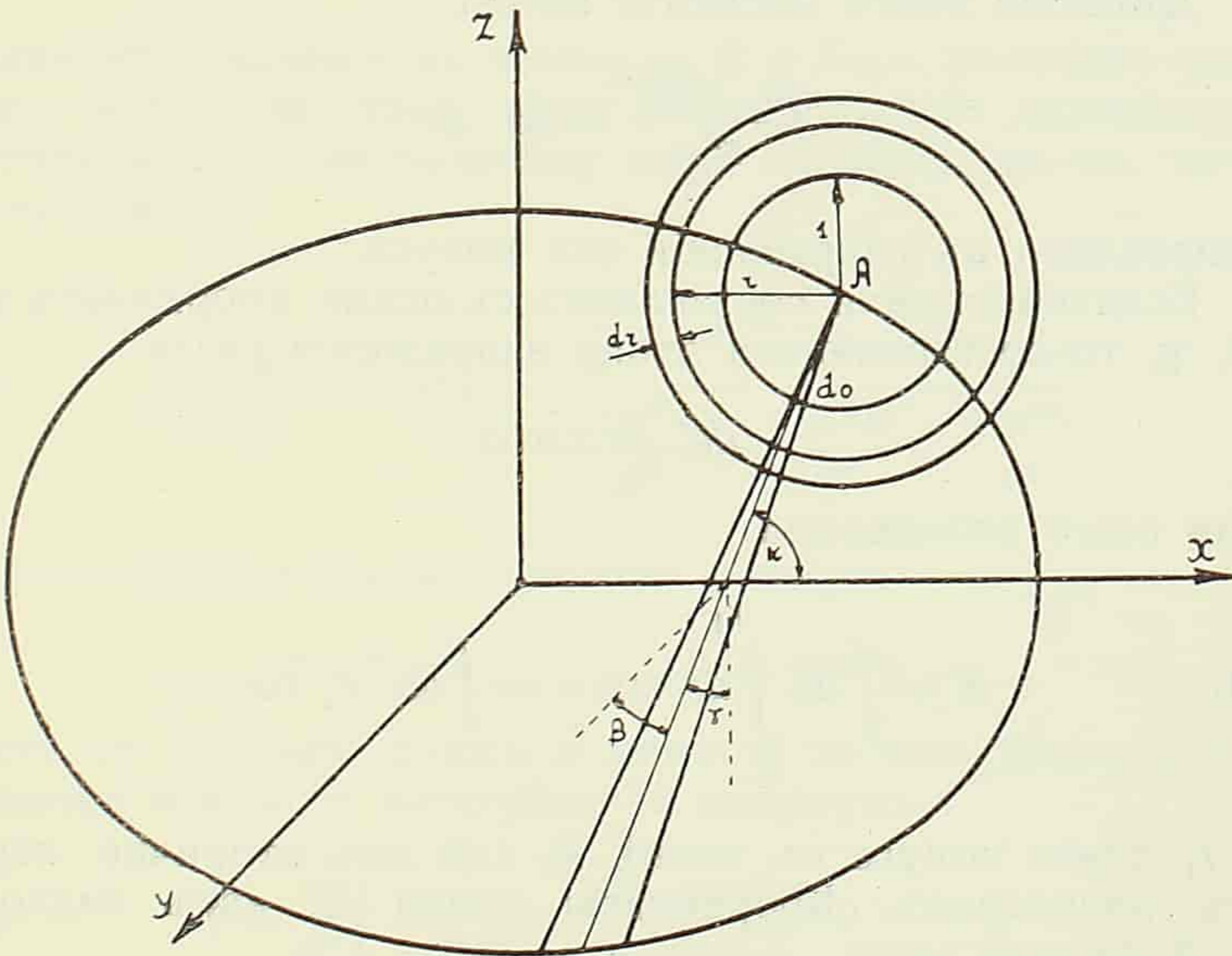
$$(8) \quad X = -\mu \frac{\partial Q}{\partial a} \quad Y = -\mu \frac{\partial Q}{\partial b} \quad Z = -\mu \frac{\partial Q}{\partial c},$$

гдѣ μ магнитная масса въ точкѣ A .

Выведенныя до сихъ поръ формулы имѣютъ общее значеніе для всякаго магнитнаго тѣла и для всякаго положенія точки A , на которую дѣйствуетъ это тѣло.

3. Дѣйствіе равномерно намагниченнаго эллипсоида на точку, лежащую на его поверхности.

Для простоты выводовъ предположимъ, что плотность намагничиванія эллипсоида $D=1$ и что въ точкѣ A поверхности эллипсоида сосредоточена единица магнитной массы.



Фиг. 2.

Опишемъ около точки A шаръ радиуса $=1$ и возьмемъ элементъ его поверхности do , черезъ периферію котораго

изъ точки A проведемъ безконечно тонкій конусъ K .

Опишемъ изъ точки A два шара радиуса r и $r+dr$, которые вырѣжутъ изъ конуса объемъ равный разностямъ объемовъ конусовъ, соотвѣтствующихъ радиусамъ этихъ шаровъ. Если основаніе конуса, отсѣченнаго шаромъ радиуса $= 1$ будетъ do , то основанія конусовъ, отсѣченныхъ шарами съ радиусами r и $r+dr$ будутъ соотвѣтственно

$$do \cdot r^2 \quad \text{и} \quad do (r+dr)^2,$$

а ихъ объемы

$$\frac{1}{3} do \cdot r^2 dr \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} do \cdot (r+dr)^2 (r+dr).$$

Объемъ конуса между этими шарами

$$\frac{1}{3} do [(r+dr)^3 - r^3] = do [r^2 dr + r dr^2 + \frac{1}{3} dr^3].$$

Пренебрегая малыми членами, имѣемъ

$$do \cdot r^2 dr.$$

Дѣйствіе этого элемента массы

$$\frac{do \cdot r^2 dr}{r^2} = do \cdot dr$$

и направлено въ направленіи оси конуса.

Если послѣдняя составляетъ съ осями координатъ углы α , β , γ , то составляющая этого напряженія равна

$$do \cdot dr \cos \alpha$$

и для всего эллипсоида

$$(9) \quad X = \int do \int_0^{r_1} dr \cos \alpha = \int do \cdot r_1 \cos \alpha,$$

гдѣ r_1 длина конуса въ точкѣ B , гдѣ онъ вторично пересѣкаетъ эллипсоидъ. Координаты точки B , какъ видно изъ фиг. 2, будутъ

$$x = r_1 \cos \alpha, \quad y = r_1 \cos \beta, \quad z = r_1 \cos \gamma.$$

Такъ какъ точки A и B лежатъ на эллипсоидѣ, то ихъ

координаты должны удовлетворять уравненію послѣдняго, т. е.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{(x - r_1 \cos \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - r_1 \cos \beta)^2}{b^2} + \frac{(z - r_1 \cos \gamma)^2}{c^2} = 1.$$

Вычитая изъ второго уравненія первое, имѣемъ

$$\begin{aligned} -2r_1 \left[\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2} \right] + \\ + r_1^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Для точки A получаемъ $r_1 = 0$. Для точки же B

$$(10) \quad r_1 = \frac{2 \left[\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2} \right]}{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2}}.$$

Вставляя это значеніе въ формулу 9 и беря половину полученнаго интеграла, такъ какъ интегрированіе должны распространить лишь на половину шара съ центромъ въ точкѣ A , получаемъ

$$(11) \quad X = \int d\omega \cdot \cos \alpha \left[\frac{\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2}}{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2}} \right].$$

Такъ какъ подъ интеграломъ продукты

$$\cos \alpha \cos \beta, \quad \cos \alpha \cos \gamma$$

входятъ со знакомъ плюсь и минусъ, то они взаимно уничтожаются и вмѣсто интеграла 11 получимъ

$$(12) \quad X = \frac{x}{a^2} \int \frac{d\omega \cdot \cos^2 \alpha}{\left(\frac{\cos \alpha}{a} \right)^2 + \left(\frac{\cos \beta}{b} \right)^2 + \left(\frac{\cos \gamma}{c} \right)^2}$$

Если проведемъ черезъ точку A (фиг. 3) плоскость парал-

$$X = \frac{4x}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{\operatorname{sn} \vartheta \cos^2 \vartheta}{\left(\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{b^2}\right) \cos^2 \varphi + \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{c^2}\right) \operatorname{sn}^2 \varphi}.$$

Такъ какъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A + B \operatorname{tg}^2 \varphi} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{A + Bz^2} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \left[\operatorname{arctg} t \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{AB}},$$

гдѣ

$$t = \sqrt{\frac{B}{A}} z,$$

то

$$(13) \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{2\pi x}{a^2} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta \operatorname{sn} \vartheta \cos^2 \vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{b^2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{c^2}}} = Mx, \\ Y &= \frac{2\pi y}{b^2} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta \operatorname{sn} \vartheta \cos^2 \vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{c^2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{b^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{a^2}}} = Ny, \\ Z &= \frac{2\pi z}{a^2} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta \operatorname{sn} \vartheta \cos^2 \vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{c^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{a^2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{c^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{b^2}}} = Pz. \end{aligned} \right.$$

4. Эллипсоидъ вращенія.

Такъ какъ полученные въ формулахъ 13 Эйлеровы интегралы 2-го рода мы не можемъ интегрировать, то переходимъ къ эллипсоиду вращенія, для чего въ формулахъ 13 должны подставить $a = b$, въ силу чего получимъ

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{2\pi x}{a} \int_0^\pi \frac{d\vartheta \operatorname{sn} \vartheta \cos^2 \vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{c^2}}} = M_1 x, \\ Y &= \frac{2\pi y}{b} \int_0^\pi \frac{d\vartheta \operatorname{sn} \vartheta \cos^2 \vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{c^2}}} = N_1 y, \\ Z &= \frac{2\pi z}{c} \int_0^\pi \frac{d\vartheta \operatorname{sn} \vartheta \cos^2 \vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{c^2} + \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta}{a^2}}} = P_1 z. \end{aligned} \right.$$

I. Величины $M_1 N_1 P_1$ зависят только от полуосей a , b , c или вѣрнѣе отъ ихъ отношенія, а потому для подобныхъ эллипсоидовъ однѣ и тѣ же.

II. Изъ ф. 13 и 14 видимъ, что компоненты дѣйствія эллипсоида на пунктъ на его поверхности пропорціональны координатамъ этого пункта.

Если перейдемъ къ шару, то въ ф. 14 должны положить $a=0$ и тогда получимъ

$$X = \frac{2\pi x}{a} \int_0^\pi \operatorname{sn} \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta.$$

Полагая

$$\cos \vartheta = v \quad \text{и} \quad \operatorname{sn} \vartheta d\vartheta = -dv,$$

имѣемъ

$$X = -2\pi x \int_{+1}^{-1} v^2 dv = 2\pi x \int_{-1}^{+1} v^2 dz = \frac{4}{3} \pi x$$

и по аналогіи

$$(15) \quad X = \frac{4}{3} \pi x, \quad Y = \frac{4}{3} \pi y, \quad Z = \frac{4}{3} \pi z.$$

Теорема Пуассона.

Возьмемъ въ системѣ дѣйствующихъ массъ элементъ объема dx, dy, dz , опредѣляемый двумя точками P и P_1 со-

отвѣтственно съ координатами x, y, z и $x+dx, y+dy, z+dz$ и пусть будутъ слагающія поля въ точкѣ $P - X, Y, Z$, тогда въ точкѣ P' получимъ

$$X + \frac{dX}{dx} dx, \quad Y + \frac{dY}{dy} dy, \quad Z + \frac{dZ}{dz} dz.$$

На площадкѣ $dy dz$ въ точкѣ P потокъ силъ, который входитъ въ элементъ объема, будетъ $X dy dz$. Потокъ силъ, который выходитъ въ точкѣ P' , будетъ

$$\left(X + \frac{\partial X}{\partial x} dx \right) dy dz$$

и ихъ разность

$$\frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz.$$

Распространяя это разсужденіе на другія составляющія, получимъ для всего потока силъ

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Съ другой стороны, если обозначимъ среднюю плотность дѣйствующихъ на элементъ объема массъ черезъ ρ , то вся масса будетъ

$$\rho dx dy dz$$

и потокъ силъ

$$4\pi\rho dx dy dz.$$

Приравнивая эти два выраженія, имѣемъ

$$(16) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho.$$

Если плотность $\rho = 0$ или, другими словами, точка P находится внѣ дѣйствующихъ массъ, то сумма частныхъ производныхъ равна 0, т. е.

$$(16') \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Такъ какъ

$$(17) \quad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

то для точки внутри тѣла получаемъ

$$(18) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\rho$$

и для точки внѣ тѣла

$$(18') \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Опредѣленіе магнитныхъ моментовъ α , β , γ (ф. 7), при дѣйствіи постоянныхъ магнитныхъ силъ.

Сдѣлаемъ предположеніе, что главный магнитный моментъ малаго шара

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

пропорціоналенъ равнодѣйствующей силъ, дѣйствующихъ на этотъ шаръ, т. е.

$$(19) \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = p \sqrt{(X+A)^2 + (Y+B)^2 + (Z+C)^2},$$

гдѣ X , Y , Z — слагающія силъ внѣшняго поля, а A , B , C — слагающія дѣйствія тѣла подъ вліяніемъ силъ X , Y , Z .

Можемъ написать тождества

$$(19') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{X+A}{\sqrt{(X+A)^2 + (Y+B)^2 + (Z+C)^2}}, \\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{Y+B}{\sqrt{(X+A)^2 + (Y+B)^2 + (Z+C)^2}}, \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{Z+C}{\sqrt{(X+A)^2 + (Y+B)^2 + (Z+C)^2}}. \end{array} \right.$$

Вставимъ въ послѣднія уравненія значеніе

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

изъ формулы 19, получаемъ

$$(20) \quad \alpha = p(X+A), \quad \beta = p(Y+B), \quad \gamma = p(Z+C),$$

гдѣ X, Y, Z опредѣляются формулами 17.

Силы A, B, C происходятъ отъ потенціала всего намагниченнаго тѣла за исключеніемъ потенціала малаго шара, который находится въ точкѣ x, y, z . А потому

$$A = - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right), \quad B = - \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \right), \quad C = - \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \right),$$

гдѣ Q потенціаль всего тѣла, а q потенціаль малаго шара въ точкѣ x, y, z .

Согласно формуламъ 15 и 6 имѣемъ

$$(21) \quad A = - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{4}{3} \pi \alpha \right), \quad B = - \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{4}{3} \pi \beta \right),$$

$$C = - \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{4}{3} \pi \gamma \right).$$

Вставляя значенія X, Y, Z и A, B, C изъ формулъ 17 и 21 въ формулу 20, получаемъ

$$(22) \quad \alpha = -p \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{4}{3} \pi \alpha \right), \quad \beta = -p \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{4}{3} \pi \beta \right),$$

$$\gamma = -p \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{4}{3} \pi \gamma \right).$$

Если обозначимъ

$$(23) \quad \frac{p}{1 - \frac{3}{4} \pi p} = k,$$

то изъ формулъ 22 имѣемъ

$$(24) \quad \alpha = -k \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \quad \beta = -k \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right),$$

$$\gamma = -k \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right)$$

или

$$(25) \quad \alpha = k \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \beta = k \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \gamma = k \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Подставляя это значеніе въ формулу 24, имѣемъ

$$(26) \quad \varphi + V + Q = 0.$$

Въ выраженіи (26) Q опредѣляется по формулѣ 7, которую согласно формулѣ 25 можно представить черезъ

$$(27) \quad \begin{aligned} Q &= k \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} \right\} = \\ &= k \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)}{\partial z} \right\} + \\ &+ k \iiint \frac{dx dy dz}{\varrho} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

или сокращенно

$$(27') \quad Q = P - R,$$

но если проинтегрируемъ по x , то

$$(28') \quad P_1 = \iiint dx dy dz \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial x} = \int \frac{do \cdot \cos(n, x)}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

гдѣ элементъ площади

$$dy dz = do \cdot \cos(n, x) \text{ и } \cos(n, x)$$

является косинусомъ угла между осью x и нормалью къ площадкѣ $dy dz$.

Разсуждая такимъ образомъ въ отношеніи другихъ перемѣнныхъ, получаемъ по аналогіи

$$(28) \quad \begin{aligned} P &= k \int \frac{do}{\varrho} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(n, z) \right\} = \\ &= k \int \frac{do}{\varrho} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right\} = k \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i. \end{aligned}$$

Такъ какъ по формуламъ 18 при $\varrho = 1$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi,$$

гдѣ

$$V = \iiint \frac{dx dy dz}{\varrho},$$

то для

$$R = k \iiint \frac{dx dy dz}{e} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\}$$

имѣемъ

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = -4\pi k \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\},$$

а потому, дважды дифференцируя выраженія 27', получаемъ

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + 4\pi k \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\}.$$

Такъ какъ интеграль P (формула 28) представляетъ потенциалъ массъ, расположенныхъ лишь на поверхности магнита, т. е. внѣ его, то по формулѣ 18' имѣемъ

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

и потому

$$(29) \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 4\pi k \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\}.$$

Дифференцируя два раза по x , y , z , формулу 26, получаемъ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0$$

и принимая во вниманіе формулу 18' и видя, что V потенциалъ массъ, лежащихъ внѣ тѣла, имѣемъ

$$(30) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0.$$

Комбинируя формулы 29 и 30, имѣемъ

$$(31) \quad \begin{cases} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\} (1 + 4\pi k) = 0 \\ \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right\} (1 + 4\pi k) = 0 \end{cases}$$

и потому

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

а потому, согласно формулѣ 27,

$$k = 0$$

и согласно формулѣ 27'

$$(28) \quad Q = P = k \int \frac{d\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i,$$

гдѣ $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ нужно взять по внутренней сторонѣ поверхности, такъ какъ первоначальное интегрирование было распространено на пространство, ограниченное поверхностью.

Магнитное состояніе эллипсоида намагниченнаго постоянными силами.

Формула 28 намъ показываетъ основное положеніе теоріи, состоящее въ томъ, что дѣйствіе массъ внутри поверхности на внѣшній пунктъ можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ массъ, расположенныхъ на самой поверхности.

Чтобы составить представленіе о такомъ распредѣленіи массъ на поверхности въ случаѣ эллипсоида, предположимъ, что послѣдній прямолинейно перемѣстился въ опредѣленномъ направленіи на малую величину ϵ . Такъ какъ всѣ точки эллипсоида твердо связаны между собою, то величина передвиженія и направленіе послѣдняго для всѣхъ точекъ будутъ одни и тѣ же.

Тогда толщина массъ, налегающихъ на поверхность эллипсоида, которую мы мѣримъ въ направленіи нормали къ поверхности эллипсоида, будетъ

$$(33) \quad dN = \epsilon \cos (\epsilon, N),$$

гдѣ $\cos (\epsilon, N)$ — косинусъ угла между направленіемъ перемѣщенія и нормалью въ данной точкѣ.

Если обозначимъ плотность черезъ D , то величина массы, налегающей на эллипсоидъ, будетъ

$$D\epsilon \int d\sigma \cos (\epsilon, N) = D\epsilon \int d\sigma [\cos (\epsilon, x) \cos (N, x) + \dots]$$

а потенциалъ налегающей массы

$$(34) \quad u = D\epsilon \int \frac{do}{\varrho} \cos(\epsilon, N) = D\epsilon \int \frac{do}{\varrho} [m \cos(N, x) + \dots],$$

гдѣ

$$(34') \quad m = \cos(\epsilon, x).$$

На основаніи формули 13 мы имѣемъ

$$(35) \quad X = -\frac{\partial Q}{\partial x} = DMx, \quad Y = -\frac{\partial Q}{\partial y} = DNy, \quad Z = -\frac{\partial Q}{\partial z} = DPz,$$

гдѣ плотность вмѣсто 1 взяли D .

Изъ выраженія 35 можемъ написать

$$(36) \quad Q = -\frac{D}{2} (Mx^2 + Ny^2 + Pz^2) + \text{const.}$$

Чтобы получить потенциалъ перемѣщенного эллипсоида, мы можемъ предположить, что самъ эллипсоидъ остался на мѣстѣ, а точка, на которую дѣйствуетъ потенциалъ, перемѣстилась въ обратномъ направленіи на ту же величину, такъ что новыя координаты точки будутъ

$$x_1 = x - \epsilon m, \quad y_1 = y - \epsilon n, \quad z_1 = z - \epsilon p.$$

Такъ какъ потенциалъ V_1 прежняго эллипсоида на точку x, y, z равенъ потенциалу V на новую точку x_1, y_1, z_1 , то

$$V_1(x, y, z) = V(x - \epsilon m, y - \epsilon n, z - \epsilon p),$$

или производя разложеніе

$$(37) \quad V_1(x, y, z) - V(x, y, z) = u = -\epsilon \left[m \frac{\partial V}{\partial x} + n \frac{\partial V}{\partial y} + p \frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

который не зависитъ отъ рода рассматриваемой поверхности.

Для эллипсоида съ плотностью D , согласно формуламъ 13 и 37, имѣемъ

$$(38) \quad u = D\epsilon [m Mx + n Ny + p Pz],$$

но по формулѣ 34 имѣемъ

$$(34) \quad u = D\epsilon \int \frac{do}{\varrho} [m \cos(N, x) + n \cos(N, y) + p \cos(N, z)].$$

Потенциаль, согласно формуламъ 28,

$$(28) \quad Q = K \int \frac{do}{e} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_i$$

мы можемъ раскрыть, если только

$$(39) \quad \varphi = A_1 x + B_1 y + C_1 z,$$

т. е. является линейной функцией координатъ x , y , z и такъ какъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = A_1 \frac{\partial x}{\partial N} + B_1 \frac{\partial y}{\partial N} + C_1 \frac{\partial z}{\partial N}$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = A_1 \cos(N, x) + B_1 \cos(N, y) + C_1 \cos(N, z),$$

а потому по формуль 28

$$(40) \quad Q = k \int \frac{do}{e} [A_1 \cos(N, x) + B_1 \cos(N, y) + C_1 \cos(N, z)].$$

Чтобы потенциалъ u (ф. 34) и Q (ф. 40) были идентичны, необходимо

$$(41) \quad D \varepsilon m = k A_1, \quad D \varepsilon n = k B_1, \quad D \varepsilon p = k C_1,$$

Подставляя эти значенія въ формулу 38, имѣемъ

$$(42) \quad Q = k (A_1 Mx + B_1 Ny + C_1 Pz).$$

Принимая во вниманіе, что потенциалъ внѣшнихъ силъ

$$(43) \quad V = -(Ax + By + Cz)$$

и, вставляя въ формулу 26 значенія φ , V и Q изъ формуль 39, 43, 42 получаемъ

$$A_1 x + B_1 y - C_1 z - (Ax + By + Cz) + k (A_1 Mx + B_1 Ny + C_1 Pz) = 0$$

и потому для любыхъ значеній x , y , z

$$(44) \quad A_1 = \frac{A}{1 + Mk}, \quad B_1 = \frac{B}{1 + Nk}, \quad C_1 = \frac{C}{1 + Pk}.$$

Подставляя эти значенія въ формулу 39, имѣемъ

$$\varphi = \frac{A}{1 + Mk} x + \frac{B}{1 + Nk} y + \frac{C}{1 + Pk} z,$$

а потому, согласно формуламъ 39 и 25, получаемъ

$$(45) \quad \alpha = k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Ak}{1 + Mk}, \quad \beta = k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Bk}{1 + Nk}, \quad \gamma = k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{Ck}{1 + Pk}$$

Изъ этихъ выраженій мы видимъ, что они не зависятъ отъ координатъ x, y, z и потому эллипсоидъ подъ дѣйствіемъ постоянныхъ силъ намагничивается равномерно, не взирая на его форму.

Дѣйствіе эллипсоида на внѣшній пунктъ.

Разъ мы вывели дѣйствіе эллипсоида на точку внутри его или на его поверхности, можемъ съ помощью теоремы Ivory получить дѣйствіе на внѣшнюю точку.

Теорема Ivory.

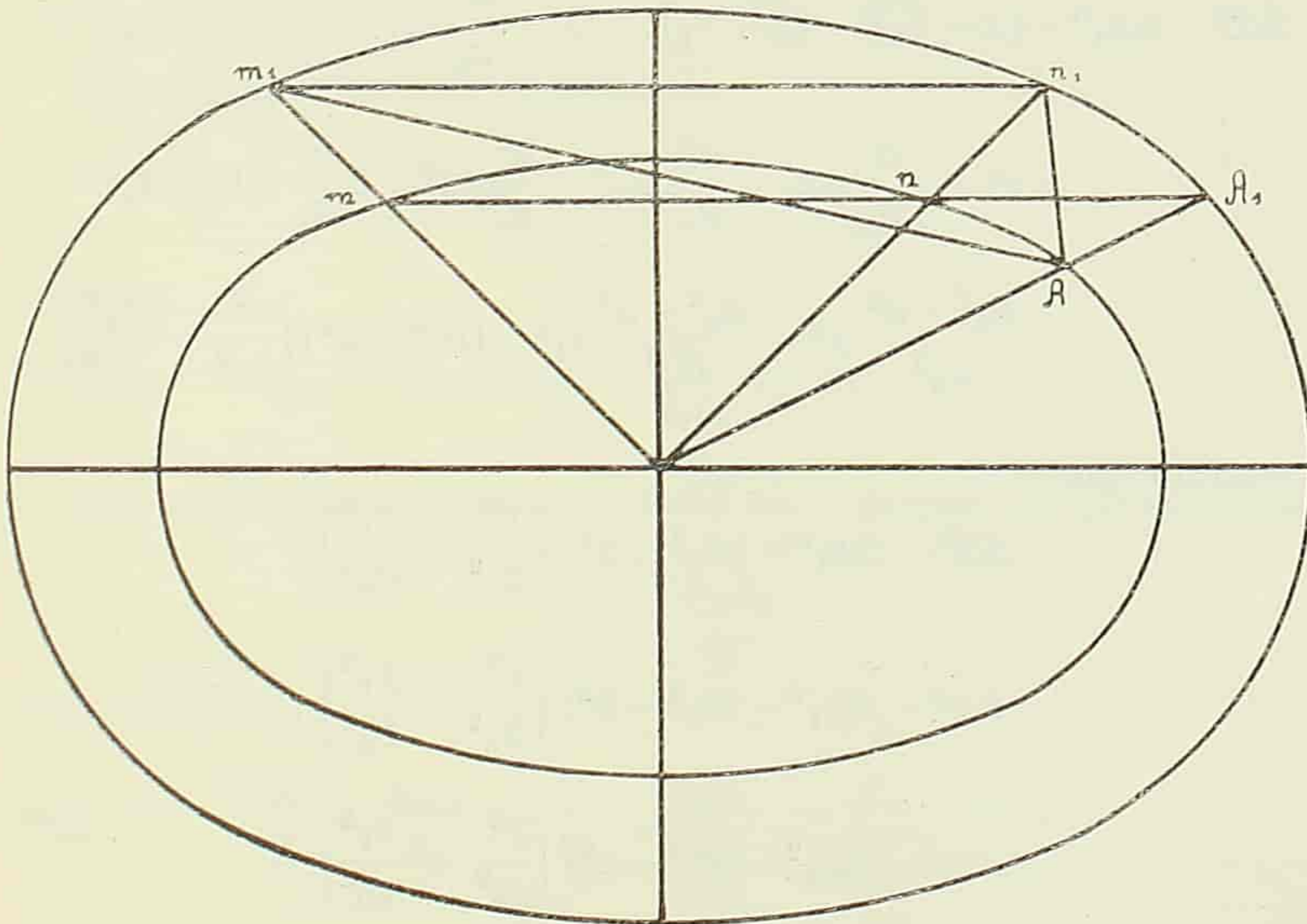
Разстояніе двухъ какихъ либо точекъ поверхности эллипсоида равно разстоянію ихъ корреспондирующихъ точекъ.

Какъ извѣстно при софокусныхъ эллипсоидахъ разность квадратовъ ихъ полуосей — величина постоянная, т. е.

$$(46') \quad a^2 = c^2 - \epsilon^2, \quad b^2 = c^2 - \eta^2, \quad a_0^2 = c_0^2 - \epsilon^2, \quad b_0^2 = c_0^2 - \eta^2$$

или

$$(46) \quad a^2 - a_0^2 = b^2 - b_0^2 = c^2 - c_0^2 = \text{const.}$$



Фиг. 4.

Возьмемъ два софокусныхъ эллипсоида: малый съ точками на поверхности $A(x, y, z)$ и $n(x_1, y_1, z_1)$ и полуосями a_0, b_0, c_0 и большой съ корреспондирующими точками $A_1(\xi, \eta, \zeta)$ и $n_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ и полуосями a, b, c .

По теоремѣ Ivory должно быть (фиг. 4)

$$A n_1 = A_1 n, \quad A m_1 = A_1 m$$

или кратко

$$N = N_1 \quad \text{и} \quad M = M_1$$

но

$$(47) \quad \begin{cases} N^2 = (x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + (z - \zeta_1)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \\ N_1^2 = (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 = \Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2 \end{cases}$$

$$N^2 - N_1^2 = \Delta x^2 - \Delta x_1^2 + \Delta y^2 - \Delta y_1^2 + \Delta z^2 - \Delta z_1^2.$$

Для корреспондирующихъ пунктовъ имѣемъ слѣдующее соотношеніе

$$(48) \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{a}{a_0} x_1, & \eta_1 = \frac{b}{b_0} y_1, & \zeta_1 = \frac{c}{c_0} z_1, \\ \xi = \frac{a}{a_0} x, & \eta = \frac{b}{b_0} y, & \zeta = \frac{c}{c_0} z, \end{cases}$$

а потому

$$\begin{aligned} \Delta x^2 - \Delta x_1^2 &= (x - \xi_1)^2 - (\xi - x_1)^2 = (x - \frac{a}{a_0} x_1)^2 - \left(\frac{a}{a_0} x - x_1\right)^2 = \\ &= x^2 - 2 \frac{a}{a_0} x x_1 + \frac{a^2}{a_0^2} x_1^2 - \frac{a^2}{a_0^2} x^2 + 2 \frac{a}{a_0} x x_1 - x_1^2 = \\ &= \frac{a_0^2 - a^2}{a_0^2} x^2 - \frac{a_0^2 - a^2}{a_0^2} x_1^2 = (a_0^2 - a^2) \left(\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{x_1^2}{a_0^2}\right) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\Delta x^2 - \Delta x_1^2 = (a_0^2 - a^2) \left(\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{x_1^2}{a_0^2}\right),$$

$$\Delta y^2 - \Delta y_1^2 = (b_0^2 - b^2) \left(\frac{y^2}{b_0^2} - \frac{y_1^2}{b_0^2}\right),$$

$$\Delta z^2 - \Delta z_1^2 = (c_0^2 - c^2) \left(\frac{z^2}{c_0^2} - \frac{z_1^2}{c_0^2}\right)$$

и потому, согласно формуламъ 47 и 46,

$$M^2 - N^2 = (a_0^2 - a^2) \left[\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} + \frac{z^2}{c_0^2} - \left(\frac{x_1^2}{a_0^2} + \frac{y_1^2}{b_0^2} + \frac{z_1^2}{c_0^2} \right) \right]$$

и такъ какъ точки $A(x, y, z)$ и $n(x_1, y_1, z_1)$ лежатъ на одномъ и томъ же эллипсоидѣ, то

$$N^2 - N_1^2 = (a_0^2 - a^2) (1 - 1) = 0 \quad \text{и} \quad M^2 - M_1^2 = 0,$$

чѣмъ и доказана теорема Ivory.

Если мы обозначимъ составляющія напряженія малаго эллипсоида въ отношеніи точки A_1 большого черезъ X и напряженія большого эллипсоида въ отношеніи точки A малаго черезъ X_1 , то получаемъ

$$\frac{X}{X_1} = \frac{\iiint dy dz \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_x} \right)}{\iiint d\eta d\zeta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho_\xi} \right)}.$$

Интегрируя по x и ξ , т. е. идя по хордѣ mn и соотвѣтственно m_1n_1 параллельно оси получаемъ

$$(50) \quad \frac{X}{X_1} = \frac{\iint dy dz \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)}{\iint d\eta d\zeta \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{N_1} \right)}.$$

Изъ формулы 48 находимъ

$$d\eta = \frac{b}{b_0} dy, \quad d\zeta = \frac{c}{c_0} dz,$$

а потому

$$(51) \quad d\eta d\zeta = \frac{bc}{b_0 c_0} dy dz.$$

Согласно формуламъ 49 и 51 изъ формулы 50 получаемъ

$$\frac{X}{X_1} = \frac{b_0 c_0}{bc}$$

и аналогично

$$(52) \quad \frac{X}{X_1} = \frac{b_0 c_0}{bc}, \quad \frac{Y}{Y_1} = \frac{a_0 c_0}{ac}, \quad \frac{Z}{Z_1} = \frac{a_0 b_0}{ab}.$$

Разсмотримъ теперь дѣйствіе большого эллипсоида на точку A_1 на его поверхности и точку A внутри его.

По формуламъ 13 дѣйствіе эллипсоида на точку внутри его или въ частности на его поверхности пропорціонально координатамъ этихъ точекъ, а потому

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{x}{\xi}, \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{y}{\eta}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{z}{\zeta}.$$

и такъ какъ точки A и A_1 соотвѣтственны, то

$$(53) \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{a_0}{a}, \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{b_0}{b}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{c_0}{c}.$$

Перемножая эти формулы съ формулами 52, получаемъ

$$(54) \quad X = \frac{a_0 b_0 c_0}{abc} X_2, \quad Y = \frac{a_0 b_0 c_0}{abc} Y_2, \quad Z = \frac{a_0 b_0 c_0}{abc} Z_2,$$

т. е. имѣемъ теорему Мах-Лаурин'а, которая гласитъ, что „дѣйствіе магнитнаго эллипсоида на внѣшнюю точку A , равняется дѣйствію софокуснаго эллипсоида, проходящаго черезъ этотъ пунктъ A_1 , помноженному на соотношеніе произведеній полуосей перваго и втораго эллипсоида“.

Въ формулахъ 54 мы опредѣляемъ X_2 , Y_2 , Z_2 изъ формулъ 13 или для эллипсоидовъ вращенія изъ формулы 14, гдѣ вмѣсто полуосей a_0 , b_0 , c_0 нужно вставить полуоси a , b , c , которыя опредѣляемъ изъ уравненія эллипсоида, гдѣ вставимъ координаты точки A_1 (x_1 y_1 z_1) и замѣнимъ полуоси a_0 , b_0 , c_0 помощью формулъ 46', т. е.

$$(55) \quad \frac{x_1^2}{c^2 - \varepsilon^2} + \frac{y_1^2}{c^2 - \eta^2} + \frac{z_1^2}{c} = 1,$$

гдѣ по формулъ 46'

$$(55') \quad \varepsilon^2 = c_0^2 - a_0^2, \quad \eta^2 = c_0^2 - b_0^2.$$

Если вставимъ найденныя значенія полуосей a_1 b_1 c_1 въ выраженіе 13, получимъ вмѣсто M , N , P новыя значенія M_2 , N_2 , P_2 и тогда по формулъ 54 имѣемъ

$$(56) \quad X = \frac{a_0 b_0 c_0}{abc} M_2 x, \quad Y = \frac{a_0 b_0 c_0}{abc} N_2 y, \quad Z = \frac{a_0 b_0 c_0}{abc} P_2 z.$$

Вставляя эти значенія въ формулу 42 и пользуясь формулами 48, имѣемъ

$$(57) \quad Q = k \left[\frac{AX}{1 + Mk} + \frac{BY}{1 + Nk} + \frac{CZ}{1 + Pk} \right],$$

гдѣ k опредѣляется формулой 23 и представляетъ такъ называемый сусцептибилитетъ, A, B, C коэффициенты потенціала земного магнитнаго поля, X, Y, Z опредѣляются формулами 56, а M, N, P формулами 13 или въ случаѣ эллипсоида вращения формулами 14.

Направленіе намагничиванія.

Если направленіе намагничивающей силы параллельно одной изъ осей эллипсоида, то и направленіе индуцированнаго намагничиванія параллельно той же оси, на примѣръ, оси z , а въ такомъ случаѣ въ формулахъ 5 $\alpha = \beta = 0$ и потому $A = B = 0$. Тогда изъ формулъ 57 видимъ, что

$$(58) \quad Q = k \frac{CZ}{1 + Pk},$$

гдѣ коэффициентъ

$$(59) \quad K \frac{C}{1 + Pk} = K_z$$

есть величина, не зависящая отъ координатъ x, y, z .

Если намагничивающая сила лежитъ въ плоскости YOZ , тогда $\alpha = 0$ и $A = 0$.

Углы между направленіями намагничивающей силы R и индуцированнаго намагничиванія J съ осями координатъ будутъ

$$(60) \quad \begin{cases} \cos(R, Y) = \frac{B}{R} & \cos(R, Z) = \frac{C}{R} \\ \cos(J, Y) = \frac{\beta}{J} & \cos(J, Z) = \frac{\gamma}{J} \end{cases}$$

а потому уголъ между намагничивающей силой и направленіемъ намагничиванія будетъ

$$\cos(JR) = \cos(RY) \cos(JY) + \cos(RZ) \cos(JZ)$$

или, вставляя значенія изъ формулы 60, имѣемъ

$$\cos(JR) = \frac{1}{JR} (\beta B + \gamma C) = \frac{K}{JR} \left(\frac{\beta^2}{1 + kN} + \frac{\gamma^2}{1 + kP} \right),$$

Такъ какъ

$$\cos(JY) = \sin(JZ) \quad \cos(RY) = \sin(RZ),$$

то

$$\frac{B}{C} = \frac{\sin(JZ)}{\cos(JZ)} = \operatorname{tg}(JZ) = \frac{\beta}{1+kN} : \frac{\gamma}{1+kP} = \frac{1+kP}{1+kN} = \operatorname{tg}(RZ).$$

Дѣйствиє магнитнаго эллипсоида вращенія.

При нахожденіи интеграловъ для дѣйствія магнитнаго эллипсоида вращенія слѣдуетъ различать: будетъ ли онъ сплюснутый, т. е. $a > c$ или вытянутый, т. е. $a < c$, гдѣ c ось вращенія, и далѣе будетъ ли послѣдняя вертикальна или горизонтальна.

1) Эллипсоидъ сплюснутый $a > c$. Ось вращенія вертикальна.

Обозначимъ эксцентриситетъ эллипсоида

$$(61) \quad \frac{e^2}{c^2} = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \lambda^2, \quad 1 + \lambda^2 = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{a^2 - c^2}{c^2} < 1,$$

если $a^2 < 2c^2$.

Мы видимъ, что

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2} &= \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2 \vartheta}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cos^2 \vartheta \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \lambda^2 \cos^2 \vartheta \right) \quad \frac{\cos^2 \vartheta}{c^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} = \frac{1}{a^2} (1 + \lambda^2 \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Если обозначимъ $\cos \vartheta = v$ и $\sin \vartheta d\vartheta = -dv$ и подставимъ эти значенія въ формулу 14, то получимъ

$$(62) \quad \begin{aligned} X &= \frac{2\pi cx}{a} \int_{-1}^{+1} \frac{v^2 dv}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \lambda^2 v^2}} = \frac{2\pi x}{\lambda^3} (1 + \lambda^2) \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ Z &= \frac{2\pi a^2 z}{c^2} \int_{-1}^{+1} \frac{v^2 dv}{1 + \lambda^2 v^2} = \frac{2\pi z}{\lambda^3} (1 + \lambda^2) \int \frac{z^2 dz}{1 + z^2}, \end{aligned}$$

гдѣ мы положили при первомъ интегрированіи

$$\frac{c}{a} \lambda v = z, \quad \text{т. е.} \quad v = \frac{a}{c\lambda} z \quad \text{и} \quad dv = \frac{a}{c\lambda} dz$$

и при второмъ

$$\lambda v = z, \quad \text{т. е.} \quad v = \frac{z}{\lambda} \quad \text{и} \quad dv = \frac{dz}{\lambda},$$

Найдемъ полученные интегралы

$$A_1 = \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}} = - \int \frac{(1-z^2-1) dz}{\sqrt{1-z^2}} = - \int \sqrt{1-z^2} dz + \\ + \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -z \sqrt{1-z^2} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}} + \text{arc sin } z ,$$

а потому

$$2A = -z \sqrt{1-z^2} + \text{arc sn } z = \left[-\frac{c\lambda}{a} v \sqrt{1 - \frac{c^2 \lambda^2}{a^2} v^2} + \text{arc sn } \frac{c\lambda}{a} v \right]_{-1}^{+1}$$

Преобразуемъ это выражение.

Положимъ

$$\text{arc sin } \frac{c\lambda}{a} = x ,$$

тогда

$$\sin x = \frac{c\lambda}{a} , \quad \text{tg } x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{c\lambda}{a \sqrt{1 - \frac{c^2 \lambda^2}{a^2}}} = \lambda ,$$

слѣдовательно

$$\text{arc sin } \frac{c\lambda}{a} = x = \text{arc tg } \lambda \quad \frac{c\lambda}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2 \lambda^2}{a^2}} = \frac{c^2 \lambda}{a^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

Подставляя это значеніе въ интеграль 63, имѣемъ

$$(64) \quad A_1 = \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc tg } \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} ,$$

$$(65) \quad B_1 = \int \frac{z^2 dz}{1+z^2} = \int \frac{(1+z^2-1) dz}{1+z^2} = \int dz - \int \frac{dz}{1+z^2} = \\ = z - \text{arc tg } z = \left[\lambda v - \text{arc tg } \lambda v \right]_{-1}^{+1} = 2(\lambda - \text{arc tg } \lambda) .$$

Вставляя значенія интеграловъ A_1 и B_1 изъ формуль 64 и 65 въ формулы 62, получаемъ

$$(66) \quad \begin{cases} X = \frac{2\pi x}{\lambda^3} (1 + \lambda^2) \left[\text{arc tg } \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right] = M_1 x , \\ Z = \frac{4\pi z}{\lambda^3} (1 + \lambda^2) \left[\lambda - \text{arc tg } \lambda \right] = P_1 z . \end{cases}$$

II) Эллипсоидъ вытянутый, т. е. $a < c$. Ось вращения c .

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} = -\lambda^2 \quad \text{или} \quad \frac{c^2 - a^2}{c^2} = \lambda_1^2, \quad 1 - \lambda_1^2 = \frac{a^2}{c^2}.$$

Въ этомъ случаѣ мы должны въ знаменателѣ формуль 62 переменить знакъ при λ^2 и получимъ

$$\begin{aligned} A_2 &= \int \frac{z dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{(1+z^2-1) dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \sqrt{1+z^2} dz - \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \\ &= z \sqrt{1+z^2} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1+z^2}} - \ln [z + \sqrt{1+z^2}], \\ 2A_2 &= \left[z \sqrt{1+z^2} - \ln (z + \sqrt{1+z^2}) \right] = \\ &= \left[\frac{c\lambda_1}{a} v \sqrt{1 + \frac{c^2\lambda_1^2}{a^2} v^2} - \ln \left(\frac{c\lambda_1}{a} v + \sqrt{1 + \frac{c^2\lambda_1^2}{a^2} v^2} \right) \right]_{-1}^{+1} = \\ &= 2 \frac{c\lambda_1}{a} \sqrt{1 + \frac{c^2\lambda_1^2}{a^2} v^2} - \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{c^2\lambda_1^2}{a^2} v^2} + \frac{c\lambda_1}{a}}{\sqrt{1 + \frac{c^2\lambda_1^2}{a^2} v^2} - \frac{c\lambda_1}{a}} \right), \end{aligned}$$

НО

$$\sqrt{1 + \frac{c^2\lambda_1^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{c^2(c^2 - a^2)}{a^2}} = \frac{c}{a},$$

а потому

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{c^2}{a^2} \lambda_1 - \ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}} = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2} - \ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}}, \\ B_2 &= \int \frac{z^2 dz}{1-z^2} = - \int \frac{(1-z^2-1) dz}{1-z^2} = - \int dz + \\ &+ \int \frac{dz}{1-z^2} = -z + \frac{1}{2} \left[\int \frac{dz}{1-z} + \int \frac{dz}{1+z} \right] = -z - \\ &- \frac{1}{2} \ln \frac{1-z}{1+z} = \left[-\lambda_1 v - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\lambda_1 v}{1+\lambda_1 v} \right]_{-1}^{+1} = \\ &= -2\lambda_1 - 2 \ln \sqrt{\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}}. \end{aligned}$$

Вставляя значенія $A_2 B_2$ въ формулы 14, имѣемъ

$$(67) \begin{cases} X = \frac{2\pi x}{\lambda_1^3} (1 - \lambda_1^2) \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1^2} - \ln \sqrt{\frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1}} \right] = M_2 x, \\ Z = \frac{4\pi z}{\lambda_1^3} (1 - \lambda_1^2) \left[\ln \sqrt{\frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1}} - \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1^2} \right] = P_2 z. \end{cases}$$

III) Эллипсоидъ сплюснутый. Ось вращения z горизонтальна

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \mu_1^2 < 1$$

безусловно

$$1 - \mu_1^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad \sqrt{1 - \mu_1^2} = \frac{c}{a},$$

$$\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cos^2 \vartheta \right) = \frac{1}{c^2} (1 - \mu_1^2 \cos^2 \vartheta),$$

$$\frac{\cos^2 \vartheta}{c^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} = \frac{1}{a^2} (1 + \frac{a^2}{c^2} \mu_1^2 \cos^2 \vartheta),$$

$$X = \frac{2\pi x c}{a} \int \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - \mu_1^2 \cos^2 \vartheta}} = - \frac{2\pi x c}{a \mu_1^3} \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

$$\int \frac{dz^2}{\sqrt{1 + z^2}} = A_3 = \frac{1}{2} \left[-z \sqrt{1 - z^2} + \arcsin z \right]_{-\mu}^{+\mu} = \\ = \arcsin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_1^2},$$

подобно тому, какъ получили формулу A_1 (63)

$$Z = \frac{2\pi a^2 z}{c^2} \int \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{1 + \frac{a^2}{c^2} \mu_1^2 \cos^2 \vartheta} = - \frac{2\pi c z}{a \mu_1^3} \int \frac{z^2 dz}{1 + z^2}$$

и подобно тому, какъ для B_1 въ формулѣ (65), получаемъ

$$\int \frac{z^2 dz}{1 + z^2} = B_3 = 2 \left[\frac{a}{c} \mu_1 - \arctg \frac{a}{c} \mu_1 \right].$$

Полагая

$$\arctg \frac{a}{c} \mu_1 = x \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \frac{a}{c} \mu_1, \quad \sin x = \frac{1}{\cos ec x} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{1+c \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{a\mu_1}{c_1 \sqrt{1+\frac{a^2}{c^2} \mu_1^2}} = \frac{\mu_1}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \mu_1^2}} = \\
 &= \frac{\mu_1}{\sqrt{1-\mu_1^2 + \mu_1^2}} = \mu_1,
 \end{aligned}$$

а потому

$$x = \operatorname{arc} \sin \mu_1.$$

Вставляя эти значенія A_3 и B_3 въ формулы 14, получаемъ

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{2\pi x}{\mu_1^3} (1-\mu_1^2) [\operatorname{arc} \sin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1-\mu_1^2}], \\ Z &= \frac{4\pi z}{\mu_1^3} (1-\mu_1^2) \left[\frac{\mu_1}{\sqrt{1-\mu_1^2}} - \operatorname{arc} \sin \mu_1 \right], \\ Y &= \frac{2\pi y}{\mu_1^3} (1-\mu_1^2) [\operatorname{arc} \sin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1-\mu_1^2}]. \end{aligned} \right.$$

IV) Эллипсоидъ вытянутый. Ось вращенія горизонтальна.

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \mu^2 < 1, \quad \text{если } c^2 < 2a^2,$$

$$1 + \mu^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{c}{a}.$$

Въ этомъ случаѣ въ формулахъ случая III въ знаменателѣ интеграловъ нужно переменить при z^2 знакъ на обратный

$$X = \frac{2\pi c x}{a} \int \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 + \mu^2 \cos^2 \vartheta}} = \frac{2\pi c x}{a\mu^3} \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

$$Z = \frac{2\pi a^2 z}{c^2} \int \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{1 - \frac{a^2}{c^2} \mu^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{2\pi c z}{a\mu^3} \int \frac{z^2 dz}{1 - z^2}.$$

Подобно тому какъ для формулы $A_2 B_2$ имѣемъ

$$A_4 = \int \frac{z dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \mu \sqrt{1 + \mu^2} - \ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}),$$

$$\begin{aligned}
 B_4 &= \int \frac{z^2 dz}{1-z^2} = \left[-z + \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \right] + \left[-\frac{a}{\mu} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{a}{c} \mu}{1 - \frac{a}{c} \mu} \right] - \\
 & - \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}}{1 - \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}} = \left[-\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\mu^2} + \mu}{\sqrt{1+\mu^2} - \mu} \right] = \\
 & = \left[-\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} + \ln \left[\sqrt{1-\mu^2} + \mu \right] \right]_{-\mu}^{+\mu} = -2 \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} + \\
 & + \ln \frac{\sqrt{1+\mu^2} + \mu}{\sqrt{1+\mu^2} - \mu} = -2 \left[\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} - \ln (\mu + \sqrt{1+\mu^2}) \right].
 \end{aligned}$$

Если подставимъ значенія A_4 и B_4 въ формулы для этого случая, получимъ

$$(69) \left\{ \begin{aligned}
 X &= \frac{2\pi x}{\mu^3} (1 + \mu^2) \left[\mu \sqrt{1 + \mu^2} - \ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) \right], \\
 Z &= \frac{4\pi z}{\mu^3} (1 + \mu^2) \left[\ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) - \frac{\mu}{1 + \mu^2} \right], \\
 Y &= \frac{2\pi y}{\mu^3} (1 + \mu^2) \left[\mu \sqrt{1 + \mu^2} - \ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) \right],
 \end{aligned} \right.$$

составляющія дѣйствія эллипсоида вращенія въ какой либо точкѣ.

Для эллипсоида вращенія въ формулахъ 54 мы должны положить $a = b$, а потому, вставляя въ формулы 54 соответствующія значенія, имѣемъ для I случая

$$X = \frac{a_0^2 c_0}{a^2 c} X_1 = \frac{a_0^2 c_0}{a^2 c}, \quad \frac{2\pi x}{\lambda^3} (1 + \lambda^2) \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda \right).$$

Такъ какъ для сплюснутаго эллипсоида

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} - \frac{e^2}{c^2} = \lambda^2,$$

то

$$(70) \quad \lambda^2 = \frac{e^2}{c^2}, \quad \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} = \frac{a^2 c^3}{c^2 e^3} = \frac{a^2 c}{e^3},$$

а потому

$$(71) \quad \begin{cases} X = \frac{2\pi a_0^2 c_0 x}{e^3} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right], \\ Z = \frac{4\pi a_0^2 c_0 z}{e^3} \left[\lambda - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda \right]. \end{cases}$$

Для второго случая вмѣсто формулы 67 получимъ

$$(72) \quad \begin{cases} X = \frac{2\pi a_0^2 c_0 x}{e^3} \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1^2} - \ln \sqrt{\frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1}} \right], \\ Z = \frac{4\pi a_0^2 c_0 z}{e^3} \left[\ln \sqrt{\frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1}} - \lambda_1 \right]. \end{cases}$$

Для третьяго случая имѣемъ

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{a_0^2 - c_0^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2} = \mu_1^2, \quad \mu_1 = \frac{e}{a}, \quad \sqrt{1 - \mu_1^2} = \frac{c}{a},$$

а потому

$$(73) \quad \begin{cases} X = \frac{a_0^2 c_0}{a^2 c} X_3 = \frac{a_0^2 c_0}{a^2 c} \frac{2\pi x a^2 c}{e^3} \left(\operatorname{arc} \sin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \right) = \\ \quad = \frac{2\pi a_0^2 c_0 x}{e^3} \left(\operatorname{arc} \sin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \right) \\ Z = \frac{4\pi a_0^2 c_0 z}{e^3} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{1 - \mu_1^2}} - \operatorname{arc} \sin \mu_1 \right) \\ Y = \frac{2\pi a_0^2 c_0 y}{e^3} \left(\operatorname{arc} \sin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \right). \end{cases}$$

Для четвертаго случая, по аналогіи

$$(74) \quad \begin{cases} X = \frac{2\pi a_0^2 c_0 x}{e^3} \left[\mu \sqrt{1 + \mu^2} - \ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) \right] \\ Z = \frac{4\pi a_0^2 c_0 z}{e^4} \left[\ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right] \\ Y = \frac{2\pi a_0^2 c_0 y}{c} \left[\mu \sqrt{1 + \mu^2} - \ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) \right]. \end{cases}$$

Намагничиваніе въ направленіи вертикальной оси.

За наиболее вѣроятное направленіе намагничиванія возьмемъ вертикальное.

Дифференцируя въ такомъ случаѣ формулу 58, получаемъ составляющія напряженія магнитнаго эллипсоида

$$(75) \quad \begin{cases} H = -\frac{\partial Q}{\partial p} = -k_z \frac{\partial Z}{\partial p}, & \text{гдѣ } p^2 = x^2 + y^2, \\ V = -\frac{\partial Q}{\partial z} = -k_z \frac{\partial Z}{\partial z}. \end{cases}$$

1) Разсматривая первый случай, нужно для Z взять выраженіе изъ формулы 71, въ которой для краткости обозначимъ объемъ эллипсоида

$$(76) \quad \frac{4}{3} \pi a_0^2 c_0 = V.$$

Дифференцируя формулу 71 для Z , получаемъ

$$(77) \quad H = -k_z \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{3Vz}{e^3} k_z \left(1 - \frac{1}{1+\lambda^2}\right) \frac{d\lambda}{dp} = \\ = -\frac{3Vz}{e^3} k_z \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \frac{d\lambda}{dp},$$

$$(78) \quad V = -k_z \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{3V}{e^3} k_z \left\{ \lambda - \arctg \lambda + \frac{z\lambda^2}{1+\lambda^2} \frac{d\lambda}{dz} \right\}.$$

Такъ какъ

$$\lambda = \frac{e}{c} \quad (\text{ф. 61}),$$

то

$$(79) \quad \frac{d\lambda}{dp} = -\frac{e}{a^2} \frac{dc}{dp} \quad \frac{d\lambda}{dz} = -\frac{e}{c^2} \frac{dc}{dz};$$

c есть полуось софокуснаго эллипсоида, для котораго

$$a^2 - c^2 = a_0^2 - c_0^2 = e^2,$$

а потому

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{p^2}{e^2 + c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$c^4 - (p^2 + z^2 - e^2) c^2 - z^2 e^2 = 0.$$

Разрѣшая это уравненіе, имѣемъ

$$(80) \quad c^2 = \frac{p^2 + z^2 - e^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 + z^2 - e^2)^2 + 4e^2 z^2} = \\ = \frac{p^2 + z^2 - e^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 + z^2 + e^2)^2 - 4p^2 e^2}$$

и

$$(81) \quad a^2 = c^2 + e^2 = \frac{p^2 + z^2 + e^2}{2} + \frac{R}{2},$$

гдѣ

$$(82) \quad R = \sqrt{(p^2 + z^2 - e^2)^2 + 4e^2 z^2} = \sqrt{(p^2 + z^2 + e^2)^2 - 4p^2 e^2}.$$

Если сложимъ уравненія 80 и 81, получимъ

$$(83) \quad R = a^2 + c^2 - p^2 - z^2.$$

Выраженіе для R можемъ представить иначе. Обозначимъ

$$p^2 + z^2 = r^2 \quad \text{и} \quad p = r \cos \varphi \quad \text{и} \quad z = r \sin \varphi.$$

Тогда имѣемъ

$$(84) \quad R = \sqrt{(r^2 + e^2) - 4r^2 e^2 \cos^2 \varphi}$$

Для крайнихъ значеній $\cos^2 \varphi$ получаемъ

$$(85) \quad R = r^2 \pm e^2 = p^2 + z^2 \pm e^2$$

Съ другой стороны изъ ф. 84

$$R = \sqrt{r^4 + 2r^2 e^2 + e^4 - 4r^2 e^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{(r^2 - e^2 \cos 2\varphi)^2 + e^2 \sin^2 2\varphi}.$$

Пренебрегая вторымъ членомъ подъ корнемъ, имѣемъ

$$(86) \quad R = r^2 - e^2 \cos^2 \varphi = p^2 + z^2 - e^2 \cos 2\varphi$$

Такъ какъ это значеніе для крайнихъ значеній $\cos 2\varphi$ соотвѣтствуетъ крайнимъ значеніямъ R по формулѣ (85), то очевидно среди всевозможныхъ значеній R (86) возможно такое, при которомъ R пріобрѣтаетъ свое истинное значеніе. Дифференцируя формулу 80 получаемъ

$$2c \frac{dc}{dp} = p + \frac{(p^2 + z^2 - e^2) p}{R} = \frac{2pc^2}{R},$$

т. е.

$$(87) \quad \frac{dc}{dp} = \frac{pc}{R}$$

и

$$2c \frac{dc}{dz} = z + \frac{(p^2 + z^2 - e^2)z}{R} = \frac{2a^2 z}{R},$$

т. е.

$$(88) \quad \frac{dc}{dz} = \frac{a^2 z}{cR}$$

Аналогично этому получаемъ

$$(89) \quad \frac{da}{dp} = \frac{pc^2}{aR} \quad \text{и} \quad \frac{da}{dz} = \frac{az}{R}.$$

Вставляя въ формулы 77 и 78 значенія изъ формулъ 61, 79, 87 и 88, имѣемъ

$$H = -k_z \frac{dZ}{dp} = \frac{3\nu z}{e^3} k_z \frac{e^2 c^2 e pc}{a^2 a^2 c R} = \frac{3\nu k_z zp}{a^2 c R},$$

$$\begin{aligned} V &= -k_z \frac{dZ}{dz} = \frac{3\nu}{e^3} k_z \left[(\lambda - \text{arc tg } \lambda) - \frac{e^2 c^2 e a^2 z^2}{c^2 a^2 c^2 c R} \right] = \\ &= -\frac{3\nu k_z}{e^3} \left[(\lambda - \text{arc tg } \lambda) - \frac{e^3 z^2}{c^3 R} \right], \end{aligned}$$

а потому изъ формулъ 75 получаемъ

$$(90) \quad H = \frac{3\nu k_z Z p}{a^2 c R},$$

$$(91) \quad V = 3\nu k_z \left[\frac{z^2}{c^3 R} - \frac{\lambda - \text{arc tg } \lambda}{e^3} \right].$$

II. Во второмъ случаѣ для Z беремъ формулу 72, которую дифференцируемъ

$$\begin{aligned} (92) \quad H &= -k_z \frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{3\nu z}{e^3} k_z \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}} \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}} \frac{-1-\lambda_1-1+\lambda_1}{(1+\lambda_1)^2} \right] \\ &= \frac{3\nu z}{e^3} k_z \left[1 - \frac{1}{1-\lambda_1^2} \right] \frac{d\lambda_1}{dp} = -\frac{3\nu k_z z}{e^3} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2} \frac{d\lambda_1}{dp} = \\ &= \frac{3\nu k_z zp}{a^2 c R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (93) \quad V &= -k_z \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{3\nu z}{e^3} k_z \left[\lambda_1 + \ln \sqrt{\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}} + \frac{e^2 c^2 e}{c^2 a^2 c^2} \frac{a^2 z^2}{cR} \right] = \\
 &= \frac{3\nu k_z}{e^3} \left[\lambda_1 + \ln \sqrt{\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}} + \frac{e^3 z^2}{c^3 R} \right].
 \end{aligned}$$

III. Для третьго случая беремъ формулы 68, гдѣ вертикальная составляющая Y . Дифференцируя ее и пользуясь прежними значеніями, имѣемъ

$$\begin{aligned}
 (94) \quad \left\{ \begin{aligned}
 H_x &= -k_z \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{3\nu x}{2e^3} k_z \left[\frac{1}{\sqrt{1-\mu_1^2}} - \sqrt{1-\mu_1^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mu_1^2}{\sqrt{1-\mu_1^2}} \right] \frac{d\mu_1}{dx} = \frac{3\nu y}{2e^3} k_z \frac{2\mu_1^2}{\sqrt{1-\mu_1^2}} \frac{d\mu_1}{dx} = \\
 &= \frac{3\nu y}{e^3} k_z \frac{e^2 e}{a^2 a^2 c} \frac{a}{aR} \frac{xc^2}{aR} = \frac{3\nu y x c k_z}{a^4 R}, \\
 H_z &= \frac{3\nu y}{e^3} k_z \frac{e^2 e}{a^2 a^2 c} \frac{a}{R} \frac{az}{R} = \frac{3\nu k_z zy}{a^2 c R}, \\
 V &= -k_z \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{3\nu}{e^3} k_z \left[\arcsin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1-\mu_1^2} - \frac{e^3 y^2 c}{a^4 R} \right].
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

IV. Для четвертаго случая служатъ формулы 69, гдѣ вертикальная составляющая X . Дифференцируя ее, какъ и прежде, имѣемъ

$$\begin{aligned}
 (95) \quad \left\{ \begin{aligned}
 H_y &= -k_z \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{3\nu x}{2e^3} k_z \left[\frac{1 + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}}{\mu_1 + \sqrt{1+\mu^2}} - \sqrt{1+\mu^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}} \right] \frac{d\mu}{dy} = \frac{3\nu x k_z}{2e^3} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{1+\mu^2} - \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}} \right] \frac{d\mu}{dy} = \frac{3\nu x y c k_z}{a^4 R}, \\
 H_z &= -k_z \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{3\nu x}{e^3} k_z \frac{e^2 e}{a^2 a^2 c} \frac{a}{R} \frac{za}{R} = \frac{3\nu x z k_z}{a^2 c R}, \\
 V &= -k_z \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{3\nu}{2e^3} k_z \left[\ln (\mu + \sqrt{1+\mu^2}) - \mu \sqrt{1+\mu^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^2 x^2 c}{a^4 R} \right].
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Изслѣдованіе горизонтальной и вертикальной составляющей.

1) Для перваго случая имѣемъ слѣдующія выраженія составляющихъ

$$H = \frac{zp}{a^2 c R} \quad V = \frac{z^2}{c^3 R} - \frac{\lambda - \text{arc tg } \lambda}{e^3},$$

гдѣ мы отбросили постоянный коэффициентъ.

Горизонтальная составляющая равна нулю, если $p = 0$ или $z = 0$.

Такъ какъ

$$\lambda - \text{arc tg } \lambda > 0,$$

то

$$V = 0,$$

если

$$\text{arc tg } \lambda = \lambda - \frac{e^3 z^2}{c^3 R}.$$

Такъ какъ

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то

$$p^2 = a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2,$$

но

$$R = a^2 + c^2 - p^2 - z^2 = c^2 + \frac{a^2}{c^2} z^2 - z^2 = \frac{c^4 + e^2 z^2}{c^2},$$

$$\text{arc tg } \lambda = \frac{e}{c} \left(1 - \frac{e^2 z^2}{c^2 R} \right) = \frac{e}{c} \left(1 - \frac{e^2 z^2}{c^4 + e^2 z^2} \right) = \frac{e}{c} \frac{c^4}{c^4 + e^2 z^2},$$

$$c^4 + e^2 z^2 = \frac{e c^3}{\text{arc tg } \lambda},$$

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\frac{e c^3}{\text{arc tg } \lambda} - c^4 \right) \frac{1}{e^2} = c^2 \left(\frac{c}{e} \frac{1}{\text{arc tg } \lambda} - \frac{e^2}{c^2} \right) = \\ &= c^2 \left(\frac{1}{\lambda \text{ arc tg } \lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right), \end{aligned}$$

что возможно, если

$$1 > \left(\frac{1}{\lambda \text{ arc tg } \lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) > 0.$$

Такъ какъ

$$\text{arc tg } \lambda < \lambda,$$

то

$$\frac{1}{\lambda \text{ arc tg } \lambda} - \frac{1}{\lambda^2} > \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}, \quad \text{т. е. } > 0.$$

Если обозначимъ

$$\begin{aligned} \text{arc tg } \lambda = x, \quad \text{tg } x = \lambda, \quad \sin x &= \frac{1}{\text{cosec } x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 x}} = \\ &= \frac{\text{tg } x}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{e}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^2}{c^2}}} = \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

Такъ какъ

$$\text{arc tg } \lambda = x = \text{arc sin } \frac{e}{a} \quad \text{и} \quad \sin \alpha < \alpha,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda \text{ arc tg } \lambda} - \frac{1}{\lambda^2} &< \frac{1}{\frac{e}{c} \frac{e}{a}} - \frac{1}{\left(\frac{e}{c}\right)^2} = \frac{ac}{e^2} - \frac{c^2}{e^2} = \frac{c(a-c)}{e^2} = \\ &= \frac{c(a-c)}{(a^2 - c^2)} = \frac{c}{a+c} < 1. \end{aligned}$$

Найдемъ максимумъ горизонтальнаго и вертикальнаго напряженія

$$\frac{dH}{dp} = \frac{1}{a^4 c^2 R} \left[a^2 c R - 2ap c R \frac{da}{dp} - pa^2 R \frac{dc}{dp} - pa^2 c \frac{dR}{dp} \right] = 0,$$

$$a^2 R - 2p^2 c^2 - p^2 a^2 - 2p^2 a \frac{p^2 + z^2 - e^2}{R} = 0,$$

$$a^2 R - 2p^2 c = p^2 a^2 \left[1 + \frac{2(p^2 + z^2 - e^2)}{\sqrt{(p^2 + z^2 - e^2)^2 + 4z^2 e^2}} \right],$$

Если отбросимъ подъ корнемъ $4z^2 e^2$, то правую часть увеличимъ и потому

$$a^2 R - 2p^2 c^2 < 3p^2 a^2$$

и такъ какъ

$$p^2 c^2 = a^2 (c^2 - z^2),$$

то

$$a^2 (a^2 + c^2 - p^2 - z^2) - 2a^2 (c^2 - z^2) < 3p^2$$

$$a^2 + c^2 + z^2 < 4p^2, \quad e^2 + z^2 < 4p^2.$$

Если второй членъ въ скобкахъ сдѣлаемъ равнымъ нулю, то правую часть уменьшимъ и потому

$$e^2 + z^2 > 2p^2.$$

Откуда

$$\frac{e^2 + z^2}{2} > p^2 > \frac{e^2 + z^2}{4}$$

или

$$\sqrt{\frac{e^2 + z^2}{2}} > p > \sqrt{\frac{e^2 + z^2}{4}}$$

и разстояніе $2p$ между точками максимума

$$\sqrt{2(e^2 + z^2)} > 2p > \sqrt{e^2 + z^2}.$$

Такъ какъ

$$z^2 > c^2,$$

то

$$2p > \sqrt{a^2 - c^2 + z^2} > a,$$

т. е.

1) Точки максимума горизонтальнаго напряженія лежатъ за предѣлами эллипсоида.

2) Разстояніе между точками максимума горизонтальнаго напряженія больше глубины залеганія центра эллипсоида.

Вертикальное напряженіе.

$$V = \frac{z^2}{c^3 R} - \frac{\lambda - \text{arc tg } \lambda}{e^3},$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dp} &= \frac{1}{e^3} \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} - 1 \right) \frac{d\lambda}{dp} - \frac{z^2}{c^6 R^2} \left[3c^2 R \frac{dc}{dp} + c^3 \frac{dR}{dp} \right] = \\ &= - \frac{1}{e^3} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \frac{d\lambda}{dp} - \frac{z^2}{c^6 R^2} \left[3c^2 R \frac{pc}{R} + c^3 \frac{2p(p^2 + z^2 - e^2)}{R} \right] = \\ &= \frac{1}{e^3} \frac{e^2 c^2}{a^2} \frac{e}{c^2} \frac{pc}{R} - \frac{z^2}{c^6 R^2} \left[3c^3 p + 2pc^3 \frac{p^2 + z^2 - e^2}{R} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{p^2}{a^2 c^3 R^2} \left[c^2 R - z^2 a^2 \left(1 + \frac{4c^2}{R} \right) \right] = 0.$$

Что возможно, когда

$$1) \quad p = 0$$

или

$$2) \quad c^2 R - z^2 a^2 \left(1 + \frac{4c^2}{R}\right) = 0.$$

Такъ какъ

$$z^2 a^2 = c^2 (a^2 - p^2),$$

то

$$c^2 R = c^2 (a^2 - p^2) + \frac{4a^2 c^2 z^2}{R},$$

$$R = a^2 - p^2 + \frac{4a^2 z^2}{R},$$

но

$$R = a^2 + c^2 - p^2 - z^2,$$

$$a^2 + c^2 - p^2 - z^2 = a^2 - p^2 + \frac{4a^2 z^2}{R},$$

$$c^2 - z^2 = \frac{4a^2 z^2}{R} = 2z^2 \left[\frac{p^2 + z^2 + e^2 + R}{R} \right],$$

$$c^2 - z^2 = 2z^2 \left[1 + \frac{p^2 + z^2 + e^2}{R} \right],$$

$$c^2 - z^2 > 4z^2,$$

но если вставимъ значеніе R изъ ф. 86 въ ф. 80 и 81, получимъ

$$c^2 = p^2 + z^2 - e^2 \cos^2 \varphi \quad \text{и} \quad a^2 = p^2 + z^2 + e^2 \cos^2 \varphi,$$

а потому

$$p^2 + z^2 - e^2 \sin^2 \varphi - z^2 > 4z^2 \quad p > 4z^2$$

и

$$2p > 4z,$$

То есть,

1) Разстояніе между точками максимума вертикальнаго напряженія больше глубины залеганія центра эллипсоида въ 4 раза.

2) Средній максимумъ напряженія вертикальнаго эллипсоида лежитъ надъ центромъ послѣдняго.

II случай. Такъ какъ

$$d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda - \lambda) = d \left(\lambda - \ln \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \right)$$

и формулы напряженія I и II случая въ другомъ ни въ чемъ не различаются, то результаты изслѣдованія относительно максимумовъ напряженія въ первомъ случаѣ вполне примѣнимы ко второму случаю.

Нулевое значеніе вертикальной составляющей

$$V = 0,$$

если

$$\ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}} = \lambda_1 + \frac{e^3 z^2}{c^3 R},$$

гдѣ e^2 имѣетъ обратный знакъ сравнительно съ первымъ случаемъ, а потому

$$\ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}} = \frac{e}{c} \left(1 + \frac{e^2 z^2}{e^4 - e^2 z^2} \right) = \frac{e}{c} \frac{e^4}{c^4 - e^2 z^2},$$

$$z^2 = \left(c^4 - \frac{ec^3}{\ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}}} \right) \frac{1}{e^2} = c^2 \left[\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_1 \ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}}} \right],$$

что возможно, если

$$1 > \left[\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_1 \ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}}} \right] > 0.$$

Такъ какъ

$$\ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1} \right) = \left[\lambda_1^2 + \frac{\lambda_1^3}{3} + \frac{\lambda_1^5}{5} + \dots \right],$$

то

$$\ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}} > \lambda_1,$$

а потому

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_1 \ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}}} > \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}, \quad \text{т. е.} > 0.$$

Съ другой стороны

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}} &= \ln \sqrt{\frac{1+\frac{e}{c}}{1-\frac{e}{c}}} = \ln \sqrt{\frac{\left(1+\frac{e}{c}\right)^2}{1-\frac{e^2}{c^2}}} = \\ &= \ln \left[\frac{c}{a} \left(1+\frac{e}{c}\right) \right] = \ln \left[\frac{c}{a} + \frac{e}{a} \right], \end{aligned}$$

НО

$$\ln \left[\frac{c}{a} + \frac{e}{a} \right] > \ln \left[1 + \frac{e}{a} \right]$$

и слѣдовательно

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_1 \ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}}} > \frac{c^2}{e^2} - \frac{c}{e} \cdot \frac{a}{e},$$

НО

$$\frac{c^2}{e^2} - \frac{ac}{e^2} = \frac{c(c-a)}{e^2} = \frac{c(c-a)}{c^2-a^2} = \frac{c}{c+a} < 1,$$

а потому можетъ быть, но не всегда

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_1 \ln \sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}}} < 1.$$

III случай. Для III случая имѣемъ слѣдующія формулы напряженія

$$H_x = \frac{xc}{a^4 R}, \quad H_z = \frac{z}{a^2 c R}, \quad V = \frac{1}{e^3} \left[\arcsin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1-\mu_1^2} - \frac{e^3 y^2 c}{a^4 R} \right]$$

Для нахождения точекъ максимума напряженія дифференцируемъ послѣдовательно

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{1}{a^2 R^2} \left[a^4 c R + x a^4 R \frac{dc}{dx} - 4 a^3 x c R \frac{da}{dx} - x c a^4 \frac{dR}{dx} \right] = 0,$$

$$a^4 c R + x a^4 R \frac{xc}{R} - 4 x c a^3 R \frac{xc^2}{aR} - x c a^4 \frac{2x(p^2+z^2-e^2)}{R} = 0,$$

$$a^2 c \left[a^2 R + x^2 a^2 - 4 c^2 x^2 - 2 a^2 x^2 \frac{p^2+z^2-e^2}{R} \right] = 0,$$

$$a^2 R - 4c^2 x^2 = a^2 x^2 \left[\frac{2(p^2 + z^2 - e^2)}{\sqrt{(p^2 + z^2 - e^2)^2 + 4z^2 e^2}} - 1 \right].$$

Если подъ корнемъ отбросимъ $4z^2 e^2$, то правую часть увеличимъ и

$$a^2 R - 4c^2 x^2 < a^2 x^2, \quad a^2 (x^2 + y^2 + z^2 - e^2 \cos 2\varphi) < a^2 x^2 + 4c^2 x^2,$$

$$y^2 < \frac{4c^2 x^2}{a^2} - z^2 + e^2 \cos 2\varphi.$$

Если беремъ профиль въ равнинѣ $хоу$ и при не слишкомъ большой разности осей эллипсоида пренебрегаемъ малымъ членомъ $e^2 \cos 2\varphi$, то

$$y^2 < \frac{4x^2 c^2}{a^2} \quad \text{и} \quad y < \frac{2xc}{a},$$

то есть:

1) Разстояніе между точками максимума горизонтальнаго напряженія

$$2x > \frac{a}{c} y,$$

больше глубины залеганія, такъ какъ

$$a > c.$$

2) Подъ центромъ залежи горизонтальное напряженіе равно нулю.

Если первый членъ въ скобкахъ отбросимъ, то правую часть уменьшимъ и

$$a^2 R > 4c^2 x^2 - a^2 x^3,$$

$$a^2 (x^2 + y^2 + z^2 - e^2 \cos 2\varphi) > 4c^2 x^2 - a^2 x^2,$$

$$y^2 > \frac{2(2c^2 - a^2)x^2}{a^2} - z^2 + e^2 \cos 2\varphi.$$

Если $a = c$, то очевидно получимъ

$$y = 2x,$$

т. е. разстояніе между точками максимума горизонтальнаго напряженія въ случаѣ шаровиднаго мѣсторожденія равно глубинѣ залеганія.

$$\frac{\partial H_z}{\partial z^2} = \frac{1}{a^4 c^2 R} \left[a^2 c R - 2 a c R z \frac{da}{dz} - a^2 R z \frac{dc}{dz} - z a^2 c \frac{dR}{dz} \right] = 0,$$

$$a^2 c R - 2 a c R z \frac{az}{R} - a^2 R z \frac{a^2 z}{c R} - z a^2 c \frac{2z(p^2 + z^2 + e^2)}{R} = 0,$$

$$\frac{a}{c} \left[c^2 R - 2 c z^2 - a^2 z^2 - 2 z^2 c^2 \frac{p^2 + z^2 + e^2}{R} \right] = 0,$$

$$c^2 R - a^2 z^2 - \frac{4 a c}{R} = a^2 z^2 \left[1 + \frac{4 c^2}{R} \right] = a^2 z^2 \left[1 + \frac{2(p^2 + z^2 - e^2) + 2R}{R} \right],$$

$$c^2 R - a^2 z^2 \left[1 + \frac{2(p^2 + z^2 - e^2)}{\sqrt{(p^2 + z^2 - e^2)^2 + 4 e^2 z^2}} + 2 \right].$$

Если подь корнемъ отбросимъ членъ $4e^2 z^2$, то правую часть увеличимъ и потому

$$c^2 R < 5 a^2 z^2,$$

$$c^2 (y^2 + z^2 - e^2 \sin^2 \varphi) < 5 a^2 z^2,$$

$$y^2 < \frac{5 a^2 z^2}{c^2} - z^2 + e^2 \sin^2 \varphi$$

или

$$y < \frac{\sqrt{5 a^2 - c^2}}{c} z,$$

гдѣ z половина разстоянія между точками максимума горизонтальнаго напряженія въ направленіи оси z .

Если мы въ скобкахъ второй членъ вообще отбросимъ, то правую часть уменьшимъ и потому, по аналогіи съ предыдущимъ, имѣемъ

$$y > \frac{\sqrt{3 a^2 - c^2}}{c} z.$$

Можемъ найти еще другое соотношеніе, а именно

$$c^2 R - a^2 z^2 = \frac{4 a^2 c^2 z^2}{R},$$

$$c^2 (a^2 + c^2 - p^2 - z^2) - a^2 c^2 + c^2 p^2 = \frac{4 a^2 c^2 z^2}{R},$$

$$c^2 - z^2 = \frac{4a^2 z^2}{R} \quad p^2 + z^2 - e^2 \sin^2 \varphi - z^2 = \frac{4a^2 z^2}{R},$$

$$\begin{aligned} y^2 - e^2 \sin^2 \varphi &= 2z^2 \left(\frac{p^2 + z^2 + e^2 + R}{R} \right) = \\ &= 2z^2 \left(\frac{p^2 + z^2 + e^2}{\sqrt{(p^2 + z^2 + e^2)^2 - 4p^2 e^2}} + 1 \right). \end{aligned}$$

Если отбросимъ подъ корнемъ второй членъ, то правую часть уменьшимъ и потому

$$y^2 > 4z^2, \quad y > 2z,$$

$$2z > y.$$

Если $a_1 = c_1$, т. е. въ случаѣ шара, то въ обоихъ случаяхъ получаемъ

$$y = 2z$$

III. Для вертикальнаго напряженія въ третьемъ случаѣ имѣемъ

$$V = \frac{1}{e^3} \left[\arcsin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} - \frac{e^3 y^2}{a^4 R} \right].$$

Найдемъ точки максимума вертикальнаго напряженія въ направленіи осей x и z

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{dV}{dx} &= \frac{1}{e^3} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \mu_1^2}} - \sqrt{1 - \mu_1^2} + \frac{\mu_1^2}{\sqrt{1 - \mu_1^2}} \right] \frac{d\mu_1}{dx} - \\ &- \frac{y^2}{a^2 R^2} \left[a^4 R \frac{dc}{dx} - 4a^3 c R \frac{da}{dx} - a^4 c \frac{dR}{dx} \right] = \frac{2\mu_1}{e^3 \sqrt{1 - \mu_1^2}} \frac{d\mu_1}{dx} - \\ &- \frac{y^2}{a^6 R^2} \left[a^2 R \frac{xc}{R} - 4acR \frac{xc^2}{aR} - a^2 c \frac{2x(p^2 + z^2 - e^2)}{R} \right] = \\ &- \frac{2e^2 a}{e^3 a^2 c} \cdot \frac{e}{a^2} \frac{xc^2}{aR} - \frac{y^2 xc}{a^6 R^2} \left[a^2 - 4c^2 - 2a^2 \frac{p^2 + z^2 - e^2}{R} \right] = 0, \\ &- \frac{xc}{a^6 R^2} \left[2a^2 R + y^2 \left(a^2 - 4c^2 - 2a^2 \frac{p^2 + z^2 - e^2}{R} \right) \right] = 0, \\ 2a^2 R &= \left[4c^2 + 2a^2 \frac{p^2 + z^2 - e^2}{\sqrt{(p^2 + z^2 - e^2)^2 + 4z^2 e^2}} - a^2 \right] y^2. \end{aligned}$$

Если под корнем отбросим член $4z^2e^2$, то правую часть увеличим и

$$2a^2R < (4c + a^2) y^2,$$

$$2a^2 (y^2 + x^2 - e^2 \cos 2\varphi) < (4c^2 + a^2) y^2,$$

$$x^2 < \frac{4c^2 + a^2}{2a^2} y^2 + e^2 \cos 2\varphi.$$

Если же в скобках второй член отбросим, то правую часть уменьшим и

$$2a^2R > (4c^2 + a^2) y^2$$

и согласно предыдущему

$$x^2 > \frac{4c^2 - 3a^2}{2a^2} y^2 + e^2 \cos 2\varphi,$$

$$2x > 2 \sqrt{\frac{4c^2 - 3a^2}{2a^2}} y^2.$$

Если $a = c$, т. е. в случае шара

$$2x = \sqrt{a} y$$

b)

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{2c^2}{e^3 a^2} \frac{a}{e} \frac{e}{a^2} \frac{za}{R} - \frac{y^2}{a^3 R^2} \left[a^4 R \frac{dc}{dz} - 4a^3 c R \frac{dc}{dz} - a^4 c \frac{dR}{dz} \right] = 0,$$

$$\frac{z}{a^4 c R^2} \left[2a^2 R - y^2 \left(a^2 - 4c^2 - 2c^2 \frac{p^2 + z^2 + e^2}{R} \right) \right] = 0,$$

$$2a^2 R = y^2 \left[4c^2 + 2c^2 \frac{p^2 + z^2 + e^2}{\sqrt{(p^2 + z^2 + e^2)^2 - 4p^2 e^2}} - a^2 \right].$$

Если под корнем отбросим $4p^2 e^2$, то правую часть уменьшим и

$$2a^2 R > (6c^2 - a^2) y^2,$$

$$2a^2 (z^2 + y^2 + e^2 \cos 2\varphi) > (6c^2 - a^2) y^2,$$

$$z^2 > \frac{3(2c^2 - a^2)}{2a^2} y^2 - e^2 \cos 2\varphi, \quad 2z^2 > \frac{\sqrt{6(2c^2 - a^2)}}{a} y^2.$$

Если $a = c$, т. е. в случае шара, имеем

$$2z = \sqrt{c}y.$$

Нулевое значение вертикальной составляющей.

III. Если вертикальная составляющая равна нулю, то для третьего случая имеемъ

$$V = \frac{1}{e^3} \left[\arcsin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} - \frac{e^3 y^2 c}{a^4 R} \right] = 0,$$

$$\arcsin \mu_1 = \mu_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} + \frac{e^3 y^2 c}{a^4 R} = \frac{e}{a} \frac{c}{a} + \frac{e^3 y^2 c}{a^4 R} = \frac{ec}{a^2} \left(1 + \frac{e^2 y^2}{a^2 R} \right),$$

но

$$R = a^2 + c^2 - y^2 - z^2 = a^2 + c^2 - y^2 - \frac{a^2 - y^2}{a^2} c^2 = \frac{a^4 - e^2 y^2}{a^2},$$

$$\arcsin \mu_1 = \frac{ec}{a^2} \left(1 + \frac{e^2 y^2}{a^4 - e^2 y^2} \right) = \frac{a^2 ec}{a^4 - e^2 y^2},$$

$$y^2 = \frac{1}{e^2} \left[a^4 - \frac{ea^2 c}{\arcsin \mu_1} \right] = a^2 \left[\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\frac{e}{c} \arcsin \mu_1} \right],$$

что возможно, если

$$1 > \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\frac{e}{c} \arcsin \mu_1} > 0,$$

$$\arcsin \mu_1 = \arcsin \frac{e}{a} > \frac{e}{a},$$

$$\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\frac{e}{c} \arcsin \mu_1} > \frac{a^2}{e^2} - \frac{c}{e} \cdot \frac{a}{e} = \frac{a(a-c)}{e^2} > 0,$$

$$\arcsin \mu_1 = \arcsin \frac{e}{a} = x, \quad \sin x = \frac{e}{a},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{e}{a \sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2}}} = \frac{e}{c},$$

$$\arcsin \mu_1 = x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{c},$$

НО

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{c} < \frac{e}{c},$$

$$\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\frac{e}{c} \operatorname{arc} \sin \mu_1} < \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\frac{e}{c} \frac{e}{c}} = \frac{a^2}{e^2} - \frac{c^2}{e^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Отсюда видимъ, что равенство

$$y^2 = a^2 \left(\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\frac{e}{c} \operatorname{arc} \sin \mu_1} \right),$$

т. е. нулевая точка вертикальнаго напряженія симметрична относительно центра залежи.

IV случай. Такъ какъ выраженіе

$$d [\ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) - \mu \sqrt{1 + \mu^2}] = - \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

для четвертаго случая и

$$d [\operatorname{arc} \sin \mu_1 - \mu_1 \sqrt{1 + \mu_1^2}] = + \frac{2\mu_1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

для третьяго случая различаются только знакомъ при μ , то все сказанное относительно максимумовъ вертикальнаго и горизонтальнаго напряженій въ III случаѣ будетъ имѣть мѣсто и для IV случая.

Нулевое значеніе вертикальнаго напряженія въ IV случаѣ

$$V = 0,$$

если

$$\ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) = \mu \sqrt{1 + \mu^2} - \frac{e^3 x^2 c}{a^4 R},$$

а потому

$$\ln (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) = \frac{e}{a} \frac{e}{a} - \frac{e^3 x^2 c}{a^4 R} = \frac{ec}{a^2} \left(1 - \frac{e^2 x^2}{a^2 R} \right),$$

но

$$R = a^2 + c^2 - x^2 - z^2 = a^2 + c^2 - x^2 - \frac{a^2 - x^2}{a^2} c^2 = \frac{a^4 + e^2 x^2}{a^2},$$

а потому

$$\ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) = \frac{ec}{a^2} \left(1 - \frac{e^2 x^2}{a^4 + e^2 x^3}\right) = \frac{eca^2}{a^4 + e^2 x^2}$$

и

$$x^2 = \frac{1}{e^2} \left[\frac{eca^2}{\ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2})} - a^4 \right] = a^2 \left[\frac{1}{\mu \ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2})} - \frac{1}{\mu^2} \right],$$

что возможно, если

$$1 > \left[\frac{1}{\mu \ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2})} - \frac{1}{\mu^2} \right] > 0,$$

но отбрасывая под корнем малую величину μ^2 , получаемъ

$$\ln[\mu + \sqrt{1 + \mu^2}] \approx \ln(1 + \mu),$$

но

$$\ln(1 + \mu) = \frac{\mu}{1} - \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{3} + \dots < \mu,$$

а потому

$$\frac{1}{\mu \ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2})} - \frac{1}{\mu^2} > \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2}, \quad \text{т. е. } > 0,$$

но съ другой стороны

$$\ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) = \ln\left(\frac{e}{a} + \frac{c}{a}\right) > \ln\left(1 + \frac{e}{a}\right) > \ln\left(1 + \frac{e}{c}\right),$$

если $\frac{e}{c}$ величина малая, то можемъ принять

$$\ln\left(1 + \frac{e}{c}\right) = \frac{e}{c}$$

и слѣдовательно

$$\ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) > \frac{e}{c},$$

а потому

$$\frac{1}{\mu \ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2})} - \frac{1}{\mu^2} < \frac{a}{e} \frac{c}{e} - \frac{a^2}{e^2} = \frac{a(c-a)}{c^2 - a^2},$$

но

$$\frac{a(c-a)}{c^2 - a^2} = \frac{a}{c+a} < 1.$$

Вообще въ первомъ и третьемъ случаѣ мы обязательно

получаемъ точки нулевого значенія вертикальнаго напряженія, а во второмъ и четвертомъ случаѣ такія точки могутъ отсутствовать.

Хотя изслѣдованіе кривыхъ вертикальнаго и горизонтальнаго напряженія магнитнаго эллипсоида вращенія можно бы еще продолжить, какъ это сдѣлано въ диссертациі автора, но это оставляется до другого раза.

==

Т. В. Локоть.

ИДЕИ МЕНДЕЛЯ ВЪ СОВРЕМЕННОМЪ МЕНДЕЛИЗМЪ.

Рѣдкая, исключительная въ научномъ мірѣ судьба выпала на долю скромной, малой по объему, но глубокой по научному содержанію и по научному методу, работы августинскаго монаха и аббата монастыря въ нынѣшнемъ чешскомъ городѣ — Брно, Грегора Менделя, — о растительныхъ гибридахъ — „Versuche über Pflanzenhybriden“ — von Gregor Mendel (1856—1879), заключающей всего какихъ-нибудь 70 страницъ небольшого формата. Эта работа, напечатанная въ свое время лишь въ мѣстномъ, провинціальномъ изданіи — *Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn*“, IV Band, 1865 г. — вначалѣ почти не обратила на себя того вниманія, какого она заслуживала, и — можно сказать — была совершенно забыта до самого начала нынѣшняго столѣтія. Только изрѣдка ученые прошлаго столѣтія вспоминали эту работу Менделя. Между прочимъ, извѣстный русскій ботаникъ, профессоръ Кіевскаго Университета Шмальгаузенъ, еще въ своей диссертациі подчеркивалъ важность научнаго метода въ работѣ Менделя, а нѣмецкій ботаникъ Фоке въ своей книгѣ о растительныхъ гибридахъ — „Die Pflanzenmischlinge“, Berlin, 1881 г. — отдаетъ должное примѣненію математической формулировки результатовъ опытовъ въ работѣ Менделя, чего до него не примѣнялъ никто изъ ученыхъ, занимавшихся — еще отъ конца 17 и въ теченіи всего 18 столѣтія, не говоря уже о 19 столѣтіи — гибридизаціей растений.

Методъ математическаго выраженія явленій въ біологіи — „біометрика“, — разработанный въ концѣ 19 столѣтія, всецѣло перешелъ въ современную біологическую науку, можетъ быть — особенно въ генетику, ставшую одной изъ самыхъ обширныхъ и глубокихъ отраслей біологіи. Біологи — въ самомъ началѣ нашего столѣтія — вспомнили скромную работу Менделя и положили ее въ основаніе современ-

ной генетики, сдѣлавъ почти синонимомъ ея — „менделизмъ“. Съ 1900 года начинается — по нѣмецкому выраженію — „Wiederentdeckung“ Менделя, повтореніе его опытовъ цѣлымъ рядомъ ученыхъ біологовъ во всѣхъ культурныхъ странахъ, подтвердившее ихъ результаты и сдѣлавшее „менделизмъ“ знаменемъ и синонимомъ современной генетики. Одно за другимъ появляются новыя изданія работы Менделя на всѣхъ языкахъ культурнаго міра, и среди современныхъ біологовъ-генетиковъ — можетъ быть — большинство является „менделистами“, притомъ нерѣдко даже „крайними“.

Современный „менделизмъ“, какъ научное знамя, является какъ бы нѣкоторымъ, а въ отдѣльныхъ случаяхъ (напр. Гольдшмидтъ¹⁾) и полнымъ, противопоставленіемъ „дарвинизму“, или поскольку дарвинизмъ являлся и является научнымъ знаменемъ „эволюціи“, въ „менделизмѣ“ — при желаніи — иные усматриваютъ какъ бы знамя „революціи“ въ біологической наукѣ. Конечно, объективная научная мысль не можетъ мириться ни съ какой монополюностью, ни съ какой исключительностью и абсолютностью даже самыхъ широкихъ обобщающихъ идей и теорій, какой напр. была и остается эволюціонная теорія Дарвина въ біологіи. И нужно сказать, что самъ Дарвинъ не придавалъ формулированной имъ теоріи такого — монополюнаго, абсолютнаго — характера и значенія; напротивъ самъ же подчеркивалъ важность „полового подбора“ въ эволюціи, т. е. и того „механизма наслѣдственности“, который въ то время еще оставался — для науки — весьма мало извѣстнымъ, такъ же, какъ онъ не былъ извѣстенъ и Менделю, но для дальнѣйшаго научнаго изученія и объясненія котораго Мендель дѣйствительно далъ и основную научную идею, и конкретное ея выраженіе въ его классическихъ опытахъ гибридизаціи.

Научная цѣнность метода Менделя — строго конкретнаго, точнаго, реальнаго — можетъ быть даже имѣеть нѣкоторыя преимущества надъ широко захватывающимъ, и уже по одному этому склоннымъ къ нѣкоторой умозрительности и гипотетичности, методомъ Дарвина. Но отсюда рѣшительно не слѣдуетъ, какъ это допускаютъ нѣкоторые современные крайніе менделисты, что дарвинизмъ и менделизмъ — принципиально, по самой природѣ своей противоположныя направленія научной мысли, даже и въ области только генетики. Самъ Дарвинъ допускалъ и „скачки“ *) въ природѣ, предупреждая мутаціонную теорію де-Фриза, или одновременно съ ней формулированную русскимъ ботаникомъ — академикомъ Коржинскимъ теорію „гетерогенезиса“. Но, допуская „мута-

1) Einführung in die Vererbungswissenschaft, 1920 г., стр. 337, 349 и др

ціи“ и „гетерогенезисъ“ въ природѣ, какъ своего рода „революціонныя“ явленія въ видообразованіи, Дарвинъ удѣлялъ имъ гораздо менѣе важное мѣсто, чѣмъ явленіямъ эволюціоннаго формированія видовъ въ тѣсномъ единеніи съ вліяніемъ генеративнаго процесса, который у высшихъ животныхъ былъ тогда синонимомъ „полового подбора“. И едва ли современная біологическая наука, придавая огромную, вполне заслуженную важность — для генетики — „менделизму“, можетъ уменьшать цѣнность — для той же генетики — и „дарвинизма“. Для біологической науки, такъ же какъ и для соціологіи, нѣтъ и не можетъ быть ни „перманентной эволюціи“, ни „перманентной революціи“, какъ монопольнаго, исключительнаго начала; и если ужъ допустить извѣстную, относительную „перманентность“ — какъ въ природѣ, такъ и въ соціальной жизни, — то она въ гораздо большей степени является достояніемъ и органическимъ свойствомъ именно „эволюціи“.

Можетъ быть, именно широко захватывающая геніальность идей и теоріи Дарвина была причиной того, что скромная, хотя и глубокая по научному содержанію, работа Менделя въ то время не была должнымъ образомъ оцѣнена даже такимъ крупнымъ біологомъ, какъ ботаникъ Негели, съ которымъ у Менделя была живая переписка по интересовавшимъ ихъ обоимъ научнымъ вопросамъ, и который къ тому же и самъ является, какъ и зоологъ Вейсманъ, однимъ изъ предвозвѣстниковъ современнаго менделизма. Какъ бы то ни было, въ современной біологіи, въ области генетики, Дарвинъ и Мендель какъ бы помѣнялись мѣстами: идеи Менделя во всякомъ случаѣ до извѣстной степени замѣнили идеи Дарвина, хотя между ними по существу нѣтъ и не можетъ быть никакой научно-принципіальной противоположности, а потому и борьбы. Идеи Менделя являются лишь геніальнымъ дополненіемъ къ идеямъ Дарвина. Онѣ дали почву и фундаментъ для научнаго изученія, главнымъ образомъ, механизма наслѣдственности и извѣстныхъ, болѣе или менѣе закономѣрныхъ явленій въ этой наслѣдственности. Идеи Менделя и по своему содержанію, и по своему значенію дѣйствительно были чѣмъ-то не только крупнымъ, но и новымъ въ наукѣ, и появленіе въ нашемъ столѣтіи менделизма, какъ школы въ біологіи, было вполне естественнымъ.

Первымъ крупнымъ — по тому времени — явленіемъ при гибридизаціи, не ускользнувшимъ отъ вниманія Менделя, было то явленіе, что въ первомъ гибридномъ потомствѣ — въ извѣстныхъ случаяхъ — нѣтъ среднихъ, промежуточныхъ формъ, а все потомство является по своему внѣшнему виду, въ фенотипномъ смыслѣ, сходнымъ или съ однимъ, или съ другимъ изъ родителей, который и былъ названъ Менде-

лемъ — *доминирующимъ*, а самое явленіе — *доминированіемъ*. Другой родитель, находившійся въ первомъ гибридномъ поколѣніи какъ бы въ скрытомъ состояніи, выступалъ только въ дальнѣйшихъ гибридныхъ генераціяхъ, въ процессѣ расщепленія гибриднаго потомства и былъ названъ Менделемъ — *рецессивнымъ*. *Идея доминирующихъ и рецессивныхъ признаковъ* при гибридизаціи была первой, въ порядкѣ собственнаго его изложенія, идеей Менделя. Современный менделизмъ не считаетъ эту идею основной, коренной и даже просто — важной идеей Менделя, а само явленіе доминированія не признаетъ постояннымъ, обязательнымъ и абсолютнымъ, въ смыслѣ ясности его выраженія, явленіемъ. Объекты, которые при гибридизаціи „менделируютъ“ — въ смыслѣ постоянства явленія доминированія въ первомъ гибридномъ потомствѣ, — по современнымъ взглядамъ являются, можетъ быть, даже болѣе рѣдкими, чѣмъ объекты, которые „не менделируютъ“, а даютъ и въ первомъ гибридномъ потомствѣ или среднія, промежуточныя формы, или даже формы, несходныя — въ извѣстныхъ признакахъ — ни съ однимъ, ни съ другимъ родителемъ. Притомъ — въ самомъ опредѣленіи доминирующихъ или среднихъ формъ иногда можетъ имѣть мѣсто субъективный взглядъ изслѣдователя, что вноситъ нѣкоторую ненадежность въ самый методъ изслѣдованія. Но, оцѣнивая такимъ образомъ первую идею Менделя, современный менделизмъ тѣмъ не менѣе нисколько не отказывается отъ использованія этой идеи при гибридологическомъ изученіи и анализѣ потомства. Съ другой стороны, для того времени, когда Мендель опубликовалъ свою работу, эта идея имѣла огромный, если не фактической, то методологической смыслъ и значеніе. Она показала, и дальнѣйшимъ анализомъ явленія доказала, что истинныя результаты гибридизаціи вскрываются только въ дальнѣйшихъ генераціяхъ гибриднаго потомства, притомъ — при очень тщательномъ и точномъ его анализѣ. Эта идея вносила совершенно новыя методологическія требованія въ работу гибридологовъ, и въ ту весьма важную практическую отрасль хозяйства, которая связана съ примѣненіемъ гибридизаціи, — скрещиванія.

Еще большую — и методологическую, и фактическую — важность имѣла идея Менделя о необходимости *точного численнаго изученія* всего гибриднаго потомства, во всѣхъ его генераціяхъ и выраженіе результатовъ этого изученія по возможности въ математическихъ формулахъ. Когда Менделемъ, а за нимъ и современными менделистами на тысячахъ, десяткахъ и даже сотняхъ тысячъ индивидуумовъ въ гибридныхъ генераціяхъ, было показано и доказано, что при изученіи и анализѣ генерацій моногибриднаго потомства, т. е. потомства отъ скрещиванія родителей, отличавшихся только

одной парой признаковъ, точнѣе — изучавшихся только въ отношеніи одной пары признаковъ, — получаютъ достаточно точныя численныя соотношенія фенотипныхъ и генотипныхъ формъ, которыя можно выразить даже математическими формулами, это явилось уже огромнымъ завоеваніемъ біологической науки, особенно генетики. Въ современномъ менделизмѣ эта идея и этотъ методъ находятъ самое широкое примѣненіе, являясь обязательнымъ приѣмомъ при гибридологическомъ анализѣ. Числовыя соотношенія формъ въ отдѣльныхъ генераціяхъ гибриднаго потомства въ современномъ менделизмѣ оказываются нерѣдко гораздо болѣе сложными, чѣмъ это было въ опытахъ Менделя; но въ основѣ и этихъ усложненныхъ соотношеній все же — въ концѣ концовъ — лежатъ тѣ болѣе простыя соотношенія, которыя установилъ Мендель: число константныхъ формъ при скрещиваніи — по Менделю — равно 2^n ; число всѣхъ формъ въ гибридномъ ряду, т. е. константныхъ, гомозиготныхъ, и гибридныхъ, гетерозиготныхъ, — равно 3^n ; и число — схематическое — всѣхъ индивидуумовъ въ ряду, или число повтореній всѣхъ формъ въ ряду, — равно 4^n ; гдѣ n — есть число паръ признаковъ, входящихъ въ скрещиваніе, или изучаемыхъ въ немъ; начиная отъ моногибридовъ, гдѣ n равно 1; дигибридовъ, гдѣ n равно 2, и т. д., и до какого угодно числа скрещиваемыхъ паръ признаковъ — эта простая формула Менделя всегда оправдывается вполнѣ удовлетворительнымъ образомъ. Напр. у моногибридовъ ($A \times a$) имѣемъ гибридный рядъ: $A + 2Aa + a$; у дигибридовъ ($AB \times ab$) имѣемъ гибридный рядъ: 1 (AB, Ab, aB, ab) + 2 (ABb, aBb, AaB, Aab) + 4 ($AaBb$) и т. д. Здѣсь примѣненіе Менделевыхъ формулъ 2^n , 3^n и 4^n — совершенно очевидно. Причемъ въ фактически получаемыхъ числовыхъ величинахъ Мендель вполнѣ точно указываетъ и тѣ небольшія отклоненія отъ схематическихъ формулъ, которыя „можно принимать равными“ тѣмъ величинамъ, которыя требуются по формулѣ, что — конечно — совершенно неизбежно, и въ то же время допустимо, при біологическихъ изслѣдованіяхъ по статистическому методу.

Интересно, и глубоко правильно съ методологической точки зрѣнія, заявленіе Менделя, что въ гибридологической работѣ обязательнымъ является возможно болѣе полное сохраненіе и учетъ всѣхъ индивидуумовъ потомства и возможно большее число этихъ индивидуумовъ. Безъ этого условія иногда могутъ получаться результаты анализа, далеко не отвѣчающіе формуламъ, — какъ это особенно рельефно показалъ Мендель на анализѣ данныхъ о доминированіи признаковъ при скрещиваніи гороха, гдѣ у него — вмѣсто средней формулы доминированія — $3 : 1$ — у отдѣльныхъ растений, входившихъ въ анализъ, были и такія отношенія, какъ $43 : 2$ съ

одной стороны, и 14 : 15 — съ другой, — въ общей же суммѣ оказалось 2,98 : 1, что Мендель и призналъ возможнымъ выразить формулой 3 : 1. Хотя въ современныхъ менделистическихъ работахъ формы гибридныхъ рядовъ и формула числовыхъ соотношеній нерѣдко являются значительно болѣе усложненными и иногда построенными на другихъ признакахъ, напр. по признакамъ фенотипичности и генотипичности, чему, повидимому, Мендель не придавалъ значенія, можетъ быть и потому, что самая идея „фенотипа“ и „генотипа“ ему еще не была такъ извѣстна, какъ въ современной генетикѣ, но по существу, все же и современная числовая сторона гибридологическаго анализа цѣликомъ покоится на болѣе простыхъ формулахъ Менделя²⁾.

Огромную научную важность и новизну представляетъ — скорѣе методологическая, чѣмъ фактическая — *идея Менделя о независимости признаковъ (факторовъ) въ процессъ ихъ наслѣдованія*. По Менделю, каждая пара признаковъ въ организмѣ, сколько бы такихъ паръ ни было при скрещиваніи, наслѣдуется какъ бы совершенно независимо отъ всѣхъ остальныхъ паръ признаковъ. Эта — весьма заманчивая напр. и при селекціи — идея прежде всего методологически оправдывала совершенно изолированное изученіе тѣхъ семи паръ признаковъ гороха, которые изучалъ въ основной своей работѣ Мендель: форма сѣмени; окраска котиленоновъ; окраска кожуры сѣмени; видъ, форма зрѣлыхъ стручковъ; окраска зеленыхъ (незрѣлыхъ) стручковъ; положеніе цвѣтковъ; длина вѣтвей. Поскольку эта идея правильна, гибридологическая работа дѣйствительно и уточняется, и облегчается въ громадной степени. Такъ было во время Менделя, когда матеріальный механизмъ наслѣдственности — хромозомный аппаратъ — былъ еще неизвѣстенъ въ наукѣ; такъ — въ значительной мѣрѣ — остается и въ настоящее время, въ современномъ менделизмѣ, когда хромозомный аппаратъ изученъ и использованъ въ генетической наукѣ до возможной степени детальности. Конечно, современный менделизмъ поэтому вноситъ въ идею независимости факторовъ въ процессъ наслѣдованія безконечное количество весьма важныхъ и сложныхъ поправокъ. Крайнимъ логическимъ выводомъ изъ такихъ поправокъ будетъ, можетъ быть, въ концѣ концовъ признаніе именно неизбежной *зависимости, связанности* факторовъ въ процессъ наслѣдованія, и объясненіе этимъ многочисленныхъ индивидуальных отклоненій въ наслѣдственности отъ тѣхъ ясныхъ схематическихъ формъ и формулъ, какія предложилъ Мендель. Но тѣмъ не менѣе и до сихъ поръ мен-

²⁾ За подробностями отсылаю къ недавно вышедшей — на сербскомъ языкѣ — моей книжкѣ — „Менделизмъ и селекція“, 1930, Београд.

делизмъ по существу задерживаетъ идею извѣстной независимости факторовъ въ процессѣ наслѣдованія, притомъ въ тѣсной связи именно съ хромозомнымъ аппаратомъ, какъ матеріальнымъ носителемъ наслѣдственности съ современной точки зрѣнія. По хромозомной теоріи Моргана ³⁾ и его школы, въ отдѣльныхъ хромозомахъ, число которыхъ у различныхъ видовъ вообще весьма невелико, можетъ находиться даже очень большое количество *хромомеръ*, которыя и являются фактическими носителями отдѣльныхъ наслѣдственныхъ свойствъ организма — факторовъ, и при скрещиваніи эти хромомеры — въ отцовскихъ и материнскихъ хромозомахъ — могутъ связываться, размѣщаться и перемѣщаться весьма различно, въ зависимости отъ чего распределеніе этихъ наслѣдственныхъ свойствъ въ отдѣльныхъ индивидуумахъ потомства можетъ оказываться далеко болѣе сложнымъ, чѣмъ это думалъ Мендель. Въ связи съ этимъ и числовыя соотношенія формъ при расщепленіи гибриднаго потомства могутъ получать значительно болѣе сложный характеръ, чѣмъ это было въ формулахъ Менделя. Но и школа Моргана до сихъ поръ подтверждаетъ тотъ фактъ, что въ предѣлахъ отдѣльныхъ группъ факторовъ, вмѣстѣ которыхъ могутъ считаться отдѣльныя хромозомы, въ ядрѣ генеративныхъ клѣтокъ, независимость этихъ группъ факторовъ въ процессѣ наслѣдованія является — какъ бы — несомнѣнной, и числовыя соотношенія въ такихъ отдѣльныхъ группахъ факторовъ обычно принимаютъ ту простѣйшую форму и формулу, какую предложилъ Мендель.

Такимъ образомъ, современный менделизмъ и въ этомъ случаѣ въ сущности лишь еще болѣе подтверждаетъ геніальность идеи Менделя, хотя развиваетъ и документируетъ эту идею безконечно болѣе сложными и тонкими данными той отрасли біологической науки, которая во времена Менделя была еще совершенно неизвѣстна, именно — данными *цитологии*. Успѣхи этой новой отрасли до того велики, что такіе крупные современные менделисты-генетики, какъ напр. Морганъ или Бауръ ⁴⁾ располагаютъ уже хромозомными картами съ нанесенными на отдѣльныя хромозомы хромомерами, соответствующими тѣмъ факторамъ, которые они уже успѣли изучить до такой степени точно, что безошибочно могутъ предсказать результатъ скрещиванія отдѣльныхъ объектовъ своего изученія, обладающихъ различными хромомерами въ своихъ хромозомахъ. Число изученныхъ хромомеръ, т. е. и отдѣльныхъ факторовъ въ изучаемыхъ этими генетиками объектахъ, превышаетъ уже 150, и — согласно совре-

³⁾ The mechanism of Mendelian Heredity, 1915; см. также у Баура; Vabcock and Clausen — Genetics in Relation to Agriculture, 1918 и др.

⁴⁾ Einführung in die experimentelle Vererbungslehre, 1922, Berlin

меннымъ менделистическимъ взглядамъ — можетъ и должно возрасти чуть не до безконечности, по мѣрѣ того, какъ детализируются и уточняются наблюденія изслѣдователей и совершенствуются средства для такихъ наблюденій. Вѣдь пока изслѣдователи обычно ограничиваются изученіемъ главнымъ образомъ *морфологическихъ* признаковъ своихъ объектовъ, какъ наиболѣе доступныхъ точному учету и точной характеристикѣ въ тѣхъ или другихъ единицахъ измѣренія. Но современный менделизмъ не только допускаетъ, но и признаетъ, что и явленія общебіологическія, фізіологическія и даже психологическія (напр. инстинкты) точно такъ же подчиняются менделистическому изученію, т. е. точно такъ же подчиняются теоріи факторовъ, точно такъ же — въ извѣстныхъ предѣлахъ и случаяхъ — могутъ оказываться наслѣдственными, слѣдовательно — связанными съ матеріальными носителями наслѣдственности — съ хромозомнымъ аппаратомъ, съ его хромомерами. Чѣмъ больше біологія будетъ углубляться въ такія изслѣдованія, тѣмъ больше будетъ становиться число изученныхъ факторовъ, тѣмъ больше будетъ возрастать число возможныхъ комбинацій факторовъ при гибридизаціи, и тѣмъ сложнѣе будутъ тѣ числовыя соотношенія между отдѣльными формами въ потомствѣ, какія изучаются при гибридологическомъ анализѣ этого потомства. Возможно, что конечнымъ результатомъ такого прогрессивнаго возрастанія факторовъ въ генетикѣ явится то, что и генетика вынуждена будетъ лишь научно подтвердить и обосновать, исходя изъ менделистической теоріи факторовъ и хромозомной теоріи, давно уже признаваемый въ біологіи — *принципъ индивидуальности*: въ любой группѣ индивидуумовъ нѣтъ двухъ индивидуумовъ, которые были бы абсолютно тождественными; между ними всегда найдутся тѣ или другія различія, до извѣстной степени можетъ быть и наслѣдственныя, т. е. связанныя и съ матеріальнымъ аппаратомъ наслѣдственности — съ хромозомами и хромомерами. Отсюда — *измѣнчивость* въ природѣ не только безконечно многообразна, но и вѣчна, перманентна — не только подъ вліяніемъ внѣшнихъ условій, но и въ связи съ механизмомъ наслѣдственности.

Центральной, самой важной — съ точки зрѣнія современнаго менделизма — идеей Менделя является его идея о томъ, что въ гибридахъ, какъ продуктахъ скрещиванія двухъ формъ, создаются генеративныя клѣтки — гаметы по современной терминологіи Бетсона — обѣихъ формъ — отцовской и материнской — въ равныхъ количествахъ, по 50% той и другой формы и что эти клѣтки, послѣ оплодотворенія — какъ *зиготы*, остаются въ чистотѣ, не смѣшиваясь, и что этимъ путемъ объясняются закономѣрныя численныя отношенія при расщепленіи гибриднаго потомства. Эта идея, родившаяся у

Менделя дедуктивнымъ путемъ, хотя блестяще доказанная имъ и путемъ непосредственныхъ опытовъ, всецѣло воспринята современнымъ менделизмомъ, располагающимъ къ тому же и точными данными цитологии о хромозомномъ механизмѣ въ генеративныхъ клѣткахъ въ процессѣ ихъ дѣленія при ихъ созрѣваніи передъ оплодотвореніемъ и послѣ него. Эти данныя особенно блестяще подтверждаютъ правильность и глубину гениальной идеи Менделя о гаметахъ. Гениальность ея тѣмъ замѣчательнѣе (по словамъ Гольдшмита), что ко времени выхода въ свѣтъ работы Менделя сколько-нибудь точное анатомическое изученіе генеративныхъ клѣтокъ почти не существовало. Это изученіе начинается лишь черезъ десять лѣтъ послѣ работы Менделя и начинается почти одновременно съ ботаниковъ — Чистякова (1875 г.), Страсбургера, Негели и зоологовъ — Вейсмана, Гартвига и другихъ. Сначала была установлена анатомическая картина при дѣленіи ядра обыкновенныхъ — соматическихъ — клѣтокъ организма, — такъ наз. процессъ *каріокинеза* или митозы, а затѣмъ — и процессъ такъ наз. *редукціоннаго* дѣленія ядра при созрѣваніи и дѣленіи генеративныхъ, половыхъ клѣтокъ. Хромозомный аппаратъ, какъ матеріальный носитель наследственныхъ свойствъ организма, лежитъ при этомъ въ центрѣ такихъ — цитологическихъ — изслѣдованій. Число хромозомъ у отдѣльныхъ видовъ; форма хромозомъ; ихъ взаимное расположение при ихъ сляніи въ процессѣ оплодотворенія, а также — вѣроятно — ихъ физиологическія, химическія особенности и т. д. — все это, дополненное идеей Моргана о хромомерахъ, лежитъ въ основѣ современныхъ представлений о *механизмѣ наследственности*, если нельзя еще утверждать, что и *сущность*, или *физиологія наследственности* уже достаточно постигнута наукой.

Путь, которымъ Мендель пришелъ къ идеѣ о гаметахъ, былъ — по его собственному изложенію — таковъ. Такъ какъ первые же опыты Менделя — съ моногибридами гороха — ясно показали, что въ потомствѣ гибридовъ снова выступаютъ константныя формы, именно въ комбинаціяхъ тѣхъ признаковъ, которые взяты для скрещиванія, то Мендель пришелъ къ заключенію, что эти константныя формы въ потомствѣ гибридовъ могутъ появляться только при томъ условіи, если яйцеклѣтки (*Keimzellen*) и пыльцевыя клѣтки (*befruchtende Pollen*) одинаково способны производить индивидуумы въ потомствѣ, тождественные съ чистыми, константными формами, какъ это наблюдается въ чистомъ потомствѣ самооплодотворяющихся растеній. Мы должны поэтому допустить, говоритъ Мендель, что такіе же факторы имѣютъ мѣсто и въ гибридномъ потомствѣ самоопыляющихся растеній, какъ горохъ. И такъ какъ мы видимъ, что различныя константныя

формы появляются на одномъ и томъ же растеніи, даже изъ одного и того же цвѣтка, то отсюда мы можемъ и должны допустить, что въ завязяхъ гибридовъ образуется столько различныхъ яйцеклѣтокъ, а въ пыльникахъ — столько различныхъ пыльцевыхъ клѣтокъ, сколько можетъ появиться константныхъ формъ въ гибридномъ ряду и что эти генеративныя клѣтки по своимъ свойствамъ соотвѣтствуютъ отдѣльнымъ формамъ (1. с. 24). Эта идея дала возможность Менделю объяснить тѣ численныя соотношенія формъ въ гибридномъ потомствѣ, какія онъ постоянно получалъ въ своихъ опытахъ. Для этого онъ допустилъ, что въ гибридахъ тѣ и другія генеративныя клѣтки должны образоваться въ одинаковомъ количествѣ. Чтобы доказать это, Мендель произвелъ контрольные опыты: обозначая пары признаковъ черезъ A, B, a, b — онъ опылялъ 1) гибриды пыльцой AB ; 2) гибриды пыльцой ab ; 3) константную форму AB — пыльцой гибридовъ и 4) константную форму ab — пыльцой гибридовъ. Въ 1 и 3 опытѣ съ одной стороны и въ 2 и 4 — съ другой всегда получались болѣе или менѣе одинаковыя численныя соотношенія въ потомствѣ. На этомъ основаніи Мендель заключилъ, что „гибриды гороха образуютъ въ одинаковомъ числѣ яйцеклѣтки и пыльцевыя клѣтки, которыя по своимъ свойствамъ соотвѣтствуютъ константнымъ формамъ, которыя должны получаться путемъ комбинаціи признаковъ при оплодотвореніи“ (1. с. 28). Фактъ появленія у моногибридовъ схематически четырехъ индивидуумовъ въ гибридномъ ряду, по типу $A+2Aa+a$, Мендель объясняетъ такой схемой: такъ какъ при оплодотвореніи генеративныхъ клѣтокъ — формы A и a , согласно идеѣ, участвуютъ въ равномъ числѣ, при томъ каждая форма два раза, такъ какъ всего получается схематически четыре индивидуума въ ряду, то схему можно изобразить такъ: пыльцевыя клѣтки $A+A+a+a$; яйцеклѣтки $A+A+a+a$. А при оплодотвореніи ихъ возможны такія комбинаціи:

Пыльцевыя клѣтки (гаметы)	A	A	a	a
	↓		X	↓
		↙	↘	
Яйцеклѣтки (гаметы)	. . .	A	a	a
		↓	↓	↓

т. е. образуются индивидуумы: $AA+Aa+aA+aa$, или иначе: $A+2Aa+a$. Такимъ же путемъ Мендель объяснилъ и болѣе сложные случаи гибридизаціи — дигибридной и т. д., исходя изъ идеи чистоты гаметъ и ихъ независимости одна отъ другой въ процессѣ оплодотворенія.

Современная цитологія даетъ болѣе точную и вполне конкретную картину распредѣленія и дѣленія хромозомъ въ ядрахъ генеративныхъ клѣтокъ — отцовской и материнской, и признавая именно эти хромозомы матеріальными носителями наследственныхъ признаковъ и свойствъ организмовъ,

даетъ такое же, какъ и Мендель, объясненіе числовыхъ соотношеній отдѣльныхъ формъ въ гибридномъ потомствѣ. Этимъ современный менделизмъ не только полностью принимаетъ эту геніальную идею Менделя, но и подводитъ подъ нее то точное и тонкое обоснованіе, какое даетъ анатомическое изученіе хромозомнаго аппарата, какъ механизма наслѣдственности. Конечно, именно это точное и тонкое изученіе хромозомнаго аппарата, какъ механизма наслѣдственности, даетъ въ то же время научное обоснованіе неизбежности гораздо бѣльшей сложности явленій наслѣдственности — въ смыслѣ числовыхъ соотношеній формъ въ гибридномъ потомствѣ, — чѣмъ это принималъ Мендель въ его опытахъ съ горохомъ. Но основная идея при всемъ этомъ все же остается — въ своей сущности — именно такой, какъ ее дедуктивно, ничего еще не зная о механическомъ — хромозомномъ — аппаратѣ наслѣдственности, предложилъ Мендель.

Нельзя не упомянуть при этомъ — хотя бы попутно, — что блестящимъ подтвержденіемъ правильности дедуктивной идеи Менделя объ образованіи равнаго, — половиннаго, — числа „факторовъ“ — отцовскаго и материнскаго — въ генеративныхъ клѣткахъ организмовъ, — является въ современномъ менделизмѣ и объясненіе имъ извѣстнаго біологическаго явленія — иногда почти полнаго равенства половъ въ потомствѣ, если изучать это потомство во всей его численной полнотѣ, какъ это настойчиво и требовалъ Мендель въ методологіи гибридологической работы. Современный менделизмъ сводитъ объясненіе этого явленія къ различію въ хромозомномъ аппаратѣ мужскаго и женскаго организма — или количественному, или качественному. Въ однихъ случаяхъ, какъ напр. въ хромозомномъ аппаратѣ сверчка, мужской хромозомный аппаратъ имѣетъ извѣстное количество парныхъ хромозомъ и одну — непарную, — именно 6 парныхъ и 1 непарную (половая гетерозиготность мужскихъ особей); а хромозомный аппаратъ женскихъ особей (гомозиготныхъ въ половомъ смыслѣ) — всегда имѣетъ 7 парныхъ хромозомъ. При редуціонномъ дѣленіи генеративныхъ клѣтокъ этого вида женскія клѣтки дадутъ двѣ новыя клѣтки, изъ которыхъ въ каждой будетъ по 7 хромозомъ, — а мужскія клѣтки дадутъ одну новую клѣтку съ 7 хромозомами, а другую — съ шестью. При взаимномъ оплодотвореніи всѣхъ такихъ четырехъ клѣтокъ могутъ образоваться — при допущеніи Менделевской *идеи чистой природы гаметъ*, принимаемой и современнымъ менделизмомъ, — только одна женская зигота съ 7 парными хромозомами и одна мужская — съ

шестью парными хромосомами и одной непарной, т. е. число особей мужского и женского пола окажется равнымъ.

Въ другихъ случаяхъ различія въ хромозомномъ аппаратѣ — мужскомъ и женскомъ — могутъ быть качественными. Напр. въ знаменитомъ Моргановскомъ объектѣ — *Drosophila melanogaster* — имѣется по 4 пары хромозомъ и въ мужскомъ и въ женскомъ хромозомномъ аппаратѣ; но четвертая пара въ женскомъ аппаратѣ состоитъ изъ двухъ хромозомъ совершенно сходныхъ одна съ другой (XX), между тѣмъ какъ въ мужскомъ — одна хромосома нѣсколько отличается отъ другой по формѣ (XY). Естественно, что при редукціонномъ дѣленіи мужской и женской генеративныхъ клѣтокъ и при послѣдующемъ ихъ сліяніи — попарно — при оплодотвореніи и здѣсь неизбежно должны получиться такіе же результаты, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, т. е. одна зигота мужская и одна женская, — число мужскихъ и женскихъ особей въ потомствѣ — схематически — должно оказаться равнымъ.

Интересно, что и у раздѣльнополюхъ — двудомныхъ — растений, напр у конопли, это же біологическое явленіе — количественное равенство мужскихъ и женскихъ особей въ потомствѣ — обычно наблюдается въ достаточно ясной формѣ, что было отмѣчено уже давно, а въ настоящее время можетъ объясняться той же неоднородностью хромозомнаго аппарата въ генеративныхъ клѣткахъ женскихъ и мужскихъ особей конопли.

Въ заключеніе этого нашего бѣглаго обзора главнѣйшихъ идей скромной по своимъ размѣрамъ, по богатой по своему научному содержанію и по своей методологіи, работы Менделя, мы должны признать, что современная генетика имѣла полное основаніе выставить надъ своимъ быстро и широко растущимъ научнымъ сооруженіемъ — знамя „менделизма“. Нѣтъ ни одной идеи Менделя, которая бы — въ большей или въ меньшей мѣрѣ — не была принята или использована въ современной генетикѣ. А основная его идея — о чистой природѣ гаметъ, объ образованіи ихъ въ родительскихъ генеративныхъ клѣткахъ въ равномъ числѣ, и — до извѣстной степени — также идея о независимости наследственныхъ признаковъ въ процессѣ наследованія, — эти идеи Менделя легли въ основу всей современной генетики. Вотъ почему, возможно болѣе полное и тщательное изученіе скромной, имѣющей въ настоящее время скорѣе историческое значеніе, работы Менделя является — съ академической точки зрѣнія — глубоко полезнымъ и необходимымъ для всякаго, кто посвящаетъ себя научной работѣ въ генетической области современной біологіи.

Проф. М. Н. Лапинскій.

БОЛЬ И ЕЯ СОСУДИСТЫЙ МЕХАНИЗМЪ.

Ученые, старавшіеся опредѣлить сущность боли, затруднялись опредѣлить, къ какому классу нервныхъ феноменовъ отнести боль.

Förster зачисляетъ боль въ разрядъ аффектовъ или чувствъ, но во всякомъ случаѣ исключаетъ ее изъ ощущеній.

Goldscheider отказывается ставить боль на одну высоту съ зрѣніемъ, слухомъ и другими чувствами.

Haller считаетъ боль чувственнымъ воспріятіемъ.

Herstmann относитъ боль въ классъ чувствъ.

Dumas и Mackenzie признаются, что не могутъ объяснить сущность боли и опредѣлить классъ этого феномена.

Freu зачисляетъ боль между ощущеніями.

Alrutz, а также Feilchenfeld думаютъ, что боль изъ класса ощущеній, каковой она была у нисшихъ животныхъ, стремится у человѣка занять мѣсто между чувствами и т. д.

Обходя мимо мнѣнія другихъ авторовъ о сущности боли, можно, однако, сказать, что боль даетъ намъ нѣкоторыя свѣдѣнія объ окружающей природѣ въ смыслѣ предупрежденія опасности. Въ этомъ отношеніи живому существу даны и другія способности и механизмы. Сюда относятся, во-первыхъ, нисшія формы — ощущенія — прикосновеніе, воспріятіе тепла и холода, волосковая чувствительность, стереогнозъ, во-вторыхъ, — высшія чувства — зрѣніе, слухъ, вкусъ, обоняніе. Кромѣ того имѣется особая форма сенсорныхъ функцій, гдѣ воспринимается и оцѣнивается не внѣшній міръ, но различныя нѣжнѣйшія, тончайшія перемѣны въ нашемъ собственномъ тѣлѣ. Эти чувствованія называются эмоціи. Онѣ возникаютъ въ нашемъ сознаніи какъ оцѣнка, а иногда подсознательное воспріятіе незамѣтныхъ, неизмѣримыхъ, часто ускользающихъ отъ нашего вниманія воздѣйствій на такъ называемую чувствительную протоплазму, или висцерально или въ периферіи нашего тѣла. Благодаря этому

съ помощью центрипетальной нервной системы и секреторныхъ центровъ поступаетъ въ кровь потокъ гормоновъ, который черезъ посредство Dienserphalon и стріарной нервной системы создаетъ тотъ или другой эффектъ въ различныхъ системахъ и тканяхъ тѣла, подсознательная же оцѣнка этихъ реактивныхъ тѣлесныхъ измѣненій составляетъ основаніе эмоціи. Быть можетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ соматическія реакціи наступаютъ нейрогеннымъ, а не гуморальнымъ механизмомъ, т. е. безъ посредства гормоновъ. Значеніе этихъ послѣднихъ состоитъ вѣроятно въ усиленіи нервной реакціи, въ разлитіи послѣдней на многіе органы гесп. центры, вслѣдствіе чего получается тѣлесное выраженіе той или другой эмоціи, отличающее одну отъ другой (напр. выраженіе эмоціи гнѣва различается отъ грусти, радости и т. д.). Съ другой стороны нельзя отказаться отъ мысли, что воспринимая и оцѣнивая переменны въ тѣлѣ подъ вліяніемъ того или другого раздраженія сознание принимаетъ во вниманіе и реакціи, возникшія гормональнымъ путемъ, чѣмъ и достигается глубокое и сознательное переживаніе, т. е. эмоція.

Представляя собою субъективныя переживанія и, въ этомъ отношеніи имѣя сходство другъ съ другомъ, ощущенія, чувства и эмоціи однако существенно отличаются другъ отъ друга во многихъ отношеніяхъ.

Ощущенія и чувства:

1) Рисуютъ свойства воспринимаемаго предмета, который всегда лежитъ внѣ нашего тѣла — ледъ оказывается холоднымъ, звонъ доходитъ до нашего уха изъ колокола, вода мокра, песокъ — изъ мелкихъ зернышекъ, ртуть жидка... Эти свойства наше сознание воспринимаетъ черезъ посредство ощущеній и чувствъ.

2) Ощущенія и чувства точно локализируются въ опредѣленныхъ нервахъ. Мы обоняемъ I черепнымъ нервомъ, вкусовыя ощущенія воспринимаются IX N. Свѣтъ — II N. Холодъ пола — опредѣленнымъ мѣстомъ подошвы.

3) Воспринимаемые предметы имѣютъ свойство обьективироваться, т. е. находятся внѣ предѣловъ нашего тѣла; будетъ ли это шаръ или ключъ, опредѣляемые стереогнозомъ, или каммертонъ, дающій вибрацію пальцамъ, къ нему прикасающихся, сознание знаетъ, что эти предметы лежатъ внѣ нашего тѣла.

4) Наши ощущенія проецируются въ опредѣленномъ направленіи, — мы знаемъ таковое для звука, цвѣтовъ, запаховъ и т. д., которые доходятъ до нашего сознания; мы точно опредѣляемъ мѣсто жара, холода, острія..

5) Воспріятія эти имѣютъ всегда матеріальную причину,

— будетъ ли это асфальтовая мостовая подъ нашими ногами или снѣгъ, падающій намъ въ лицо, или національный флагъ, видимый издали, — наши ощущенія даютъ намъ ясный отчетъ о реальности предметовъ, воспринимаемыхъ при этомъ.

6) Эти воспріятія не зависятъ отъ индивидуальности и состоянія духа, — будетъ ли воспринимающій человекъ негръ или англосаксъ, въ грустномъ или веселомъ настроеніи, — песокъ будетъ порошкообразнымъ, а шаръ круглымъ.

7) Ощущенія и чувства характеризуютъ предметы внѣ нашего тѣла, — они эксцентризуются за его предѣлы.

8) Ощущенія и чувства не имѣютъ тормозящаго вліянія на дѣятельность нервной системы и въ частности на психику.

Что касается эмоцій, то онѣ лишь 1) оцѣниваютъ перемѣны въ нашемъ тѣлѣ и притомъ лишь вообще — никогда вполне точно, всегда лишь — неопредѣленно.

Мы не даемъ себѣ отчета, отчего намъ радостно, почему наше настроеніе подавлено. Мы не знаемъ, что сжались наши бронхи и потому явилась эмоція страха, не ощущаемъ расширения глазной щели при ужасѣ и т. д.

2) Эмоція не имѣетъ ясно сознаваемой матеріальной причины внѣ нашего тѣла, хотя таковая можетъ и быть. Эмоція вызвана тончайшими перемѣнами въ нашемъ тѣлѣ, а послѣднія могутъ быть и психогеннаго не матеріальнаго происхожденія.

3) Эмоціи часто индивидуальны: одна и та же внѣшняя обстановка — музыка, ландшафты, быстрая ѣзда — одного приводятъ въ восхищеніе, на другого наводятъ грусть, страхъ...

4) Эмоціи не содержатъ характеристики окружающихъ предметовъ: судя по переживаемому нами настроенію мы не можемъ рѣшить, что стекло хрупко, а металл упругъ и т. д.

5) Наши эмоціи проецируются въ окружающій міръ, но безъ опредѣленнаго направленія, перенося туда нашу индивидуальную оцѣнку и въ зависимости отъ нашего настроенія одинъ и тотъ же предметъ или мѣстность окрашиваются въ привлекательный или непріятный тонъ.

6) Наши эмоціи, какъ оцѣнка перемѣнъ въ нашемъ тѣлѣ, не могутъ эксцентризоваться за его предѣлы. Тоску мы чувствуемъ въ своей собственной груди, въ страхѣ холодѣютъ только наши ноги, при ужасѣ коченѣетъ только наше тѣло.

7) Эмоціи не имѣютъ локалізаціи, мы не можемъ указать, гдѣ помѣщается въ нашемъ тѣлѣ ненависть, любовь, восторгъ, презрѣніе и т. д.

8) Эмоціи имѣютъ тѣлесное выраженіе, свою особенную мимику.

9) Эмоціи тормозятъ отправленіе нервныхъ центровъ и въ частности задерживаютъ психическія функціи.

Что же представляет собою боль? Нужно ли отнести боль къ ощущеніямъ, чувствамъ или эмоціямъ?

Старые авторы понимали боль, какъ нѣкоторую *materia pessa* — злокачественную матерію, — которая, разливаясь по тѣлу, выступаетъ въ томъ или другомъ мѣстѣ какъ боль. Haller считалъ, что боль есть высшая степень чувствительности. Maskenzie сознается, что всякій понимаетъ боль по своему, но формулировать наши свѣдѣнія о боли трудно. Beaunis находитъ, что для боли не нужно ни специальныхъ нервовъ, ни отдѣльныхъ центровъ, *mais „toutes les définitions de la douleur sont mauvaises“*. Schorpenhaueг формулируетъ боль какъ реакцію нашей воли. Dumas не рѣшается опредѣлять формулу боли. По Ю. Снѣгиреву сущность боли ускользаетъ отъ возможности ее опредѣлить, такъ какъ ея механизмъ весьма сложенъ.

Въ свою очередь мы, анализируя свойства боли, видимъ здѣсь рядъ особенностей, дающихъ право отнести боль къ эмоціямъ.

Мы видимъ именно, что 1) боль имѣетъ чувственный непріятный тонъ, воспріятія же, подаваемые нашему сознанию кожными ощущеніями или органами чувствъ, не имѣютъ таковой окраски.

2) Боль имѣетъ типичную характерную мимику. Ни ощущенія, ни воспріятія органами чувствъ таковой не имѣютъ.

3) Боль индивидуальна; въ зависимости отъ темперамента, пола, расы, боль, нанесенная однимъ и тѣмъ же предметомъ, воспринимается различно.

Жители юга болѣе чувствительны, чѣмъ сѣверяне; чернокожій легче переноситъ боль, чѣмъ бѣлый человекъ; дѣти и мужчины болѣе чувствительны къ боли, чѣмъ женщины. Существа, обладающія нормальными большими полушаріями, понимаютъ боль иначе, чѣмъ таковыя, гдѣ мозгъ недоразвитъ. Ощущенія и воспріятія органами чувствъ не зависятъ отъ индивидуальности.

4) Боль не объективируется, т. е. не указываетъ на специальный источникъ ея, напротивъ, ощущенія и органы чувствъ даютъ опредѣленія предметовъ.

5) Боль не проецируется въ опредѣленномъ направленіи, тогда какъ зрѣніе, слухъ, обоняніе, различныя ощущенія всегда сохраняютъ направленіе, по которому прошли воспріятія.

6) Боль не содержитъ характеристики предметовъ, причинившихъ боль, что какъ разъ характерно для ощущеній и чувствъ.

7) Боль тормозитъ отправленія нервныхъ центровъ и психическихъ функцій.

Перечисленные семь свойствъ исключаютъ, такимъ образомъ, боль изъ класса ощущеній и чувствъ и подводятъ ее подъ категорію эмоцій.

Однако же боль содержитъ признаки, свойственныя ощущеніямъ, а именно:

8) Боль всегда имѣетъ ясно сознаваемую матеріальную причину, что свойственно и ощущеніямъ и чувствамъ.

9) Боль, подобно чувствамъ и ощущеніямъ, локализуется въ нашемъ тѣлѣ, хотя и не такъ точно, какъ ощущенія.

10) Боль, подобно ощущеніямъ и чувствамъ, эксцентралίζεται, но въ то время, какъ вторыя выносятъ причину своихъ раздраженій всегда во внѣшній міръ, боль никогда не переходитъ предѣловъ нашего тѣла.

Такъ какъ боль содержитъ признаки, типичныя для эмоцій 1) имѣетъ тѣлесное выраженіе и мимику, 2) опредѣленный чувственный тонъ, 3) не объективируется, 4) зависитъ отъ индивидуальности, 5) лишена способности характеризовать окружающіе предметы, 6) не даетъ понятій о направленіи, изъ котораго явилось болевое раздраженіе, 7) тормозитъ психику и нервныя центры, — то боль можно и нужно вписать въ категорію эмоцій. Такъ какъ все же боль не овладѣла еще способностью эмоцій окрашивать окружающій міръ въ опредѣленный тонъ, проецируя туда свое настроеніе; такъ какъ боль еще не освободилась отъ болѣе или менѣе выраженной тѣлесной локализаціи, и въ большинствѣ случаевъ не можетъ обойтись безъ матеріальной причины, то можно думать на основаніи этого, что боль совершила очень большое передвиженіе въ своей эволюціи, но послѣдняя еще не закончена.

Этотъ же анализъ признаковъ разбираемыхъ психофизиологическихъ явленій, *устанавливая принадлежность боли къ классу эмоцій*, позволяетъ прибавить къ другимъ свойствамъ боли еще одно, а именно, что боль должна быть разсматриваема какъ оцѣнка нашимъ сознаніемъ тончайшихъ и нѣжнѣйшихъ перемѣнъ въ нашемъ тѣлѣ *resp.* въ нашей нервной системѣ.

Хотя предположенія Meuge, Benisty, Förster'a и др. считать аффективныя воспріятія, а въ томъ числѣ и боль, — функціей нашей симпатической нервной системы, — и не были признаны ученымъ міромъ, тѣмъ не менѣе симпатическая нервная система безспорно играетъ огромную роль въ механизмѣ боли, однако же лишь настолько, поскольку ей принадлежатъ вазомоторныя функціи, поскольку ей подчинена кровеносная система, поскольку игра центропетальныхъ волоконъ отражается на ширинѣ сосудовъ или ихъ состояніе зависитъ отъ нея, *resp.* отъ количества крови, орошающей нервную систему.

Клиническія наблюденія и паталого-анатомическія изслѣ-

дованія показываютъ именно, что боль можетъ возникнуть помимо другихъ причинъ еще и отъ колебаній ширины просвѣга периферическихъ сосудовъ, отъ гипереміи или напротивъ отъ ишеміи.

Различаютъ три формы гипереміи, — нейропаралитическую, активную и воспалительную, каковыя — каждая — имѣетъ значеніе въ этиологіи болей.

Нейропаралитическая — въ слабыхъ своихъ степеняхъ — сопровождается только гиперестезіей, — въ болѣе значительныхъ — всегда ведетъ къ болямъ. Claude-Bernard первый обратилъ вниманіе на эту форму гипереміи на ухо кролика послѣ перерѣзки у него восходящей вѣтки симпатическаго нервнаго ствола. Покраснѣвшее при этомъ ухо показывало признаки большой гиперестезіи. Orpenheimer убѣдился, что гиперальгезіи и диффузныя боли наблюдаются въ такихъ же случаяхъ у человѣка при такъ называемыхъ висцеральныхъ невральгіяхъ, причина которыхъ лежитъ въ застойной гипереміи. Cahen и Schäffer приписываютъ застойной гипереміи появленіе болей при невральгіяхъ и кокцидиніяхъ.

У Снѣгирева приведены (стр. 222—223) 3 исторіи болѣзни, могущія имѣть отношеніе къ нашей темѣ. У первой его пациентки имѣлось нагноеніе лѣваго яичника, спайки такового съ паріетальнымъ листкомъ брюшины и атрезія лѣвой фаллопиевой трубы. Вторая больная страдала peritonitis adhesiva въ заднемъ дугласовомъ пространствѣ. Кишечныя петли у этой женщины были спаяны другъ съ другомъ и паріетальнымъ листкомъ. Придатки были въ состояніи хроническаго воспаленія; оба яичника были кистозно перерождены и спаяны и съ кишечникомъ, и съ брюшною стѣнкой.

Къ удивленію, обѣ эти больныя женщины не жаловались ни на какія боли и лишь желали имѣть потомство. Такъ какъ авторъ не упоминаетъ о состояніи сосудовъ трактующей имъ области у данныхъ больныхъ, такъ какъ онъ ничего не говоритъ ни о гипереміяхъ, ни о венозномъ стазѣ у нихъ, то можно заключить изъ этого умолчанія, что сосуды не представляли большихъ отклоненій отъ нормы и этимъ обстоятельствомъ объяснить отсутствіе болей у описываемыхъ имъ двухъ пациентокъ.

Третья женщина, напротивъ, жаловалась на мучительнѣйшія боли въ нижнихъ сегментахъ живота, несмотря на то, что обнаруженный процессъ былъ сравнительно доброкачественный. Когда эта женщина была подвергнута лапоратоміи, то выяснилось, что ея брюшина была совершенно нормальна. Матка лежала совершенно свободно, была легко подвижна, не была спаяна ни съ кишечникомъ, ни съ какимъ либо другимъ сосѣднимъ органомъ, фаллопиевы трубы и другіе придатки и связки были нормальны. Однако же тѣло матки содержало

нѣсколько небольшихъ доброкачественныхъ фибромъ. Бросалось въ глаза однако же огромное расширение и развитіе маточныхъ сосудовъ, обвивавшихъ матку густыми сѣтями. Нѣкоторыя вены достигали толщины пальца. Значить боли сопутствовали вполнѣ доброкачественный процессъ, имѣлась же однако сильная паралитическая застойная гиперемія, причина которой неясна. Мучительныя боли тянулись болѣе 10 лѣтъ при отсутствіи какихъ либо тяжелыхъ измѣненій, указывающихъ на тяжкія хроническія воспаленія, кромѣ расширения сосудовъ. Въ первыхъ двухъ случаяхъ не было болей, но не было и расширения сосудовъ.

Отсутствіе болей у первыхъ двухъ пациентокъ, несмотря на участіе въ страданіи паріетальнаго листка брюшины, здѣсь особенно знаменательно, принимая во вниманіе мнѣніе Lepan-der'a, согласно которому, висцеральныя боли происходятъ вслѣдствіе страданія паріетальнаго листка брюшины. Въ цѣпи условій, благопріятствующихъ появленію болей, недоставало нѣкотораго звена и это послѣднее могло быть только отсутствіе гипереміи.

Проф. I. Снѣгиревъ описалъ *Endometitis dolerosa*, объективные признаки какового были боли живота и болѣзненность при давленіи на *Plex. hypogastricus, genalis, — pelvis minoris*. При лапоратоміи эти сплетенія оказывались всегда рѣзко гиперемированными.

Старые авторы совѣтовали держать ноги поднятыми въ теченіе ночи, если имѣлись боли отъ варикознаго расширения венъ. Боли эти прекращались вмѣстѣ съ опорожненіемъ венъ и уменьшеніемъ застойной гипереміи.

Brachet, вскрывая брюшную полость и надавливая тамъ рукою на различныя сплетенія, убѣждался въ ихъ полной нечувствительности и притомъ именно тогда, когда экспериментъ протекалъ очень быстро, а отверстіе въ брюшной стѣнкѣ было небольшое. Напротивъ, нервныя сплетенія были очень болѣзненны при давленіи, если опытъ шелъ медленно, если отверстіе было широкое и если проникавшій черезъ него внутрь атмосферный воздухъ вызывалъ рѣзкую гиперемію симпатическихъ сплетеній. Въ такомъ случаѣ животныя визжали и выли отъ боли при давленіи рукой на эти сплетенія. Подобное же наблюденіе сдѣлалъ Valentin относительно солнечнаго сплетенія у кролика. Если онъ, лапоратомируя животное, вводилъ ему быстро руку въ животъ и надавливалъ на *plexus solaris*, — послѣднее оказывалось нечувствительнымъ. Если же внѣшній воздухъ успѣлъ проникнуть внутрь живота и вызвать гиперемію упомянутаго сплетенія, то прикосновеніе къ нему вызывало боли.

Pette произвелъ въ одномъ случаѣ *asthma bronchiale* экстирпацію *ganglion superum sympaticum* ради лѣченія этой

болѣзни. Какъ послѣдствіе этой операціи настала длительная гиперемія одной половины головы и невральгія *N. trigeminus*.

Visch вызывалъ боли у своихъ больныхъ въ различныхъ частяхъ тѣла, сдавливая имъ симпатическіе стволы, сплетенія или даже восходящую вѣтвь на шеѣ и тѣмъ вызывая вазопаралитическую гиперемію въ территоріи, подчиненной сдавливаемому образованію.

Naegeli при головныхъ боляхъ нейропаралитическаго происхожденія прекращалъ таковыя, облегчая оттокъ венозной крови отъ головы.

Въ нашихъ клиническихъ случаяхъ у пациентовъ нервной клиники Кіева и Загреба наблюдались очень часто боли, причиной которыхъ былъ застой крови. Напримѣръ, офицеръ 35 лѣтъ, перенесшій огнестрѣльное раненіе праваго предплечія съ раздробленіемъ *os. radii et ulnae* и сохраненными нервами испытываетъ боли каждый разъ, когда рука его опущена внизъ. Положенный горизонтально, съ правой рукой, помѣщенной въ плетизмографъ, пациентъ не чувствуетъ боли. Однако же при надавливаніи рукой на переднюю стѣнку живота, тѣмъ стѣсня дыханіе и отливъ венозной крови изъ конечностей, можно было убѣдиться на кимографіонѣ, что количество этой крови увеличилось въ горизонтально лежащей рукѣ, а въ то же время пациентъ начиналъ чувствовать тамъ боли и притомъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ сильнѣе затруднялось дыханіе и чѣмъ больше застаивалась кровь въ правой рукѣ. Въ этомъ случаѣ имѣлся парезъ вазомоторовъ правой руки травматическаго происхожденія.

Активная гиперемія можетъ быть точно такъ же причиной мѣстныхъ болей. Типичнымъ примѣромъ въ этомъ отношеніи является эритромеральгія, при которой рѣзко расширены дистальныя артеріи и прекапилляры въ дистальныхъ частяхъ конечности. Таковыя — краснаго цвѣта, на ощупь горячи, отеки, пульсируютъ и очень болятъ. Если приложить къ конечности ледяное холодное мокрое полотно, конечность блѣднѣетъ, сосуды суживаются, а боли прекращаются.

Различныя формы воспалительной гипереміи точно такъ же вызываютъ боли въ періодъ большого прилива крови и исчезаютъ вмѣстѣ съ уменьшеніемъ гипереміи. Если, напримѣръ, воспалительный процессъ развивается въ кисти руки, то достаточно бываетъ привести руку въ приподнятое положеніе, чтобы прекратить боли и притомъ именно благодаря уменьшенію гипереміи въ фокусѣ пораженія. Такъ же дѣйствуетъ ледъ. Съ этой же цѣлью въ глазной практикѣ примѣняется давящая повязка, а въ гинекологической практикѣ тампонація

влагалища (Boicrage Anvard'a), давящія на расширенныя гиперемированныя сосуды. Сюда же относятся пъявки, банки, кровопусканія...

Этіологическое значеніе гипереміи въ механизмѣ болей вытекаетъ также изъ отсутствія болей въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ сосуды инертны или гдѣ ихъ вовсе нѣтъ, или если они не реагируютъ на раздраженія.

Stranski описываетъ дегенерата, который жеваль и глоталь стекло, слизистая оболочка рта и глотки котораго не показывала ни малѣйшихъ признаковъ раздраженія и гдѣ пациентъ не испытываль никакихъ болей, а между тѣмъ и полость рта, и глотки, и пищеводъ были поцарапаны и порѣзаны стекломъ.

Есть ткани, снабженныя нервами, но не болѣзненныя ни при физиологическихъ, ни при патологическихъ условіяхъ; онѣ не имѣютъ сосудовъ. Сюда относятся рога, копыта, ногти, волосы, эпидермисъ. Сюда же принадлежатъ такіе ткани и органы, которые не болятъ потому что не имѣютъ при нормальныхъ условіяхъ сосудовъ, даютъ однако жестокия боли, лишь только подъ вліяніемъ той или другой причины въ нихъ развиваются сосуды. Это касается хрящей, костей, сухожилій, фасцій, роговицы глаза и т. д. Сосуды развиваются здѣсь ad hoc лишь въ случаѣ заболѣванія и тогда боли даютъ знать объ опасности для даннаго органа.

Hugo Feilchenfeld обратилъ вниманіе на то, что многіе больные съ пораненіями роговицы не ощущаютъ никакихъ болей и именно въ томъ случаѣ, когда нѣтъ гипереміи ни роговицы, ни склеры. Авторъ заключаетъ отсюда, что боль роговицы вызываетъ не постороннее тѣло, внѣдренное въ нее, но наличіе при этомъ гипереміи.

Здѣсь слѣдуетъ упомянуть, о болеуспокаивающемъ дѣйствіи азотно-кислаго серебра, которое отличается лишь вяжущими свойствами и не содержитъ ничего наркотическаго.

Visch успокаиваль боли живота, надавливая широкимъ предметомъ на болящую область и тѣмъ уменьшалъ кровенаполненіе данной части.

Нужно оттъннить однако, что не всюду гиперемія сопровождается болями. Въ этомъ отношеніи нужно различать органы, сосуды которыхъ служатъ для потребностей всего тѣла и таковыя, гдѣ кровеносныя пути имѣютъ лишь мѣстное нутритативное назначеніе. Къ числу первыхъ принадлежатъ органы съ богатою сосудистою сѣтью — слизистая оболочка кишечника, легкое, паренхима печени, почекъ и другихъ большихъ железъ.

Въ этихъ органахъ сосуды являются дѣятельной частью ихъ паренхимы, принося кровь не для питанія, но какъ не-

обходимый материалъ для работы даннаго органа. Эти сосуды очень мало чувствительны и легко переносятъ (правильнѣе сказать нервы этихъ органовъ) колебанія кровенаполненія. Здѣсь гиперемія не вызываетъ болей.

Точно такъ же нервы мышцъ спокойно стносятся къ колебаніямъ въ кровообращеніи мускулатуры, если впрочемъ не будутъ превзойдены особыя максимальныя границы.

Съ другой стороны имѣются органы, гдѣ роль сосудовъ сведена лишь на питаніе мѣстной ткани. Сюда относятся кости, periosteum, peritoneum, капсулы различныхъ висцеральныхъ органовъ. Гиперемія этихъ органовъ всегда сопровождается болями. Ихъ сосуды не обладаютъ мощнымъ мышечнымъ слоемъ, позволяющимъ артеріямъ легко справиться съ переполненіемъ ихъ кровью, а между тѣмъ тонусъ ихъ быстро теряется, если кровь растягиваетъ ихъ долгое время. Значеніе этого анатомическаго устройства особенно видно при сравненіи, напр., гипереміи кости, сосуды которой вовсе не имѣютъ ни мышечнаго слоя, ни вазомоторовъ, и кожи, гдѣ кровеносные пути снабжены очень толстой tunica muscularis и обильной вазомоторной сѣтью. Конечно, то или иное количество крови отражается на состояніи близъ лежащихъ нервовъ, а отсюда боли.

Огромное значеніе въ этиологіи болей играетъ прекращеніе притока крови, вслѣдствіе спазма, облитераціи, эмболии сосудовъ и т. д. Claude-Bernard, раздражая восходящую симпатическую вѣтвь, вызывалъ спазмъ сосудовъ уха животному и боли тамъ. Такого же рода боли наблюдаются при Maladie Raynaud, при мигрени, при спазмахъ периферическихъ сосудовъ токсическаго происхожденія. Gibson объясняетъ ангинозныя боли спазмомъ вѣнечныхъ сосудовъ. Odermatt инициальные боли при эмболии легкаго, мозга, брюшныхъ артерій толкуетъ ишеміей этихъ сосудовъ. Согласно Schlesinger'у ишемія начинается внезапной острой болью безъ продромовъ, распространяющейся въ дистальномъ направленіи и нарастаетъ въ нѣсколько минутъ до своего maximum'a. Въ 2-хъ случаяхъ Schlesinger видѣлъ такое же внезапное прекращеніе болей, лишь только эмболъ разрѣшился силами природы.

Nothnagel видѣлъ остроразвивающуюся боль живота вслѣдствіе эмболии а. mesenterica. То же описываетъ Ortmann, House и др. Odermatt описалъ ишемическія боли вслѣдствіе эмбола артеріи sciralis. Hirschman видѣлъ больного со спазмомъ а. axillaris sinistra травматической этиологіи, вызвавшимъ сильнѣйшія боли лѣвой руки. Онѣ прекратились, лишь только на мѣстѣ раненой а. axillaris была имплантирована вена. Gold-

scheider прекращалъ мгновенно такія спастическія боли вдыханіемъ Amylnitritt'a. Висцеральныя боли по его мнѣнію — результатъ тетаническаго сокращенія мѣстныхъ артерій. Кронъ видѣлъ судорогу а. femoralis, сопровождающуюся сильнѣйшими болями въ ногѣ. Черезъ 10 минутъ спазмъ внезапно прекратился, а вмѣстѣ съ этимъ исчезли и боли.

Kuttner-Vagusch описываетъ боли вслѣдствіе сегментнаго спазма сосудовъ конечности на почвѣ огнестрѣльнаго касательнаго раненія артерій. Этотъ спазмъ ограничивался протяженіемъ 10—20 сант. и длился отъ 10 минутъ до 2—10 и даже 20 часовъ. Боли прекращались лишь только возстановилось кровообращеніе.

Съ другой стороны Legiche, Lâwen, Lehmann и др. авторы прекращали ангиоспастическія боли, производя симпатектомію, — удаляя периартеріальныя симпатическія сплетенія, послѣ чего сосуды расширились, кровообращеніе возстановлялось, а боли прекращались.

Joneski въ случаяхъ болей лица, гдѣ предполагался angiospasmus, производилъ резекцію rami ascendens N. sympathici, послѣ чего спазмъ прекращался, а вмѣстѣ съ тѣмъ исчезали и боли.

Martin видѣлъ боли вслѣдствіе облитераціи артерій.

То обстоятельство, что сосуды имѣютъ такое большое значеніе въ механизмѣ болей, возбуждало сомнѣнія, не играютъ ли самыя артеріальныя сосуды, а вовсе не количество и не качество крови ихъ наполняющей, существенную роль въ этомъ механизмѣ, а именно, ихъ стѣнка, снабженная нервными приспособленіями. Goldscheider склоненъ приписывать ишемическія боли именно органическому пораженію артерій, вслѣдствіе заболѣванія vasa vasorum. Свое сужденіе онъ основываетъ на томъ, что при мигрени болѣзненна къ давленію а. carotis, а при висцеральныхъ боляхъ брюшная аорта. Nothnagel держится такого же мнѣнія. Breslauer и Odermatt вызывали боли у животныхъ, вытягивая въ длину у нихъ а. sciralis, и также склонны ишемическія боли приписывать чувствительности самой сосудистой стѣнки. Эти и многіе другіе авторы не желаютъ придавать какое либо значеніе недостатку крови въ механизмѣ ишемическихъ болей, но толкуютъ послѣднія ущемленіемъ вазомоторовъ при тоническомъ сокращеніи стѣнки, вотъ почему боли прекращаются при расширеніи сосудовъ. Спастическая гемикранія есть поэтому только сосудистый спазмъ, а не ишемическая боль. Odermatt склоненъ въ однихъ случаяхъ ишемическихъ болей при эмболии объяснять таковыя давленіемъ эмбола на околососудистое сплетеніе, заложенное въ адвентиціи; въ другихъ — хрони-

ческих эмболических случаях, — гдѣ боль прекращается съ восстановленіемъ циркуляціи, авторъ объясняетъ боли недостаткомъ крови, — въ эту послѣднюю категорію онъ вписываетъ ангиосклеротическія боли головы, *angina pectoris*, атероматозъ вѣнечныхъ сосудовъ, *dispragia angiosclerotica intestinalis*. Согласно Horst-Mayer'у эмболъ долженъ производить мѣстное раздраженіе стѣнки на мѣстѣ закупорки, а потому боли при эмболии зависятъ не отъ недостатка крови, но отъ механическаго раздраженія самой стѣнки сосуда. Fröhlich на основаніи своихъ опытовъ со внутриартеріальными впрыскиваніями хлористаго барія, адреналина и т. д. держится, повидимому, такого же мнѣнія. Боли при большихъ инфарктахъ легкаго авторъ объясняетъ сокращеніемъ мускулатуры а. pulmonalis. L. R. Müller многія висцеральныя боли объясняетъ тетаническимъ сокращеніемъ толстыхъ артерій. Thoma считаетъ, что пачиніевы тѣльца воспринимаютъ раздраженіе при сдавленіи сосудистой стѣнки и они-то являются послѣднимъ звеномъ и причиной боли и т. д.

Противъ объясненія ишемическихъ болей страданіемъ или механическимъ поврежденіемъ самой сосудистой стѣнки возсталъ Schrotter. Онъ наблюдалъ разнообразныя заболѣванія стѣнокъ большихъ артерій съ хорошо развитой эндо- и периваскулярной нервной сѣтью, но не видѣлъ никогда болевой реакціи при этомъ. Боли при разстройствѣ циркуляціи этотъ авторъ склоненъ объяснять колебаніемъ количества крови. Lang видѣлъ много случаевъ сифилитическихъ заболѣваній сосудовъ, но не знаетъ болевыхъ симптомовъ при этомъ. Stellen, Witting и др., производившіе часто имплантацию вены въ артеріальный стволъ, видѣли у своихъ пациентовъ первые дни послѣ операціи растяженіе имплантированной тонкостѣнной вены ad maximum подъ давленіемъ наполнявшей ее крови, однако же ни прилежащія части артеріи, ни самый венозный отрѣзокъ, не вызывалъ, при этомъ, никакихъ неприятныхъ ощущеній; послѣднія появлялись только тогда, когда, растянутый отрѣзокъ оперированнаго сосуда начиналъ давить при этомъ на сосѣдній чувствительный нервный стволъ.

Огромнѣйшій опытъ послѣдней войны съ массовыми случаями раненія артеріальныхъ сосудовъ убѣдилъ многочисленныхъ хирурговъ въ относительной нечувствительности сосудистой стѣнки и это въ настоящее время можетъ считаться общепризнаннымъ.

Разбираясь въ механизмъ сосудистой боли, многіе авторы пытались объяснить таковыя раздраженіемъ периартеріальныхъ и эндovasкулярныхъ нервныхъ сѣтей.

Förster считаетъ, что периаптеріальныя сѣти доводятъ до сознанія сосудистыя боли. Higier приписываетъ ишемическія боли при *maladie Raynaud*, *claudication intermittente* раздраженію нервныхъ волоконъ, заложенныхъ въ толщѣ сосудистой стѣнки и сосудистыхъ гангліи. Такого же мнѣнія держится Karris. L. R. Müller пытался объяснить боли при язвѣ желудка дѣйствіемъ кислаго желудочнаго сока на периаптеріальныя сѣти сосудовъ, составляющихъ дно язвы.

Odermatt при интраартеріальномъ вливаніи различныхъ растворовъ видѣлъ повышеніе внутрисосудистаго давленія и боли. Отсюда онъ заключаетъ, что эти послѣднія — результатъ раздраженія периаптеріальныхъ сплетеній. Того же мнѣнія были нѣкоторые хирурги по поводу болей, возникающихъ при наложеніи лигатуры. Collin, Bier, Breslauer видѣли боли при перевязкѣ висцеральныхъ артерій.

Ritter, Franz, Hesse, Haertel, перевязывая а. *sciatica*, раздражали затѣмъ дистальный конецъ этой артеріи и находили его нечувствительнымъ, отсюда они заключаютъ, что лигатура вызываетъ боль, сдавливая центрипетальныя нервныя волокна, проходящія вдоль всей артеріи. Хотя Odermatt и утверждаетъ, что изъ периферическихъ артерій а. *thyroidea* также болѣзненна при накладываніи лигатуры, но Karris, раздражая стѣнки этого сосуда тепломъ и холодомъ, нашелъ ихъ нечувствительными. Животное, однако, реагировало болями на фарадическій токъ, что Karris объясняетъ раздраженіемъ близъ лежащаго центрипетальнаго нерва. Къ этому мнѣнію присоединился и Odermatt. Съ другой стороны огромное число хирурговъ съ Engelmann'омъ, Katz'омъ, Pilz'омъ и др. во главѣ, отрицаютъ всякую чувствительность периферическихъ артерій при ихъ перевязкѣ.

Наблюденія послѣднихъ лѣтъ заставили поэтому авторовъ отказаться отъ мысли о проведеніи болевыхъ ощущеній вдоль артеріи по ея периаптеріальнымъ сѣтямъ. Что же касается этихъ послѣднихъ, то ихъ функція считается всецѣло подчиненной близъ лежащему центрипетальному периферическому стволу.

Dennig, впрыскивая растворъ хлористаго барія въ а. *sciatica* своимъ животнымъ, не видѣлъ у нихъ никакихъ болевыхъ реакцій, если были предварительно перерѣзаны N. N. *ischiadicus et femoralis*. Напротивъ были жесточайшія боли при цѣлости этихъ нервовъ. Dennig сомнѣвается поэтому, участвуютъ ли периаптеріальныя сплетенія вообще въ проведеніи болей. Schilf считаетъ, что афферентныя нервныя волокна, обслуживающія чувствительность сосудовъ, лежатъ не въ сосудистой стѣнкѣ, но въ сосѣднихъ толстыхъ нервахъ конечности, на примѣръ, что касается ноги — въ N. *sciatica*. Раздра-

женіе а. *sciralis* фарадическимъ токомъ вызываетъ поэтому боль такъ долго, пока не будетъ перерѣзанъ этотъ послѣдній нервъ. Многочисленные хирурги и физиологи, на основаніи своихъ наблюденій, считаютъ теперь, что периартеріальныя сплетенія не исполняютъ воспринимающую и проводящую функцію для болей, связанныхъ съ колебаніями ширины сосудовъ. Центрипетальныя сосудистыя волокна участвуютъ въ механизмъ боли, лишь *посредствуя рефлексу съ раздраженнаго участка сосуда на вазомоторные центры спинного мозга*, причемъ въ одномъ случаѣ наступаетъ спазмъ гесп. ишемія, а въ другомъ — расширение сосудовъ гесп. гиперемія.

Что касается эндоваскулярной нервной сѣти, доказанной гистологически въ крупныхъ артеріяхъ (въ малыхъ и среднихъ артеріяхъ эти элементы не найдены), то, согласно изслѣдова ніямъ Hatz'a, Lang'a, Delezeppe'a, Latschenberg-Deahn'a, Negeг'a, центральныя эндоваскулярныя нервы служатъ для регулированія кровяного давленія и вообще ширины сосудистаго русла и лишены боле-воспринимающей чувствительности. Рагапо же идетъ еще далѣе, утверждая, что эти нервы вообще не нужны, такъ какъ химически дѣйствующія вещества сами по себѣ могутъ такъ или иначе дѣйствовать на сосудистую стѣнку, каковая сокращается въ такомъ случаѣ безъ латентнаго періода. Съ другой стороны Рагапо убѣдился, что интима различныхъ артерій не одинаково чувствительна.

А. *hepatis* стоитъ въ этомъ смыслѣ выше всѣхъ, тогда какъ а. а. *sciralis*, *axillaris*, *carotis* мало воспринимаютъ мѣстныя раздраженія. Вообще не чувствительна а. *coeliaca*.

Въ настоящее время, на основаніи приведенныхъ опытовъ, подтвержденныхъ кромѣ того наблюденіями Kaufman'a, Spalitto-Consiglio, Pagano, Knaueг'a, Enderless'a, Fridberger'a, Oshikov'a, Heudliess'a и др. авторами, считается, что интима и артерій, и венъ не имѣетъ болевой чувствительности.

Joris, Odermatt и Negeг думаютъ, что только капилляры обладаютъ эндоваскулярною чувствительностью, однако ихъ центрипетальныя волокна лежатъ на наружной сторонѣ ихъ выстилающаго эндотелія. Получающіяся при вливаніи раствора *viscina* боли появляются именно не на мѣстѣ вколотою въ артерію инъекціонной иглы, а въ дистальныхъ частяхъ конечности, которыя при этомъ кромѣ того напухаютъ. Боли однако прекращались лишь только напряженіе напухшей ткани прекращалось послѣ надрѣза ножомъ кожи этого мѣста. Значить и эти боли нужно было считать механическаго характера, а не химическаго, — слѣдствіемъ растяженія кожи, а не дѣйствіемъ *viscina* на эндоваскулярную сѣть артерій.

Итакъ въ механизмѣ сосудистой боли не играютъ никакой роли ни самая стѣнка артеріи, ни периартеріальныя нервныя стѣты, ни эндоваскулярные центрипетальныя элементы. Значитъ, остается признать, что въ механизмѣ сосудистой боли играетъ роль состояніе сосудистаго просвѣта геср. содержимое сосудовъ, т. е. кровь.

Къ упоминанію въ началѣ этой главы о роли вазомоторовъ въ механизмѣ боли нужно сейчасъ прибавить, что вазомоторы имѣютъ метамерное распредѣленіе въ тѣлѣ, имѣя свои центры въ спинномъ мозгу, расположенные тамъ по отдѣльнымъ сегментамъ. Но, если законъ метамеріи имѣетъ силу для вазомоторной дѣятельности, т. е. въ игрѣ просвѣта въ отдѣльныхъ метамерахъ тѣла, то и боль, насколько она имѣетъ сосудистое происхожденіе, можетъ и должна имѣть локализацию по метамерамъ. Доказательство этому можно видѣть при различныхъ невральгическихъ боляхъ длинныхъ нервовъ, напр., при ischias, гдѣ нервъ оказывается болѣзненнымъ при давленіи не по всему своему ходу, но въ предѣлахъ отдѣльныхъ метамеровъ конечности. Когда Valley нашелъ болѣзненныя точки тройничнаго нерва при невральгіи лица, онѣ совпадали съ мѣстами выхода нервовъ изъ костныхъ каналовъ. Valley формулировалъ свою находку общимъ тезисомъ, что нервъ при невральгіи болѣзненъ на мѣстѣ выхода или входа въ костные каналы. Такъ какъ при Ischias оказались также болевые точки, а костныхъ каналовъ тамъ нѣтъ, то изъ затрудненія вышли, допуская, что положеніе нерва между мышцами равняется прохожденію его черезъ каналъ съ мышечными стѣнками и что послѣдній въ клиническомъ отношеніи равнозначущъ костному каналу.

Въ эпоху Valley тѣло человѣка еще не дѣлилось на метамеры и законъ метамеровъ не былъ извѣстенъ въ клиникахъ. Теперь же мы его усвоили и должны признать, что длинный нервъ проходитъ на своемъ пути черезъ нѣсколько сегментовъ или метамеровъ ноги, а его болѣзненность къ давленію совпадаетъ съ границами отдѣльныхъ таковыхъ метамеровъ.

Съ другой стороны Goltz, а позже Masius Vanlair установили, что вазомоторы размѣщаются въ тѣлѣ человѣка по сегментному — метамерному порядку, причемъ границы этихъ ангиомеровъ не совпадаютъ ни съ миомерами, ни съ дерматомерами, ни съ спланхномерами. Центры же отдѣльныхъ ангиомеровъ лежатъ въ интермедіарной зонѣ спинного мозга и притомъ въ извѣстномъ недостаточно послѣдовательномъ порядкѣ.

Согласно упомянутымъ авторамъ, каждая часть тѣла

имѣть свои собственные вазомоторы, такъ что каждый отрѣзокъ тѣла, даже каждый изъ двухъ близко расположенныхъ сосѣдей, обслуживается своей собственной сосудодвигательной станціей; длинные же нервные стволы, какъ напр. N. n. ischiadicus, saphenus, radialis, intercostalis на своемъ пути — въ периферіи, проходя территоріи отдѣльныхъ ангиомеровъ, находятъ въ каждой изъ таковыхъ иныя стоянія судистаго русла, иныя діаметры отдѣльныхъ артерій, попадая или въ область гипереміи или судистаго спазма и т. д., въ результатѣ чего длинный нервъ долженъ реагировать на эти измѣненія своего питанія чувствительностью къ давленію и субъективно ощущаемыми болями и при томъ въ различныхъ пунктахъ своего теченія различнымъ образомъ.

Хирурги, лѣчившіе въ прежнее время (Hoheneck, Bergman, Борнгауптъ и др.) ишіасъ кровавымъ вытяженіемъ нерва, ради чего обнажали N. ischiadicus, имѣли возможность удостовѣриться въ гипереміи еріпервиумъ такового, и притомъ именно не на всемъ протяженіи, а на опредѣленномъ участкѣ нерва, — тамъ, очевидно, гдѣ нервъ проходилъ черезъ территорію расширенныхъ сосудовъ.

О величинѣ этихъ ангиомеровъ у человѣка можно судить на основаніи случайныхъ клиническихъ наблюденій, гдѣ, напримѣръ, касательная травма артеріи пулей, штыкомъ, шрапнелью, вызываетъ спазмъ сосуда и притомъ на опредѣленномъ протяженіи послѣдняго — въ 10—20 сантиметровъ длины, — каковое можетъ считаться, поэтому, вазомоторнымъ сегментомъ, ангиомеромъ.

Механизмъ этихъ спазмовъ обратилъ на себя вниманіе французскихъ и нѣмецкихъ военныхъ хирурговъ, которые признали въ этомъ рефлекторное сжатіе артеріи вслѣдствіе того, что съ мѣста раненія по центрипетальнымъ волокнамъ достигло раздраженія до вазомоторнаго центра даннаго метамера, въ результатѣ чего подчиненные этому центру сосуды на протяженіи егo ангиомера сѣзались до потери просвѣта. Протяженіе этого сжатаго мѣста отвѣчаетъ размѣру ангиомера. Таковы наблюденія, — Kutter, Baruch, Odermatt, Vinpeu, Blum, Soubeugon, Michon и др.

Характерно, что эти спазмы, однажды появившись какъ слѣдствіе травмы, могутъ повторяться и послѣ излѣченія и притомъ подъ вліяніемъ различныхъ случайныхъ раздраженій и тогда этотъ спазмъ вызываетъ ишемическую боль во всей части тѣла, орошаемой даннымъ сосудомъ.

Latschenberg-Deahna считаетъ, что длинные сосуды раздѣлены на небольшіе сегменты-отрѣзки, изъ которыхъ каждый связанъ центрипетально и центрифугально со своимъ вазомоторнымъ центромъ въ спинномъ мозгу.

Krammer-Todd, Pott, Löwen-Trendenberg установили, что

вазомоторы проходятъ въ толщѣ смѣшанныхъ нервныхъ стволовъ, а не въ adventitia данной артеріи. Только проксимальная часть *a. subclaviae* иннервируется непосредственно изъ пограничнаго ствола симпатическаго нерва, дистальныя же части той же артеріи и вообще всѣхъ другихъ артерій тѣла получаютъ свои вазомоторы отдѣльными порціями, отходящими отъ смежнаго смѣшаннаго нерва и притомъ для каждаго сегмента сосуда отдѣльно. Эти участки по изслѣдованію *Krammer-Todd*'а становятся тѣмъ короче, чѣмъ далѣе въ периферію уходитъ данный сосудъ.

Wiedhoff устанавливаетъ правило сегментной иннервации отдѣльныхъ артерій, согласно которому каждый длинный сосудъ подчиненъ по своей длинѣ нѣсколькимъ вазомоторнымъ станціямъ спиннаго мозга, посылающимъ свои вазомоторы къ управляемымъ ими участкамъ данной артеріи черезъ смѣшанный нервъ. Раздраженіемъ центрипетальныхъ вѣтвей этихъ послѣднихъ создается рефлекторный спазмъ отдѣльныхъ сегментовъ этихъ артерій или расширение таковыхъ вмѣстѣ съ отходящими отъ этихъ сегментовъ вѣтвями, какъ это наблюдалось на поляхъ битвъ при касательныхъ травмахъ артерій.

Опираясь на эти данныя сегментарно-вазомоторнаго управленія тѣла можно легко представить себѣ колебанія кровообращенія въ отдѣльныхъ метамерахъ тѣла, болѣзненность длинныхъ нервовъ къ давленію въ опредѣленныхъ точкахъ (*resp.* въ границахъ этихъ метамеровъ) и произвольныя боли при невралгіяхъ длинныхъ нервовъ, которыя даютъ себя знать лишь въ опредѣленныхъ участкахъ пробѣгаемой ими территоріи.

Такъ какъ боль для своего проявленія требуетъ времени, въ теченіи котораго она достигаетъ нашего сознанія, переходя различныя фазы и ступени, то авторы пытаются установить эти послѣднія.

Titschner находитъ въ механизмѣ боли при уколѣ иглой 3 стадіи: 1) въ первой воспринимается яркое зудящее ощущеніе; 2) во второй — тонкое вѣдреніе въ тѣло (*Fadenförmige Einbohren*); 3) въ третьей различается точкообразная боль и въ этой фазѣ — первое и третье ощущеніе, сливаясь, воспринимаются какъ боль.

Goldscheider различаетъ въ воспріятіи боли четыре времени: 1) первое начинается тактильнымъ раздраженіемъ; 2) второе — содержитъ всѣ признаки боли; 3) третье продолжаетъ второй періодъ; 4) въ четвертомъ времени воспріятіе, созданное ранѣе, сохраняется и задерживается (*Nachempfindung*). Различая 4 фазы въ боли, *Goldscheider* полагаетъ особую важность

на длительность периферического раздраженія. Тактильное ощущение, создавая измѣненіе въ тканяхъ, превращается въ раздраженіе, которое не можетъ сразу потухнуть, вслѣдствіе того, что и тканевыя измѣненія не могутъ сразу прекратиться и выравняться. Тактильное раздраженіе состоитъ изъ послѣдовательныхъ волнъ (*successive Erregungsreihe*), которыя суммируются воспринимающими ихъ клѣтками спинного мозга и вызываютъ *разрядъ въ центрипетальномъ направленіи и иррадіацію (?)*. Во второй фазѣ новыя волны усиливаютъ первичное раздраженіе. Въ третьей и четвертой фазѣ послѣ нѣкотораго усиленія волнъ наступаетъ ослабленіе ихъ, но остается послѣ-ощущеніе.

Если представить себѣ механизмъ боли, гдѣ главную роль играетъ не травма, ножъ или игла, но игра сосудистаго просвѣта, то и въ этомъ случаѣ точно такъ же можно установить нѣсколько фазъ или стадій. Кромѣ стадіи покоя, предшествующаго игрѣ сосудовъ, можно различать четыре, другъ въ друга переходящихъ фазъ, изъ которыхъ складывается моментъ боли.

Въ стадіи покоя, когда тѣло не получаетъ никакихъ болевыхъ раздраженій — черезъ спинной мозгъ текутъ трансфугально, т. е. отъ заднихъ корешковъ герсп. заднихъ роговъ, вентрально въ направленіи къ переднему и боковому рогу служебныя иннерваціи обычной степени, имѣющія задачей поддерживать жизненный тонусъ и питаніе всѣхъ тканей тѣла въ томъ числѣ и сосудовъ. Ширина этихъ послѣднихъ приближается въ это время къ среднимъ нормамъ, — артеріи при этомъ ни сужены, ни расширены.

I. Первый стадій начинается, допустимъ, механическимъ раздраженіемъ въ предѣлахъ какого либо метамера (опытъ производился и на вполне здоровомъ человѣкѣ и съ органическимъ страданіемъ нервной системы) и проникаетъ во-первыхъ до спинного мозга (въ упомянутомъ трансфугальномъ направленіи), во-вторыхъ, къ центрамъ сознанія головного мозга, гдѣ воспринимается какъ нѣкоторое индифферентное ощущение (давленіе, прикосновеніе, тепло...). Если раздраженіе было слабо и кратко, то весь процессъ *потухаетъ* уже въ первой фазѣ *безъ ощущенія боли*, чему будетъ способствовать концентрація вниманія на упомянутомъ индифферентномъ ощущеніи и только это послѣднее остается въ нашемъ сознаніи.

II. Если раздраженіе сильно и протянется нѣкоторое время, то наступаетъ вторая фаза: вазомоторные центры, до которыхъ достигло трансфугальное раздраженіе, вызовутъ колебаніе просвѣта сосудовъ въ опредѣленномъ метамерѣ, что скажется болевымъ ощущеніемъ на почвѣ ли гипереміи или ишеміи въ этомъ метамерѣ, чѣмъ и объясняется, что боли бываютъ диффузными, разлитыми при какомъ либо тон-

комъ раненіи, ибо трансфугальный потокъ раздраженій приводитъ весь вазомоторный сегментный центръ въ возмущеніе, а не одну маленькую дробь его.

III. Устанавливающаяся при этомъ боль сливается въ сознаніи съ ощущеніемъ отъ первой фазы, идентифицируется съ нею и поглощаетъ таковое, такъ что первичное впечатлѣніе отъ первой фазы совершенно потухаетъ въ сознаніи. Одновременно съ этимъ въ этой фазѣ наступаетъ колебаніе общаго сосудистаго давленія (повышеніе или пониженіе такового), а это отражается и на фокусѣ гипереміи или ишеміи и на отпавленіи сознанія. При повышеніи давленія мѣстный фокусъ гипереміи еще увеличится, при паденіи давленія наступаетъ обратное состояніе. Сознаніе же при повышеніи давленія восприметъ боль острѣе, при паденіи же давленія боль тупѣетъ, но одновременно съ этимъ можетъ наступить обморокъ и т. д.

IV. Боль потухаетъ одновременно съ возвращеніемъ къ нормѣ ткани, выведенной изъ равновѣсія нанесеннымъ мѣстнымъ раздраженіемъ.

Факты приведенной литературы, касающіеся значенія ширины просвѣта въ механизмѣ боли дали поводъ, авторамъ экспериментально вызвать боли, измѣняя просвѣтъ сосудовъ. Richet, De Watteville, Naupin, Rosenbach и др. старались колебаніями кровеообращенія въ ушной раковинѣ кролика вызвать раздраженіе N. N. auricularis posterior, отчасти trigeminus и occipitalis minor. Эти нервы обслуживаютъ чувствительность наружнаго уха, тогда какъ кровеообращеніе той же части находится подъ вѣдѣніемъ Ramus ascendens N. sympathici. При этихъ экспериментахъ выяснилось, что если упомянутый послѣдній нервъ подвергнуть раздраженію фарадическаго тока, то животное начинаетъ визжать отъ боли. Richet выбралъ для своихъ опытовъ собаку. Перерѣзавъ ей Ramus ascendens N. sympathici надъ Gangl. supremum и обезпечивъ дистальный отрѣзокъ отъ высыханія, онъ началъ раздражать двуполюснымъ электродомъ этотъ послѣдній очень слабымъ токомъ, раздвинувъ катушки аппарата Du Bois Reymond'a на самое далекое разстояніе и установивъ маятникообразный замыкатель тока такъ, чтобы перерывы происходили 4 раза въ секунду, а длительность каждаго дѣйствія тока не была бы больше 0,04 секунды. Такъ какъ токъ былъ очень слабъ, чтобы вызвать самъ по себѣ боли и такъ какъ дистальный резецированный конецъ Ramus ascendens, даже, если бы онъ содержалъ центрипетальныя волокна, не могъ бы провести боль до сознанія (резекція!), а тѣмъ не менѣе животное обнаруживало сильную боль, то объяснить таковую можно

было лишь вторичнымъ дѣйствиємъ тока, а именно, вазомоторнымъ геср. сосудистымъ механизмомъ, знаки котораго были дѣйствительно налицо: температура и окраска уха измѣнились во время опыта уже черезъ нѣсколько минутъ отъ начала опыта, а въ то же время животное начинало визжать и выть такъ долго, пока не прекращался электрической токъ.

Этотъ опытъ доказалъ, во-первыхъ, боль сосудистаго происхожденія, во-вторыхъ — суммирование раздраженій. Для появленія боли нужно было нѣсколько минутъ. Чтобы изъ суммы краткихъ раздраженій по 0,04 секунды 4 раза въ секунду получился эффектъ, нужно было сложение этихъ мелкихъ раздраженій. Клѣтки же заднихъ роговъ I. II. III шейныхъ сегментовъ не только собрали эти раздраженія, но и переработали ихъ въ нѣчто новое, окрасивъ его въ болевое воспріятіе.

Этотъ фактъ суммаціи, къ сожалѣнію недостаточно подчеркнутый экспериментаторомъ, потерявшійся въ литературѣ и вовсе неизвѣстный клиницистамъ, имѣетъ огромное значеніе въ объясненіи иррадирующихъ болей въ большинствѣ случаевъ изъ темнаго неизвѣстаго первоисточника. Въ нашихъ клиникахъ въ Кіевѣ и Загребѣ была возможность убѣдиться, что причиною таковыхъ бывало ничтожное измѣненіе въ органахъ, напр., малаго таза, не дававшего себя мѣстно чувствовать. Однако, суммація получающихся при этомъ раздраженій вызывала иррадирующую боль въ ногахъ, крестцѣ, въ брюшныхъ покровахъ, въ плечевыхъ мышцахъ. Эти хроническіе, ничтожные по своей интенсивности и мѣстнымъ симптомамъ, процессы могутъ долгое время протекать латентно, совершенно незамѣтно и скрытно, а между тѣмъ, суммируясь, нарушали вазомоторный тонусъ и перерабатывались въ боль. Отсюда возникаютъ болѣзненные иррадіаціи. Ничтожное раздраженіе, замедленный ритмъ, краткое нарушеніе равновѣсія суть первое условіе, но помощь суммаціи необходима, чтобы возникли тяжелыя длительныя иррадіаціи болей. Пока обнаружится боль — тянется длительный подготовительный періодъ, во время котораго устанавливается необходимый ритмъ и дозволенная степень раздраженія, чтобы подъ ея вліяніемъ измѣнился тонусъ сосудовъ опредѣленнаго метамера и возникла бы иррадирующая боль, которую можно было бы охарактеризовать какъ сосудистая или, правильнѣе, гематогенная боль.

При рѣшеніи вопроса о механизмѣ боли при ишеміяхъ нужно различать 2 большія клиническія группы. Къ первой нужно отнести *хронически* протекающія заболѣванія артерій, заканчивающіяся облитераціей этихъ сосудовъ. Ко второй нужно причислить всѣ *остро* возникающіе случаи — внезап-

ное прекращеніе кровообращенія. Сюда относятся быстро развивающіяся спазмы периферическихъ артерій — при мигрени, синкопе дистальныхъ сосудовъ, при актоасphixia, — *maladie Raynaud*, эмболы, раненія артеріи съ нарушеніемъ ихъ непрерывности... Сюда же относятся экспериментальныя наблюденія De-Wattewille'a, Rosenbach'a, Naunin'a, Brown-Sequard'a, гдѣ краткое раздраженіе электрическимъ токомъ симпатическаго нерва и притомъ опредѣленныхъ — ритма и силы — вызывали не только спазмъ сосудовъ (уха), но и боль.

Въ отличіе отъ первой группы, гдѣ болевья ощущенія развиваются лишь незамѣтно и постепенно и сказываются первое время лишь послѣ большой работы данной части тѣла, боли во второй группѣ возникаютъ внезапно (какъ это было приведено въ цитированныхъ случаяхъ Kroh, Odermat, Ortman, Schlesinger, Kuttner-Baruch, Goldscheider, Nothnagel) — сразу же послѣ закрытія артеріальнаго просвѣта и сразу же прекращаются съ восстановленіемъ послѣдняго (случаи Schlesinger, Kroh, Goldscheider и др.). При хроническомъ заболѣваніи сосудовъ такового остраго исчезанія болей не наблюдалось, успокоеніе же послѣднихъ происходило только послѣ ампутаціи части лишенной подвоза крови и притомъ настолько высокой ампутаціи, чтобы на разрѣзѣ артеріи имѣли бы нормально-функционирующій просвѣтъ.

А. О причинахъ болей — механизмѣ ихъ — въ случаяхъ первой группы можно было себѣ составить представленіе на основаніи находившихся въ клиникѣ 4 случаевъ облитерациі а. *sigalis* или ея вѣтвей, сопровождавшейся сухой гангреной и ампутаціей части больной конечности.

Начало заболѣванія сказывалось похолоданіемъ дистальныхъ частей стопы, парестезіями, уменьшеніемъ объема ноги, утомленіемъ ноги при ходьбѣ... Въ началѣ боли имѣли спорадическій характеръ, послѣдніе же мѣсяцы онѣ становились постоянными, ожесточаясь иногда по ночамъ въ постели.

Лежа въ постели больные предпочитали держать больную ногу согнутой въ колѣнѣ, избѣгая такимъ образомъ натягивать сѣдалищный нервъ. Другіе больные находили облегченіе, опуская больную стопу на полъ или сдвливая V. Saphena, вызывая такимъ образомъ венозный застой въ больной ногѣ. При объективномъ изслѣдованіи стопа пораженной конечности была холоднѣе здоровой, объемъ былъ меньше послѣдней, пульсъ въ а. а. *pedis*, *tibialis antica*, *peronea*, *tibialis postica* всегда отсутствовалъ, иногда онъ не былъ ощутимъ также и въ а. *femoralis*. Обычно имѣлась на лицо сухая гангрена нѣсколькихъ пальцевъ, иногда и самой стопы до линіи Chopar'a. Чувствительность всѣхъ видовъ кромѣ мышечнаго чувства на гангренизирующихъ частяхъ была уменьшена или вовсе отсутствовала, напротивъ части стопы и вообще ноги, гдѣ не было омертвѣнія, и притомъ именно проксимально отъ демаркаціонной линіи, были въ состояніи гиперестезіи. Плантарный рефлексъ часто былъ сохраненъ такъ же какъ *stematereflex*; Ахилловъ — почти всегда можно было вызвать, пателларный — былъ повышенъ. N. N. *saphenus*, *ischiadicus*, *obturatorius peroneus*, *tibialis* были болѣзненны при

узловатымъ и стѣнки артеріальныхъ вѣтокъ были утолщены; просвѣтъ не былъ облитерированъ. Регнервиумъ состоялъ изъ утолщенныхъ пластинъ, мѣстами отдалившихся другъ отъ друга, вслѣдствіе чего на поперечномъ срѣзѣ нерва образовались серпообразныя пустоты. Ткань endonevrium была рѣзко утолщена, набухла, умножена, заключала многочисленныя толстыя ядра. На периферіи endonevrium, — на границѣ съ регнервиумъ — встрѣчались пустоты, каковыя свидѣтельствовали, объ отечности endonevrium'a при жизни.

Общее число нервныхъ волоконъ на стопѣ было рѣзко уменьшено. Отъ многихъ волоконъ остался лишь осевой цилиндръ. Контуры осевого цилиндра текли параллельно. Окраска (methylenblau по Kalden'у, хлористымъ золотомъ, пикрокарминомъ, dreifarben-gemisch по Rosin'у, кислый Haematoxilin). Обломковъ осевого цилиндра не показывали. Налицо имѣлась такимъ образомъ атрофія отъ сдавленія разбухшей и умноженной тканью endonevrium. Давленіе было равномерно увеличивавшееся постепенно, а по мѣрѣ уменьшенія кольца, сдавливавшего нервное волокно, — послѣднее медленно исчезало на своей периферіи.

Съ анатомо-патологической точки зрѣнія процессъ въ нервномъ стволѣ можно было назвать дистрофіей, съ развитіемъ соединительной ткани и гибелью благородныхъ нервныхъ элементовъ.

Въ препаратахъ, сдѣланныхъ изъ нижней трети бедра, нервныя волокна сохранились въ большемъ гесп. нормальномъ количествѣ. Endonevrium и регнервиумъ не носили слѣдовъ большого набуханія; epinevrium не содержалъ ни лакунъ, ни инфильтрацій. Миелиновое влагалище и осевой цилиндръ не обнаруживали большихъ измѣненій. A. femoralis и vasa nervorum сохраняли свой просвѣтъ.

Такимъ образомъ изслѣдованіе подъ микроскопомъ установило облитерацію артеріи на стопѣ и огромное развитіе тамъ же въ нервныхъ стволахъ соединительной ткани, которая сдавливала отдѣльныя нервныя волокна. Этимъ сдавленіемъ нужно было объяснить атрофію нервныхъ волоконъ въ дистальныхъ частяхъ ноги. Большое развитіе соединительной ткани и другія явленія дистрофіи нужно было понимать въ данномъ случаѣ какъ результатъ длительной ишеміи.

Переходя къ объясненію болей въ данныхъ случаяхъ, нужно остановиться на процессѣ сдавленія отдѣльныхъ нервныхъ волоконъ.

Многочисленные авторы, разрабатывавшіе этиологию болей, приписываютъ давленію большую роль въ этомъ отношеніи.

Joteyko утверждаетъ, что всякая периферическая или висцеральная боль есть слѣдствіе сдавленія нерва. Mansel-Moulinъ объясняетъ боли при аппендицитѣ сдавленіемъ спинальныхъ нервовъ внутри брюшной стѣнки. Такого же мнѣнія держится Marie Tobler, Ю. Снѣгиревъ. Nothnagelъ объясняетъ кишечныя колики ущемленіемъ нервныхъ волоконъ благодаря тетаническому сокращенію циркулярной мускулатуры кишечника. Johan-Müller признаетъ, что боли могутъ происходить не только вслѣдствіе давленія на нервъ извнѣ, но также и при различныхъ интерстиціальныхъ процессахъ внутри нерва, сдавливающихъ его отдѣльныя волокна. Brüning-Gohrbandt, стараясь опредѣлить, какія раздраженія вызываютъ кишечную колику, увѣрились, что этому могутъ быть причиной сдавленіе мѣстныхъ нервовъ тетаническимъ сокращеніемъ круговой кишечной мускулатуры. Такое же мнѣніе высказываетъ по поводу кишечныхъ болей и Fröhlich, Mayer, Higier и др.

Принимая во вниманіе эти литературныя данныя съ одной стороны, а съ другой наличіе сдавленія нервныхъ волоконъ въ ампутированныхъ частяхъ, нужно придти къ заключенію, что въ случаяхъ хронически протекающаго гематогеннаго голоданія — боли имѣютъ свою причину въ сдавленіи волоконъ, какъ слѣдствіе дистрофической гиперплазіи и гипертрофіи *endonevrii*. Отъ участія въ механизмъ боли въ этихъ случаяхъ нужно, повидимому, исключить тѣ нервныя волокна, которыя утратили міелиновое влагалище, такъ какъ осевой цилиндръ, утратившій таковое, лишень своей нормальной проводимости. Послѣдняя или замедляется, или даже вовсе исчезаетъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ должны прекратиться и болевья ощущенія, проводимыя этимъ осевымъ цилиндромъ. Все же эти голые или атрофированные осевые цилиндры доводятъ, однако, до сознанія свое патологическое состояніе, но это, повидимому, происходитъ въ томъ сегментѣ ихъ, гдѣ и ихъ міелиновое влагалище и осевой цилиндръ уже сохранили свой нормальный видъ. Съ этой точки зрѣнія не только эти умѣренно поврежденные на стопѣ, но и совершенно исчезнувшія тамъ же, вслѣдствіе сдавленія, нервныя волокна начинаютъ давать о себѣ свѣдѣнія, начиная съ того сегмента, гдѣ нервное волокно, не подвергаясь болѣе сдавленію, переходитъ въ нормальное, т. е. когда оно вступаетъ на бедро, гдѣ кровеносные сосуды подвозятъ достаточное количество крови, необходимое для питанія нерва. Существуютъ именно экспериментальныя изслѣдованія Cattell-Edwards'a, показывающія, что моментомъ раздраженія центрипетальнаго волокна можетъ быть его состояніе декремента (*Transitional decrement*) на опредѣленномъ протяженіи, гдѣ это волокно сдавлено. Само же мѣсто декремента, отъ котораго идутъ раздраженія, должно находиться тамъ, гдѣ прекращается сдавленіе. Раздраженія, возникающія при этомъ, воспринимаются нашимъ сознаніемъ какъ боль, но — съ другой стороны — по закону эксцентрализаціи боли, о чемъ говорилось ранѣе, — проецируются въ периферію и пациентъ локализуетъ боль ложно въ гангренизирующей стопѣ.

Конечно, всѣ другія нервныя волокна, сохранившіяся на стопѣ, должны давать точно такъ же ощущеніе боли отъ давленія на нихъ со стороны *endonevrii*.

В. Боли у человѣка вслѣдствіе *остро развившейся ишемии* я наблюдалъ въ 4 случаяхъ.

Въ одномъ случаѣ — крестьянской дѣвушкѣ 18 лѣтъ быкъ рогомъ разорвалъ *a. femoralis*. Въ другомъ — на 9-й день *pneumoniae cirrosaе*, одновременно съ критическимъ паденіемъ температуры, настала эмболія *a. tibialis antica* у мушны 40 лѣтъ, злоупотреблявшаго алкоголемъ. Въ третьемъ — дѣвушка 24 лѣтъ страдавшая *vitium cordis* получила эмболь въ лѣвую

a. brachialis въ періодъ выздоровленія отъ гриппа. Въ четвертомъ случаѣ — мужчина 45 лѣтъ, носитель аортита, расширенной аорты и недостаточности аортальныхъ клапановъ, сог. bovinum, получилъ эмболь а. poplitea во время coitus.

Клиническая картина первыхъ моментовъ ишеміи во всѣхъ случаяхъ мнѣ извѣстна изъ описанія самихъ больныхъ. Начало — внезапно. Одновременно съ ощущеніемъ холода въ дистальныхъ частяхъ конечности — боли и парестезіи тамъ же. Прекращеніе болей было также остро вмѣстѣ съ возстановленіемъ циркуляціи. Первые 3 случая были приняты въ клинику на 2-4 день заболѣванія.

Четвертый случай былъ въ моемъ амбулаторномъ пользованіи уже полгода до эмбола и я былъ позванъ къ нему 2 часа спустя послѣ возникшей эмболии. Первое впечатлѣніе при осмотрѣ больного было въ пользу діагноза polyomyelitis anterior acutissima: лѣвая нога была совершенно неподвижна для активныхъ движеній, вяла при пассивныхъ перемѣщеніяхъ, кожные и сухожильные рефлексы отсутствовали. Однако пациентъ жаловался на боли, что для полиомиелита не было характерно, чувствительность-же всѣхъ видовъ на стопѣ и отчасти голени угасла. Точный діагнозъ былъ поставленъ на основаніи похолоданія ноги и отсутствія пульса въ а. a. tibialis antica, postica et peronea и наличія insufficientiae aortatis.

Уже вечеромъ того же дня боли въ ногѣ прекратились, нога приняла нормальную температуру, моторная сфера, чувствительность и рефлексы возстановились. Появился пульсъ въ а. pedis et tibialis postica. Со словъ пациента всѣ эти симптомы улучшенія, и на первомъ мѣстѣ боль, наступили довольно внезапно, а именно въ тотъ моментъ, когда жена его растирала ему ногу въ подколенной ямкѣ прописанной жидкостью (Chloroform, t-ra capsica, spiritus formicatus.)

Всѣ мои личные наблюденія закончились полнымъ возстановленіемъ всѣхъ функцій ad postum въ ишемической конечности въ теченіи 18—24 часовъ послѣ возникшей эмболии.

Эти данныя вполне совпадаютъ съ описаніями Kroh, Odermatt, Ortman и др., которые отмѣтили при эмболияхъ острое развитіе болей, почти мгновенное, послѣ закрытія просвѣта и такое же быстрое прекращеніе ихъ одновременно съ возстановленіемъ кровообращенія.

Это быстрое начало и таковое же разрѣшеніе говорило противъ возможности разрушенія нервнаго волокна; все-же для выясненія деталей механизма болей остраго гематогеннаго происхожденія были произведены эксперименты съ перевязкой а. sciatica въ паховой складкѣ у собакъ.

У собакъ, по наблюденіямъ Nothnagel'a, полная ишемія въ такихъ случаяхъ отмѣчается лишь въ теченіи 24 часовъ, а затѣмъ уже на вторые сутки — совершенно возстановливается циркуляція, благодаря развитію коллатерального круга.

Въ нашихъ случаяхъ опытъ былъ ограниченъ 24 часами. А. sciatica была проксимально отъ а. profunda отсепарована, завернута стерильнымъ кускомъ каучуковой пластинки на протяженіи 4 сантиметровъ; поверхъ каучука наложена была въ трехъ мѣстахъ толстая шелковая нить; уже затягиваніе въ узелъ первой нити сопровождалось исчезаніемъ пульса въ лапѣ. Къ моменту окончанія операціи стопа была холодна, нога становилась паретичной. Собака ходила на трехъ ногахъ. Лѣвая экспериментированная задняя нога была приподнята въ тазобедренномъ суставѣ, стопа безпомощно свѣшивалась внизъ, пальцы и стопа были совершенно парализованы; ахилловъ рефлексъ отсутствовалъ, чувствительность къ уколу была понижена. Животное визжало и лизало стопу; вѣроятно были боли — именно въ

стопѣ. У трехъ собакъ черезъ 14—16 часовъ послѣ наложенія лигатуры, эта послѣдняя была снята; лапа послѣ этого тотчасъ согрѣлась, произвольныя движенія въ экспериментированной ногѣ, чувствительность и рефлексъ совершенно возстановились. Животное чесало себѣ бокъ экспериментированной лапой черезъ $\frac{1}{4}$ часа послѣ снятія лигатуры.

Эти данныя заставляли думать, что грубаго органическаго поврежденія нервовъ стопы и голени вѣроятно не случилось за время опыта первые 16—24 часовъ эксперимента, т. е. за время, когда у человѣка при такихъ же условіяхъ ишеміи наступаютъ тяжелые приступы болей.

Изъ 7 животныхъ, которымъ была наложена лигатура, четыремъ была произведена біологическая окраска нерва по Ehrlich'у метиленовою синькой, имѣя задачу опредѣлить, какія измѣненія претерпѣваетъ главнымъ образомъ осевой цилиндръ при остро-развившемся недостаткѣ крови. Съ этой послѣдней цѣлью растворъ краски вливался въ брюшную аорту обезкровленнаго животнаго, а препараты полученные съ оперированной ноги и съ контрольной подверглись изученію, сравненію въ смыслѣ густоты окраски, состоянія осевого цилиндра, состоянія швановскихъ ядеръ и т. д. Такъ какъ отдѣльные препараты отъ обѣихъ сравниваемыхъ заднихъ конечностей подвергались еще обработкѣ осміе-молибденовыми соединеніями, то имѣлась возможность опредѣлить и состояніе міелиноваго влагалища изслѣдуемыхъ волоконъ. При тщательномъ сравненіи полученныхъ такимъ образомъ препаратовъ отъ экспериментированной стороны и отъ контрольной не удалось установить никакой разницы ни въ тонѣ окраски, ни въ толщинѣ осевого цилиндра, правильности, параллельности его контуровъ, состоянія швановскихъ ядеръ, міелиноваго влагалища.

Въ общемъ нервныя волокна вѣтвей сѣдалищнаго нерва первые 14—18 час. послѣ наложенія лигатуры на а. sciatica — сохранили свой совершенно нормальный видъ. Значитъ *нервное волокно осталось органически не поврежденнымъ* и это находилось въ соотвѣтствіи и съ клиническими наблюденіями, гдѣ быстро наступающее возстановленіе циркуляціи въ первые же сутки послѣ внезапно наступившей ишеміи идетъ параллельно съ прекращеніемъ болей и полнымъ возстановленіемъ всѣхъ функцій части тѣла, находившейся въ ишеміи. Это было бы невозможно, если бы нервныя волокна претерпѣли за время ишеміи органическое перерожденіе.

Сравнивая подъ ультрамикроскопомъ нервныя волокна отъ контрольной ноги и таковыя экспериментированной стороны и притомъ первыхъ 12—16 часовъ ишеміи, можно было отмѣтить различіе ритма движенія моллекулъ рассматриваемыхъ нервовъ, съ тѣмъ, однако, отличіемъ, что на контрольной сторонѣ этотъ ритмъ былъ почти одинъ и тотъ же во всѣхъ препаратахъ, насколько въ этомъ можно было довѣрять своему глазу. *На экспериментированной же ногѣ — въ однихъ кусочкахъ расщепленныхъ волоконъ этотъ ритмъ казался замедленнымъ, въ другихъ же, напротивъ, — ускореннымъ.*

С. Размышляя о томъ, какъ могла остро-возникающая ишемія вызвать боль *gesp.*, какъ могло это разстройство

циркуляціи отразиться на нервномъ волокнѣ, нужно имѣть въ виду слѣдующія основныя точки зрѣнія:

1. Только волокна, сохранившія анатомическую цѣлость и непрерывность, могутъ проводить боль до сознанія; вприкиваніемъ въ нервный стволъ алкоголя, осміевоу кислоты и другихъ веществъ, нарушающихъ анатомическую цѣлость даже только міелиноваго влагалища, прекращается проведеніе боли, чѣмъ и пользуются въ клиникѣ при лѣченіи невралгій. Еще ярче выступаетъ этотъ законъ въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ ради лѣченія болей (напр. въ одномъ случаѣ травматическаго раздраженія *N. radialis*) произведено разсѣченіе даннаго нерва проксимально отъ фокуса раздраженія и накладывался немедленно шовъ на нервъ.

Тотчасъ же послѣ прекращенія непрерывности нерва прекращается и боль; нервъ же сростается, его непрерывность неукоснительно возстанавливается, но боль тѣмъ временемъ забывается. Эти и другіе примѣры показываютъ, что непрерывность волокна и его анатомическая цѣлость вообще является условіемъ проведенія боли; вотъ почему въ нашихъ случаяхъ — и клиническихъ и экспериментальныхъ — нервныя волокна, именно благодаря наличію болей, — должны были быть сохранены въ своей непрерывности и анатомической цѣлости.

2. Поврежденія герсп. раздраженія центрипетальнаго нервнаго волокна не могутъ быть ни большой степени, ни очень грубы въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ боли имѣютъ длительное теченіе. Нѣкоторые лабораторные эксперименты показываютъ именно, что эффектъ раздраженія зависитъ отъ его ритма. Если ритмъ будетъ слишкомъ медленъ и разряды раздраженій слѣдуютъ рѣдко другъ за другомъ, то ихъ эффектъ вовсе теряется; если же, напротивъ, слишкомъ часты, то суммирующія клѣтки приходятъ въ заторможенное состояніе. *Baglioni*, раздражая задній корешокъ спинного мозга, получалъ сокращенія мышцъ ноги у лягушки лишь тогда, если пауза между отдѣльными разрядами фарадическаго тока была равна 0,108—0,25 секунды, а число разрядовъ въ секунду было 4—12 разъ. Если же это число поднималось до 20—48 разъ въ секунду, то всякія сокращенія мышцъ прекращались, потому что сенсорныя спинномозговья клѣтки не въ состояніи были пропустить черезъ себя токъ такого быстрого ритма. Клѣтки оказались заторможенными. То же самое видѣлъ *Введенскій*. Въ его опытахъ мышечныя сокращенія прекращались, если число разрядовъ въ секунду превышало 20. *Rutter* пришелъ къ заключенію, что эффектъ раздраженія зависитъ отъ степени послѣдняго. Чѣмъ меньше степень раздраженія, тѣмъ выше и длительнѣе его эффектъ. Слишкомъ сильныя раздраженія могутъ дать болевую реакцію,

но послѣдняя въ такихъ случаяхъ очень коротка. Кромѣ того авторъ нашель, что очень сильныя раздраженія даютъ ту же степень болевого эффекта, какъ и слабыя раздраженія. Согласно Fröhlich'у первыя имѣютъ тормозящее вліяніе на нервную систему, парализуютъ нервное волокно, послѣднее приходитъ въ возбужденіе только тогда, если концентрація и сила тока невелики.

(Степень боли испытываемой нами зависитъ, надо думать, не отъ степени раздраженія *resp.* отъ орудія, причинившаго боль, но отъ количества захваченныхъ этимъ путемъ нервныхъ волоконъ, *resp.* отъ толщины пострадавшаго нерва).

3. Хотя существуютъ перцепторы боли въ кожѣ, но центрипетальное болепроводящее волокно реагируетъ болями и въ случаѣ его раздраженія гдѣ либо по его ходу, по его теченію.

Острая ишемія нерва, нужно думать поэтому, можетъ вызвать боли лишь въ томъ случаѣ, 1) если вызванное ею разстройство жизнедѣятельности нерва протекаетъ безъ нарушенія анатомической цѣлости нервнаго волокна и 2) если оно вызываетъ лишь весьма тонкія и нѣжныя переменны въ послѣднемъ. Это соображеніе стоитъ въ полномъ согласіи и съ тѣмъ обстоятельствомъ, что боль нужно причислить къ классу эмоцій, эмоціи же возникаютъ какъ результатъ оцѣнки нѣжнѣйшихъ и тончайшихъ переменъ въ тѣлѣ.

То же самое заключеніе вытекаетъ изъ мгновеннаго появленія болей при острыхъ ишеміяхъ (случаи Kroh, мои, Schlesinger, Kuttner-Baguch и др.), тогда какъ органическія измѣненія нерва (при хронической ишеміи) требуютъ долгаго времени для своего развитія. То же самое предположеніе о сохраненіи анатомической цѣлости и непрерывности волокна подтверждается скорымъ, моментальнымъ прекращеніемъ ишемическихъ болей, лишь только возстановляется кровообращеніе (случаи мои, Schlesinger, Kroh, Goldscheider'a...) и вообще столь быстрымъ исчезаніемъ болей, каковое время не было бы достаточно для возрожденія анатомически-поврежденнаго нерва.

D. Изъ различныхъ возможностей и механизмовъ гематогенной этиологіи болей нужно принять во вниманіе: 1) накопленіе въ нервѣ химическихъ продуктовъ жизнедѣятельности нерва за время прекращенія циркуляціи; 2) кислородное голоданіе, и 3) колебаніе молекулярнаго равновѣсія въ нервномъ волокнѣ.

Что касается участія химическихъ производныхъ въ механизмѣ боли, то этотъ моментъ очень популяренъ въ

литературѣ боли. Lepander много говоритъ о токсико-химическихъ раздраженіяхъ нервныхъ волоконъ, дающихъ въ результатѣ болевое ощущеніе. Таковой источникъ боли онъ допускаетъ при перитонитахъ, заворотахъ кишечника, прободеніяхъ стѣнки послѣдняго, при слишкомъ большой концентраціи секретовъ и экскретовъ тѣла, переходящихъ физиологическія границы... Maylard упоминаетъ о химическихъ и микробиотическихъ продуктахъ, которые, проникая внутрь нервного волокна, должны раздражать таковое и вызывать боли. Morat считаетъ, что всякое химическое раздраженіе вызываетъ боль. Dumas признаетъ, что боль есть продуктъ химическихъ превращеній въ нервѣ на почвѣ быть можетъ токсиновъ. Согласно Orpenheimer'у боль есть слѣдствіе химическихъ процессовъ въ нервѣ, заходящихъ за границы сопротивляемости послѣдняго. Frey видитъ причину боли въ химическихъ перемѣнахъ въ нервѣ. Förster объясняетъ боли перемѣщеніемъ іоновъ въ базальномъ равновѣсіи и т. д.

Къ сожалѣнію всѣ эти сужденія имѣютъ чисто гипотетическій характеръ и не содержатъ никакихъ ни лабораторныхъ, ни клиническихъ попытокъ доказать ихъ.

Становясь на эту точку зрѣнія, нужно было бы въ нашихъ клиническихъ и экспериментальныхъ случаяхъ допустить наличіе какого либо діатеза (мочекислый діатезъ, діабетъ и т. д.) или какой либо мѣстный воспалительный процессъ вдоль даннаго нерва (абсцессъ, инфекціонное гнѣздо, воспалительная инфильтрація и т. д.). Ни первой, ни второй возможности мы однако не имѣли въ своихъ случаяхъ и не встрѣчали указаній на таковую въ литературѣ...

Что касается мѣстнаго воспалительнаго процесса вдоль извѣстнаго нерва, каковому процессу приписываютъ свойство вызывать кислую реакцію въ своихъ предѣлахъ и по сосѣдству, то здѣсь вторымъ необходимымъ условіемъ, способствующимъ появленію этой реакціи, считается кромѣ мѣстнаго воспаленія еще и общіе застои крови, вслѣдствіе слабости праваго сердца. Ни въ нашихъ клиническихъ случаяхъ, ни въ литературѣ мы не встрѣчали такой комбинаціи условій. О сходствѣ же ишеміи съ воспаленіемъ не можетъ быть и рѣчи. Въ нашихъ экспериментальныхъ случаяхъ совершенно исключается какой либо воспалительный процессъ, такъ какъ животныя брались совершенно здоровыя, раненія производились въ паховой ямкѣ, а матеріаль для микроскопическаго изслѣдованія собирался на лапѣ

Какъ химическій раздражитель могло бы служить случайное измѣненіе базальнаго равновѣсія въ крови, временное нарушеніе равновѣсія между кислотами и щелочами въ послѣдней, — эпизодическое увеличеніе концентраціи водородныхъ іоновъ, а такъ какъ питаніе нерва происходитъ кровью

же путем осмоса, то изменение состава крови, — ее реакции — должно было бы отразиться на химических процессах в нервном волокне. Допуская, напр., такое случайное появление в крови кислотных продуктов, можно было бы ожидать, что базальный коэффициент — RH — изменится, что реакция крови из щелочной станет нейтральной и даже кислой, а в связи с этим в нервном волокне наступит накопление различных шлаков кислой реакции и т. д.

Против подобнаго предположенія говоритъ однако то обстоятельство, что базальное равновѣсіе, концентрація водородныхъ іоновъ — RH — отличается въ живомъ организмѣ чрезвычайной устойчивостью и стараніями живыхъ силъ организма коэффициентъ такового 7,28—7,40 колеблется очень мало въ теченіи жизни животнаго. Правда, въ кровь постоянно поступаютъ большія количества кислыхъ образований (углекислой, молочной, фосфорной и сѣрной кислотъ) изъ окружающихъ тканей, что при застойной гипереміи могло бы считаться важнымъ подтвержденіемъ гипотезы о химическо-токсической причинѣ болѣе въ этомъ случаѣ. Однако же, съ другой стороны, туда же въ кровь просачиваются или тамъ же всегда находятся продукты щелочной реакціи (въ особенности при бѣлковомъ распадѣ), каковыя тотчасъ нейтрализуютъ кислоты. Во-первыхъ, циркулирующія въ крови бѣлковыя тѣла, — въ частности гемоглобинъ — могутъ, смотря по надобности, вступать въ соединеніе съ кислотами (или основаніями) и связывать ихъ. Во-вторыхъ, для поддержанія базальнаго равновѣсія крови природа создала въ крови особые солевые буфера, состоящіе изъ смѣси различныхъ слабыхъ кислотъ съ нѣкоторыми щелочами и ихъ бываетъ достаточно, чтобы поддерживать въ организмѣ слегка щелочную реакцію крови. Наиболее важнымъ буферомъ крови является двууглекислая натріевая соль $\frac{H_2CO_3}{NaHCO_3}$.

Если въ крови появляются излишнія кислотныя производныя, то бикарбонатъ натрія вступаетъ съ ними въ соединеніе. Эти углекислыя соли натрія являются тѣми щелочными резервами, которые главнымъ образомъ поддерживаютъ базальное равновѣсіе на одной и той же высотѣ. Эти буферныя приспособленія крови такъ надежны, что самыя тщательныя излѣдованія крови титрованіемъ (Veschman) у отдѣльныхъ больныхъ при такихъ, напр., страданіяхъ кожи, какъ экзема, себоррея, псориазъ, гдѣ предполагается въ крови избытокъ кислотныхъ шлаковъ, не даютъ ни большихъ цифръ, ни постоянныхъ результатовъ и коэффициентъ RH остается все время 7,28—7,40, т. е. постоянно нормальнымъ. Даже, вливая въ вену большія количества щелочей, нельзя констатировать большихъ колебаній RH .

Отыскивая другія возможности токсическо-химической

етиології болей, нужно принять во вниманіе обмѣнъ веществъ въ самомъ нервномъ волокнѣ и притомъ не въ періодъ предшествовавшей прекращенію циркуляціи, а за время ишеміи, именно съ первыхъ же минутъ послѣдней, такъ какъ боль появляется именно съ первыхъ же моментовъ прекращенія подвоза артеріальной крови.

Въ этомъ отношеніи не нужно однако забывать, что обмѣнъ веществъ въ своемъ нормальномъ масштабѣ можетъ быть только при нормальномъ подвозѣ крови и въ дѣятельномъ состояніи нерва. Только въ такихъ условіяхъ могутъ накопиться шлаки, каковыя, если они не увозятся изъ нерва, остаются тамъ какъ химическій балластъ и притомъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ кислой реакціи.

Съ другой стороны, при дѣйствиіи какого либо раздражителя обмѣнъ веществъ ускоряется, но получающійся при этомъ продуктъ отброса сохраняетъ свою прежнюю химическую структуру (Putter), увеличиваясь лишь количественно и вовсе не мѣняясь качественно. И это большое количество такого угнетаетъ, тормозитъ и парализуетъ проводимость нерва. Боль поэтому угасаетъ.

Въ состояніи покоя нервное волокно имѣетъ щелочную реакцію; послѣ тетаническаго раздраженія въ немъ появляется съ трудомъ удаляемая молочная кислота, которая тормозитъ функцію нервного волокна (а слѣдовательно и проведеніе боли). Эти кислоты происходятъ изъ сахара, котораго работающій нервъ потребляетъ въ 5 разъ больше, чѣмъ таковой въ покой. Если нервъ раздражать долгое время электрическимъ токомъ, то въ немъ появляются свободныя жировыя кислоты, парализующія проводимость нерва; если раздраженіе влечетъ за собою перерожденіе нерва, то расщепляется лецитинъ миелиноваго влагалища, при этомъ освобождается фосфоръ, въ крови появляется холинъ, нервное же волокно теряетъ способность проводимости и вообще всякую функцію. Значитъ, продукты жизнедѣятельности нервного волокна, въ случаѣ ихъ накопленія въ нервѣ, останавливая его функцію, тормозятъ такимъ образомъ и болепроводящую его способность, а болевые ощущенія должны благодаря этому прекратиться (Putter, Höber, Mackhat).

Съ другой стороны въ нервѣ въ состояніи покоя, — а ишемическая конечность находится именно въ покой, — параличъ — падаетъ обмѣнъ веществъ до минимальныхъ степеней, и прежде всего прекращается азотистый обмѣнъ.

Появленіе въ нервномъ волокнѣ какого либо химическаго агента, хотя бы и аутохтоннаго происхожденія и накопленіе его въ нервѣ, если бы таковое могло имѣть мѣсто при ишеміи, не создаетъ такимъ образомъ этиологическаго

момента боли; напротивъ, даже боль, развившаяся въ конечности до появленія ишеміи, должна прекратиться, такъ какъ накопленіе шлаковъ въ нервѣ — отъ его же жизнедѣятельности — тормозитъ всякую и центрипетальную и центрифугальную функцію нервныхъ волоконъ, а въ томъ числѣ и болевья воспріятія.

Весьма важнымъ аргументомъ противъ возможности длительныхъ ишемическихъ болей на почвѣ химическихъ процессовъ въ нервномъ волокнѣ или вслѣдствіе поступленія химическихъ раздражителей извнѣ внутрь волокна является — согласно Putler'a — ненадежность въ этомъ отношеніи и кислотъ и оснований. Уже въ моментъ приложенія ихъ къ нервному волокну эти реактивы могутъ утрачивать свою активность или вслѣдствіе оксидаци, нейтрализаціи или вслѣдствіе парнаго сцѣпленія, благодаря чему эти агенты быстро истощаются и не имѣютъ длительного эффекта; ишемическія же боли отличаются своей длительностью и равномерностью.

Въ частности щелочныя земли *Ca*, *Ba*, *Mg* понижаютъ возбудимость нервного волокна. Чистыя щелочи — *Na*, *K* — сначала повышаютъ возбудимость нерва, затѣмъ угнетаютъ его. Катіоны *R. K.* разрыхляютъ, согласно Höber Maskhut'a, осевой цилиндръ и дѣлаютъ его неспособнымъ функционировать. *Na* и *Li* относятся къ осевому цилиндру индифферентно *CaCl-BaCl* тормозятъ функціи волокна. Rhodan-Natrium, Natrium sulphat, Natrium titrat, Natrium tartrat, — acetat, — citrat разрушаютъ нервное волокно. Natrium lactat — вызываетъ свертываніе міелина. Слѣдовательно, химически дѣйствующие агенты, угнетая функціи нерва, прекращаютъ его способность проводить боль.

Всѣ эти соображенія приводятъ насъ къ заключенію, что 1) въ нашихъ случаяхъ не могло быть мѣстнаго измѣненія *RH*; 2) что всякіе химизмы, дѣйствующие на нервы, должны были бы только прекратить боль, уничтожая проводимость его; 3) наконецъ химическія измѣненія въ нервѣ должны были бы сказаться на окраскѣ его, а между тѣмъ тонъ таковой и всѣ другія качества ея были тѣ же, что и на контрольной ногѣ.

Такъ какъ далѣе съ прекращеніемъ циркуляціи тотчасъ же прекращается и обмѣнъ веществъ, то трудно ожидать въ нервѣ накопленія шлаковъ уже въ первый моментъ ишеміи, когда именно и начинаются боли. Невозможно поэтому такъ выья боли объяснять внезапнымъ появленіемъ въ нервѣ какихъ-то химическихъ агентовъ въ первые же моменты ишеміи. Тѣмъ менѣе таковыми же можно объяснить боли въ дальнѣйшемъ, именно потому, что таковыя накопленія тор-

мозятъ центрипетальную функцію волокна, а слѣдовательно проведеніе боли.

Весьма интересно выяснитъ далѣе, какъ могло вліять на нервъ кислородное голоданіе и притомъ именно въ первые же часы ишеміи, т. е. съ самаго начала болей.

Въ этомъ отношеніи должно быть принято во вниманіе то обстоятельство, что кислородное голоданіе нервного волокна должно повестъ за собою накопленіе въ немъ продуктовъ, требующихъ оксидации, т. е. продуктовъ его жизнедѣятельности. Съ другой стороны кислородъ необходимъ нерву, какъ средство активирующее его функціи и безъ кислорода жизнедѣятельность нервного волокна падаетъ. Эти соображенія имѣютъ тѣмъ большее значеніе, что работами Winterstein'a и другихъ авторовъ установлена очень богатая кровеносная сѣтъ, питающая периферическую нервную систему, правильное функціонированіе которой необходимо для нормальныхъ отправленій послѣдней. Согласно изслѣдованіямъ, Brown-Sequard, S. Meyer, Fröhlich и др. нервъ млекопитающихъ теряетъ свою и возбудимость и проводимость уже черезъ 15 минутъ послѣ наложенія лигатуры на артерію, питающую данный нервъ. Способность периферическаго нерва отправлять свои функціи зависитъ, согласно Bayer'у, всецѣло отъ кислорода крови. Отсепарованный нервъ лягушки сохраняетъ долгое время свою возбудимость и проводимость только потому, что даже, будучи совершенно отдѣленъ отъ своихъ питающихъ сосудовъ, онъ поглощаетъ нужный для него кислородъ непосредственно изъ окружающей атмосферы; нервы млекопитающихъ не обладаютъ такою способностью.

Чрезвычайно важно въ выясненіи механизма гематогенной боли то обстоятельство, что дистальные части нерва — его вѣтки, — гдѣ именно первично и появляется боль, потребляютъ кислорода менѣе, чѣмъ проксимальные отдѣлы герп. стволъ нерва. Это заключеніе явствуетъ изъ того обстоятельства, что количество углекислоты, выдѣляемое дистальными вѣтками нерва въ два раза менѣе, чѣмъ таковое толстыхъ стволовъ. Это даетъ возможность конечнымъ частямъ нерва легче перенести прекращеніе циркуляціи и во всякомъ случаѣ этотъ недостатокъ кислорода можетъ пройти въ первые часы ишеміи почти совершенно незамѣченнымъ. Происходитъ это еще и потому особенно легко, что перерывъ кровообращенія влечетъ за собою полный покой нерва.

Fröhlich убѣдился въ томъ, что измѣненіе нѣкоторыхъ жизненныхъ условій сопровождается уменьшеніемъ обмѣна веществъ, прекращеніемъ всѣхъ функцій и всѣхъ жизнен-

ныхъ процессовъ въ нервѣ (Lähmbarkeit des Nerven). Къ такимъ условіямъ принадлежитъ кислородное голоданіе (Erstickung) вслѣдствіе прекращенія кровообращенія. (Накопленіе углекислоты при застойной гипереміи, механическое сжатіе нерва, паденіе внѣшней температуры до 0 и ниже, дѣйствуютъ аналогичнымъ образомъ).

Изслѣдованія Fröhlich'a подтверждаются таковыми же Gross'a, который нашель, что недостатокъ кислорода дѣйствуетъ на периферическій нервъ парализующимъ образомъ подобно сильному наркотику. Возбудимость и проводимость нервнаго волокна и вообще всякой жизнедѣятельности его прекращается при кислородномъ голоданіи.

Отсюда слѣдуетъ, что недостатокъ кислорода не возбуждаетъ болей, но прекращаетъ таковыя, если онѣ даже возникаютъ по какому либо другому поводу.

Все же кислородное голоданіе должно нарушить обмѣнъ веществъ вслѣдствіе отсутствія оксидациі. Однако и въ этомъ отношеніи природа позаботилась устранить возможные недочеты въ первые часы прекратившейся циркуляціи. Согласно изслѣдованіямъ Verwohn'a, Getard'a, Meyerdorf'a и др. нервное волокно содержитъ тайные запасы кислорода, совершенно достаточные для поддержанія химическихъ процессовъ сгорания матеріи въ теченіе извѣстнаго времени въ случаѣ ишеміи. Такъ какъ кромѣ того застаивающаяся въ венахъ кровь (при эмболии, раненіи артеріи) — вслѣдствіе отсутствія vis à tergo — также содержитъ нѣкоторое количество кислорода. то недостатокъ такового первое время ишеміи нервное волокно, находящееся въ покоѣ, не будетъ испытывать. Въ виду этого нервъ при ишеміи первое время можетъ совершенно свободно существовать анатомически цѣлымъ благодаря этимъ запасамъ кислорода. Лабораторныя измѣренія потребленія кислорода нервомъ, пережившимъ ишемию, показываютъ, что подобный нервъ поглощаетъ первые часы больше кислорода, чѣмъ при нормѣ, т. е. больше чѣмъ нужно для его существованія и функціи и этимъ излишкомъ поглощенія пополняетъ израсходованные запасы. Авторы называютъ этотъ излишекъ поглощенія кислороднымъ долгомъ (O. Schuld).

На основаніи этихъ соображеній нужно считать, что кислородное голоданіе ни прямо, ни косвенно не могло быть причиной ишемическихъ болей.

Что касается колебанія молекулярнаго равновѣсія въ нервномъ волокну, какъ одной изъ причинъ болей при разстройствѣ кровообращенія, то здѣсь именно нужно принять во вниманіе, что нервное волокно состоитъ изъ отдѣльныхъ

элементарныхъ тѣлецъ — моллекулъ — различныхъ по своей формѣ и химическому составу — для міелиноваго влагалища и особыхъ для осевого цилиндра.

Новѣйшія изслѣдованія показали, что міелиновое влагалище одѣто швановскою оболочкою не только на своей внѣшней поверхности, но также и по внутренней (Ettisch-Jochim), вслѣдствіе чего сегментъ міелиноваго покрова оказывается запертымъ внутри тѣла швановской клѣтки и изолированнымъ какъ извнѣ, такъ и со стороны осевого цилиндра швановскою же оболочкою. Въ свою очередь и осевой цилиндръ имѣетъ свою оболочку — аксолемму, — вслѣдствіе чего содержимое его отдѣлено двойною мембраною отъ міелиноваго покрова.

Въ міелиновомъ влагалищѣ Lehman-Gotlib-Spiegel признаютъ кристаллическую структуру его содержимаго быть можетъ въ какой либо жидкой смѣси (Flüssige Mischkristall). Въ общемъ эти авторы развиваютъ взгляды Klebs-Kühne (1868) Ehrenburg'a и Nägeli (1849), согласно которымъ организованныя субстанціи состоятъ изъ кристалловидныхъ моллекулярныхъ агрегатовъ (Micellen). Двойное преломленіе міелиновыхъ волоконъ они объясняютъ включеніемъ мелкихъ кристаллическихъ радіарно-уложенныхъ частицъ. Ettisch-Jochim помощью ультра-микроскопіи убѣдились, что эти частицы въ свѣжѣмъ нервѣ имѣютъ различную форму: Cholesterin-sol представляются плоскими; Lecithin-sol — Glycerophosphatiden — округлы; Керhalin — отличается своею внѣшностью и отъ тѣхъ и отъ другихъ. Согласно этимъ авторамъ міелинъ состоитъ изъ перечисленныхъ и другихъ химическихъ субстанцій, которыя, находясь въ амикроническомъ состояніи, составляютъ опредѣленный комплексъ (Protagon?), *распадающийся на свои очень рыхло связанные компоненты, если нормальная комбинація іоновъ въ соствѣствѣ даннаго нервнаго волокна измѣняется.*

Трактуемая мельчайшія элементарныя частицы міелиноваго влагалища — его моллекулы — расположены своею длинною осью по радіусу волокна, т. е. перпендикулярно къ осевому цилиндру и находятся въ постоянномъ ротаторномъ движеніи (Brown'sche Bewegung), каковое согласно Einstein'a достигаетъ 100 оборотовъ въ секунду, въ зависимости отъ плотности той среды, въ которой моллекулы взвѣшены и ширины пространствъ, отдѣляющихъ ихъ одно отъ другого. Это движеніе моллекулъ въ нервномъ волокну видѣли и мы вмѣстѣ съ профессоромъ физики Косоноговымъ въ 1914 году.

Осевой цилиндръ состоитъ изъ тончайшихъ фибриллъ, изолированныхъ другъ отъ друга жидкою средою, въ которой онѣ взвѣшены. Съ этими фибриллами механически связана

такъ называемая фибриллярная кислота, которая облегчаетъ щелочнымъ краскамъ импрегнировать осевой цилиндръ. При излѣдованіи подъ ультра-микроскопомъ (Peturfi) тончайшихъ неирофибриллъ въ нихъ открываются тончайшія палочкообразныя элементарныя тѣльца, которыя находятся въ постоянномъ вращательномъ движеніи и ориентированы своею длиною осью по длинѣ нервнаго волокна. Промежутки, отдѣляющіе эти молекулы другъ отъ друга — такъ называемыя интермицеллярныя пространства — непостоянны, подвергаются большимъ колебаніямъ; малѣйшія измѣненія въ коллоидальномъ составѣ молекулъ достаточны, чтобы расширить или сѣузить интермицеллярныя пространства, а въ то же время измѣнить ритмъ движенія молекулъ. Жидкость, наполняющая интермицеллярныя пространства и находящаяся внутри осевого цилиндра, повидимому не связана химически съ форменными элементами этого послѣдняго, весьма подвижна и участвуетъ во всѣхъ осмотическихъ процессахъ.

Трактуемыя молекулярныя частицы міелиноваго влагалища и осевого цилиндра, находясь въ постоянномъ движеніи, развиваютъ опредѣленный динамическій эффектъ и на поверхности нервнаго волокна и внутри его (*Oberflächenspannung und Binnendruckkraft*), каковыя являются условіемъ и признакомъ жизни волокна, а если таковое нарушается въ томъ или другомъ смыслѣ, если это движеніе нарушается, то наступаютъ различныя разстройства функций нерва. Ебнер вмѣстѣ съ Brewster'омъ говорятъ о силѣ движенія или притяженія этихъ элементарныхъ тѣлецъ (*Zug-Druckwirkung*), каковыя развиваются и на поверхности волокна и внутри такового, дѣйствуя и въ аксіальномъ, и радіарномъ, и тангенціальномъ направленіи. Spiegel считаетъ, что *Zug-* и *Druckkraft* молекулъ міелиноваго влагалища особенно сильны въ радіарномъ направленіи, т. е. перпендикулярно къ оси нервнаго волокна. Двойное преломленіе міелиноваго влагалища объясняется по Spiegel'ю дѣйствіемъ давящей силы элементарныхъ частицъ. При набуханіи, т. е. при прониканіи внутрь волокна жидкости, которая тамъ болѣе или менѣе фиксируется, наступаетъ измѣненіе не только объема отдѣльныхъ молекулъ, но также и діаметра всего волокна и его поверхности, а вмѣстѣ съ тѣмъ измѣняется *Druck-* и *Zugkraft* упомянутыхъ элементарныхъ частицъ. Точно такъ же мѣняются эти силы при высыханіи волокна вслѣдствіе недостаточнаго прониканія жидкости внутрь волокна.

Быть можетъ расположеніе означенныхъ молекулъ, ритмъ ихъ вращенія и динамика различны для каждаго изъ видовъ нервныхъ волоконъ, отличая напр. моторныя волокна отъ центрипетальныхъ, каковыя для тактильныхъ ощущеній отъ волоконъ, проводящихъ тепло, давленіе, холодъ, боль.

Въ этомъ отношеніи не было сдѣлано никакихъ дифференціальныхъ изслѣдованій.

То или другое состояніе моллекулъ, ихъ движеніе и динамика зависятъ отъ условій осмоза. Согласно изслѣдованіямъ Spiegel'a нервное волокно состоитъ изъ двухъ несмѣшивающихся жидкостей, причемъ измѣненіе концентраціи одной изъ нихъ отражается на состояніи другой. Въ основѣ же этихъ измѣненій концентраціи жидкостей, наполняющихъ осевой цилиндръ и мѣлиновое влагалище, лежитъ колебаніе осмоза.

Говоря объ осмотической циркуляціи въ нервѣ, нужно имѣть въ виду, что нервъ содержитъ нѣсколько оболочекъ, представляющихъ собою (Höber-Overton) большое сопротивление растворамъ въ ихъ стремленіи проникнуть внутрь нервного волокна.

Кромѣ внѣшнихъ оболочекъ — еріперевіумъ, регіперевіумъ, ендонеревіумъ, швановскаго влагалища и аксолеммы — авторы говорятъ еще о Plasmahaut, — подразумѣвая подъ этимъ жидкость, заполняющую интрамицеллярныя пространства между отдѣльными элементарными моллекулярными частицами. Однако же этихъ плазматическихъ оболочекъ или средъ не одна, а двѣ, а именно: одна таковая заполняетъ интермицеллярныя пространства осевого цилиндра, другая — заликаетъ всѣ такія же пустоты въ мѣлиновомъ влагалищѣ, обволакивая каждую моллекулу особымъ жидкимъ составомъ.

Сопоставляя эти данныя въ трактуемомъ вопросѣ, т. е. по поводу состоянія моллекулярнаго равновѣсія при ишеміи, — нужно имѣть въ виду, что измѣненія количества плазмы, а также ея концентраціи могутъ произойти въ нервномъ волоконѣ, какъ непосредственное слѣдствіе измѣненія ширины просвѣта кровеносныхъ сосудовъ *gesp.* въ зависимости отъ количества крови ея, концентраціи ея и осмотической циркуляціи.

Колебаніе въ количествѣ, составѣ и концентраціи плазмы, вмѣстѣ съ мѣняющейся плотностью среды, взвѣшивающей моллекулы, и колебаніемъ ширины интермицеллярныхъ пространствъ, должно отразиться на равновѣсіи моллекулъ, ихъ ритмѣ вращенія, на *Obefrlächenspannung*, *Druck-Zug-Binnen-Kraft*, но однако безъ нарушенія анатомической цѣлости и непрерывности нервного волокна.

Что касается внѣшнихъ оболочекъ нервного волокна — *Eri-peri-endoneurium* и швановскаго влагалища, — то онѣ составляютъ нѣкоторымъ образомъ полупроницаемую мембрану, проникая черезъ которую растворы, участвующіе въ осмотическомъ питаніи нерва, развиваютъ большую энергію.

О степени и высотѣ возникающихъ при этомъ динамическихъ эффектовъ можно судить по опытамъ *in vitro*. Если, напр. въ сосудѣ, раздѣленный на двѣ половины полупроницаемой мембраной, налить въ одну половину концентрированный растворъ амміака, а въ другую — чистую воду, то наступитъ между этими жидкостями осмотическая циркуляція, причеиъ объемъ одной жидкости будетъ расти, а другой падать, а для того, чтобы задержать повышение нарастающей жидкости, нужно употребить противодействие съ тяжестью, превышающей многие миллионы килограммовъ.

Развивающіяся въ нервномъ волокнѣ колебанія концентрацій жидкостей, составляющихъ плазму миелиноваго влагалища и осевого цилиндра, возникающія одновременно съ этимъ большія вспышки динамическихъ эффектовъ не ведутъ за собою однако разрушенія нервного волокна и могутъ быть разсматриваемы какъ весьма нѣжныя и тонкія нарушенія равновѣсія молекулъ миелиноваго влагалища и осевого цилиндра.

Мы должны именно имѣть въ этомъ отношеніи въ виду, что плазма и осевого цилиндра и миелина суть двѣ не смѣшивающіяся между собою жидкости, находящіяся другъ къ другу въ соподчиненіи, благодаря своему физическому состоянію (*Zugiosis*), именно благодаря тому, что онѣ раздѣлены полупроницаемой перегородкой. Это соподчиненіе выражается тѣмъ, что всякое измѣненіе поверхностнаго напряженія одной среды ведетъ за собою измѣненіе взаимнаго притяженія поверхностныхъ молекулъ сосѣдней жидкости, а вмѣстѣ съ тѣмъ создается измѣненіе концентраціи матерій, скопившихся въ поверхностныхъ слояхъ этой второй жидкости. Вслѣдствіе этого наступаетъ измѣненіе силъ, которыми молекулы съ поверхности жидкой среды *A* увлекаются къ центру этой послѣдней, а вслѣдствіе этого мѣняется сила притяженія этихъ поверхностныхъ частицъ среды *A* въ отношеніи къ прилегающимъ поверхностнымъ частицамъ въ средѣ *B*. Если напр. жидкость *A*, будучи отдѣлена полупроницаемой мембраной отъ жидкости *B*, растворитъ въ себѣ какое либо тѣло *C* или утратитъ таковое, что можетъ случиться при колебаніяхъ циркуляціи крови, то мѣняется плотность *A*, а въ то же время сила напряженія поверхности въ *A* (*Oberflächenspannungskraft*), а это тотчасъ же отразится на силѣ напряженія поверхности среды *B*, ибо двѣ граничащія, но не смѣшивающіяся между собою жидкости, связаны другъ съ другомъ своимъ физическимъ состояніемъ. Вслѣдствіе этого измѣненіе силъ поверхностнаго натяженія въ средѣ *A* влечетъ за собою измѣненіе таковой же силы въ средѣ *B*, а измѣненіе концентраціи матеріи на поверхности этой послѣдней отражается на таковой концентраціи среды *A*.

Это измѣненіе наступаетъ именно потому, что между *A*

и *B* расположена мембрана, толщина которой не превышает радиуса дѣйствія молекулярнаго притяженія.

Связь двухъ раздѣленныхъ полупроницаемой перегородкой и потому не смѣшивающихся рядомъ лежащихъ жидкостей называется *Zugiosis*; среды, которыя такимъ образомъ связаны, носятъ названіе *Zugoten*, а мембрана, ихъ раздѣляющая, называется *Zugont*.

Если мѣняется напряженіе поверхности миелиноваго влагалища, то измѣняется таковое же и въ плазмѣ осевого цилиндра и это явленіе наступаетъ неукоснительно и съ опредѣленнымъ постоянствомъ, благодаря наличію пограничной мембраны.

Взаимное равновѣсіе *Zugoten*, опредѣленный ритмъ осмоса и, въ особенности, опредѣленная концентрація матерій въ нервномъ волокнѣ составляютъ непремѣнное условіе правильной нормальной функціи послѣдняго.

Измѣненіе условій осмоса, измѣненіе концентраціи кристаллической смѣси въ нервѣ, безъ разрушенія однако цѣлости миелина или осевого цилиндра, составили бы однако нѣжную тончайшую перемѣну въ равновѣсіи молекулъ и динамикѣ этихъ послѣднихъ, каковыя должны быть доведены до нашего сознанія. Согласно изслѣдованіямъ Nernst'a механизмъ возбужденія нерва состоитъ въ измѣненіи концентраціи матерій на граничащихъ поверхностяхъ его составныхъ частей. Putter, на основаніи своихъ изслѣдованій, пришелъ къ заключенію, что всякое возбужденіе живой системы вызывается измѣненіями концентраціи, раздражающей (resp. раздражаемой) матеріи. Раздражающимъ образомъ дѣйствуетъ не качественное измѣненіе матеріи въ живой системѣ, а количественное состояніе ихъ (т. е. плотность, тяжесть, распредѣленіе).

Каково бы ни было по своему химическому составу вещество, раздражающее периферическій чувствующій нервъ, — эффектъ его дѣйствія зависитъ отъ производимаго имъ измѣненія концентраціи матеріи въ чувствующемъ элементѣ и эта новая концентрація становится раздражающимъ моментомъ. Очевидно при всѣхъ этихъ измѣненіяхъ концентраціи въ нервномъ волокнѣ наступаютъ сдвиганіе и расхожденіе молекулъ, ихъ перемѣщенія и, во всякомъ случаѣ, мѣняется равновѣсіе ихъ, которое было до начала измѣненія концентраціи въ прилегающей осмотической средѣ, resp. плазмѣ крови.

Переходя отъ гуморальнаго механизма возбужденія къ электрическому, видимъ то же самое. Электрической токъ возбуждаетъ нервъ тѣмъ же измѣненіемъ концентраціи матеріи на мѣстѣ приложенія электрода, причѣмъ дѣйствіе тока зависитъ главнымъ образомъ отъ перемѣны концентраціи. Увеличеніе послѣдней тормозитъ нервное волокно; разрѣженіе ея возбуждаетъ послѣднее.

Возвращаясь къ нашей основной темѣ, — можемъ ду-

мать, что остро развившаяся ишемия должна была в короткое время изменить молекулярное равновесие в нервном волокне. Об этом можно было судить, уже сравнивая ультрамикроскопические картины движения молекул контрольной ноги и экспериментированной. Оно было изменено на этой последней стороне. Разстройство осмоса нужно считать в этом случае главной причиной, повлиявшей на ритм вращения молекул этого последнего, так как быстрота движения зависит от ширины интермицеллярных пространств, а эта последняя — от количества наполняющей их плазмы, составляющей продукт осмоса.

Химически — плазма при этом может не меняться, анатомически нервное волокно при этом сохраняет первое время свою непрерывность и цельность, однако же меняется концентрация материй его составляющих, меняется равновесие молекул, составляющих его содержимое и это важное, тонкое перемещение составных частиц нерва согласно данным — Nernst'a, Putter'a и др. доходит до нашего сознания. И, если сознание при этом воспринимает боль, то значит причина ишемических болей лежит в нарушении молекулярного равновесия в нервном волокне.

Процесс, развивающийся при этом, имеет свои стадии, следующие друг за другом с быстротой (может быть) долей секунды. Эмболь, запирающий просвет артерии, прекращает приток крови; тотчас же уменьшается *resp.* исчезает плазма последней, которая дает материал для осмотической циркуляции. Лишь только изменилась вследствие этого концентрация ионов вне волокна, внутри его разрыхляется протагон, тотчас же в последнем наступают изменения сцепления молекул, — ритма вращения и напряжения сил — *Oberflächenspannung*, *Binnen - zug - druck - kraft* — молекулярные частицы получают импульс к новому размещению и притом не только в миелиновом влагалище, но также и в осевом цилиндре. Меняется ритм их вращения и ширина интермицеллярных пространств. С наступлением ишемии меняется концентрация ионов в плазме, покрывающей швановское влагалище. *Protogon*, приходя в рыхлое состояние, распадается на свои частицы: *cholesterin*, *kerphalin*, *lecithin*, которые получают новый ритм движения, создавая новые динамические возможности, новые степени напряжения и притом по закону *Zigysis* — соподчинения двух жидкостей, стремящихся образовать одну смесь, но вследствие существования изолирующих перегородок, не могущих придти в ближайшее соприкосновение и смешение. Все эти важнейшие и тончайшие механизмы не уничтожают однако ана-

томическую цѣлость и непрерывность нервнаго волокна, но наступающая при этомъ новая концентрація молекулъ, потеря предшествующаго равновѣсія ихъ доходить до сознанія и тамъ воспринимается какъ ишемическая боль.

Въ пользу того, что измѣненіе концентраціи играетъ подобную роль въ механизмѣ боли, безъ нарушенія анатомической цѣлости и безъ извращенія химическаго состава нервнаго волокна, говорятъ разнообразныя клиническія наблюденія. Вызывая, напр., сильное охлажденіе нерва, можно вызвать боль. Что при этомъ жизнѣдѣтельность нерва страдаетъ, говоритъ то, что наступаетъ разстройство моторной сферы, утрата чувствительности и электрической возбудимости въ предѣлахъ даннаго нерва. Въ пользу того однако, что нервъ при этомъ все же не теряетъ своей цѣлости и не мѣняется химически видно изъ того, что боль проходитъ и всѣ функціи нерва возстанавливаются лишь только охлажденіе прекратится. Какъ дѣйствуетъ въ этомъ случаѣ охлажденіе? — Уплотняя охлаждаемую ткань, увеличивая концентрацію матерій, составляющихъ нервное волокно.

Можно вызвать боль повышенной температурою, съ прекращеніемъ которой боль проходитъ. Такъ какъ всѣ функціи нерва при этомъ приходятъ тотчасъ же въ норму, то, очевидно, что химически и анатомически нервъ остался неизмѣненнымъ, тепло же постольку является причиной боли, насколько оно, уменьшая плотность ткани, мѣняетъ концентрацію *Zugoten*.

Вмѣстѣ съ профессоромъ Косоноговымъ мы начали изслѣдованія дѣйствія холода на движеніе молекулъ нервнаго волокна въ камерѣ подъ ультрамикроскопомъ^{*)}. Охлаждая стѣнки камеры во время микроскопированія, мы могли убѣдиться, что движеніе молекулъ мѣняло свой ритмъ, каковое обстоятельство возможно было объяснить лишь измѣненіемъ концентраціи коллоидовъ подъ вліяніемъ низкой температуры.

Въ пользу того, что концентрація матеріи играетъ существенную роль въ механизмѣ боли, можно привести — какъ доказательство — дѣйствіе тѣхъ же физическихъ факторовъ — тепла и холода при существующихъ боляхъ. Примѣняя тепло или холодъ къ болящему мѣсту, можемъ лишь дѣйствовать на концентрацію составныхъ частей нерва. Ни анатомическая структура нерва, ни его химическая природа при этомъ не мѣняется, но боль успокаивается. Мысль о

^{*)} Профессоръ физики Кіевскаго Университета, изучая коллоиды подъ ультрамикроскопомъ, старался усовершенствовать этотъ инструментъ. Идя навстрѣчу моимъ цѣлямъ, онъ устроилъ особую камеру для изслѣдованія строенія нервныхъ волоконъ. Примѣняемые при этомъ, реактивы онъ держалъ въ полной тайнѣ.

значеніи концентраціи матеріи въ механизмѣ ишемической боли находятъ свое подтвержденіе въ дѣйствиі физиологическаго раствора соли, впрыснутой въ толщу, напр., сѣдалищнаго нерва при *ischias*. Наступающее при этомъ успокоеніе болѣе обязано имбибиціи больнаго нерва физиологическимъ растворомъ соли; послѣдній, не содержа ничего наркотическаго, можетъ лишь измѣнить концентрацію матеріи, которая до впрыскиванія давала о себѣ знать нервнымъ центрамъ феноменомъ боли. Увеличеніе *Plasmahaut* повлекло за собою измѣненіе концентраціи матеріи, — измѣненіе вращенія моллекулъ и ихъ динамики и это прекратило боли.

Тоже самое заключеніе вытекаетъ изъ пониженія чувствительности тканей, находящихся въ отекѣ, изъ дѣйствиі массажа болящей части, изъ болеутоляющаго дѣйствиі гальваническаго тока и т. д. Всюду при этомъ мѣняется концентрація матеріи, мѣняется моллекулярное равновѣсіе. Тоже самое заключеніе слѣдуетъ и изъ дѣйствиі средствъ примѣняемыхъ для мѣстной анестезіи. Послѣднія не убиваютъ нервъ, не разрушаютъ его и дѣйствуютъ лишь нѣсколькихъ часовъ, послѣ чего нервное волокно совершенно возстановляется.

Въ своихъ опытахъ по этому поводу мы съ профессоромъ Косоноговымъ поступали такъ. Установивъ приблизительно ритмъ колебанія моллекулъ въ ультрамикроскопическомъ полѣ, мы подливали въ камеру раствора *Novocain* или *Alipin*, различной концентраціи и находили уменьшеніе ритма движенія моллекулъ. Этимъ измѣненіемъ ритма движенія моллекулъ — измѣненіемъ концентраціи матеріи — мы хотѣли объяснить анестезирующее дѣйствиіе *Novocain*'а и *Alipin*'а.

Въ настоящее время новѣйшими работами *Spiegel*, *Niclaux*, *Traube* и др. установлено, что липоиды міелиноваго влагалища растворяютъ въ себѣ употребляемые съ лекарственною цѣлью наркотики, а вслѣдствіи этого мѣняется концентрація матеріи нервнаго волокна, внутренняя моллекулярная динамика такового и самая окраска.

Подъ вліяніемъ напр. *Chloral-hydrat*'а временно исчезаетъ двойное преломленіе міелиноваго влагалища, а такъ какъ это послѣднее зависитъ отъ радиарной оріентаціи моллекулъ въ міелинѣ, то значитъ въ размѣщеніи этихъ послѣднихъ или въ механизмѣ ихъ вращенія наступаютъ подъ вліяніемъ *Chloral-hydrata* какія то временныя перемѣны.

Вмѣстѣ съ освобожденіемъ организма отъ хлораль гидрата двойное преломленіе міелина вновь возстановливается. Такое быстрое возстановленіе двойного преломленія указываетъ на то, что наркотики не химически связаны съ міелиномъ, но лишь проникаютъ въ его сосѣдство. Измѣненіе двой-

ного преломленія есть оптическій знакъ того, что радіарное давленіе моллекулярныхъ частиць (*radiäre Druckkraft*), временно измѣняется по закону *Zygiosis*.

Въ пользу того, что болеутоляющее дѣйствіе извѣстныхъ химическихъ веществъ связано съ тѣмъ или другимъ состояніемъ моллекулярнаго равновѣсія въ нервномъ волокнѣ говорятъ наблюденія надъ дѣйствіемъ хлористаго или бромистаго кальція, каковыя, впрыснутые интравенозно успокаиваютъ боли. Наблюденіе подъ ультрамикроскопомъ надъ дѣйствіемъ этихъ солей на моллекулы показываетъ, что таковыя въ растворахъ кальціевыхъ солей уменьшаются въ объемѣ, сжимаются, а вмѣстѣ съ тѣмъ расширяются интермицеллярныя пространства и мѣняется ритмъ вращенія элементарныхъ частиць. Замѣна раствора кальція другими растворами напр. чистыхъ щелочей, — тотчасъ же возстановляетъ ритмъ вращенія и всѣ прежнія свойства моллекулъ (*Косоноговъ-Лапинскій, Putter, Etisch-Iochim, Höber-Makhut*).

Traube, на основаніи своихъ изслѣдованій, находитъ, что наркотики уменьшаютъ силу натяженія поверхности (*Oberflächenstraffung*), взаимнаго давленія (*Rinnen-zug-druck-kraft*) и притяженія моллекулъ въ толщѣ міелиноваго влагалища. Уменьшеніе давленія происходитъ, по мнѣнію этого автора, измѣненіемъ динамики лецитиновыхъ моллекулъ (*Oberflächenstraffung der Glycerophosphatiden*). Это измѣненіе физическихъ особенностей міелиноваго влагалища отражается немедленно, по мнѣнію *Traube*, на таковыхъ же свойствахъ осевого цилиндра, — его аксоплазмы. И это новое перемѣщеніе моллекулъ — возстановленіе ихъ равновѣсія — прекращаетъ болевое воспріятіе.

Höber, Lille, Winterstein объясняютъ дѣйствіе анестезирующихъ средствъ уменьшеніемъ проходимости плазмы (*Plasmahaut*) именно вслѣдствіе увеличенія объема липоидовъ, захватившихъ внутрь себя анестезирующія вещества. Но, если лецитиновыя частицы подъ вліяніемъ наркотическаго средства увеличиваютъ свою поверхность и объемъ, то это уменьшаетъ интермицеллярныя пространства, тормозитъ быстроту движенія моллекулъ, а съ другой стороны увеличивается концентрація матеріи нервнаго волокна. Съ другой стороны однако одновременно съ измѣненіемъ ритма движенія моллекулъ уменьшаются или совершенно исчезаютъ боли, вслѣдствіе вѣроятнаго возстановленія моллекулярнаго равновѣсія, царившаго въ волокнѣ до начала болей, т. е. до потери этого равновѣсія. Значитъ разстройство, измѣненіе этого послѣдняго, измѣненіе концентраціи матеріи нерва воспринимается сознаниемъ какъ боль.

Анестезирующее дѣйствіе извѣстныхъ химическихъ средствъ состоитъ кромѣ того въ уменьшеніи проводимости волокна вслѣдствіе измѣненія физическихъ свойствъ міелина. Извѣстно вѣдь, что нормальное состояніе міелиноваго влагалища является непремѣннымъ условіемъ проводимости вдоль волокна (Fortplanzungsgeschwindigkeit). Вотъ почему растворяя алкоголемъ міелинъ достигается длительное успокоеніе болей.

Анестезирующія вещества, растворяющіяся въ липоидахъ міелина или растворяя сами этотъ (Alkohol), влекутъ за собой измѣненіе молекулярнаго равновѣсія осевого цилиндра, такъ какъ содержимое міелиноваго влагалища и осевого цилиндра находятся въ соподчиненіи (Zygiosis).

З а к л ю ч е н і е.

Боль принадлежитъ къ классу эмоцій и возникаетъ, какъ оцѣнка нашими центрами тончайшихъ, нѣжнѣйшихъ пере-мѣнъ въ нашемъ тѣлѣ resp. въ нашей нервной системѣ.

Боль — подвижна. Она эволюционируетъ у отдѣльныхъ индивидуумовъ и расъ, представляетъ колебанія въ смыслѣ тонкости воспріятія.

Боль — сигналъ опасности для жизни. Такъ какъ боль затрудняетъ отправленія нервныхъ центровъ и въ частности работу сознанія, то природа установила рядъ защитительныхъ мѣръ. Организмы, во-первыхъ, выработали щиты и брони противъ травматическихъ поврежденій, во-вторыхъ, установили тормозы, препятствующіе проникновенію боли до сознанія, въ третьихъ — опредѣлили ритмъ и степень раздраженія, способные вызвать длительную боль.

Участіе сосудовъ въ механизмѣ сосудистой или правильной — гематогенной — боли лишь относительное, такъ какъ боль въ этомъ случаѣ зависитъ отъ количества крови, питающей данный центрипетальный нервъ орошаемой территоріи. Ни стѣнка сосуда, ни эндо-периваскулярныя сѣти, иннервирующія сосудъ, не имѣютъ никакого отношенія къ болямъ вслѣдствіе недостаточнаго подвоза крови.

При *хронической* ишеміи — послѣдствіе медленно развивающейся облитерации артерій — развиваются дистрофическіе процессы въ дистальныхъ вѣткахъ нервныхъ стволовъ; гиперплазирующаяся ткань endonevii сжимаетъ при этомъ отдѣльныя нервныя волокна до полной атрофіи ихъ дистальныхъ отдѣловъ. На мѣстѣ перехода атрофированнаго волокна въ нормальное — возникаетъ въ этомъ послѣднемъ состояніи декремента (transition decrement), каковое воспринимается нашимъ сознаніемъ, но эксцентрализуется въ периферію и тамъ ложно воспринимается какъ боль — результатъ мѣстнаго раздраженія.

Боли при *остро* возникающей ишемии не зависят ни от накопления химических соединений в нервѣ, ни от кислороднаго голоданія его, ни от нарушенія анатомической цѣлости нерва.

Съ наступленіемъ ишемии наступаетъ переменна концентрація матерій, составляющихъ нервное волокно, мѣняется равновѣсіе молекулъ въ мѣлиновомъ влагалищѣ и осевомъ цилиндрѣ, динамикѣ и ихъ ритмѣ движенія. Эти нѣжнѣйшія и тончайшія нарушенія статики и динамики содержи-маго швановскаго влагалища и аксолема, безъ нарушенія однако непрерывности волокна или его анатомической цѣлости и есть вѣроятно та переменна въ нашемъ тѣлѣ, которую наше сознание оцѣниваетъ какъ боль.

Сосудистая боль (вызванная по закону рефлекса) имѣетъ стадіи и метамерную локализацию.

ЛИТЕРАТУРА.

- Alrutz-Sudney. Verschiedene Schmerzqual. Skand. A. f. Psych. Bd. 21. 1909. — Auvard. Ar. de Gynekol. 1896. — Baglioni. Z. f. a. Phys. IV. 1904. — Barling. Z. f. Biol. 1919. — Becher. Schmerzqualitäten. Pflügers Ar. 1915. — Beck. Einfluss der Gefahr. A. f. Ges. Psychologie XXXIII. — Benisty. см. Förster. — Bethe. a) Pflügers Ar. Bd. 183. b) Allgemeine Anatomie. 1903. — Bichat. Anatomie universelle. 1800. — Biedl. Centren der N.-n. Splanchnici. W. k. W. 1895. — Bier. Virchow's Ar. 1897—1898. — Biron-Robinson. The Abdominal pain. Brain. 1907. — Blik. Z. f. Biol. Bd. 25. — Bloch-Lenander. Grenzgebiet. Bd. X. — V. Boek. Z. f. N. P. 1927. — Bohn. Neuere Thierpsychologie. 1912. — Beaunis. Sensations internes. 1889. — Bresslauer. Pathogenese der trophischen Gewebschaden. Z. f. Chirurgie. Bd. 150. — Brown-Sequard. Jour. de Physiologie. 1851. Vol. I. p. 117. — Brown-Sequard et Tolozan. Jour. de Phys. 1858. — Brower. Z. f. N. Ps. 1920. — Brun. Z. f. N. Ps 1917. — Brünning. Bauch-Schmerz. K. Woch. 1924. — Brünning-Gohrbandt. Darmkolik. Z. f. exper. Med. XXIX. XXXVI. — Buch. a) Enteralgie. Ar. f. Verdauung. VII. IX. b) Schmerzempfindlichkeit. Du Bois Reymond's Ar. 1901. d. e.) Ausstrahlungen. — Mitempfindungen. Skt Petersburger Wochenschrift. 1901. c) Neuralgien. Nord. med. Arch. 1901. — Cahen. Neuroses vasomotrices Ar. générales. 1863. — Cattell-Edwards. Transitional decrement. Am. J. Physiol. V. 80. — Claude-Bernard. Phys. et Pathol. du système nerveux. 1858. — Collin. Sensibilité des artères. Ac. d. Sciences. 1862. — Dejerine. Semaine méd. 1899. — Delezenne. Nerfs vasosensibles. Ac. d. Sciences. Vol. 124. — Dennig. Periarterielle Nerven. Klin. Woch. 1924. — Dumas. La

tristesse et la joie. 1904. — Elving. Sympathectomie. Z. f. g. N. Ps. 1924. XXXVI. — Eittisch-Iochim Pflüg. Arch. Bd. 215. — Feilchenfeld. a) Med. Klin. 1906. b) Wesen des Schmerzes. Z. f. Phys. d. Sinnesorgane. 1908. — Förster. Leitungsbahnen d. Schmerzes. 1927. — Frey. Gefühle. 1894. — Frey-Webel. Zeit. f. Biol. Bd. 74. — Freudenberg-Läwen. Kl. Woch. 1923. — Fröhlich. a) Visceral. Schmerz. W. k. W. 1923. 1925. — b) Nervenreize. Handb. d. Physiol. Bd. IX. 1926. — c) Z. f. allg. Physiologie. IV. — Fröhlich-Meyer. Sensible Innervation. a) W. k. W. 1912. — b) Kl. Woch. 1922. p. 1268. — c) Z. f. exper. Med. XXIX. — Gaustan. Douleur. Enciclopedie. XIV. — Gerson. Schmerz. Schrek. J. f. Ps. Neur. 1917. — Gibson. Nervöse Erkr. d. Herzens. 1910. — Goldscheider. a) Z. f. Chirurgie Bd. 95. b) Ueber Schmerz. 1909. — c) Schmerzproblem. 1920. — d) Ges. Abhandl. 1912. e) Sinnesorgane. Pflüg. Arch. Bd. 168. — Gross. Pflüg. Arch. Bd. 181. — Head. b) Brain. 1905. b) 1911. — Heger. Empfindlichkeit d. Gefässe Festschrift K. Ludwig. 1887. — Hering. Z. f. Neur. Psych. Bd. 82. — Hess. Pflüg. Arch. 1917. Bd. 168. — Hess-Königstein. Neurose der Hautgefässe. W. k. W. 1911. — Higier. a) Ergebnisse der Neurologie 1917. b) D. Z. f. Nervenheilkunde. 1926 Bd. 89. — Hirschmann. Venenimplantation. Z. f. Chirurgie. 1917. — Ionescu. Le Sympathique 1923. — Ioris. Nervs des vaisseaux. Ac. R. de Belgique. 1906. — Ioteiko. Jour. de Neurol. Bruxelles. 1908. — Kaesi. Sympathectomie. Kl. Woch. 1924. — Kafka. Einführung in die Thierpsychol. 1914. — Kant-Hahn. Kl. Woch. 1924. — Kappis. a) Bauchschmerzen. Med. Klin. 1920. b) Sensibilität d. Bauchhöhle. Grenzgebiet. XXVI. — Kaufmann. Zentripetale N. n. der Arter. Pflügers Arch. 1912. — Kohnstamm. Z. f. Nervenheilkunde. 1911. Bd. 43. — Krammer-Todd. Annales of Surg. 1923 p. 646. — Kroh. Frische Schussverletzungen. Bruns Beiträge. 1917. Bd. 108. — Kuttner-Baruch. Traumat. segment. Gefässkrampf. a) Bruns Beiträge. 1920. Bd. 120. b) Z. f. Chir. 1920. — Lang. Vucininjektion. D. Z. f. Chirurgie. 1920. — Lang. Gefässschmerzen bei Lues. W. k. W. 1893. — Latschenberg-Deana. Pflügers Archif. Bd. XII. — Läwen. Sympathectomie Kl. Woch. 1924. — Lehmann-Gottlieb. Pflüg. Ar. Bd. 192. — Lenander. Local-anästhesie. Grenzgebiet. a) 1902. b) 1906. — Leriche. Recherches sur la douleur. Presse médic. 1931. — Mackenzie a) Brit. Med. Jour. 1903. b) Brain. 1893. — Mansel-Moulin. Lancet. 1903. — Martin. Eine Quelle der compliciert. Zufälle. 1885. — Mayer. Cent. f. Med. Wiss. XVI. — Maylard. Abdominal pain. — Meyer. Stand d. Lehre v. Sympathicus. D. Z. f. Nervenheilk. 1912. — Nothnagel. Gefässschmerz. W. k. W. 1892. b) Ibidem. 1893. c) Anpassung und Ausgleich Ar. f. Kl. Med. 1897. d) Vasomotor. Neuros. A. f. K. Med. 1807. — Odermatt. Schmerzempfindlichkeit. Bruns Beitr. Bd. 127. — Oppenheimer. Schmerz 1893. — Paga-

no. Sensibilité des vaisseaux. Ar. Italiennes de Biol. 1900. — Pertuffi. Bethes Handbuch d. Physiol IX p. 159. 1926. — Potte. Annales of Surg. 1923 p. 641. — Putter. Pflügers Ar. 1919. p. 176. — Richet. a) De la Sensibilité. P. 1877. b) Douleur. Dictionnaire de Physiol. 1900. — Снегиревъ. а) Материалы... болей у женщины. Москва. 1907. б) Классификація болей. Врачебная газета. 1906. — Spiegel. а) Gefässschmerz. Wien. Kongress d. Aerzte. 1923. б) Quellung der Nerven. Pflüg. Arch. 1921. с) Einfluss der Narcotica. Ibidem. Bd. 192. — Sal-lito-Consiglio. I. Vasomotores degli arti abdominali. Palermo. 1897. — Stieda. Z. f. Chirurg. 1923. — Stranski. Monat f. Neurol. Psych. 1902. — Schlieff. Sympathectomie. Klin. med. Woch. — Schlesinger. Acut. local. Ischémie D. Z. f. Nervenheilkunde 1905. XXIX. — Schrötter. W. k. W. 1893. — Titschner. Lehrbuch d. Phys. 1910. — Tobler. Monat. f. Geb. Gyn. 1907. — Traube. Pflügers Ar. Bd. 176. — Urano. Z. f. Biologie. Bd. 150. — Valentin. Lehrbuch d. Physiol. 1847. — Vianney. Stupeur artérielle. Presse medicale. 1919. — Wwedensky. Bahnung u. Hemmung. Arbeit. aus Petrog. phys. Institut. 1909. — Wiedhoft. Sympathectomie Kl. Woch. 1924. — Winterstern. Bethes Handbuch der Physiologie. 1926. IX.

Н. Е. Акацатовъ.

КЪ ВОПРОСУ О ЗАБОЛѢВАНІИ ЛЕГКИХЪ, ОБУСЛОВИВАЕМОМЪ ЗАРАЖЕНІЕМЪ ТВС-МИКРОБАМИ.

Туберкулезная и чахоточная проблемы.

I. Туберкулезъ и чахотка.

Наблюденіемъ установлено, что организмъ, въ который проникають ТВС-микробы, хотя и обращается въ хроническаго ихъ носителя, все же въ преобладающемъ большинствѣ случаевъ доживаетъ до глубокой старости. Такой носитель и не подозреваетъ, что ему угрожаетъ возможность заболѣть чахоткой и при случающихся недомоганіяхъ смотритъ на нихъ, какъ на „пустякъ“; а между тѣмъ многочисленными вскрытіями установлено, что среди именно такихъ людей слишкомъ часто обнаруживаются случаи находенія въ ихъ легочной ткани зарубцевавшихся и кальцифицированныхъ фокусовъ, указывающихъ на то, что у этихъ людей неоднократно возникалъ деструктивный процессъ, вызванный ТВС-микробами, но благополучно излѣченный „силами природы“, безъ всякаго участія врачей. Эти многочисленные наблюденія привели ученыхъ къ выводу, что почти всѣ жители (преимущественно) культурныхъ странъ заражаются этого рода микробами, но большинство изъ нихъ самоизлѣчивается, а меньшинство, наоборотъ, погибаетъ отъ прогрессивно развивающагося процесса. Одна и та же инфекція, оказывается, у людей вызываетъ два различныхъ состоянія съ различнымъ отношеніемъ къ нимъ природы: однихъ она излѣчиваетъ, другихъ нѣтъ; у однихъ она настолько обезвреживаетъ ТВС-микробовъ, что человекъ доживаетъ до глубокой старости, у другихъ она почему-то этого достигнуть не можетъ. Почему? На этотъ вопросъ яснаго отвѣта пока не дано.

Опытъ указываетъ, что среди неизлѣченныхъ природою и вынужденныхъ искать врачебной помощи имѣется довольно много больныхъ, успѣшно излѣчиваемыхъ врачами, особенно если они не слишкомъ затягиваютъ свою болѣзнь. Съ другой стороны установленъ фактъ, что у людей, заразившихся этою

заразой, паталого-анатомическія измѣненія въ легкихъ развиваются медленно, часто на протяженіи многихъ лѣтъ и при томъ тѣмъ въ большей степени, чѣмъ позже больные обращаются за врачебной помощью. Поэтому-то въ каждомъ учебникѣ и упоминается о томъ, что „туберкулезъ“ необходимо начинать лѣчить, какъ можно раньше. Въ дѣйствительности же Природа приступаетъ къ лѣченію тотъ часъ же послѣ проникновенія микробовъ въ организмъ, а врачи, наоборотъ, приступаютъ къ лѣченію не раньше, чѣмъ появятся такія тканевыя измѣненія въ легкихъ, наличность которыхъ возможно установить объективно нашими діагностическими приѣмами, а измѣненія эти появляются много спустя послѣ проникновенія въ организмъ ТВС-микробовъ. Возможно ли признать предпринимаемое лѣчение своевременнымъ и тѣмъ болѣе раннимъ, когда каждый врачъ искренно убѣжденъ въ томъ, что только что упомянутыя тканевыя измѣненія являются слѣдствіемъ процессовъ, длившихся на протяженіи многихъ лѣтъ, и что возникновеніе такихъ измѣненій въ легкихъ больной желалъ бы избѣжать?... И какъ бы ни оправдывать такое отношеніе къ дѣлу, но оно во всякомъ случаѣ нарушаетъ интересы больныхъ, ищущихъ врачебной помощи. Люди, у которыхъ не существуетъ надоѣдающихъ и безпокоящихъ болей, обычно считаютъ себя здоровыми. Носители ТВС-микробовъ на протяженіи многихъ лѣтъ въ силу этого не обращаются къ врачебной помощи, а если бы и попали въ кабинетъ врача, то послѣдній въ громадномъ большинствѣ случаевъ не обнаружилъ бы у нихъ наличность заразы и въ отношеніи ея не счелъ бы нужнымъ принимать какія-либо мѣры; они остаются на положеніи пациентовъ врача-Природы. Когда же эта послѣдняя уже не въ силахъ справиться со своими пациентами, когда у нихъ процессъ прогрессируетъ, когда они начинаютъ „чахнуть“, испытывать болевые ощущенія, они обращаются къ медицинской помощи. Природа лѣчитъ „туберкулезныхъ“, а врачи — „чахоточныхъ“. Но интересы человечества требуютъ, чтобы медицина лѣчила „туберкулезъ“ съ цѣлью предотвратить возникновеніе „чахотки“. Предъ врачомъ стоятъ особнякомъ „проблема Tuberculosis“ и „проблема Phtysis“.

II. Бактеріолизъ-дисперсія.

До сего времени принято считать прочно установленнымъ, что въ организмѣ уничтоженіе микробовъ происходитъ или при помощи фагоцитоза или при помощи бактерициднаго и бактериолитическаго дѣйствія соковъ организма. Но какимъ бы способомъ они ни уничтожались, удаленіе ихъ изъ организма въ обезвреженномъ состояніи требуетъ предварительнаго расщепленія ихъ тѣлецъ въ мельчайшее состояніе. Такой

процессъ въ физико-химіи называется дисперсіей. Послѣдній имѣетъ мѣсто въ животномъ организмѣ: физиологическое пищевареніе, напр., являетъ собой въ концѣ концовъ процессъ дисперсіи, ибо его сущность именно и сводится къ расщепленію вещества на мельчайшія составныя частицы; въ полости рта происходитъ грубая дисперсія; въ желудкѣ и кишечникѣ она происходитъ подъ вліяніемъ физико-химическихъ факторовъ — зараженія, набуханія, температуры и, наконецъ, расщепленіе принимаетъ чисто химическій характеръ при избыткѣ ферментовъ (Baylis) *).

Въ конечномъ результатѣ пищевой матеріаль расщепляется на такія мельчайшія частицы, изъ которыхъ путемъ синтеза создаются вещества, служащія пластическимъ матеріаломъ для пополненія расходовъ организма и возстановленія изношенныхъ тканей. Процессъ расщепленія экссудатовъ, равно и процессъ бактериолиза, суть ничто иное, какъ дисперсія.

ТВС-микробъ, вульгарно выражаясь, являетъ собой комочекъ протоплазмы, покрытой липоидной оболочкой. Чтобы тѣло съ такой структурой подверглось дисперсіи, необходимы два условія: сначала повліяетъ на жировую оболочку жир-расщепляющимъ ферментомъ — липазой; а за симъ, по освобожденіи протоплазмы отъ защищавшей ее оболочки, подвергнутъ протоплазму воздѣйствію протеолитическаго фермента — протеазы. Въ біозоляхъ организма имѣются и липаза и протеаза и Abderhalden'омъ онѣ названы вполне основательно защитными ферментами. При такомъ условіи, очевидно, организмъ имѣетъ возможность совершенно освободиться отъ проникающихъ въ него ТВС-микробовъ; но фактъ существованія ихъ носителей и фактъ возникновенія чахотки доказываютъ, что для осуществленія бактериолиза помимо упомянутыхъ ферментовъ необходимы еще какія-то иныя благопріятствующія бактериолизу условія. Разрѣшеніемъ этого вопроса я занялся еще въ 1911 году.

III. Перестройка оболочекъ. Приспособляемость микробовъ.

Overton и Bang, какъ извѣстно, указали на липоидный составъ бактерійныхъ оболочекъ. Животныя ткани въ общемъ являются сочетаніемъ бѣлковъ, жировъ, углеводовъ, солей и воды. Въ оболочкахъ превалируютъ жиры, сочетающіеся также съ упомянутыми веществами. Жиры въ оболочкахъ при такомъ условіи могутъ представлять собой родъ эмульсоида. Въ 1914 году такой же взглядъ на структуру оболочекъ высказалъ проф. Clowes (1). Извѣстно, что если смѣшать въ присутствіи эмульгатора большее количество воды

*) Такой процессъ сопровождается гидролизомъ.

съ меньшимъ количествомъ жидкаго жира, то жиръ диспергируется въ водѣ. При этомъ образуются эмульсионные шарики, въ центрѣ которыхъ заключенъ жиръ или, говоря иначе, масло, а на периферіи образуется тончайшій слой воды. Такого типа эмульсію для краткости обозначимъ „ВМ“, т. е. вода на периферіи, масло внутри шарика. При обратныхъ количественныхъ соотношеніяхъ воды и масла и при прежнихъ условіяхъ опыта образуется эмульсія типа „МВ“, т. е. масло-вода. Исходя изъ сказаннаго, возможно различать бактеріальныя оболочки то со структурой, построенной по типу „ВМ“, то по типу „МВ“, и такая структура будетъ зависѣть отъ количественныхъ соотношеній воды и жира, говоря иначе, отъ среды, въ которой находится микробъ. Допустимъ, что ТВС-микробъ попалъ на влажную слизистую оболочку дыхательныхъ путей; поверхность микроба тотчасъ же адсорбируетъ воду (гидрособція); количество воды превалируетъ и оболочка перестраиваетъ свою структуру по типу „ВМ“. Наоборотъ, ТВС-микробъ выкашливается, скажемъ, на полъ или на сухую поверхность земли. Вода оболочки до извѣстной степени испаряется и оболочка перестраивается по типу „МВ“.

Лабораторнымъ способомъ одинъ типъ эмульсіи легко перестроить въ другой. Если прибавить къ эмульсіи „МВ“ *Natr. bicarbonicum*, то она перестраивается по типу „ВМ“; добавляя же такіе эмульгаторы, какъ *Calcium*, *Magnium* или такіе многовалентные металы, какъ мѣдь, желѣзо, золото, серебро и др., эмульсія типа „ВМ“ перестраивается въ „МВ“.

Вотъ это обстоятельство и навело меня на мысль о необходимости и возможности перестройки структуры бактеріальныхъ оболочекъ; а, познакомившись съ работами Seifritz'a (2) и Freundlich'a (3) я пришелъ къ выводу, что избранный мною подходъ къ разрѣшенію интересовавшаго меня вопроса о „приспособляемости“ микробовъ къ окружающей средѣ путемъ перестройки своихъ оболочекъ безусловно близокъ къ дѣйствительности. Дѣло въ томъ, что только что упомянутые авторы экспериментально установили, что въ организмѣ *Lecithin*, какъ эмульгаторъ, ведетъ себя подобно *Natr. bicarbonic.*, а *Cholesterin* — подобно *Calcium*, *Magnium* и многовалентнымъ металамъ. Для меня стала ясна цѣнность указанія Overton и Bang на существованіе въ оболочкѣ ТВС-микробовъ *Cholesterin*'а и *Lecithin*'а и указанія Н. П. Кравкова на существованіе въ оболочкахъ ихъ до 16% желѣза. Эти вещества, по моему мнѣнію, играютъ роль эмульгаторовъ, ускоряющихъ процессъ перестройки оболочекъ изъ одного типа въ другой. Такая перестройка является слѣдствіемъ физико-химическихъ законовъ и отвѣчая закону цѣлесообразности, совершается въ интересахъ жизни микробовъ, ибо они приспособляются этимъ путемъ къ окружающей средѣ и

бронируютъ себя отъ губельно дѣйствующихъ на нихъ факторовъ. Съ другой стороны, организмъ челоуѣка также располагаетъ ферментами — липазой и протеазой, а изъ эмульгаторовъ — лецитиномъ, холестеринномъ, бикарбонатами натрія, калия; кальціемъ, магниемъ, желѣзомъ, слѣдами марганца. Стало бытъ, и организмъ въ своихъ интересахъ способенъ самостоятельно перестраивать не только оболочки своихъ клѣтокъ, но и бактеріальныя оболочки. Эмульгаторы, содержащіеся въ животномъ организмѣ, надо полагать, дѣйствуютъ синергетически. Возможно допустить, что черезъ микробную оболочку типа „ВМ“ проникаютъ раньше всего эмульгаторы, растворимые въ водѣ, напр., кальцій, магній, марганецъ, въ видѣ солей, а желѣзо въ іонно-молекулярномъ состояніи; благодаря этому происходитъ перестройка оболочки по типу „МВ“, а за симъ уже Cholesterin біо-золотъ проникаетъ въ эту оболочку, благодаря своей растворимости въ жирахъ и удерживаетъ эту структуру „МВ“ настолько прочно и длительно, что липаза успѣваетъ липолизировать оболочку. Само собой понятно, что липаза можетъ воздѣйствовать на оболочки ТВС-микробовъ исключительно типа „МВ“ и она никакого вліянія оказать не можетъ на типъ „ВМ“. Свойство структуры бактеріальной оболочки имѣетъ несомнѣнно различное значеніе: оно обусловливаетъ характеръ питанія микроба: ибо черезъ оболочку типа „ВМ“ могутъ проникать вещества, растворимыя лишь въ водѣ, а черезъ „МВ“ — лишь въ жирахъ; по тѣмъ же причинамъ это свойство обусловливаетъ отношеніе микроба къ бактерициднымъ веществамъ, къ окрашиванію бактерій, къ окружающей средѣ вообще. Съ другой стороны, характеръ питанія микроба и сама по себѣ структура бактеріальной оболочки, весьма вѣроятно, должны оказывать вліяніе и на токсическія свойства бактерійныхъ отбросовъ — токсиновъ. Такъ какъ протоплазматическіе бѣлки находятся въ тѣсной связи съ жирами, то бактеріолизъ слагается, вѣроятно, изъ неоднократныхъ перестроекъ структуры и отсюда повторныхъ воздѣйствій, то липазы, то протеазы, пока не наступитъ полная дисперсія микробнаго тѣльца. Нѣтъ сомнѣнія, что въ этомъ процессѣ бактеріолиза принимаютъ участіе и другіе диспергирующие факторы, о которыхъ уже было упомянуто раньше (заряженіе, набуханіе, температура).

Организмъ, въ которомъ почему-либо имѣется недостаточное количество или ненадлежащаго качества эмульгаторовъ, а на ряду съ этимъ имѣется еще и дефектъ въ ферментахъ, безусловно обреченъ на невозможность осуществлять бактеріолизъ. При такомъ состояніи онъ долженъ оказаться „предрасположеннымъ“ къ туберкулезу. Проникшіе въ его тѣло микробы естественно размножились бы, и такой организмъ

обратился бы въ болѣе или менѣе длительного носителя ТВС-микробовъ, т. е. въ „туберкулезнаго“. И если такое состояніе организма не измѣнилось къ лучшему: дефектъ въ эмульгаторахъ или ферментахъ продолжалъ бы существовать, то размножающаяся микробная флора ширилась бы, организмъ прогрессивно подвергался бы токсинной травматизаціи и онъ тогда потерялъ бы всякую „сопротивляемость“ и постепенно обращался бы въ „чахъ о точнаго“. Такимъ образомъ для всякаго врача безъ предвзятыхъ взглядовъ становится совершенно яснымъ, въ чемъ заключается сущность бактериолиза; необходимость допущенія гипотетическихъ бактериолизиновъ отпадаетъ; а въ символическія понятія „предрасположеніе“ и „сопротивляемость“ вкладывается конкретное содержаніе.

IV. Сущность явленія фагоцитоза и его значеніе въ борьбѣ съ микробами.

По общепринятому ученію Мечникова организмъ освобождается отъ проникшихъ въ него микробовъ при помощи фагоцитоза. Разсматривая это явленіе съ точки зрѣнія физико-химическихъ законовъ, я пришелъ къ убѣжденію, что такой роли фагоцитамъ приписывать отнюдь не представляется возможнымъ. По этому поводу мною была опубликована спеціальная работа (4), а потому здѣсь я ограничусь изложениемъ лишь самого существеннаго. Фагоцитозъ слагается, такъ сказать, изъ двухъ моментовъ: 1) выбрасыванія псевдо-подія или, такъ называемаго, амeboизма и 2) заглатыванія. Амeboизмъ представляетъ собой результатъ частичнаго расслабленія поверхностнаго натяженія („ПН“), возникающаго на свободной поверхности лейкоцита въ одной лишь точкѣ. Вся остальная поверхность, не будучи расслабленной энергіей капиллярно-активнаго тѣла, продолжаетъ сжиматься съ прежней силой (когезія) и потому выжимаетъ протоплазму въ точкѣ наименьшаго сопротивленія, т. е. въ той точкѣ, гдѣ произошло расслабленіе поверхности, и гдѣ, очевидно, исчезла когезія. Такъ возникаетъ псевдоподій. Капиллярно-активныя тѣла, какъ извѣстно, суть *гидрофобны* и несутъ на своей поверхности всегда большій электрической зарядъ, чѣмъ зарядъ на поверхности гидрофильной частицы. Если гидрофобная частица, ТВС-бактерія типа „МВ“, приблизится къ гидрофильной частицѣ большей величины, напр., къ лейкоциту на разстояніе меньше радіуса взаимопротяженія, тогда болѣе сильный зарядъ съ поверхности ТВС-бактеріи долженъ перескочить на поверхность лейкоцита и въ опредѣленной ея точкѣ вызвать моментальное паденіе „ПН“, послѣдствіемъ чего и выступитъ псевдо-подій навстрѣчу капиллярно-активной частицѣ, въ данномъ случаѣ, ТВС-бактеріи и ее адсорбируетъ. Съ этого

момента адсорбированная ТВС-бактерія уже потеряла капиллярно-активное свойство, вслѣдствіе чего „ПН“ на лейкоцитѣ возстанавливается, псевдо-подій втягивается во внутрь съ адсорбированной бактеріей и въ глубину тѣльца бактерія продвигается по закону абсорбціи. Вотъ это біологическое явленіе, расшифровываемое мною подъ угломъ зрѣнія физико-химическихъ законовъ, Мечниковъ назвалъ *фагоцитозомъ*. Изъ изложеннаго видно, что фагоциты способны заглатывать частицы исключительно лишь *гидрофобнаго характера*, ибо только послѣднія суть капиллярно-активныя тѣла, разслабляющія „ПН“. Потому-то фагоциты и не заглатываютъ ни другъ друга, ни своихъ „гидрофильныхъ“ собратьевъ, плавающихъ въ крови и въ лимфѣ, какъ эритроцитовъ, тромбоцитовъ и пр. „Мудрость“ фагоцитовъ есть ничто иное, какъ выявленіе общихъ физико-химическихъ законовъ. Съ отмираніемъ лейкоцитовъ, эритроцитовъ и другихъ элементовъ, плавающихъ въ біо-золяхъ, эти послѣдніе подвергаются фагоцитозу, ибо ихъ протоплазма денатурируется; они утрачиваютъ гидрофильныя свойства и пріобрѣтаютъ гидрофобныя.

Легко догадаться теперь, что ТВС-бактеріи типа „ВМ“ фагоцитозу подвергнуться отнюдь не могутъ: онѣ суть гидрофильны. Раньше было выяснено, что эгого типа ТВС-микробы не подвергаются бактериолизу, а теперь мы видимъ, что они забронированы и отъ фагоцитоза. Перестройка структуры ихъ оболочекъ по типу „ВМ“ дѣлаетъ изъ нихъ не уязвимыхъ, приспособившихся микробовъ. Такое „приспособленіе“ опять таки ничто иное, какъ выявленіе тѣхъ же общихъ законовъ, которые имѣютъ мѣсто и въ мертвомъ и въ живомъ царствахъ. Очевидно, что ТВС-бактеріи типа „МВ“, какъ гидрофобныя, должны быть заглатываемы фагоцитами, но организму такое обстоятельство причиняетъ лишь одинъ вредъ, ибо заглоченныя бактеріи внутри фагоцитовъ не могутъ быть переварены за отсутствіемъ въ ихъ тѣлѣ липазы (Bergel, Jochmann, Bezançon, Dina Rabinovitsch, Гундобинъ и др.). Такимъ образомъ фагоцитозъ въ данномъ случаѣ можетъ служить лишь причиною диссиминаціи заразы и вызвать возникновеніе миллиарнаго туберкулеза. На это обстоятельство я указывалъ еще въ 1913 г. (5), но это указаніе не фиксировало на себѣ вниманія ученыхъ...

Изъ изложеннаго въ этой главѣ слѣдуетъ, что фагоциты отнюдь не играютъ роли борцовъ съ бактеріями, приписанной имъ Мечниковымъ. Наблюденія глазами, хотя бы и съ помощью усовершенствованныхъ идеальныхъ оптическихъ приборовъ, сами по себѣ еще не могутъ расшифровывать явленій природы. Они нерѣдко приводятъ къ выводамъ характера „post hoc, ergo propter hoc“. Значеніе фагоцитоза сказаннымъ отнюдь не умаляется: фагоциты суть санитары,

убирающіе *отмершія* частицы грубо-дисперсной величины изъ біозоловъ и тѣмъ поддерживающіе оптимальную дисперсность послѣднихъ, такъ называемую, „эудисперсность“. Заканчивая эту главу, укажу на тотъ фактъ, что ТВС-бациллы типа „ВМ“ должны быть уязвимы со стороны такихъ бактерицидныхъ веществъ, которыя растворимы въ водѣ. И практика *de facto* не можетъ отрѣшиться отъ примѣненія соответствующихъ фармацевтическихъ препаратовъ. Понятія „бактеріотропность“ и „бактерицидность“ я тѣсно связываю съ характеромъ структуры бактерійныхъ оболочекъ.

V. Почему въ организмѣ не всегда осуществляется бактеріолизъ.

Отвѣтъ на поставленный вопросъ имѣетъ большое практическое значеніе и глубокой теоретической интересъ.

Вещества, способствующія возникновенію бактеріолиза, организмъ можетъ получать исключительно изъ пищи, безразлично — въ готовомъ ли уже видѣ или въ видѣ исходнаго матеріала, изъ котораго онъ ихъ самъ синтезируетъ, напр. Cholesterin изъ жирныхъ кислотъ. Очевидно, чтобы организмъ обладалъ возможностью осуществленія бактеріолиза, необходимо, чтобы въ пищу содержались: кальцій, магній, бикарбонаты одновалентныхъ металловъ; за симъ многовалентные металлы, какъ желѣзо, быть можетъ, марганецъ; лецитинъ, холестеринъ, необходимые ферменты; короче говоря, пища должна быть полноценная (NB! Въ организмѣ нѣтъ драгоценныхъ металловъ). За симъ столь же очевидно, что организмъ для усвоенія этихъ веществъ долженъ обладать такимъ пищевареніемъ, при которомъ пищевой матеріалъ былъ бы способенъ расщепляться до предѣловъ возможности извлечь изъ него все необходимое для организма. Эти два положенія, повидимому, никто не станетъ оспаривать и тѣмъ менѣе требовать отъ меня еще представленія экспериментальныхъ доказательствъ. Очевидно, что для осуществленія бактеріолиза необходимо организму обезпечить физиологическое пищевареніе и доставку полноценной пищи. Какъ мы увидимъ изъ послѣдующаго изложенія, *это положеніе должно быть отправной точкой для обоснованія профилактическихъ и лечебныхъ мѣръ*. Лецитинъ и холестеринъ поступаютъ въ организмъ съ жирами. Для всасыванія жировъ необходимо предварительное ихъ расщепленіе въ верхнемъ отдѣлѣ кишечника. Расщепленію жировъ предшествуетъ ихъ эмульгированіе при помощи щелочей кишечнаго, панкреатическаго соковъ и желчи. Жиро-расщепляющая липаза — стеапсинъ, благодаря эмульгированію жировъ, приходитъ въ контактъ съ обширной жировой поверхностью, что и способствуетъ весьма совершен-

ному расщепленію жира. Но чтобы расщепленіе имѣло мѣсто, необходимо непосредственное соприкосновеніе стеапсина съ жиромъ, а это возможно въ томъ лишь случаѣ, когда эмульсія построена по типу „МВ“, чего фактически быть не можетъ, ибо въ верхнемъ отдѣлѣ кишечника всегда имѣется такое количество воды, при существованіи которой возникающая эмульсія вынуждена строиться по типу „ВМ“; при такомъ же условіи липаза не соприкасается съ жиромъ и расщепленіе его не происходитъ. Но стоитъ появиться въ кишечникѣ желчи, тотчасъ же эмульсія перестраивается въ типъ „МВ“, благодаря ея холестерину и другимъ эмульгаторамъ, въ ней находящимся, и тогда жиръ липолизируется. Очевидно, что при недостаточномъ желчеснабженіи верхняго отдѣла кишечника расщепленіе жировъ должно быть недостаточнымъ и въ организмѣ можетъ возникнуть недостатокъ жирныхъ кислотъ и холестерина. Какъ извѣстно, физиологія приписываетъ желчи значеніе активатора липазы-стеапсина, которая проявляетъ свое жирорасщепляющее дѣйствіе лишь послѣ появленія желчи: физиологи полагаютъ, что липаза-стеапсинъ — проферментъ и обращается въ ферментъ лишь послѣ активациіи желчью. На мой взглядъ, приведенное выше мое толкованіе также не лишено научнаго интереса, хотя оно до крайности просто и ясно. Въ этомъ убѣждаютъ насъ еще и нижеслѣдующія соображенія. Извѣстно, что жиры доставляются организму помимо всасыванія еще и лейкоцитами, захватывающими эмульсионные шарики по закону фагоцитоза.

Изъ изложеннаго мною въ предшествующей главѣ о фагоцитозѣ явствуетъ, что лейкоциты могутъ захватывать лишь гидрофобныя частицы, а къ таковымъ относятся эмульсионные шарики лишь типа „МВ“. Отсюда становится очевиднымъ значеніе желчеотдѣленія для жирового питанія организма, въ особенности организма-носителя ТВС-микробовъ, ибо при недостаточномъ желчеотдѣленіи эмульсионные шарики не перестраиваются по типу „МВ“ и потому не доставляются организму лейкоцитами. Представимъ себѣ, что въ данномъ организмѣ на почвѣ заболѣванія пищеварительныхъ органовъ не происходитъ достаточнаго выдѣленія пепсина и соляной кислоты для превращенія бѣлковъ пищи въ пептоны и въ альбумозу; въ кишечникѣ существуетъ недостаточное выдѣленіе трипсина, энтерокиназы и эрепсина и на ряду съ этимъ существуетъ недостаточное желчеснабженіе. При такихъ условіяхъ бѣлки не расщепляются до аминокислотъ; изъ пищевыхъ веществъ не выдѣляются полностью эмульгаторы — кальцій, магній, желѣзо, марганецъ; жиры не расщепляются; въ организмѣ наступаетъ аминно-кислотное, солевое, углеводное, жировое, холестериновое и другіе виды голоданія, не взирая на возможность пользоваться самой

лучшей по качеству и полноценности пищей. Может ли кто усумниться въ томъ, что носитель ТВС-микробовъ при такомъ условіи не обреченъ на умноженіе микробной флоры, на повышенную токсинную травматизацію тканей всѣхъ органовъ, и наконецъ, на переходъ туберкулеза въ чахотку? Съ другой стороны, возможно ли не призадуматься надъ трафаретнымъ врачебнымъ совѣтомъ, такъ часто даваемымъ больнымъ: „Получше питайтесь; побольше яицъ, молока, масла“. Ужели же не очевидно, что объ улучшеніи питанія возможно говорить лишь тогда, когда врачъ увѣренъ въ томъ, что у его больного совершенно нормальное пищевареніе?! Люди, страдающіе заболѣваніемъ пищеварительныхъ органовъ и являются „предрасположенными“ къ инфекціоннымъ заболѣваніямъ и въ особенности къ зараженію ТВС-микробами. Заболѣваютъ же пищеварительные органы у громаднаго большинства людей, не взирая ни на возрастъ, ни на полъ, ни на ихъ соціальное положеніе, ни на экономическія условія, ни на климатъ, свѣтъ, воздухъ и проч. „Предрасположеніе“ и „сопротивляемость“ опредѣляются исключительно состояніемъ пищеварительныхъ органовъ: съ улучшеніемъ пищеварительной функціи организмъ помощью бактериолиза понижаетъ численность своей ТВС-флоры и или оправляется или совершенно выздоравливаетъ, какъ это мы и наблюдаемъ на случаяхъ самоизлѣченія; съ ухудшеніемъ же этой функціи флора умножается; организмъ прогрессивно травматизируется и доходитъ до возникновенія деструктивнаго процесса въ легкихъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ отношеніи людей, неизлѣченныхъ природою и обращающихся къ помощи врачей. Такъ, то медленнѣе, то болѣе ускореннымъ темпомъ „туберкулезъ“ переходитъ въ „чахотку“ и тѣмъ не менѣе для такого перехода требуются многіе годы. На протяженіи многихъ десятковъ лѣтъ я убѣдился въ томъ, что человекъ, оберегающій свои пищеварительные органы, нормально и умеренно питающійся, не долженъ опасаться заболѣть „чахоткой“, хотя бы по условіямъ своей дѣятельности онъ и заражался постоянно ТВС-микробами, какъ это имѣетъ мѣсто у врачей и ухаживающаго за больными персонала. Они могутъ быть лишь временными „туберкулезными“. Среди врачей и врачебнаго персонала такъ много туберкулезныхъ и, къ стыду сказать, такъ много чахоточныхъ, что недостатка въ клинически-экспериментальномъ матеріалѣ ощущаться не можетъ. Въ справедливости сказаннаго врачи могутъ легко убѣдиться на самихъ себѣ и среди нихъ исчезнуть чахоточные: необходимо лишь оберегать свои пищеварительные органы. Не уважающій чужой собственности лишается общественнаго довѣрія и ему никто не станетъ ввѣрять свое имущество; а чахоточный врачъ, не задумываясь, со спокойной совѣстью, лечитъ чахотку у своихъ больныхъ. *Medice, cura te ipsum!*

VI. Кишечная аутоинтоксикація.

Не расщепившіеся въ верхнемъ отдѣлѣ кишечника жиры съ переходомъ въ толстый кишечникъ расщепляются въ гніющей средѣ послѣднихъ и, всасываясь въ нижнемъ отрѣзѣ, вызываютъ гемолизъ.

Не усвоенный изъ тонкихъ кишекъ лецитинъ расщепляется въ толстыхъ кишкахъ и изъ входящаго въ его составъ холина образуются ядовитые дериваты: Betain и изомеръ Muscarin'a (Hasenbroog, Falquist, Словцевъ и др.). Въ гніющей средѣ толстыхъ кишекъ изъ неусвоенныхъ бѣлковъ образуются индолъ, скатолъ, фенолы, крезолы, гистаминъ, изъ орнитина путресцинъ, изъ лизина кадаверинъ и, быть можетъ, многіе еще не изслѣдованные яды (Baumann, Udransky, Mogenroth, Falquist и мн. др.). Такого рода всасываніе ядовъ, образующихся въ кишечникѣ, имѣетъ мѣсто у лицъ, одержимыхъ хроническими запорами, тянется обычно многими годами и приводитъ прежде всего къ травматизаціи пищеварительныхъ путей, а за симъ яды, всасывающіеся въ организмъ, измѣняютъ химизмъ біо-золовъ и травматизируютъ всѣ ткани, омываемыя этими біо-золами. Такимъ образомъ возникаютъ токсотравматическія заболѣванія мѣстнаго и общаго характера, существованіе которыхъ логически мы должны допустить. Эффектъ дѣйствія этихъ ядовъ не имѣетъ остраго характера, благодаря иммунитету (митридатизму).

Наука еще не располагаетъ возможностью ни установить, какого рода яды образуются въ каждомъ данномъ кишечникѣ, ни тѣмъ менѣе опредѣлить, въ какомъ количествѣ и въ какомъ сочетаніи они всасываются въ организмъ; она не въ силахъ выяснить, какимъ дегенеративнымъ измѣненіямъ подвергаются клѣтки пищеварительныхъ путей и крупныхъ органовъ, на которыя эти яды *in statu nascendi* вліяютъ въ смыслѣ молекулярныхъ и межмицеллярныхъ измѣненій, вовсе не поддающихся нашему опредѣленію; но эти то измѣненія являютъ собой тѣмъ не менѣе паталогію *) Мы располагаемъ возможностью устанавливать только грубыя паталого-анатомическія измѣненія, да и то лишь на аутопсіи, а не при жизни. Такія измѣненія, нельзя забывать, происходятъ изо дня въ день на протяженіи многихъ лѣтъ. Вправѣ ли мы при такомъ условіи кишечную аутоинтоксикацію, являющуюся главной причиной ихъ возникновенія, расцѣнивать, какъ факторъ, не заслуживающій самаго серьезнаго врачебнаго вниманія?

А между тѣмъ въ наукѣ вопросъ о кишечной аутоинтоксикаціи составляетъ еще предметъ дебатовъ. Мечниковъ

*) „Не всякая паталогія — болѣзнь“, сказалъ еще Вирховъ.

экспериментировалъ на *Massacus Sinemonologus*. Онъ вливалъ ему *per os* на протяженіи 74 дней паракрезоль. *Massacus* погибъ! Не станемъ касаться вопроса о томъ, возможно ли проводить аналогію между „отравленіемъ“ паракрезоломъ этой „жертвы науки“, токсизируемой на протяженіи 74 дней, и кишечной аутоинтоксикаціей, длящейся десятки лѣтъ; но школа Мечникова все же смотрѣла на толстый кишечникъ, какъ на главный генераторъ кишечныхъ ядовъ. Такое обстоятельство послужило даже основаніемъ для хирургическаго удаленія толстыхъ кишекъ. Мнѣ довелось видѣть такихъ оперированныхъ. Они не долго жили и уже давно скончались...

Kester, Voley, James, Neuburg, Lister и большинство американскихъ ученыхъ, на основаніи своихъ экспериментовъ, не придаютъ кишечной аутоинтоксикаціи столь вреднаго значенія, какъ школа Мечникова. Однако, чтобы имѣть экспериментальныя данныя, доказывающія вредъ или безвредность кишечной аутоинтоксикаціи, необходимо создать такія условія для эксперимента, которыя отвѣчали бы процессамъ, естественно возникающимъ въ организмѣ. Такихъ условій, очевидно, никто еще не создавалъ, не создастъ и врядъ-ли они необходимы. Между экспериментами и дѣйствительностью существуетъ столь отдаленная аналогія, что едва ли получаемыя данныя могутъ служить предпосылками для умозаключеній, претендующихъ на доказательность. *Modus experimendi* — это своего рода *morbus* современной медицины.

По словамъ знаменитаго анатома Нуртл'я, святые отцы древняго Рима жаловались на то, что человекъ рождается „*inter faeces et uginam*“. Современный человекъ не только примирился съ этимъ фактомъ, но его вовсе не озабочиваетъ даже тотъ фактъ, что въ его кишечникѣ фекальныя массы задерживаются многими днями и недѣлями. Онъ охотно и сознательно выполняетъ строгія санитарно-полицейскія требованія на счетъ очистки мусорныхъ ямъ и отхожихъ мѣстъ; своя же клоака его не озабочиваетъ. Семья, школа и даже врачи этому вопросу удѣляютъ мало вниманія. Дальнѣйшая жизнь культивируетъ этотъ индифферентизмъ. Съ дѣтства рѣдко кто приученъ опорожнять кишечникъ своевременно; въ школѣ на просьбу ученика выйти изъ класса учитель отвѣчаетъ: „сиди на мѣстѣ!“; на военной службѣ солдата удерживаетъ команда: „смирно!“. Чиновника въ канцеляріи удерживаетъ нелюбовь начальника видѣть „шатающихся подчиненныхъ“. Дѣловая жизнь остальныхъ людей не удѣляетъ ни минуты на удовлетвореніе естественной нужды, ибо „время — деньги“... Самолѣченіе рекламируемыми на заборахъ и въ общей печати слабительными еще больше развиваетъ кишеч-

ную атонію и въ послѣднія десятилѣтія замѣчается прогрессирующее число колитовъ, холециститовъ, аппендицитовъ и другихъ заболѣваній кишечнаго тракта. — Почва для развитія чахотки ширится.

VII. Чѣмъ объясняется хроническій характеръ легочнаго туберкулеза.

ТВС-микробы проникаютъ въ человѣческой организмъ черезъ покровы, непосредственно соприкасающіеся съ внѣшнимъ міромъ. Изъ частей тѣла, наиболѣе благопріятствующихъ проникновенію въ нихъ ТВС-микробовъ, является носовая, ротовая полости, легкіе и пищеварительный трактъ. ТВС-микробы, соприкоснувшись съ влажными покровами, тотчасъ же перестраиваютъ свою оболочку по типу „ВМ“. Если они попадаютъ въ желудокъ, то здѣсь они подвергаются бактерицидному воздѣйствію соляной кислоты. Если, вслѣдствіе недостаточной концентраціи послѣдней, ТВС-микробы этого типа „ВМ“ не погибаютъ, то они переходятъ въ кишечникъ, гдѣ, благодаря эмульгаторамъ кальцію, магнию, желѣзу, холестерину, они перестраиваются по типу „МВ“ и при наличности фермента-стеапсина и протеазы тотчасъ же подвергаются бактериолизу. И если мы обнаруживаемъ ТВС-бациллъ въ faeces, то уже одно это обстоятельство неопровержимо доказываетъ, что у даннаго субъекта пищевареніе нарушено. Нормальные пищеварительные пути отнюдь не могутъ служить воротами для проникновенія ТВС-бациллъ въ тѣло ¹⁾. Многочисленныя изслѣдованія Gurode ни разу не обнаружили Коховскихъ палочекъ въ кишечной ткани. Такое явленіе возможно лишь въ травмированномъ кишечникѣ и возникаетъ какъ вторичное.

ТВС-микробы, вовлеченные въ дыхательные пути, приспособляясь къ средѣ, перестраиваютъ оболочку по типу „ВМ“ и по закону абсорбціи проникаютъ въ толщу клѣтчатой ткани. Чтобы уяснить дальнѣйшую ихъ судьбу, необходимо представить себѣ дѣйствительную архитектуру клѣтки, о которой нигдѣ ничего не говорится; она является собой конгломератъ частицъ различной дисперсности ²⁾. Эти послѣднія по общему физическому закону построенія всякой матеріи, ассоціируясь, не соприкасаются вплотную одна съ другой и между ними остаются просвѣты или щели, соединяясь между

¹⁾ Необходимо упомянуть, что изъ кишечника ТВС-микробы типа „МВ“, если почему либо, напр., вслѣдствіе недостатка липазы, не подвергнутся бактериолизу, могутъ быть захвачены фагоцитами и за симъ вовлечены внутрь тѣла.

²⁾ Такое представленіе объ архитектурѣ клѣтки отнюдь не вступаетъ въ конфликтъ съ существующими на этотъ счетъ теоріями Бюкли и Альтмана.

собой, образующіе какъ бы канализаціонную сѣть, по которой продвигается жидкость путемъ осмоса и электро-осмоса. Изъ этихъ канальцевъ насъ могутъ интересовать съ наибольшѣ крупнымъ діаметромъ, и потому мы будемъ считаться лишь съ межмолекулярными и межмицеллярными, прорѣзывающими вещество самой клѣтки, а за симъ съ межклѣточными, отдѣляющими одну клѣтку отъ другой. Межклѣточные, собираясь, образуютъ лимфатическіе прекапилляры, которые въ концѣ концовъ образуютъ *Truncus thoracicus* и *Truncus lymphaticus dexter*, впадающіе въ соотвѣтствующія вены. ТВС-микробы, проникнувъ въ клѣтки легочной ткани, при наличности въ біо-золахъ эмульгаторовъ и ферментовъ, могутъ подвергнуться бактериолизу и, очевидно, такъ и бываетъ у людей со здоровыми пищеварительными органами и нормально питающихся. Если организмъ не располагаетъ ни эмульгаторами, ни ферментами, то микробы остаются живыми. Проникнувъ въ клѣтку, микробы механически могутъ закупоривать нѣкоторые ея каналы, которые, помимо этого, должны суживаться еще вслѣдствіе набуханія ихъ стѣнокъ и наслоеній на нихъ адсорбируемыхъ коагулятовъ (6). Естественно, что при такомъ условіи не только прекращается подвозъ къ клѣткѣ питательнаго матеріала, но прекращается и удаленіе изъ клѣтки отбросовъ какъ ея собственнаго тѣльца, такъ и микробовъ, и она волей-неволей обрекается на гибель отъ голоданія и аутоинтоксикаціи; но уже до этого момента въ ея тѣльцѣ возникаетъ кислая реакція; Н-іоны устремляются на периферію; внутренняя поверхность периферической оболочки заряжается положительно и къ ней устремляются отрицательно заряженныя частицы изъ біозоловъ окружающей территоріи. Такъ возникаетъ то типичное новообразование, которое мы называемъ *tuberculum* — бугоркомъ съ гигантской клѣткой внутри и поясомъ эпителиоидныхъ клѣтокъ и мелкоклѣточной инфильтраціей вокругъ. Бугорокъ импрегнируется солями извести и холестерина; благодаря послѣднимъ микробъ быстро перестраиваетъ свою оболочку по типу „МВ“ и въ мѣстѣ своего нахожденія, согласно съ закономъ *Du Bois Raymond'a* и *Hermann'a*, заряжается отрицательно сильнѣе, чѣмъ окружающія его гидрофильныя частицы, а это и способствуетъ сильному набуханію ближе къ нему находящейся клѣтки — частицы, получившей названіе гигантской клѣтки *). По тѣмъ же клѣточковымъ канальцамъ, которые не подверглись описанной только-что участи и остались свободными, не измѣнивъ своего

*) Съ гидрофобнаго микроба, несущаго на себѣ болѣе сильный зарядъ, послѣдній заряжаетъ гидрофильную клѣтку, слабѣе заряженную; а само по себѣ заряженіе способствуетъ набуханію.

просвѣта, протекающія по нимъ жидкости направляются изъ легочныхъ тканевыхъ клѣтокъ по лимфатической системѣ. Въ этой послѣдней и микробы и токсины задерживаются такими фильтрами, какъ лимфатическими железами; но эти послѣднія для токсиновъ, быть можетъ, играютъ роль лабораторій, ослабляющихъ ядовитость послѣднихъ. Съ запусѣваніемъ канальцевъ, съ возникновеніемъ коагуляціоннаго процесса, о чемъ говорилось выше, понижается въ пораженной области дисперсность и исчезаетъ свободная поверхность, образуемая частицами и существовавшими стѣнками упомянутыхъ канальцевъ. Съ исчезновеніемъ этихъ поверхностей исчезаетъ и та адсорбціонная энергія, которая удерживаетъ воду въ рамкахъ физиологическаго *optimum*'а. Вся пораженная территорія до нѣкоторой степени обезвоживается, высушивается, а при прогрессирующемъ процессѣ такое высушиваніе, и вслѣдствіе травматизаціи всего организма или большей части его органовъ, приводитъ челоуѣка въ то состояніе, которое сербами мѣтко названо „сушицей“, а у русскихъ — чахоткой. Мы видимъ такимъ образомъ, что съ момента проникновенія въ организмъ ТВС-микробовъ травматизація его вначалѣ происходитъ въ сферѣ невидимыхъ частицъ, въ видѣ молекулярныхъ и мицеллярныхъ измѣненій, въ видѣ бугорковъ, набуханія ткани, ея гиперемии и пр. Въ этомъ періодѣ носители ТВС-микробовъ или вовсе не ощущаютъ никакихъ болей и недомоганій, или эти послѣднія настолько ничтожны, что эти люди не придаютъ имъ никакого значенія и, житейски разсуждая: „не болитъ — не боленъ“, къ врачебной помощи не обашаются; кстатѣ, и большинство врачей въ этомъ періодѣ развитія болѣзни ограничиваются успокоеніемъ паціента на счетъ туберкулеза... Въ дальнѣйшемъ развивается *limphadenitis peribronchial.*, начинается пониженная продукція лимфоцитовъ (5); $\%$ содержаніе липазы понижается. И чѣмъ дальше развивается пониженная функція пищеварительныхъ органовъ и тракта, чѣмъ больше снижается питаніе организма, чѣмъ бо́льшая кишечная аутоинтоксикація, тѣмъ бо́льшій въ организмѣ возникаетъ дефицитъ эмульгаторовъ, тѣмъ больше понижается содержаніе липазы, понижается и процессъ бактериолиза; микробная флора умножается; повышается токсинная травматизація органовъ; въ легочной ткани разыгрывается деструктивный процессъ. Медіастальныя лимфатическія железы долго защищаютъ организмъ и отъ продвиженія микробовъ и отъ токсиновъ, понижая силу дѣйствія послѣднихъ. Онѣ увеличиваются, на что своевременно указываетъ Рентгенъ. Изъ отдѣловъ кровеносной системы травмируются раньше всего подключичныя

вены и больные часто жалуются на боли въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ. За симъ травматизируется правое сердце и пульмональныя артеріи. Паталого-анатомъ въ этомъ періодѣ часто устанавливаетъ расширение праваго сердца и жирно-перерожденную Intima arter. pulmonal. Въ лѣвое сердце кровь поступаетъ окисленной и менѣе токсичной. Такой путь передвиженія токсиновъ по лимфатическимъ путямъ придаетъ всѣмъ „бугорковымъ“ заболѣваніямъ хроническій характеръ, какъ это мы наблюдаемъ при tuberculosis, lepra и отчасти при lues. Вопреки большинству взглядовъ, я считаю, что кровяное русло является путемъ для распространенія ТВС-инфекціи лишь въ позднѣйшей стадіи развитія болѣзни и отнюдь не согласенъ съ мнѣніемъ Klempereger'a, Rosenberg'a, Forsyth'a и друг., будто анализомъ крови на Коховскія палочки можно установить „ранній діагнозъ“ легочной бугорчатки. Въ болѣе поздней стадіи болѣзни палочки были обнаружены въ крови: Ludke — въ 3 случаяхъ изъ 13; Bernard, Debre и Vagon — въ 3 изъ 32; Lehmann — въ 6 изъ 98; Виноградовъ — въ 1 изъ 50; Molves — въ 1 изъ 58, а Kuroschiga нашель въ крови здоровыхъ людей палочки въ 59%! Kahn нашель, что въ крови имѣются образованія, по химическому составу похожія на холестеринъ и лецитинъ, по окраскѣ очень похожія на ТВС-бактеріи. Всѣ эти кропотливыя работы не внесли никакого освѣщенія въ разрѣшеніе вопроса.

VIII. Нѣсколько словъ по поводу профилактики.

Огражденіе пищеварительныхъ органовъ отъ заболѣваній является наиболѣе существенной личной профилактической мѣрой не только въ дѣлѣ борьбы съ распространеніемъ туберкулеза, но, быть можетъ, и въ борьбѣ съ другими инфекціями. Здѣсь, конечно, имѣются въ виду длительныя нарушенія пищеварительной функціи, влекущія за собой упадокъ питанія организма. Каждый человекъ отдаетъ себѣ отчетъ въ томъ, что его здоровье во многомъ зависитъ отъ состоянія его пищеварительныхъ органовъ, и тѣмъ не менѣе нарушенія элементарной діэтики — самое заурядное явленіе. Съ вопросами этого рода подростающее поколѣніе не знакомится ни въ семьѣ, ни въ школѣ. Врачу нерѣдко приходится встрѣчать многочисленныя семейства, поголовно страдающія различными желудочно-кишечными заболѣваніями. Чистый языкъ, здоровый цвѣтъ кожи лица, румянецъ на щекахъ — явленіе исключительное вообще. „Болѣзненность“ проглядываетъ среди школьниковъ, новобранцевъ и той фланкирующей публики, съ которой сталкивается повседневная жизнь. Увы! Такое явленіе далеко не исключительное и среди врачей, большинство которыхъ отличается обложеннымъ

языкомъ, землистымъ цвѣтомъ кожи лица и проч., и проч. Жизнь каждого человѣка изобилуетъ условіями, неблагоприятно вліяющими на пищеварительные органы, и по этой причинѣ огражденіе, о которомъ было упомянуто выше, идеально не достижимо; но жизненный опытъ показываетъ, что къ идеалу и стремиться нѣтъ необходимости. Устраненіе длительной кишечной аутоинтоксикаціи, иначе говоря, нормальное опорожненіе кишечника является въ разбираемомъ вопросѣ минимумомъ требованій, при выполненіи котораго все-же люди достигаютъ глубокой старости. Изъ опрошенныхъ мною до 500 стариковъ отъ 85 до 94 лѣтъ, причемъ 3 человѣка были въ возрастѣ 103, 115 и 122 года, отличались двукратнымъ и минимумъ однократнымъ опорожненіемъ кишечника. Къ выполненію этого требованія людей необходимо приучать съ дѣтства въ семьѣ и въ начальной школѣ. Основы гигиены должны быть обязательнымъ предметомъ преподаванія во всѣхъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ ранговъ и специальностей *). Преподаваніе не должно нагромождаться излишними подробностями. Обеспеченіе населенія пищевыми веществами въ предѣлахъ удовлетворенія его физиологической потребности должно составлять первѣйшую заботу всѣхъ тѣхъ учрежденій, на которыя возлагается забота по борьбѣ съ распространеніемъ туберкулеза среди населенія. Пищевые продукты первой необходимости должны быть доступны каждому человѣку; сейчасъ они не доступны и людямъ со среднимъ достаткомъ. Нельзя признать нормальнымъ обложеніе этихъ продуктовъ въ интересахъ доходности какихъ бы то ни было административныхъ учрежденій. Государства, если для нихъ народное здоровье не фикція, должны удешевить транспортъ этихъ продуктовъ въ населенные центры. Своевременное леченіе людей, заразившихся ТВС-микробами, не выжидающее проявленія позднихъ діагностическихъ признаковъ, указывающихъ на происшедшія уже тканевыя измѣненія въ легкихъ, является третьей и послѣдней профилактической мѣрой, долженствующей не допускать у людей развитіе чахотки, этого главнаго источника распыленія заразы. Эта до крайности простая профилактическая тріада должна разрѣшить нынѣ запутанный вопросъ борьбы съ распространеніемъ туберкулеза въ населеніи. Она сохранитъ государствамъ массу полезныхъ людей, нынѣ преждевременно погибающихъ, и обережетъ государства отъ громадныхъ денежныхъ расходовъ на слишкомъ сложную и себя неоправдывающую упомянутую борьбу.

*) Въ особенности военной.

IX. По поводу общепринятой діагностики легочнаго туберкулеза.

Въ любомъ руководствѣ по внутренней медицинѣ можно прочесть: „При діагнозѣ легочнаго туберкулеза необходимо доказать: 1), что данный субъектъ боленъ, 2), что онъ страдаетъ уплотненіемъ легкаго, 3), что процессъ этотъ туберкулезнаго характера“ *). Первый пунктъ, повидимому, имѣетъ въ виду симулянтовъ-новобранцевъ или мнительныхъ людей. Въ началѣ развивающійся легочный туберкулезъ ни въ чемъ себя не проявляетъ и въ этотъ періодъ люди считаютъ себя здоровыми. Убѣдить ихъ въ томъ, что имъ слѣдовало бы полѣчиться, — напрасная попытка. Больше того, этого не удастся достигнуть даже и въ болѣе поздней стадіи развитія болѣзни: такова психологія больныхъ этого рода, кстати сказать, во многомъ обязанная самимъ врачамъ. Второй пунктъ требуетъ доказать, что изслѣдуемый страдаетъ уплотненіемъ легкаго. Такое уплотненіе, само собой понятно, въ одинъ мигъ появиться не можетъ и со времени проникновенія въ тѣло этого субъекта ТВС-микробовъ несомнѣнно проходитъ достаточно много времени: иногда многіе годы, по истеченіи которыхъ незначительныя тканевыя измѣненія въ видѣ молекулярныхъ и мицеллярныхъ, а за симъ въ видѣ многочисленныхъ бугорковъ, гипереміи, набуханія ткани и проч., въ концѣ концовъ принимаютъ характеръ уплотненія. До сего времени дыханіе еще не принимаетъ явнаго патологическаго характера: оно еще удовлетворяетъ потребности организма; съ момента же возникновенія уплотненія многіе участки легкаго уже содержатъ уменьшенное количество воздуха, а нѣкоторые участки его и вовсе не дышатъ. Легкое съ житейской точки зрѣнія сдѣлалось инвалиднымъ. Уже ли же больные, обращающіеся своевременно за врачевнымъ совѣтомъ, не вправѣ требовать отъ врача, чтобы онъ предупредилъ возникновеніе у нихъ уплотненія легочной ткани?! Вѣдь такое желаніе и законно, и естественно. Оно естественно потому, что каждому человѣку хотѣлось бы обладать здоровыми и не уплотненными легкими; законно оно потому, что больной обращается къ представителю той науки, единственно которому государство предоставляетъ право леченія. Возможно ли удовлетворить это законное и естественное желаніе носителей ТВС-микробовъ при существованіи упомянутаго руководящаго пункта „2“, обязующаго неопытнаго врача дожидаться того именно момента, когда онъ будетъ имѣть возможность доказать, что у больного появилось уплотненіе?

*) Цитировано изъ руководства v. Mering'a.

Ясно, что такой диагнозъ совершенно игнорируетъ интересы больного. Однако и этого мало: диагнозъ по современному учению не можетъ еще считаться точнымъ, ибо уплотненіе можетъ быть вызвано и другими причинами, и врачъ обязанъ еще установить, что это уплотненіе дѣйствительно туберкулезнаго характера. Этотъ вопросъ разрѣшается упомянутымъ раньше пунктомъ „3“, слѣдуя которому врачъ устанавливаетъ микроскопомъ ТВС-бактеріи. Если послѣднія будутъ установлены, диагнозъ считается несомнѣннымъ и совершенно научнымъ. Теперь уже можно, наконецъ, приступить къ лѣченію легочнаго туберкулеза. Я не буду повторяться и скажу коротко. Такого больного я начну лѣчить, вопреки упомянутому авторитетному мнѣнію, задолго до появленія всѣхъ этихъ данныхъ, съ тою исключительною цѣлью, чтобы именно предотвратить ихъ возникновеніе. Я считаю себя не вправѣ ожидать ихъ появленія, ибо это нарушаетъ законные интересы моихъ больныхъ, ищущихъ моей помощи. Коротко говоря, я считаю обязательнымъ лѣчить „туберкулезное состояніе“, а не „чахотку“... Врачъ отнюдь не имѣетъ права выжидать появленія „активнаго“ процесса; наоборотъ, онъ обязанъ, повторяю, его предотвратить. Наступило время, когда мы должны же будемъ отказаться отъ рутины и заблужденій не только по долгу врача, и не только по гуманитарнымъ соображеніямъ, но еще и потому, что вопросъ объ игнорированіи интересовъ больного можетъ въ концѣ концовъ оказаться предметомъ судебнаго разсмотрѣнія. Пересмотръ діагностики туберкулеза — это очередная задача.

Никто не сомнѣвается, что точная діагностика болѣзни желательна, но во многихъ болѣзняхъ эта точность устанавливается слишкомъ поздно. Еще Virchow указалъ, что болѣзнь организма обуславливается болѣзнью составляющихъ его клѣтокъ. О строеніи клѣтки мы уже говорили раньше и указали, что составными элементами клѣтки являются мельчайшія частицы: мицеллы, ихъ составляющія еще болѣе мельчайшія частицы, молекулы, атомы и электроны, и что первопричина заболѣванія начинается, очевидно, въ сферѣ этихъ послѣднихъ. Мы уже также упоминали о законѣ Негтапп'а и указали на ходъ поступательно развивающихся физико-химическихъ реакцій сначала въ сферѣ этихъ невидимыхъ частицъ, а за симъ въ клѣткѣ. Заболѣваніе органа является заключительнымъ стадіемъ процессовъ, протекавшихъ въ его клѣткахъ иногда достаточно продолжительное время, и при томъ эти процессы до поры и времени сокрыты и для ихъ обладателя и для изслѣдующаго его врача. Такимъ, множащіяся и продуцирующіе токсины образомъ, болѣзненный процессъ уже существуетъ, ибо въ данномъ организмѣ существуютъ живые ТВС-микробы, раз-

раздражители, вызывающіе только что упомянутыя физико-химическія реакціи, приводящія данный органъ въ паталогическое состояніе. До настоящаго времени мы не располагаемъ возможностью точно установить несомнѣнный діагнозъ, что въ данный моментъ мы имѣемъ дѣло съ туберкулезнымъ заболѣваніемъ. Однако, если отказаться отъ недостижимой діагностической точности, то съ помощью реакціи Riguet'a мы узнаемъ, что въ данномъ организмѣ внѣдрившіеся ТВС-микробы оставили слѣдъ своего пребыванія въ немъ. Если при этомъ данный субъектъ испытываетъ чувство постояннаго недомоганія, утомляемость, явленія малокровія, раздражительность, ревматоидныя боли, страдаетъ нарушеніемъ пищеварительной функціи, теряетъ въ вѣсѣ, покашливаетъ и по вечерамъ, особенно послѣ движеній, слегка лихорадитъ, на тѣлѣ имѣется *pythiriasis versicolor*, а Рентгенъ обнаруживаетъ хотя бы слегка увеличенныя перибронхіальныя железы, то я считаю всѣ эти данныя достаточными, чтобы лѣчить этого субъекта, какъ туберкулезнаго. Лѣченіе сводится къ возстановленію пищеварительной функціи и до ея возстановленія въ искусственномъ введеніи эмульгаторовъ, исключительно лишь тѣхъ, которыми организмъ располагаетъ въ физиологическомъ состояніи. Въ этомъ періодѣ бациллоношенія никакихъ діагностическихъ тонкостей не требуется и самая методика лѣченія слишкомъ простая. Тонкости относятся не къ „туберкулезу“, а къ „чахоткѣ — *Phtysis'y*“. И объ этомъ рѣчь впереди.

Х. Обоснованіе лѣчебныхъ мѣропріятій и методъ лѣченія.

Предшествующее изложеніе приводитъ къ выводу, что каждый человѣкъ, входящій въ близкое общеніе съ кавернознымъ чахоточнымъ, какъ главнымъ источникомъ заразы, безразлично непосредственно отъ него или инымъ путемъ по его же винѣ, можетъ вовлечь въ себя съ большой степенью вѣроятности распыляемые послѣднимъ ТВС-микробы. Но при физиологическомъ состояніи пищеварительныхъ органовъ организмъ располагаетъ возможностью избавиться отъ проникшей въ него заразы при помощи бактериолиза. Поэтому исходъ этого заболѣванія всецѣло обусловливается состояніемъ его питанія, причемъ если оно нарушено, то безразлично, вызвано ли оно страданіемъ пищеварительныхъ органовъ, недостаткомъ ли полноцѣнной пищи или иными причинами, неблагопріятно вліяющими на пищеварительную функцію и въ конечномъ счетѣ на питаніе. Все только что сказанное слишкомъ просто и очевидно для cadaго и тѣмъ не менѣе едва ли найдется много людей, оберегающихъ свои

пищеварительные органы отъ факторовъ, завѣдомо вредно дѣйствующихъ, и людей, привыкшихъ хотя бы слѣдить за своевременнымъ опорожненіемъ своего кишечника. Въ отношеніи же туберкулеза значеніе пищеварительной функціи мало учитывается даже представителями медицины: такъ значительно было вліяніе ученія R. Koch'a и Cornet'a полагавшихъ, что достаточно проникновенія въ организмъ одного лишь микроба, чтобы въ немъ развился туберкулезъ. Микробъ, такъ сказать, заслонилъ собою человѣческой организмъ. Повидимому, подобное явленіе въ человѣческой психологіи обычно и народная мудрость охарактеризовала его пословицей: „Изъ-за куста не видно лѣса“... Дефекты упомянутого ученія привели ученыхъ къ блужданію отъ микро-организма къ макроорганизму и обратно: врачебная мысль фиксируется то на изслѣдованіяхъ микроба, то человѣческаго организма. Но почему одни, несомнѣнно заражающіеся ТВС-микробами, какъ супруги, изъ которыхъ одинъ кавернозный чахоточный, врачи-спеціалисты, сидѣлки и проч., доживаютъ до глубокой старости, а другіе раньше или позже, но всегда преждевременно, погибаютъ, — до сего времени не выяснено?

Искомая причина сокрыта въ самомъ человѣческомъ организмѣ, въ томъ именно его аппаратѣ, при нормальной работѣ котораго организмъ получаетъ изъ самой обыденной, скромной, но полноценной пищи все необходимое для пополненія своихъ расходовъ, для возстановленія изношенныхъ и поврежденныхъ въ границахъ поправимости тканей, а также для борьбы съ проникающими въ него микробами специальными химическими веществами. Съ этого момента начинается борьба за жизнь между клѣтками-пришельцами и клѣтками-аборигенами. Оба борца ведутъ химическую борьбу. Макроорганизмъ — человѣкъ, — снабженный всѣмъ необходимымъ химическимъ матеріаломъ, что имѣетъ мѣсто у человѣка, обладающаго здоровыми пищеварительными органами и надлежаще питающагося, одерживаетъ побѣду надъ пришельцами. Миръ кишитъ микробами и борьба съ ними ведется неустанно, заканчивающаяся въ только что упомянутомъ случаѣ самоизлѣченіемъ. Такимъ именно путемъ носители ТВС-микробовъ доживаютъ до глубокой старости, никогда не обращаясь къ врачамъ. Если „туберкулезъ“ самоизлѣчимъ, то мы, врачи, зная это, тѣмъ болѣе способны его излѣчить, ибо мы можемъ не допустить организмъ до пониженія въ немъ упомянутыхъ химическихъ веществъ при помощи своевременнаго лѣченія пищеварительныхъ органовъ и, какъ слѣдствіе, мы достигнемъ поднятія усвояемости питательнаго матеріала. Вотъ соображенія, навѣянные на пятомъ десяткѣ лѣтъ научно-практической работой, приведшія меня къ вы-

воду, что долгъ врача предупреждать возникновеніе чахотки, а не дожидаться ея возникновенія. Такъ поступаетъ природа: она лѣчитъ организмъ съ момента проникновенія ТВС-микробовъ; а мы, наоборотъ, ожидаемъ пока не появятся такіа измѣненія въ легкихъ, которыя дѣлаютъ организмъ инвалиднымъ, но зато даютъ намъ возможность установить точный діагнозъ, какъ будто въ этомъ торжество медицины?! Крылатый афоризмъ „Qui bene diagnoscit bene curat“ — для большинства случаевъ это простая игра словъ, а въ отношеніи легочнаго туберкулеза — настоящая трагедія, благодаря которой чахотка ширится. На отрицательную сторону современныхъ діагностическихъ требованій мною было указано въ главѣ IX. Если мы каждому обратившемуся за врачебнымъ совѣтомъ больному, одержимому заболѣваніемъ пищеварительныхъ органовъ, пояснимъ значеніе такого заболѣванія для его здоровья и, въ частности, для туберкулеза, могущаго закончиться чахоткой, и посоветуемъ излѣчить его, то у больного исчезнетъ воображаемый страхъ при словѣ „туберкулезъ“. Такое представленіе о туберкулезѣ сами врачи и культивировали въ обществѣ и въ настоящее время мы должны, наконецъ, отличать понятіе „туберкулезъ“ отъ понятія „чахотка“, ибо туберкулезомъ могутъ быть одержимы если не всѣ, то преобладающее большинство, а изъ туберкулезныхъ страдаетъ чахоткой меньшинство. Мнѣ нѣтъ надобности описывать хорошо извѣстный врачамъ симптомокомплексъ, вынуждающій заподозрить „туберкулезное“ заболѣваніе легкихъ. При наличности заболѣванія пищеварительныхъ органовъ упомянутый симптомокомплексъ уже достаточенъ, чтобы предпринять противотуберкулезное лѣченіе. Но большинство больныхъ, обращающихся къ врачебной помощи, уже имѣетъ тканевыя измѣненія въ легкихъ, устанавливаемыя обычными діагностическими приѣмами. Перкуторный звукъ надъ больной верхушкой съ тимпаническимъ оттѣнкомъ болѣе звонкій, чѣмъ на здоровой сторонѣ, указываетъ на уменьшеніе эластичности ткани подъ вліяніемъ мѣстной гипереміи; это патологическое состояніе подтверждается еще установкой саккадирующаго, жестковатаго и пуэрильнаго дыханія. Въ это самое время Рентгеновскими лучами обычно устанавливается наличность перибронхіальнаго лимфаденита. Этихъ данныхъ совершенно достаточно, чтобы уже приступить къ лѣченію „туберкулезнаго состоянія легкихъ“. Это наиболѣе раннія діагностическія данныя, которыми врачъ можетъ воспользоваться во всякой обстановкѣ, даже не располагающей Рентгеновскимъ аппаратомъ. Въ дальнѣйшемъ у больного мы можемъ обнаружить притупленный перкуторный звукъ, указывающій на сморщиваніе и уплотненіе легочной ткани. Если оно незначительно, то выслушивается неопредѣленное шоро-

ховатое дыханіе. Мы вправѣ заключить, что легочный процессъ подвинулся впередъ; что токсинная травматизація тканей уже не ограничивается неуловимыми для врача молекулярными и мицеллярными измѣненіями, что ткани подверглись уже грубымъ патолого анатомическимъ измѣненіямъ; что уплотненная легочная ткань содержитъ въ себѣ уже меньше воздуха и организмъ уже начинаетъ испытывать послѣдствія недостаточнаго окисленія, что онъ уже потерялъ optimum содержания въ тѣлѣ воды, началъ сохнуть. Туберкулезное состояніе начинаетъ принимать „активный“ характеръ. Въ дальнѣйшемъ мы обнаруживаемъ удлиненный выдохъ, ослабленное бронхиальное дыханіе: хрипы поначалу влажные, мелкіе, не звонкіе, а съ дальнѣйшимъ развитіемъ инфильтрата становящіеся звонкими, крепитирующими. Очевидно, „активный“ процессъ ширится; наступаетъ чахотка. Ожидать ли еще дальнѣйшихъ тканевыхъ измѣненій, чтобы поставить совершенно несомнѣнный діагнозъ легочнаго туберкулеза, или въ интересахъ больного, не выжидая, приступить къ лѣченію? Мой опытъ меня вынуждаетъ отвѣтить отрицательно, т. е. *не ожидать*, ибо описанное состояніе еще излѣчимо; больше того, оно иногда и самоизлѣчимо. Лѣченные въ этой стадіи совершенно оправляются, успѣшно борются съ реинфекціей и, пока вновь не испортятъ пищеваренія, живутъ на положеніи здоровыхъ десятки лѣтъ.

Наоборотъ, если ожидать дальнѣйшаго поступательнаго развитія легочнаго процесса, чтобы „не наложить печати страданія ложно объявленнымъ туберкулезомъ“ (v. Mering), тогда предъ нами возникаетъ уже новая задача: *намъ предстоитъ опредѣлить характеръ состоянія чахоточнаго процесса, а не туберкулезнаго, для котораго время ушло въ безвозвратное прошлое.* Вотъ теперь мы и рѣшаемъ по схемѣ Fränkel'я и Gräff'a: „Односторонній ли процессъ или двухсторонній; локализованъ ли онъ въ верхушкахъ или въ верхней или въ нижнихъ доляхъ; цирротически-нодозная или нодозно-цирротическая или ацинозно-нодозная форма; не лобарно-ли эксудативная, не творожистая-ли или лобарно-творожистая; имѣются ли каверны, много ли ихъ; какой онѣ величины, гдѣ онѣ расположены, имѣются ли сращенія; на какомъ протяженіи, и т. д. — всѣ эти вопросы рѣшаются съ большой дозой субъективизма; на консилиумахъ вызываютъ несогласія, и, что самое главное, являются собою жалкую, совершенно излишнюю, если хотите, преступную претензію на тонкость и точность діагностики такого именно состоянія легкихъ, которое съ древнѣйшихъ временъ окрещено названіемъ „чахотка“, и которое для больного фактически является началомъ конца. Въ смыслѣ примѣненія того или иного лѣчебнаго метода при чахоткѣ всѣ эти данныя необходимы, но кто-же дерзнетъ доказывать

что ради ихъ полученія мы должны держаться вреднаго для больнаго выжиданія? Интересы человѣчества не допускаютъ этого: „промедленіе смерти подобно“! Борьба съ распространеніемъ въ населеніи туберкулезныхъ заболѣваній требуетъ расчленивъ „проблему туберкулеза“ отъ „проблемы чахотки“. Для медицины должна существовать лишь первая, ибо съ ея разрѣшеніемъ въ существованіи второй необходимость отпадаетъ: въ населеніи просто можетъ не оказаться чахоточныхъ. На пятомъ десяткѣ лѣтъ въ этомъ я убѣждался многократно.

Итакъ, у людей съ подорваннымъ питаніемъ прежде всего обращается вниманіе на состояніе пищеварительныхъ органовъ. Если путемъ тщательнаго изслѣдованія у больнаго возможно исключить всѣ другія причины, вызвавшія такое состояніе организма, и врачъ приписываетъ возникновеніе послѣдняго заболѣванія пищеварительныхъ органовъ, то лѣченіе начинается съ послѣднихъ безотносительно къ вопросу о туберкулезѣ: достаточно и того, что нарушенное питаніе служитъ почвой для его возникновенія. Что такое поведеніе врача имѣетъ громадное значеніе въ отношеніи туберкулеза, это само собой разумѣется и всякому больному объ этомъ слѣдуетъ разъяснить; но если при этомъ еще и устанавливаются данныя при помощи обычныхъ перкусіи и аускультации, указывающія на самыя ничтожныя тканевыя измѣненія въ легочной ткани и если тѣмъ болѣе Рентгеновскими лучами подтверждаются эти данныя и устанавливается перибронхіальный лимфаденитъ, тогда одновременно съ лѣченіемъ пищеварительныхъ органовъ приступаютъ и къ искусственному (парэнтеральному) введенію упомянутыхъ раньше эмульгаторовъ съ цѣлью облегчить въ организмѣ бактериализмъ. Въ этомъ періодѣ организмъ еще не терпитъ большого недостатка въ липолитическомъ ферментѣ и лимфоцитозъ уклоняется отъ нормы незначительно. Мнѣ нѣтъ необходимости останавливаться на разсмотрѣніи вопроса о методахъ лѣченія пищеварительныхъ органовъ, о чемъ трактуютъ спеціальныя учебники. Но существуютъ пункты, обходить молчаніемъ которые нельзя.

Если осмотрѣть больныхъ въ любой санаторіи и туберкулезныхъ, пользующихся въ клиникахъ и диспансерахъ, то окажется, что у громаднаго большинства изъ нихъ жевательный аппаратъ не въ порядкѣ: масса недостающихъ зубовъ или каріозныя зубы. Обстоятельство не нуждающееся въ комментаріяхъ: лѣченіе начинаютъ съ исправленія зубовъ. За симъ приходится коснуться хотя бы мимоходомъ вопроса объ усиленномъ питаніи, которое должно оказывать поддержку организму въ его борьбѣ съ туберкулезомъ. Въ такомъ авторитетномъ учебникѣ, какъ v. Mering'a, говорится: „Путемъ

усиленнаго питанія удается увеличить вѣсь больного и на ряду съ этимъ наблюдается либо пріостановка, либо улучшение мѣстныхъ явленій туберкулеза. При этомъ *безразлично, что ѣсть больной; важно лишь, чтобы онъ ѣлъ много*. (Курсивъ мой). Лично я съ этимъ отнюдь не могу согласиться: всякій лишній комокъ при плохомъ пищевареніи — это ядъ для организма. Я настаиваю при этихъ условіяхъ на количественномъ и качественномъ ограниченіи пищи, а если существуетъ отвращеніе къ ней, то и на полномъ прекращеніи ѣды, — на голоданіи. Въ первомъ случаѣ больной послѣ тщательнаго пережевыванія пищи обязанъ всегда вставать отъ ѣды съ не вполне удовлетвореннымъ аппетитомъ, чтобы не перейти границы индивидуальной пищеварительной мощи. Лучше участить дачу пищи, чѣмъ однократно ею перегрузить. При уменьшенной способности эмульгировать и расщеплять жиры (Hepatitis, Cholecystitis и пр.) слѣдуетъ воспретить временно свинное мясо и жиръ, колбасы, копченое, консервы, жирную рыбу, яйца; разрѣшаются бѣлое птичье мясо, телятина, рыба, молочные продукты, коровье масло, зелень, фрукты. Въ этомъ періодѣ заболѣванія пользуются Cholagoga, ферментами: пепсиномъ, панкреономъ. Съ улучшеніемъ пищеварительной функціи постепенно разрѣшаются и запрещенныя въ началѣ вещества. Полное голоданіе, о которомъ упоминалось выше, тянется не больше 2—4 дней. Въ это время дается питье изъ фруктовыхъ соковъ и разбавленное молоко, причемъ кишечникъ тщательно очищается въ предотвращеніе аутоинтоксикаціи. Полное опорожненіе кишечника вообще является главнѣйшей заботой не только на протяженіи, проводимаго лѣченія, но и на все послѣдующее время. Пользованіе длительными высокими клизмами изъ аппарата Gumperson, обычными клизмами и соответствующими слабительными неизбежно и успѣхъ ихъ примѣненія обуславливается врачебнымъ опытомъ.

Спеціальное лѣченіе туберкулеза имѣетъ цѣлью повышение въ организмѣ бактериолиза. Бактериолизъ не наступаетъ при недостаткѣ эмульгаторовъ, способствующихъ къ перестройкѣ бактеріальныхъ оболочекъ по типу „МВ“. Пока пищевареніе не возстановится, организмъ не располагаетъ многими существенно важными для жизни и общеизвѣстными веществами и между ними, надо полагать, холестериномъ, кальціемъ, магніемъ, желѣзомъ. Поэтому до возстановленія физиологической функціи пищеварительныхъ органовъ необходимо вводить парэнтерально холестеринъ и въ случаѣ плохого усвоенія кальція изъ пищеварительныхъ путей вводитъ послѣдній интравенозно или per os. Я пользуюсь холестериномъ съ конца 1911 года. Съ появленіемъ на рынкѣ холестеринаваго препарата Сиппозул'а, я началъ его примѣнять,

но, вслѣдствіе относительно высокой его цѣны, я просилъ фабрику Kemika въ Загребѣ изготовить такой же препаратъ, выпущенный на рынокъ подъ названіемъ Cinnosterin. Послѣдній, освобожденный отъ пошлины въ Сербіи, дешевле. Эти препараты выпущены въ видѣ ампулъ = 5,0 и являютъ собой масляный растворъ холестерина съ добавленіемъ коричной кислоты и камфоры. Дѣйствіе лекарства обязано преимущественно холестерину; и препаратъ ничего не потеряетъ, если его изготовлять безъ упомянутаго Cinnamein'a и безъ насвѣчиванія UV — лучами. Инъекціи производятся черезъ день по 1 ампулѣ въ верхній квадрантъ glutei Мѣсто инъекціи массируется. Курсъ лѣченія зависитъ отъ степени развившагося процесса. У „подозрительныхъ по ТВС“ обычно лѣченіе ограничивается 24—30 ампулами; при развившихся инфильтратахъ иногда инъекцируется 30 ампулъ, а за симъ послѣ 2—3 недѣль перерыва повторяютъ тотъ же курсъ лѣченія. Когда t^0 падаетъ до нормы, исчезаютъ хрипы и кашель, и, когда можно предполагать, что ТВС-флора значительно уменьшилась или исчезла, тогда имѣются основанія принять мѣры для рассасыванія инфильтратовъ. Съ этой цѣлью возможно использовать или протеиновую терапію (молоко, Cibalbumin, Yatren-Casein и пр.) или аутогемотерапію, или низшія кислоты фосфора — H_3PO_3 и H_3PO_2 въ видѣ препарата Phosphacid. Опасаться аутогемотерапіей диссимилировать заразу нѣтъ основаній: въ это время въ крови ТВС-палочки, по моимъ наблюденіямъ, никогда не обнаруживаются. На протяженіи производимыхъ инъекцій ведется педантичное лѣченіе пищеварительныхъ органовъ и въ то же время назначаются препараты Calcium'a въ малыхъ дозахъ. Съ улучшеніемъ пищеваренія разрѣшаютъ яйца, икру, жирное молоко и назначаютъ въ пищу въ удобоваримой формѣ вещества, богатая кальціемъ ¹⁾ и желѣзомъ ²⁾. Въ это время необходимость въ парэнтеральномъ введеніи лекарствъ уже отпадаетъ, ибо организмъ пріобрѣтаетъ способность всѣ вещества, необходимые въ его борьбѣ съ микробами, добывать изъ пищи. При всякомъ повторномъ нарушеніи пищеварительной функціи возможна новая инфекция со всѣми послѣдствіями, о которыхъ упоминалось уже неоднократно. Изъ всего изложеннаго возможенъ одинъ лишь выводъ, что состояніе пищеварительныхъ органовъ, ихъ функціи опредѣляютъ состояніе здо-

1) На 100,0 сухого вещества продукта содержитъ СаО въ мгтм.: мясо — 29, черный хлѣбъ — 77, картофель — 100, куриный бѣлокъ — 130, вишни — 136, сливы — 166, желтокъ — 380, малина — 404, апельсины — 575, капуста — 717, коровье молоко — 1510 и т. д.

2) Яблоки содержатъ желѣза — 1,9, груши — 2,0, финики — 2,1, молоко — 2,3, малина — 3,9, капуста — 4,5, орѣхи — 4,3, хлѣбъ — 5,5, картофель — 6,4, фасоль — 8,3, свекла — 8,6, чечевица — 9,5, мясо — 17,0, шпинатъ — 33,39, кровь — 226 и т. д.

ровья и обуславливаютъ вопросъ, быть ли данному субъекту туберкулезнымъ или чахоточнымъ.

Пока въ населеніи существуютъ чахоточные, чахотку необходимо лѣчить, но чахоточная проблема и лѣчение чахоточныхъ въ мое разсмотрѣніе не входятъ. Лѣчение туберкулеза исключаетъ возможность заболѣванія чахоткой. Препараты золота, вошедшіе въ практику чисто эмпирически, я считаю совершенно излишними, такъ какъ они относятся къ группѣ эмульгаторовъ, не имѣющихъ не только никакихъ преимуществъ передъ естественными, раньше упомянутыми, но еще и препаратами, по цѣнѣ слишкомъ дорогими. Я полагаю, что эмпирическіе поиски жизненныхъ элексировъ пора покинуть и полезнѣе исходить въ поискахъ изъ соображеній строго научнаго характера, изучая путь „самоизлѣченія“, который и долженъ служить указаніемъ и на выработку лѣчебнаго способа

XI. Значеніе климата и соціальныхъ факторовъ для заболѣванія бугорчаткой.

Предшествующее изложеніе выяснило, что основной причиной легочнаго заболѣванія, вызываемаго ТВС-микробами, необходимо признать нарушение пищеварительной функціи, приводящее къ длительному пониженному питанію, и, какъ слѣдствіе, къ сниженію % содержанія эмульгаторовъ и необходимыхъ ферментовъ для осуществленія бактериолиза. Такимъ образомъ очевидно, что причину заболѣванія туберкулезомъ вовсе не слѣдуетъ искать въ окружающихъ заболѣвшаго условіяхъ, а главнымъ образомъ въ немъ самомъ, И врачи, и воспитанная ими публика обычно главное значеніе приписываютъ чистотѣ воздуха, климату, соціальнымъ, психическимъ факторамъ и проч.; состоянію же пищеварительной функціи, какъ доминирующему фактору, заслуживающей оцѣнки не придавалось и нынѣ еще не дается. А между тѣмъ всѣ вышеперечисленные факторы играютъ лишь второстепенную роль и то постолько, поскольку они могутъ вліять на пищеварительную функцію и раціональное питаніе. Не только каждый врачъ, но и каждый культурный человекъ можетъ легко убѣдиться въ томъ, что чахоткой заболѣваютъ люди, живущіе и въ лачугахъ и въ роскошнѣйшихъ домахъ и дворцахъ, удовлетворяющихъ самымъ строгимъ требованіямъ гигіены; отъ чахотки гибнутъ и подъ палящими лучами южнаго солнца, и аборигены Гелуана и Цейлона, и Суматры, и южной Японіи, въ мѣстностяхъ, чарующихъ своимъ климатомъ, и на Ривьерѣ, и въ Крыму, и въ калмыцкихъ ковылевыхъ степяхъ, и въ гористой Швейцаріи, и въ южномъ Тиролѣ; отъ нея погибаютъ и бѣдняки, и богачи, и члены

императорскихъ, фамилій, и ассистенты клиникъ по внутреннимъ болѣзнямъ, и врачи-спеціалисты по лѣченію туберкулеза, и *horribile dictu*, профессора по той же спеціальности, и хилые, и полные, и недоростки и атлеты; чахотка не щадитъ никого изъ нихъ. И наряду съ этимъ мнѣ извѣстны многіе евреи гор. Бердичева, владѣльцы тряпичныхъ складовъ, перебиравшіе тряпье своими руками на протяженіи многихъ десятковъ лѣтъ, прожившіе рядомъ съ громадными кучами этогохлама также многіе десятки лѣтъ, которые доживали до 80 и 86 лѣтъ. По статистикѣ Cognet'a чистильщики Берлинскихъ улицъ гибнутъ отъ чахотки въ меньшемъ количествѣ, чѣмъ рабочіе на хорошо обставленныхъ фабрикахъ. Это обстоятельство привело такого знатока туберкулеза какъ v. Науек, къ заключенію, что „зараза, вдыхаемая съ пылью, не играетъ первенствующей роли въ дѣлѣ распространенія туберкулеза“. Но эти чистильщики обычно живутъ въ обстановкѣ, едва ли удовлетворяющей самымъ скромнымъ требованіямъ гигиены; вѣроятно и не Богъ вѣсть, какъ питаются. Почему же v. Науек не заключилъ, что и плохія санитарныя условія жизни и неважное питаніе также не играютъ значенія для заболѣванія туберкулезомъ. Статистика — это мячъ въ рукахъ жонглера. Статистика моей свѣше сорокалѣтней практической дѣятельности убѣдила меня въ томъ, что нѣтъ ни единого изъ заболѣвшихъ чахоткой, у котораго не было бы заболѣванія пищеварительныхъ органовъ, и которые не страдали бы запорами. Вотъ это обстоятельство давно уже наводило меня на размышленіе о томъ, что антисанитарныя условія, окружающія челоѣка, въ отношеніи заболѣванія туберкулезомъ, должны играть меньшую роль, чѣмъ внутреннія анти-санитарныя условія, имѣющія мѣсто у лицъ, страдающихъ запорами и вообще болѣющихъ органами пищеваренія. Статистическія данныя имѣютъ факультативную цѣнность, да и то въ томъ лишь случаѣ, если они составляются безъ преднамѣренной цѣли, когда во имя доказательства, цифры не привлекаются за волосы. По совѣсти говоря, статистикой злоупотребляютъ... Нерѣдко цѣнность большихъ статистическихъ цифръ меньше цѣнности единичныхъ фактовъ. Наслѣдникъ Россійскаго Престола Георгій заболѣваетъ легочнымъ туберкулезомъ. Съ момента заболѣванія пользуется совѣтами медицинскихъ свѣтилъ; для него отстраивается спеціальнй дворецъ-санаторіумъ въ Абастуманѣ съ прекраснымъ климатомъ. Здѣсь использованы знанія архитектуры и гигиены. Къ услугамъ больного создана образцовая обстановка съ соотвѣтствующей врачебной помощью. И тѣмъ не менѣе легочная чахотка прогрессируетъ и больной отъ нея гибнетъ.. Этотъ и подобные ему факты, на ряду съ многочисленными заболѣваніями чахоткой врачей, заслуживаютъ самаго серьезнаго вниманія представителей нашей

науки. Вѣдь туберкулезъ не „острое“ заболѣваніе, а длящееся многіе годы. Не всегда возможно предотвратитъ развивающійся сепсисъ, параличъ сердца и въ этомъ родѣ, но болѣзнь, развивающуюся на протяженіи многихъ лѣтъ, казалось бы, необходимо было бы не допускать до такого развитія, когда мы оказываемся въ существѣ дѣла безсильными. Я еще разъ повторяю, что чахотка никого не щадитъ; я давно уже ищу отвѣта на вопросъ, въ чемъ скрывается та сущность, которая уравниваетъ по отношенію туберкулеза людей, такъ рѣзко отличающихся между собой по своему матеріальному, соціальному положенію, по климатическимъ и всѣмъ прочимъ условіямъ, въ которыхъ они живутъ. И многолѣтнія мои наблюденія, и по возможности объективная оцѣнка всѣхъ тѣхъ факторовъ, которымъ приписывается значеніе въ дѣлѣ заболѣванія туберкулезомъ, и желаніе оправдать данное мною клятвенное факультетское обѣщаніе — привели меня къ выводу, что этимъ уравнивающимъ „нѣчто“ является преимущественно состояніе пищеварительныхъ органовъ: функція послѣднихъ можетъ быть нарушена положительно у каждаго человѣка. Солнечнымъ лучамъ, климату, чистотѣ воздуха мною придается значеніе, какъ факторамъ въ общегигіеническомъ смыслѣ, но изъ-за нихъ я не возьму на себя смѣлость подозрительныхъ по туберкулезу и туберкулезныхъ переселять изъ городовъ въ села и тѣмъ болѣе въ дорогѣ стоящія климатическія станціи; ихъ лѣченіе должно вестись на мѣстѣ и лишь тѣхъ изъ нихъ, которые по индивидуальнымъ причинамъ не могутъ его проводить точно, необходимо отправлять въ санаторіумъ. Иное дѣло съ кавернозными чахоточными: для нихъ пыльный воздухъ губеленъ въ смыслѣ повышения симбіотической инфекции, благодаря которой дни ихъ существованія сокращаются. Отправка такого рода больныхъ оправдывается больше гуманитарными соображеніями, чѣмъ лѣчебными. Близкіе должны быть освѣдомлены съ истиннымъ положеніемъ дѣла: все равно катастрофическая развязка расшифруетъ врачебное безсиліе.

Громадное большинство туберкулезныхъ излѣчивается силами природы, такъ сказать, въ самой скромной домашней обстановкѣ и при томъ въ условіяхъ, далеко не удовлетворяющихъ даже скромнымъ требованіямъ гигиены, для большинства людей представляющимъ собой лишь *pium desiderium*.

Практическій врачъ не можетъ съ такимъ обстоятельствомъ не считаться и обязанъ слѣдовать по пути, указываемомъ Природою.

В ы в о д ы

1. Мы обязаны признать въ тканевыхъ клѣткахъ существованіе ея собственной канализаціонной сѣти, образуемой

просвѣтами и щелями, находящимися между частицами, составляющими тѣло клѣтки, и никогда вплотную не прилегающими другъ къ другу. По ней совершается сокообращеніе въ клѣткѣ, подвозъ питательнаго матеріала и удаленіе продуктовъ жизненнаго обмѣна.

2. Каналы этой сѣти имѣютъ неизмѣримо малый діаметръ. Они суть: межклѣточковые, межмицеллярные, межмолекулярные, межатомные.

3. Эти каналы могутъ совершенно закупориваться проникшими въ клѣтку микробами; могутъ уменьшать свой просвѣтъ вслѣдствіе возникающихъ въ нихъ процессовъ набуханія; могутъ уменьшаться и закупориваться образующимися коагулатами.

4. Во всѣхъ этихъ случаяхъ сокообращеніе въ клѣткахъ или замедляется, или вовсе прекращается. Клѣтки подвергаются голоданію, аутоинтоксикаціи, перерожденію и гибели. Этимъ путемъ исчезаетъ значительная часть неизмѣримо громадной площади канализаціонной сѣти, гибнутъ миріады клѣтокъ.

5. Такой процессъ возникаетъ съ момента проникновенія ТВС-микробовъ въ организмъ и тянется многими годами, но клинически онъ не устанавливается и о немъ никогда не поднимается вопросъ.

6. Въ этомъ періодѣ организмъ самъ по себѣ ведетъ борьбу съ микробами путемъ бактериолиза и если онъ располагаетъ эмульгаторами и ферментами, то ему удается уничтожить на то или иное время микробную флору, реституировать поврежденныя ткани, удалить отмершія и организмъ продолжаетъ жить многіе годы, доживая до глубокой старости, часто безъ врачебной помощи. На протяженіи жизни организмъ много разъ заражается ТВС-микробами и тѣмъ не менѣе самоизлѣчивается исключительно благодаря тому, что природа не медлитъ и приступаетъ къ борьбѣ съ ТВС-микробами тотчасъ же послѣ ихъ проникновенія въ организмъ. Эту стадію я называю Tuberculosis, ибо она характеризуется временнымъ ношеніемъ ТВС-микробовъ, а паталого-анатомически — описаннымъ выше процессомъ, развитіе котораго не идетъ далѣе гибели клѣтокъ, исчезанія клѣточной канализаціонной сѣти, высыпанія бугорковъ и ихъ относительно небольшого распада.

7. При отсутствіи упомянутыхъ благопріятныхъ условій организмъ не подвергаетъ микробную флору бактериолизу; она прогрессивно размножается; происходитъ трамватизація клѣтокъ, омываемыхъ соками, въ которыхъ содержится токсинъ; постепенно возникаютъ грубыя паталого-анатомическія измѣненія тканей, на ряду съ этимъ появляются различныя

функціональнія нарушенія въ органахъ; туберкулезъ переходитъ въ чахотку, которую мы устанавливаемъ нашими діагностическими приёмами.

8. Природа лѣчитъ Tuberculosis; врачи — Phtysis.

9. Зараза диссимируется фтизиками.

10. Основной цѣлью лѣченія должно быть лѣчение Tuberculosis, чтобы предотвратить возникновение Phtysis.

11. Предотвращеніе возникновенія чахотки осуществляется путемъ возстановленія нарушенной пищеварительной функціи во всемъ объемѣ этого понятія, а за симъ уже доставкой организму полноценной пищи, изъ которой организмъ, помимо необходимаго пластическаго матеріала, добываетъ и тотъ химическій матеріалъ, при наличности котораго онъ ведетъ успѣшную физико-химическую борьбу съ микробами.

12. Правильный подходъ къ разрѣшенію вопроса о лѣченіи легкихъ, зараженныхъ ТВС-микробами, ставитъ передъ врачомъ не одну проблему туберкулеза, какъ это принято въ медицинѣ, а двѣ проблемы: проблему Tuberculosis и проблему Phtysis.

13. Разрѣшеніе же первой исключить вторую: чахоточныя заболѣванія исчезнуть.

14. Успѣшность борьбы съ распространеніемъ туберкулеза среди населенія можетъ быть достигнута выполненіемъ слѣдующихъ трехъ требованій: путемъ раціональнаго воспитанія массъ въ смыслѣ умѣнія охранять свои пищеварительныя органы; удешевленіемъ стоимости пищевыхъ продуктовъ первой необходимости; своевременнымъ лѣченіемъ туберкулезныхъ. Эта триада исчерпываетъ всю сущность профилактики.

Л и т е р а т у р а.

1. Clowes prof. Koll. Zeit. 15. 123. 1924. Journal Phys. Chem. 20. 407. 1916.

2. Seifritz. Americ. Journal of Physiol. 66. 224. 1923.

3. Freundlich und Seifritz. Zeit f. Physik. Chemie. 104. 233. 1923.

4. Акацатовъ Н. — Амебоизмъ и фагоцитозъ въ освѣщеніи физико-химическихъ законовъ. Труды IV Съѣзда Русскихъ Академ. организ. въ Бѣлградѣ

5. Акацатовъ Н. — Лейкоцитарная формула крови, какъ показатель состоянія туберкулезнаго процесса. „Туберкулезъ“. Журналь С.-Петербурга. № 11. 1913 г.

6. Акацатовъ Н. — Ретикуло-эндотеріальная система и ея отно-

шеніе къ имунитету въ освѣщеніи физико-химіи. „Врачебное Обозрѣніе“. № 7—8. 1928 г. Берлинъ.

7. Акацатовъ Н. — Нѣкоторыя фізіологическія и патологическія явленія въ освѣщеніи физико-химіи. „Практическій врачъ“. Берлинъ. № 3. 1927 г.

8. Акацатовъ Н. — Запаљење и његово лечење у светлости учења физико-химије. „Медицински Преглед“. Београд. 1928 г.

(Воспаленіе и его лѣченіе въ освѣщеніи ученія физико-химіи. „Медицинское Обозрѣніе“. Бѣлградъ. 1928 г.).

Ю. Н. Вагнеръ.

ЗАМѢТКА О ИНТЕРСЕГМЕНТАЛЬНЫХЪ ЛОПАСТЯХЪ ИЗМѢНЕННЫХЪ СЕГМЕНТОВЪ У САМЦЕВЪ БЛОХЪ.

Выясняя морфологическія детали видоизмѣненныхъ сегментовъ блохъ, я попутно обратилъ вниманіе на своеобразный аппаратъ самцевъ, существующій у многихъ *Ceratophyllinae* и состоящій изъ нѣжныхъ лопастей и особаго органа неизвѣстнаго назначенія. Лопасты эти помѣщаются между 8. и 9. брюшными стернитами, т. е. интерсегментально, а упомянутый органъ лежитъ возлѣ боковыхъ угловъ основанія 8. стернита. О немъ въ афаниптерологической литературѣ нѣтъ никакихъ указаній, что же касается интерсегментальныхъ лопастей, то о нихъ упоминаетъ въ одной изъ своихъ работъ только Rothschild *), но и это единственное указаніе слишкомъ кратко. Авторъ говоритъ только (стр. 541), что расширенное основаніе 8. стернита у *Ceratophyllus gallinae* имѣетъ „on each side a membrane covered with minute hairs, the outline of which I have not yet succeeded in determining“. Повидимому Rothschild не могъ хорошо рассмотреть очертанія лопастей въ силу ихъ прозрачности; для того, чтобы яснѣе ихъ видѣть, лучше разсматривать отпрепарированный 8. и 9. стерниты безъ просвѣтленія, т. е. въ водѣ или спиртѣ. Рисунки, приводимые Rothschild'омъ, также не точны. Кромѣ *Ceratoph. gallinae* Schg. онъ рисуетъ (безъ всякаго указанія въ текстѣ) 8. стернитъ съ перепончатыми базальными лопастями — у *C. columbae* Steph., *C. hirundinis* Sam. и *C. stux* Roth. Болѣе удачно изображены имъ лопасти у *C. hirundinis*, что я объясняю себѣ тѣмъ, что у ласточкиной блохи онѣ сильнѣе хитинизированы и поэтому ихъ контуръ рѣзче замѣтенъ.

Эти лопасти представляютъ разрастаніе складки соединительной мембраны между 8. и 9. стернитами, которая идетъ

*) Rothschild, Notes on *Pulex avium* Tasch., въ Novit. Zoolog., VII, 1900.

поперекъ тѣла и прикрѣпляется одною своею стѣнкою къ склериту 8. стернита, а другою — къ вертикальнымъ вѣтвямъ 9. стернита. Если складка эта невысокая и не образуетъ выдающихся лопастей, какъ на примѣръ у *Oropsylla silantiewi* Wagn., или если 8. стернитъ широкій и вполнѣ покрываетъ ее, какъ напр. у *Frontopsylla semura* Wagn. et Ioff., то на препаратахъ in toto она не видна, но при препарировкѣ ее можно констатировать и у видовъ съ редуцированнымъ 8. стернитомъ, у которыхъ она вообще очень слабо развита, какъ напр. у *Ceratophyllus fasciatus* Bosc. (см. рис. 3, m).

Наоборотъ, вышеупомянутый органъ (x) я нашелъ не у всѣхъ изслѣдованныхъ мною *Ceratophyllinae*; напр., я не могъ его найти въ соответственномъ мѣстѣ у *Frontops. semura*, хотя у даннаго вида интерсегментальныя лопасти, скрытыя подъ 8. стернитомъ, довольно ясно развиты. Далѣе, я не нашелъ его также у *Ophthalmopsylla volgensis* Wagn. et Ioff., у которой, повидимому, роль лопастей играетъ самъ 8. стернитъ, имѣющій специальную форму. Можетъ быть, и у этихъ видовъ *Ceratophyllinae* органъ „x“ существуетъ, только въ другомъ мѣстѣ тѣла. Это могли бы рѣшить разрѣзы на микротомѣ, которыхъ я, за недостаткомъ матеріала, не дѣлалъ, ограничившись препарированіемъ и иногда окрашиваніемъ соответственныхъ частей тѣла.

Для общаго знакомства съ интересующимъ насъ аппаратомъ, можетъ служить *Cerat. hirundinis* (ласточкина блоха). Склеритъ 8. стернита самца *C. hirundinis*, какъ у другихъ птичьихъ *Ceratophylli*, состоитъ изъ базальной пластинки (рис. 1, b), которая съ каждой стороны продолжается въ боковой отростокъ (p), а назадъ переходитъ въ длинно-вытянутое, сжатое съ боковъ, collage (c). Къ своему заднему концу collage расширяется; здѣсь оно снабжено на наружной (вентральной) поверхности многочисленными субапикальными щетинками (s) и несетъ по бокамъ двѣ апикальныя перепончатая лопасти (y), характерной формы, съ бахромчатымъ краемъ. Съ каждой стороны между основаніями 8. и 9. стернитовъ интерсегментальная мембрана образуетъ большую лопасть въ формѣ чешуйки (l). У *Cer. hirundinis* лопасть имѣетъ форму треугольника съ широко округленною вершиною (апикальнымъ угломъ). Внѣшній уголъ основанія треугольника также выдается (u), а въ направленіи къ другому углу основанія стѣнка лопасти незамѣтно переходитъ въ остальную часть интерсегментальной мембраны. Каждая лопасть съ наружной поверхности, соответственно поверхности брюшка, болѣе выпукла, а внутренняя ея поверхность болѣе плоская. Какъ остальная поверхность интерсегментальной мембраны, такъ и поверхность лопасти не гладкая, а ша-

греневая, т. е. покрыта мелкими возвышенностями, но у лопасти они болѣе высоки и каждое изъ нихъ выдается у *C. hirundinis* въ видѣ микроскопическаго не длиннаго острія

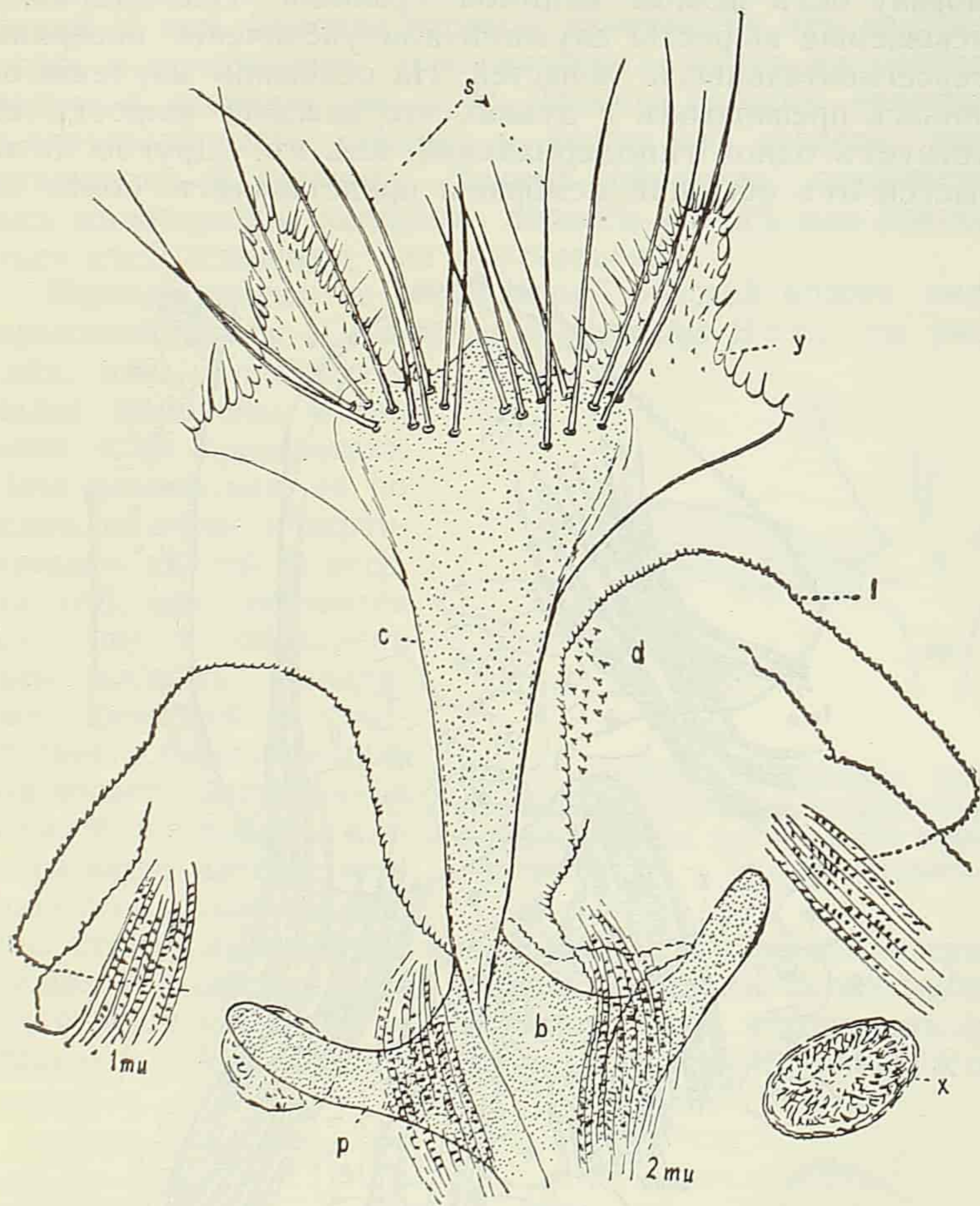


Рис. 1. *Ceratophyllus hirundinis*. 8. стернитъ съ интерсегментальными лопастями и органомъ „х“. *b* — базальная часть стернита, *c* — collage, *d* — выросты поверхности лопастей, *l* — интерсегментальная лопасть, *mi* — пучки мышечныхъ волоконъ, *p* — боковыя вѣтви 8. стернита, *s* — апикальныя щетинки, *x* — капсула (органъ „х“), *y* — апикальныя лопасти стернита.

(это изображено въ мѣстѣ *d* на рис. 1). Эти микроскопическіе выступы расположены рядами. У другихъ *Ceratophyllinae* съ хорошо развитыми лопастями — къ свободному краю, герп. концу ихъ, — эти выросты удлиняются, принимая характеръ волосковъ (см., напр., рис. 7 — у *Rostropsylla*), какъ

ихъ неточно и обозначилъ Rothschild (l. c., „hairs“); отъ настоящихъ волосковъ (герм. щетинокъ) они отличаются тѣмъ, что не имѣютъ такъ наз. „Basalring“, т. е. переходятъ въ мембрану безъ всякой видимой границы. Несомнѣнно, что описываемые выросты служатъ для увеличенія поверхности интерсегментальныхъ лопастей. На основаніи изученія окрашенныхъ препаратовъ я думаю, что каждый выростъ соответствуетъ одной гиподермальной клѣткѣ. Другое отличіе лопастей отъ обычной мембраны представляетъ болѣе силь-

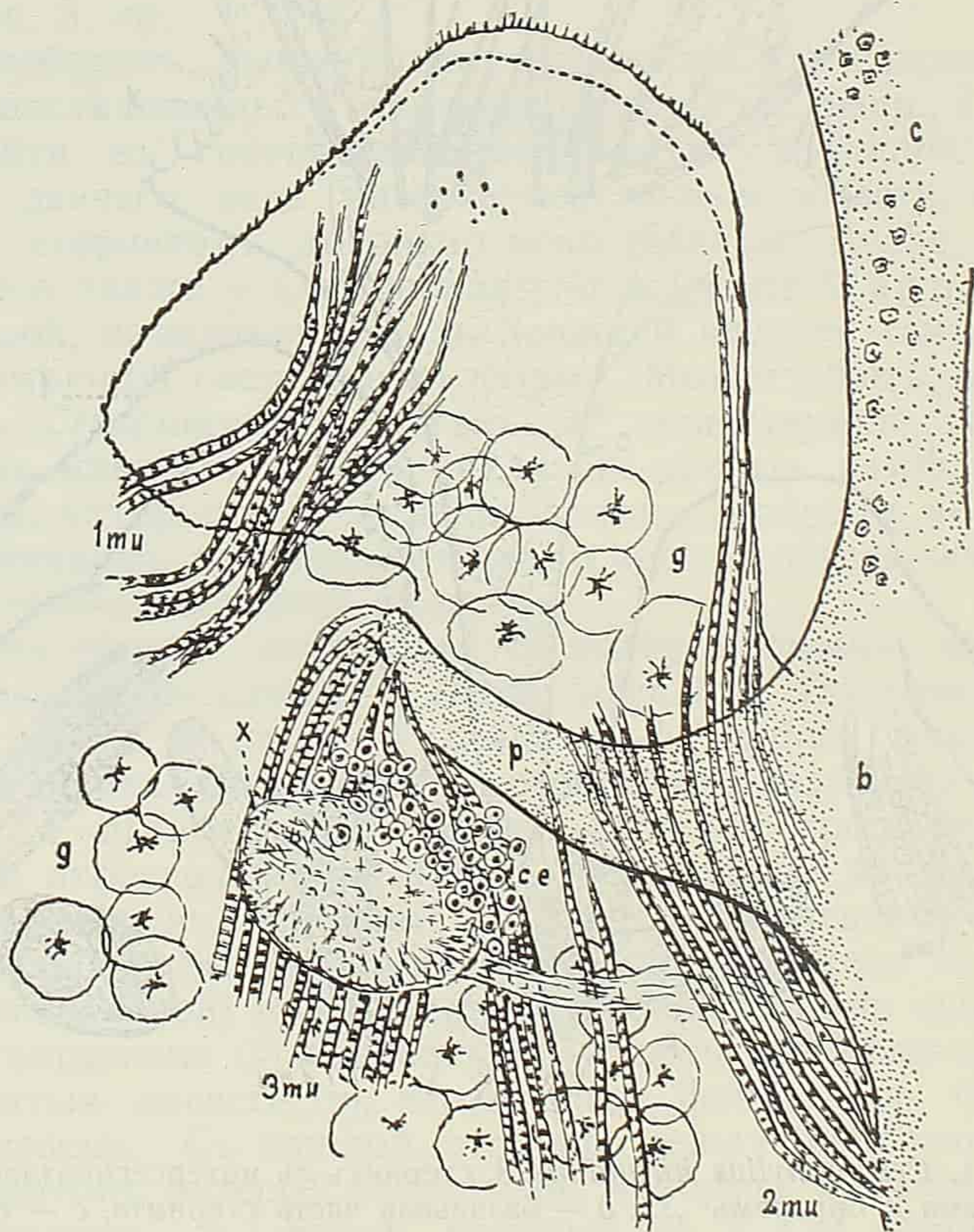


Рис 2. *Cerataphyllus hirundinis* Одна изъ интерсегментальныхъ лопастей съ частью 8. стернита при большемъ увеличеніи. *ce* — клѣтки возлѣ органа „*x*“, *g* — жировыя клѣтки. Остальныя обозначенія какъ на рис. 1.

ная хитинизація ихъ стѣнокъ. У *Cer. hirundinis* хитинизирована большая часть ихъ поверхности и слегка окрашена въ желтый цвѣтъ. У другихъ изслѣдованныхъ видовъ хитинизація, независимо отъ ея степени, охватываетъ меньшее про-

странство. Къ болѣе хитинизированнымъ мѣстамъ прикрѣпляются мышечныя волокна, входящія внутрь лопасти. На рис. 1 и 2 видно, что у *C. hirundinis* внутрь лопасти заходятъ два пучка мышечныхъ волоконъ: внутренній (2 *mi*) и наружный (1 *mi*). Волокна первого начинаются отъ внутренняго края и внутренняго угла лопасти и идутъ къ основанію склерита 8. стернита (рис. 2, *b*). Волокна второго начинаются отъ наружной части стѣнокъ и, выйдя изъ лопасти, заворачиваются къ 9. стерниту. Такимъ образомъ, сокращеніемъ этихъ мышечныхъ волоконъ лопасти могутъ или приподниматься къ 9. стерниту, или опускаться.

Первый намекъ на образованіе лопастей можно видѣть у крысиной блохи (*Ceratophyllus fasciatus* W o s s., см. рис. 3).

У нея, какъ упомянуто, складка мембраны очень низкая и на препаратахъ *in toto* незамѣтная, но по бокамъ, въ области вертикальныхъ вѣтвей 9. стернита (*rv*), она становится шире (*m*) и образуетъ здѣсь выступъ. Повидимому послѣдній и соответствуетъ чешуйкообразной лопасти ласточкиной блохи. Можетъ быть, слабое развитіе интерсегментальной складки у *C. fasciatus* стоитъ въ связи съ недоразвитіемъ у него 8. стернита.

Вообще, эта складка слабо развита у видовъ *Ceratophyllus* съ отсутствующимъ, гесп. рудиментарнымъ 8. стернитомъ (у *C. barbarus* J. et R., *consimilis* W a g n., *fidus* J. et R., *henleyi* R o t h.,

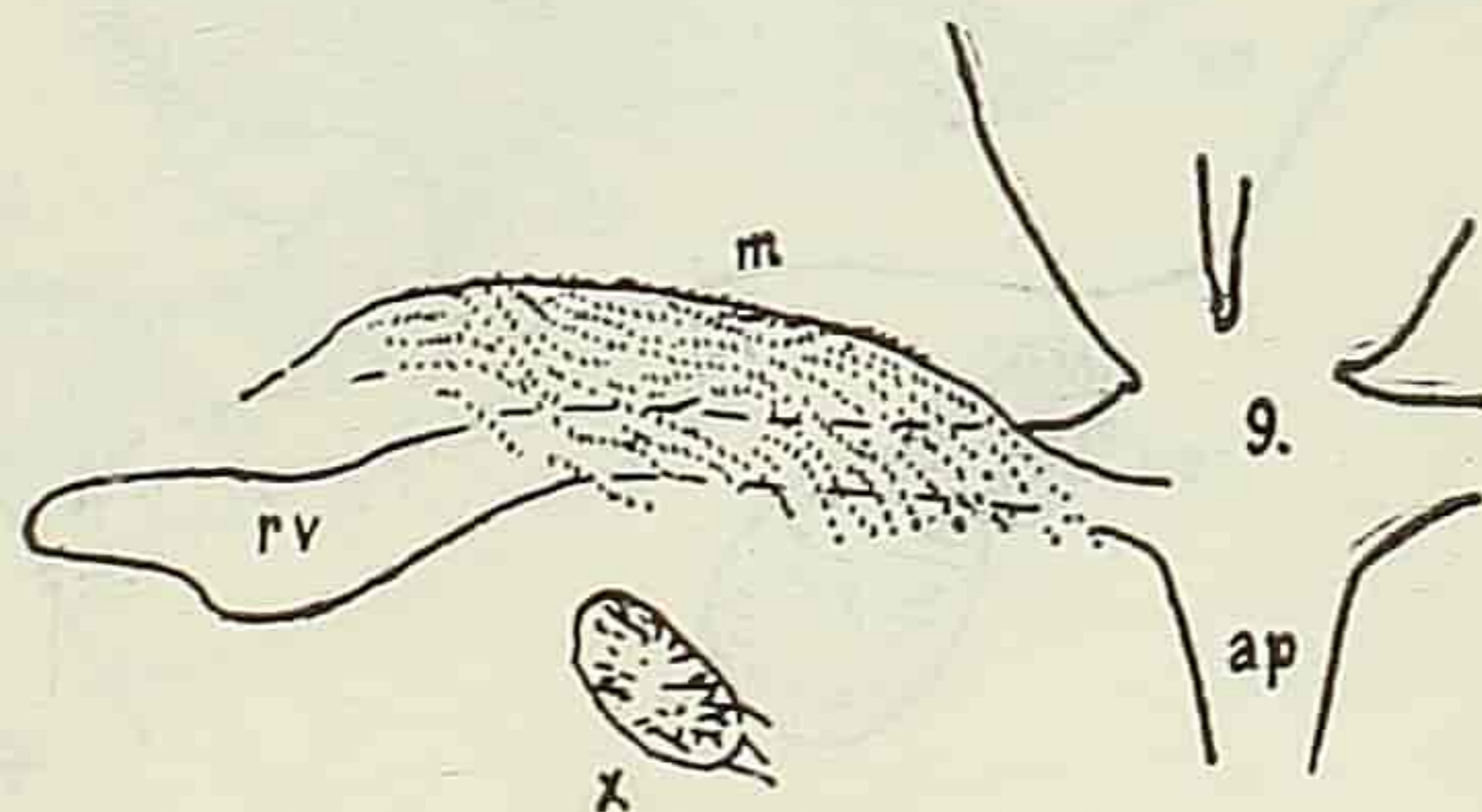


Рис. 3. *Ceratophyllus fasciatus*. Часть 9. стернита (9.) съ зачаткомъ интерсегментальной лопасти (*m*) на вертикальной вѣтви (*rv*) стернита. *ap* — апофиза стернита.

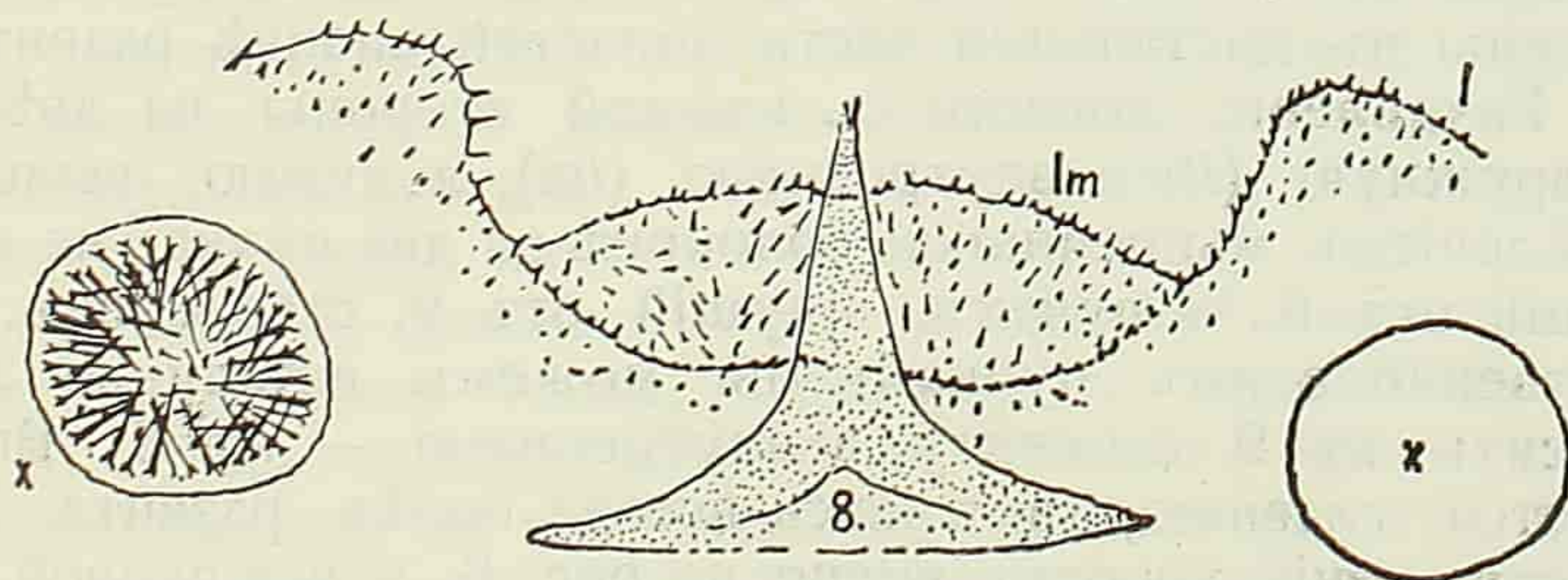


Рис. 4. *Ceratophyllus sciurogum*. 8. стернитъ (8) съ интерсегментальной мембраной (*l*, *lm*) и органомъ „*x*“, съ вентральной стороны.

laeviceps W a g n., *londiniensis* R o t h., *maurus* J. et R., *mokrzenskyi* W a g n., *monstrosus* W a g n., *tersus* J. et R.). У бѣличьей

блохи, *Ceratophyllus sciurorum* Scht., у которой 8. стернитъ (рис. 4, 8) тоже рудиментарный, но все-же сильнѣе развитъ, чѣмъ у перечисленныхъ видовъ, вытягиваніе складки въ формѣ двухъ боковыхъ лопастей (*l*) выражено яснѣе. Между ними замѣтна средняя часть складки, образующая какъ бы самостоятельную складку (*m*). Можетъ быть эта средняя часть соотвѣтствуетъ тому участку лопастей ласточкиной блохи, которому принадлежитъ внутренній пучекъ мышць. Мое предположеніе основывается на отношеніи, наблюдаемомъ у нѣкоторыхъ другихъ блохъ, напр. у *Ceratophyllus*

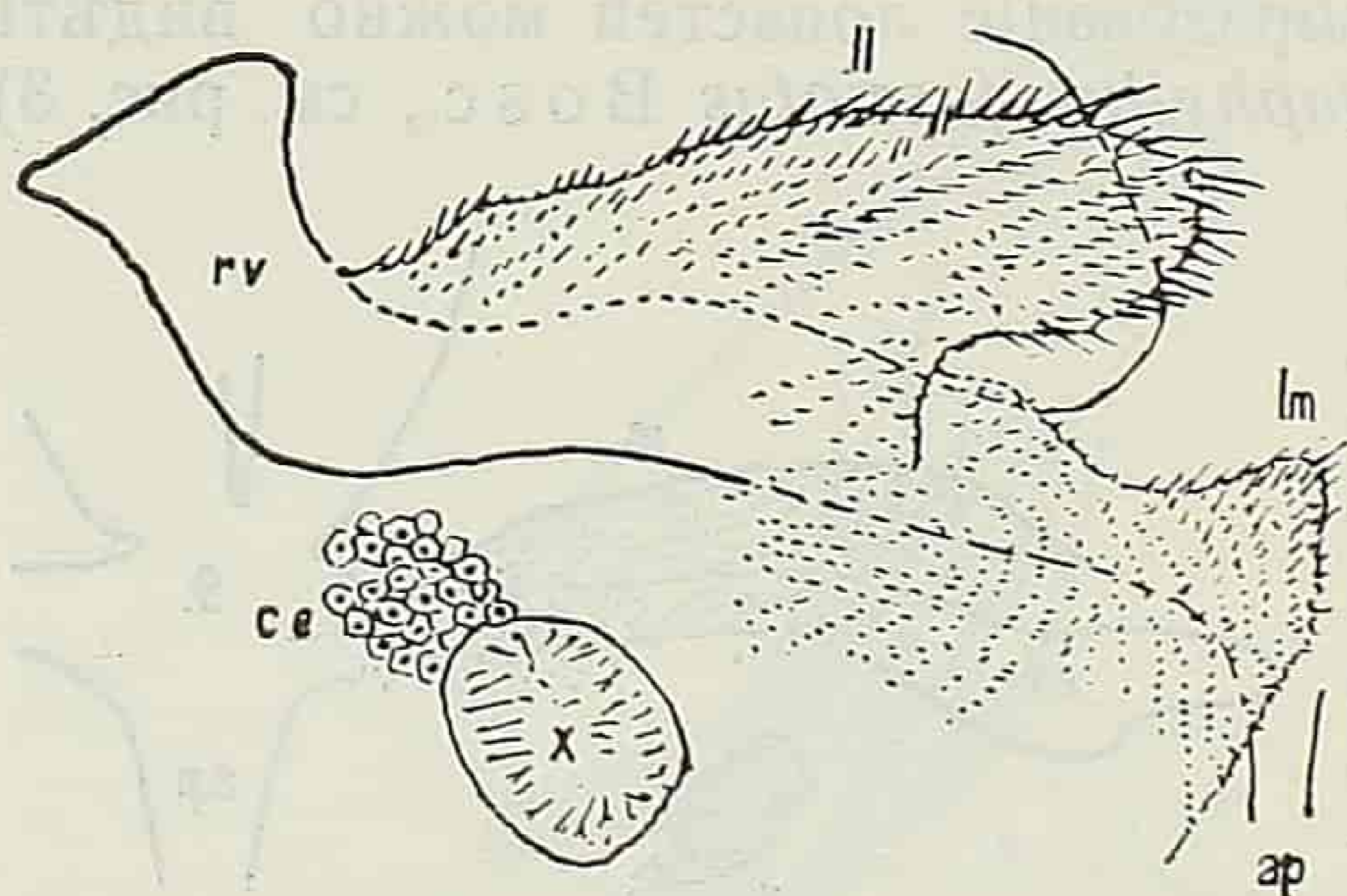


Рис. 5. *Ceratophyllus mustelae*. Внешняя (*ll*) и внутренняя (*lm*) интерсегментальная лопасти съ вертикальною вѣтвью 9. стернита (*rv*). *ap*, *ce*, *x* — какъ на другихъ рисункахъ. Видъ съ вентральной стороны.

ной вѣтви 9. стернита (*rv*) и идетъ внутрь наружной боковой лопасти (*ll*), проходя черезъ всю ея длину. Можетъ быть сокращеніе этого пучка вызываетъ не только подниманіе въ сторону и кверху этой лопасти, но и укорачиваніе ея. У *C. mustelae*, въ отличіе отъ ласточкиной блохи, волосовидные выступы въ дистальной части лопастей вполне развиты.

Раздѣленіе лопасти съ каждой стороны на двѣ части: на наружную (*ll*) и внутреннюю (*lm*), я думаю, вызывается раздѣленіемъ мышечныхъ волоконъ на два пучка: на пучекъ, идущій отъ 8., и пучекъ, идущій отъ 9. стернитовъ. Соотвѣтственно этимъ пучкамъ мы можемъ внешнюю лопасть относить къ 9. сегменту, а внутреннюю — къ 8. Внешняя является главною, такъ какъ всегда болѣе развита. Указанное отношеніе хорошо видно на рис. 6. у вьюрковой блохи (*Ceratophyllus fringillae* Walk.) сбоку. Благодаря своему положенію внутренняя лопасть (*lm*), являющаяся одновременно и нижней, часто хорошо видна на препаратахъ *in toto*, такъ какъ на такихъ препаратахъ объектъ всегда рассматривается съ боку, между тѣмъ какъ главная, т. е. наружная, лопасть

mustelae Schill. (рис. 5) У послѣдняго средняя часть также образуетъ двѣ болѣе низкихъ лопасти (*lm*), внутрь которыхъ заходитъ пучекъ мышечныхъ волоконъ, идущій отъ основанія 8. стернита и соотвѣтствующій внутреннему пучку мышечныхъ волоконъ ласточкиной блохи. Другой пучекъ, очень сильно развитой и соотвѣтствующій наружному пучку *C. hirundinis*, начинается отъ вертикаль-

(*ll*) скрывается при этомъ склеритомъ 9. стернита и хитиновымъ аппаратомъ penis'a. Что объ лопасти, т. е. и наружная, и внутренняя въ сущности составляютъ участки одной интерсегментальной складки, доказывается не только ихъ про-

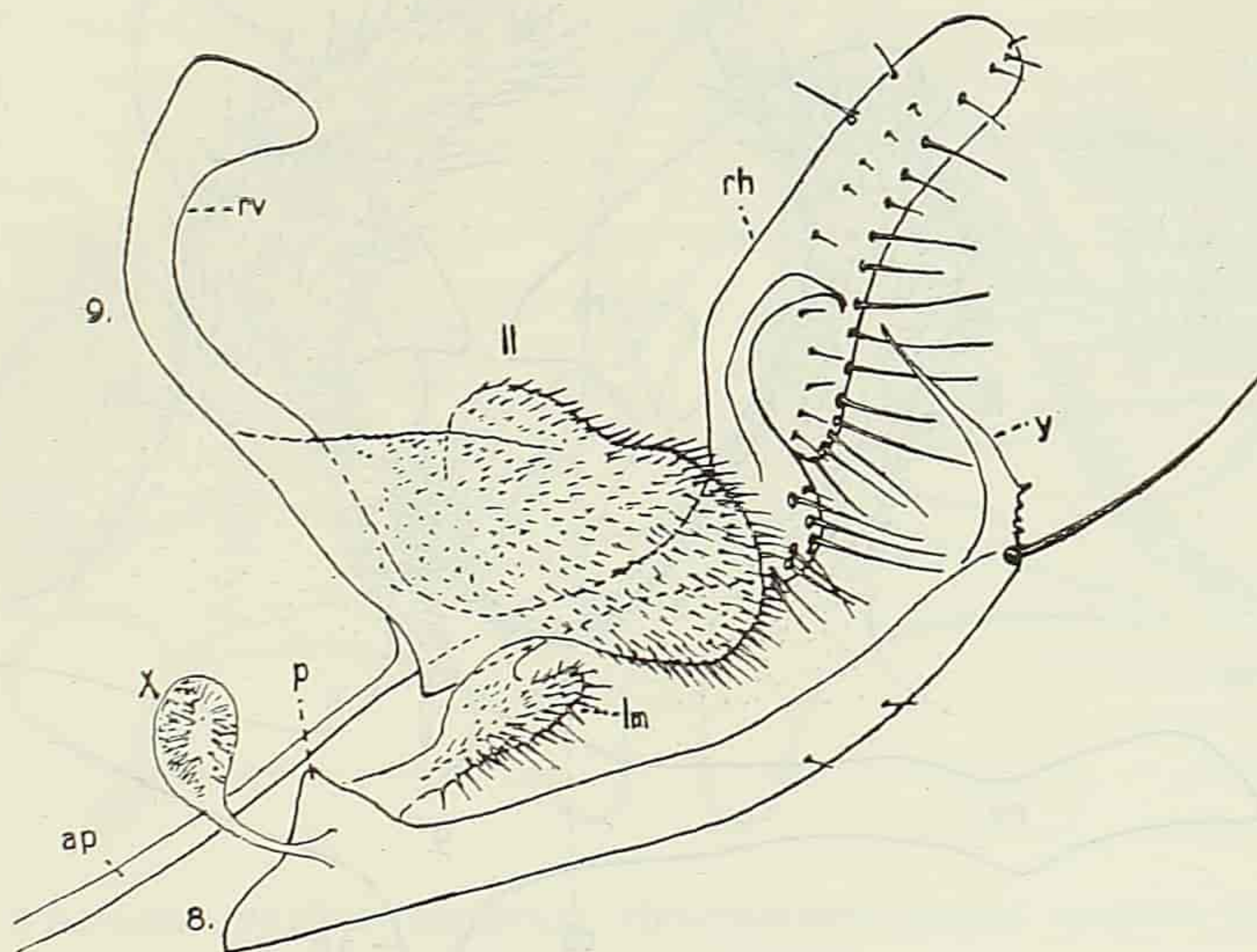


Рис. 6. *Ceratophyllus fringillae*. 8. (8.) и 9. (9.) стерниты сбоку съ интерсегментальными лопастями (*ll* и *lm*). *rh* — горизонтальная вѣтвь 9. стернита. Остальныя обозначенія, — какъ раньше.

исхожденіемъ, но и общностью ихъ склерита. Иллюстраціей можетъ служить рис. 7. лопастей у *Rostropsylla dacus* J. et R. Здѣсь хитинизація стѣнки лопастей по ихъ краю образуетъ дугообразно изогнутую, отчетливо видную, благодаря своему темному цвѣту, полосу (*ch*), которая безъ всякаго перерыва переходитъ изъ сильно развитой внѣшней лопасти (*ll*) во внутреннюю (*lm*) *). Въ переходной между лопастями части волосковидные выросты не развиты, но за то далѣе, къ свободнымъ концамъ лопастей они такъ длинны, что поверхность лопастей является мохнатою.

Примѣромъ сильнаго развитія лопастей можетъ служить также сусликовая блоха, *Ceratophyllus tesquorum* Wagn. (рис. 8). Здѣсь интерсегментальная складка имѣетъ довольно сложную форму, но интересующія насъ ея лопасти бросаются въ глаза, благодаря своимъ длиннымъ волосовиднымъ выростамъ; нижняя лопасть, соответствующая внутреннимъ (*lm*), сравнительно сильно развита, но уже, чѣмъ верхняя.

Изъ сравненія приведенныхъ примѣровъ видно, что,

*) Съ правой стороны рисунка внутренняя лопасть отрѣзана.

какъ развитіе, такъ и форма лопастей довольно различны у разныхъ видовъ. Интересно отмѣтить, что можно видѣть разницу между лопастями не только между разными вида-

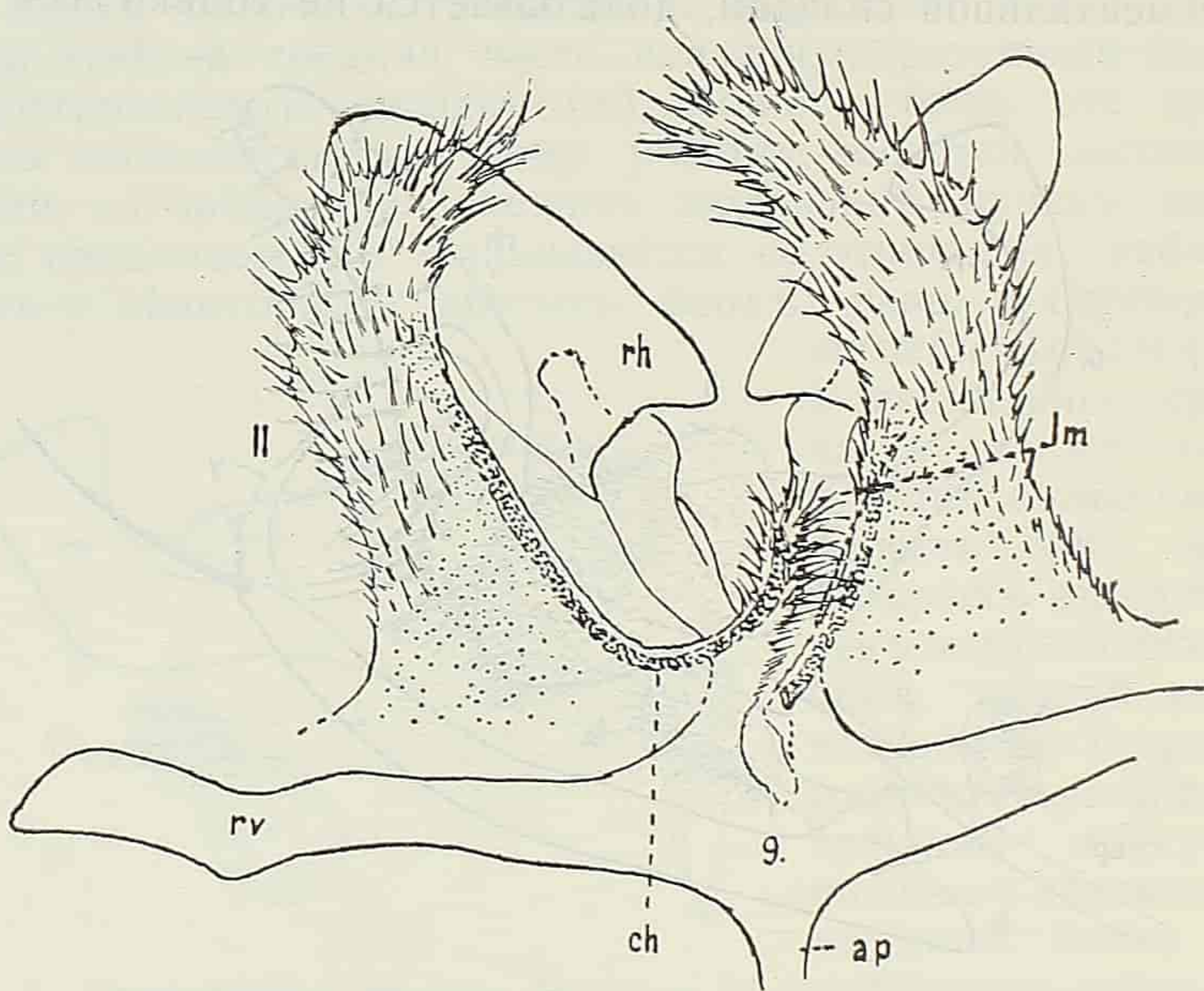


Рис. 7. *Rostropsylla dacus*. Интерсегментальные лопасти. *ch* — утолщеніе хитина. Значеніе другихъ буквъ, — какъ на другихъ рисункахъ.

ми, но и между подвидами (resp. рассами). Такъ рис. 8, А представляетъ форму сусликовой блохи изъ окрестности гор. Царицына, а на рис. 8, В изображена лопасть дальне-восточной сусликовой блохи, *S. tesquorum sungaris* J o r d. изъ Амурскаго края. Обѣ рассы почти не отличимы одна отъ другой, но форма лопастей для нихъ весьма характерна *).

Перейдемъ теперь къ ранѣ упоминавшемуся органу, имѣющему очевидное касательство къ интерсегментальнымъ лопастямъ 8.—9. стернита. Онъ представляетъ эллипсоидную или шаровидную капсулу (рис. 2, *x*), густо покрытую изнутри волосовидными выростами, и лежитъ обычно на сильномъ мышечномъ пучкѣ, прикрѣпляющемся къ боковымъ угламъ 8. стернита. Разница въ его положеніи зависитъ отъ надавливанія на объектъ при препарировкѣ и указываетъ на то, что капсула лежитъ въ полости тѣла довольно свободно. Волосовидные внутренніе выросты капсулы перекрещивают-

*) На отличіяхъ между рассами *S. tesquorum* въ развитіи и формѣ апикальныхъ лопастей 8. стернита (*y*), останавливается въ одной, пока еще не напечатанной, работѣ I o f f.

ся другъ съ другомъ, образуя внутри ея подобіе рѣдкаго войлока. Они сохраняются при продолжительной мацерации

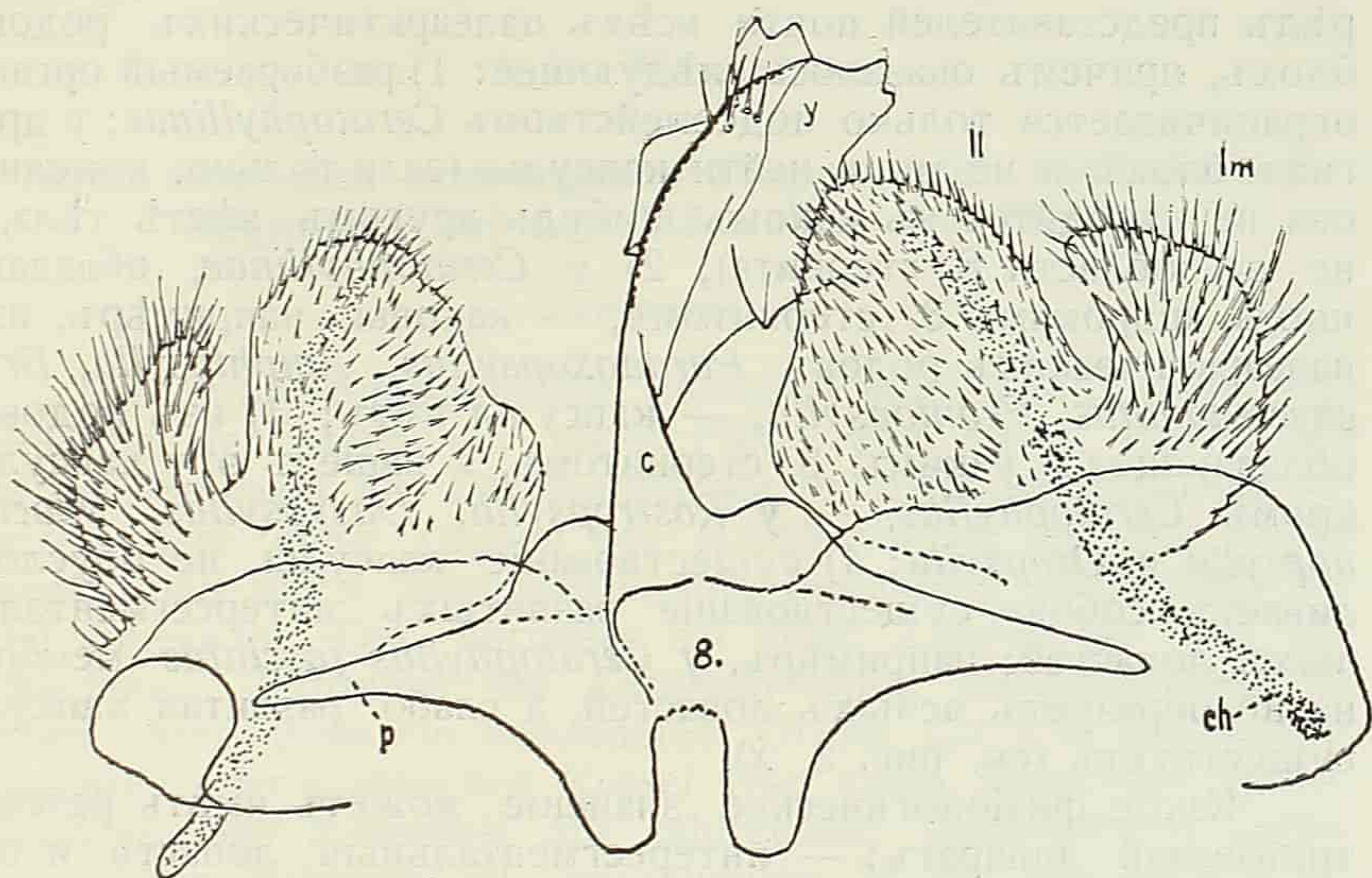


Рис. 8 А. *Ceratophyllus tesquorum*. Интерсегментальныя лопасти. Обозначенія, — какъ раньше

(до 2-хъ сутокъ) въ 10% растворѣ ѣдкаго калия, что указываетъ на ихъ хитиновую природу. Слѣдовательно сама капсула представляетъ продуктъ эктодерма. Безъ разрѣзовъ микротомомъ я не могъ замѣтить, имѣетъ ли капсула какой нибудь протокъ; выдѣленная *in toto*, она кажется замкнутою со всѣхъ сторонъ, но возлѣ нея часто видны темно-красящіяся квасцевымъ карминомъ округлыя клѣтки (рис. 2, *ce*), которыя ясно отличаются отъ крупныхъ жировыхъ клѣтокъ (*g*) своею плазматичностью. Матеріаль, съ которымъ я работалъ, не былъ консервированъ для гистологическихъ цѣлей. Возможно, что это есть железистыя клѣтки и что капсула представляетъ резервуаръ, въ который собирается секретъ этихъ клѣтокъ, а, можетъ быть, и клѣтокъ, заключающихся въ стѣнкахъ самой капсулы. Соединеніе ихъ съ капсулою на препаратахъ я не могъ открыть.

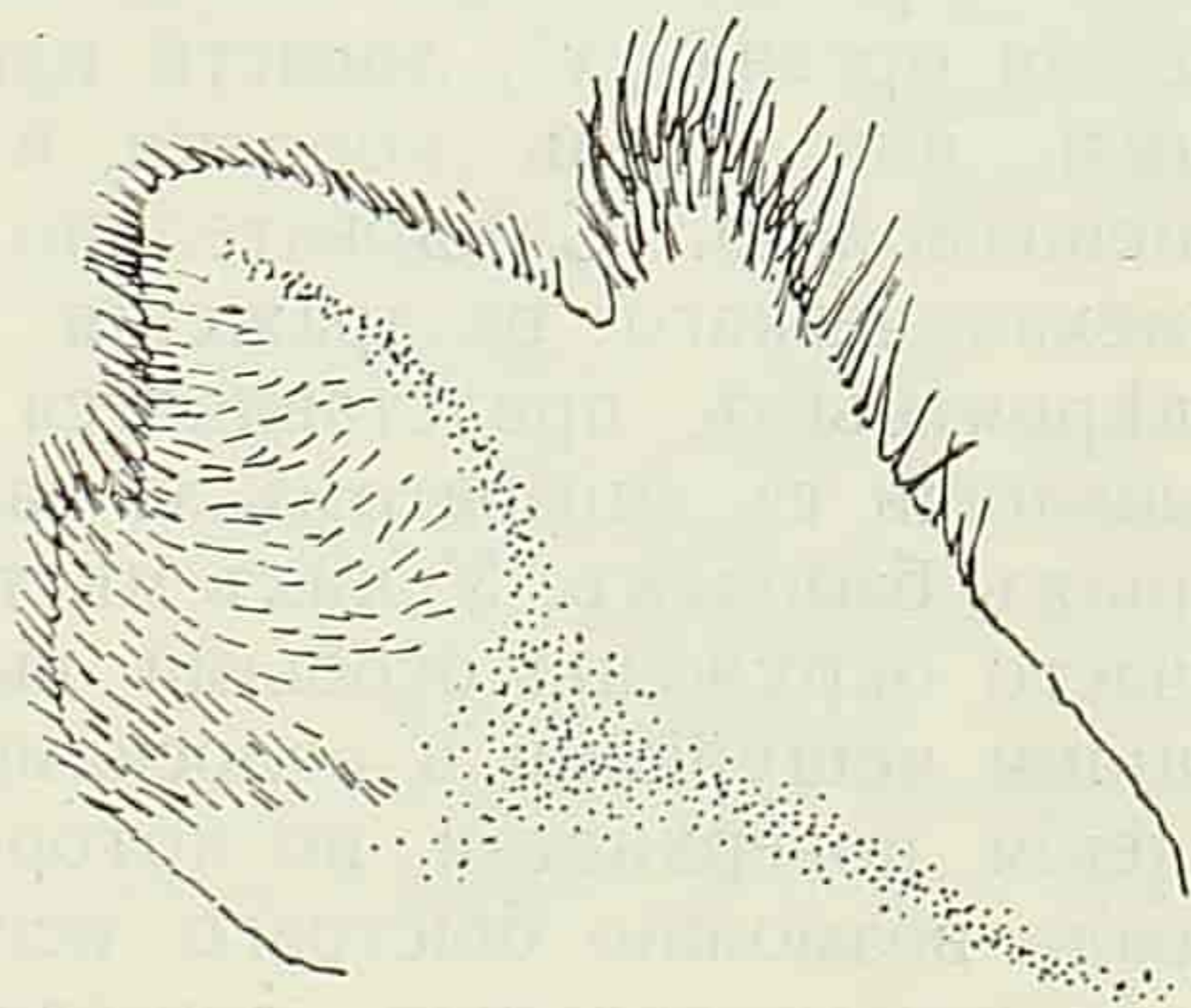


Рис. 8 В. Отдѣльная лопасть *C. tesqu. sungaris*.

Благодаря стойкости внутренних выростов капсулы, ее можно видеть при внимательном рассмотрении и на объектах *in toto* просвѣтленных ѣдкимъ калиемъ. Я просмотрѣлъ представителей почти всѣхъ палеарктическихъ родовъ блохъ, причемъ оказалось слѣдующее: 1) разбираемый органъ ограничивается только подсемействомъ *Ceratophyllinae*; у другихъ блохъ я не могъ найти капсулы (если только, конечно, она не находится въ какомъ нибудь другомъ мѣстѣ тѣла, а не въ области 8. стернита); 2) у *Ceratophyllinae*, обладающихъ широкимъ 8. стернитомъ, — каковы, на примѣръ, изъ палеарктическихъ родовъ *Paradoxopsyllus*, *Amphipsylla*, *Brachyctenonotus*, *Frontopsylla*, — капсулы нѣтъ; 3) изъ родовъ, обладающихъ узкимъ 8. стернитомъ, я нашелъ эту капсулу, кромѣ *Ceratophyllus*, — у *Rostropsylla*, *Dasypsyllus*, *Mioctenopsylla* и *Oropsylla*; 4) существованіе капсулы не обуславливаетъ собою существованіе развитыхъ интерсегментальныхъ лопастей; на примѣръ, у *Ceratophyllus fasciatus* мембрана не образуетъ ясныхъ лопастей, а слабо развитая капсула существуетъ (см. рис. 3, х).

Какое физиологическое значеніе можетъ имѣть рассматриваемый аппаратъ: — интерсегментальныя лопасти и органъ „х“?... У видовъ блохъ съ длинными бахромчатыми лопастями, какъ у *Rostropsylla dacus*, отчасти *Ceratophyllus tesquorum*, — лопасти могутъ настолько выдвигаться, что должны передъ актомъ спариванія касаться тѣла самки. Поэтому можно было бы думать, что онѣ дѣйствуютъ на самку путемъ прикосновенія, но во многихъ случаяхъ, при существованіи органа „х“, лопасти или не развиты (какъ у *C. fasciatus*), или очень коротки, и прикосновеніе ихъ къ самкѣ — невозможно. Слѣдовательно лопасти не предназначены для механическаго раздраженія самки. Если это такъ, то болѣе вѣроятнымъ представляется мнѣ другое предположеніе, по аналогіи съ аппаратомъ т. наз. пахучихъ железъ у нѣкоторыхъ бабочекъ. У нихъ мѣста выхода секрета этихъ железъ часто окружены особыми выростами, своеобразно измѣненными чешуйками и волосками, которые служатъ для увеличенія поверхности, по которой расходуется секретъ железъ ради возможно быстраго испаренія этого секрета. У блохъ интерсегментальныя лопасти также обладаютъ, благодаря своей формѣ и выростамъ, громадною поверхностью, а у основанія лопастей помѣщается органъ „х“. Не выдѣляетъ ли и тутъ этотъ органъ секретъ, распространяющійся по поверхности лопастей? Можетъ быть, онъ дѣйствуетъ раздражающе на самку своимъ, неощутимымъ для насъ, запахомъ или производитъ на нее какое либо другое химическое дѣйствіе, испаряясь при совокупленіи съ поверхности лопастей.

J. N. Wagner.

Notiz über den Intersegmentallappen der veränderten Segmente bei den Männchen der Flöhe.

(Résumé).

Die Verbindungsmembran zwischen dem 8. und 9. Sterniten bildet bei den Männchen vieler Flöhe eine Falte, welche sich bei der Mehrzahl der *Ceratophyllinae* seitwärts lappenförmig erweitert. Auf diese Lappen hat Rothschild bei den Vögel-*Ceratophylli* zuerst hingewiesen. Ihre Bedeutung bleibt doch bis jetzt unbekannt. Der Verfasser hat diese Lappen bei den verschiedenen Vertretern der *Ceratophyllinae* untersucht und hat neben ihrer Basis ein besonderes Organ („x“) in Form einer kugeligen oder elliptischen Kapsel, resp. eines Säckchens, dessen Wand von der Innenseite mit zahlreichen haarförmigen Chitinauswüchsen bekleidet ist, aufgefunden. In der aphanipterologischen Literatur giebt es keine Hinweisse auf dieses Organ. Der Verfasser denkt, dass das Secret, welches die Kapsel ausfüllt, sich auf eine oder andere Weise an der Oberfläche der intersegmentalen Lappen verbreitet. Demnach stellen die Lappen eine Vorrichtung für Ausdünstung dieses Secrets dar, — wie die spezifischen Haare und Auswüchse bei einigen Lepidopteren an den Stellen, wo die sogenannten Duftdrüsen liegen. Die Mannigfaltigkeit des Aussehens der Lappen und ihre Verbindung mit den Muskelfasern ist aus den Abbildungen ersichtlich. —

Die Bezeichnungen, die für alle Abbildungen gelten:

ap — Apophyse des 9. Sternits, *b* — Sternitsbasis, *c* — collare, *ce* — Drüsenzellen (?), *ch* — Chitinverdickung, *d* — Chitinauswüchsen, *g* — Fettzellen, *l*, *ll*, *lm* — intersegmentale Lappen der Verbindungsmembran (*m*), *mu* — Muskelfaser, *p* — Seitenteile des 8. Sternits, *rh* und *rv* — horizontaler und vertikaler Zweig des 9. Sternits, *x* — Drüsenkapsel (Organ „x“), *y* — Apikallappen des 8. Sternits.

Профессоръ Н. Н. Салтыковъ.

ЖИЗНЬ И УЧЕННЫЕ ТРУДЫ ЗАСЛУЖЕННАГО ПРОФЕССОРА Д. Ф. СЕЛИВАНОВА.

Дмитрій Федоровичъ Селивановъ родился 5 февраля, стараго стиля, 1855 года въ Городищѣ, уѣздномъ городѣ Пензенской губерніи.

Отецъ покойнаго профессора былъ потомственнымъ дворяниномъ, служилъ мировымъ посредникомъ и уѣзднымъ предводителемъ дворянства. Супруга его была изъ купеческаго рода. Въ семьѣ Селивановыхъ было шесть сыновей. Дмитрій Федоровичъ былъ вторымъ по возрасту. Дѣти были болѣе привязаны къ отцу и любили его; онъ былъ для нихъ ближе и доступнѣе матери, которая была холодновата и строже. Отецъ однако скончался рано, въ возрастѣ сорока лѣтъ, отъ саркомы на глазу. Дмитрію Федоровичу было тогда 14 лѣтъ отъ роду. Забота о дѣтяхъ такимъ образомъ легла всею тяжестью на мать. Оставшись одна съ 6-ью подраставшими сыновьями, она однако съумѣла ихъ воспитать и дать имъ образованіе, проявивъ о нихъ большую заботу. Получивъ наследство сперва отъ своего дяди, а затѣмъ и отъ своихъ родителей, матушка Дмитрія Федоровича раздѣлила все между своими сыновьями, ничего себѣ не оставивъ.

Для дѣтей, не имѣя сама возможности справляться съ ними, она приглашала гувернеровъ, а также имѣла то нѣмку, то француженку для изученія языковъ.

Всѣ дѣти, какъ говорится, были поставлены на ноги. О четвертомъ изъ братьевъ утратились свѣдѣнія съ 1922 года, остальные давно скончались. Старшій, юристъ по образованію, достигъ званія сенатора, третій былъ членомъ ученаго Комитета Вѣдомства Императрицы Маріи; онъ скончался при большевикахъ, отъ тифа во время поѣздки по Волгѣ. Оба младшихъ брата умерли въ молодомъ возрастѣ, одинъ отъ тифа, отправившись добровольцемъ въ турецкую войну 1877 года, а другой отъ разстроеннаго здоровья, вслѣдствіе дол-

госрочнаго тюремнаго заключенія, по политическимъ причинамъ.

Занятія молодого Дмитрія Федоровича дома ограничивались подготовкой въ гимназію и изученіемъ иностранныхъ языковъ. Затѣмъ образованіе продолжалось въ полуклассической гимназіи въ Пензѣ, съ латинскимъ, но безъ греческаго языка.

Здѣсь же, въ гимназіи опредѣлилась склонность Дмитрія Федоровича къ изученію математики, и онъ навсегда сохранилъ хорошія воспоминанія о своемъ преподавателѣ математики. Кромѣ того Дмитрій Федоровичъ любилъ музыку, и самъ немного игралъ на рояли, не удѣляя однако на это много времени.

Въ то время, среди молодежи, Петроградъ пользовался большимъ престижемъ и обаяніемъ, между тѣмъ какъ Москва казалась провинціей. Петроградскій Университетъ тогда славился своими профессорами, среди которыхъ особенно выдѣлялось имя славнаго русскаго математика Пафнутія Львовича Чебышева

Всѣ эти обстоятельства оказались рѣшающими на поступленіе Дмитрія Федоровича Селиванова, по окончаніи Пензенской гимназіи, на физико-математическій факультетъ Петроградскаго Университета, гдѣ онъ и занимался подъ руководствомъ профессоровъ Чебышева и Сохоцкаго. Особенно съ послѣднимъ установились наиболѣе близкія отношенія у Дмитрія Федоровича.

Подъ вліяніемъ этихъ двухъ профессоровъ, можно думать, и сложилась склонность у Дмитрія Федоровича къ занятію Теоріей Чиселъ и Высшей Алгеброй, оказавшимися его излюбленными предметами.

Въ то же время, отдавая дань увлеченія политикой, Дмитрію Федоровичу пришлось, въ свои студенческіе годы, отбыть и тюремное заключеніе.

По окончаніи, въ 1878 году, физико-математическаго факультета Д. Ф. Селивановъ былъ оставленъ при университетѣ, для приготовленія къ профессорскому званію.

Стремленіе расширить свои знанія и видѣть также и другую жизнь, а также хорошее знаніе французскаго и нѣмецкаго языковъ способствовали тому, что въ 1880 г. Дмитрій Федоровичъ былъ командированъ въ Берлинъ съ научною цѣлью. Послѣ сдачи магистерскаго экзамена въ 1881 г., Дмитрій Федоровичъ провелъ вновь годы 1882 и 1883 въ заграничной командировкѣ съ ученою цѣлью. Онъ занимался въ это время подъ руководствомъ извѣстныхъ ученыхъ, въ Парижѣ, Hermit'a, въ Берлинѣ у Weierstrass'a и Kronecker'a. Къ послѣднимъ корифеямъ науки Дмитрій Федоровичъ сохранилъ навсегда глубокое почитаніе. За время этихъ командиро-

вокъ установились и личныя отношенія Дмитрія Федоровича съ рядомъ лицъ, которыя поддерживались затѣмъ цѣлую жизнь до послѣднихъ ея минутъ. Къ этому времени относятся знакомства и дружба Дмитрія Федоровича съ извѣстными математиками, начинавшими тогда свою дѣятельность и отошедшими раньше его въ другой мѣръ, профессорами Ruppe, Molk и Knäser. Находясь всѣ вмѣстѣ въ Берлинѣ, они близко сошлись между собою, образовавъ математическій кружокъ. Собираясь въ одномъ берлинскомъ кафе, они дѣлились между собой своими математическими мыслями. Одно время, когда С. В. Ковалевская находилась также въ Берлинѣ, она принимала участіе въ этихъ бесѣдахъ.

Въ архивѣ Дмитрія Федоровича сохранились фотографіи, представляющія группы этихъ молодыхъ математиковъ. Сохранился также и большой портретъ присланный ему Hermit'омъ съ трогательною надписью „en témoignage de haute estime“.

Въ 1885 году, Дмитрій Федоровичъ защитилъ магистерскую диссертацию „Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій“. Въ этомъ же году началась и его преподавательская дѣятельность, чтеніемъ лекцій въ Петроградскомъ Университетѣ, въ качествѣ приватъ-доцента.

Съ 1888 года по 1900 годъ Дмитрій Федоровичъ преподавалъ въ Петроградскомъ Технологическомъ Институтѣ аналитическую геометрію и дифференціальное исчисленіе. Начиная съ 1889 года непрерывно читалъ лекціи по исчисленію конечныхъ разностей, теоріи вѣроятностей и приложенію дифференціального исчисленія къ геометріи на Высшихъ Женскихъ (такъ наз. Бестужевскихъ) Курсахъ въ Петроградѣ.

16 февраля 1890 года профессоръ Селивановъ защитилъ въ Москвѣ свою докторскую диссертацию „Объ уравненіяхъ пятой степени съ цѣлыми коэффициентами“.

Официальными опонентами, со стороны факультета, выступали профессора Московскаго Университета Цингеръ и Некрасовъ.

Въ 1905 году Д. Ф. Селивановъ былъ назначенъ экстраординарнымъ профессоромъ Петроградскаго Университета, а съ 1906 года ординарнымъ профессоромъ того же Университета.

Въ продолженіи 20 лѣтъ Дмитрій Федоровичъ оставался приватъ-доцентомъ, не желая покидать Петроградскій Университетъ для другого, ожидая пока не освободилась его кафедра.

Въ 1908 году произошло событіе, измѣнившее образъ, жизни Дмитрія Федоровича, благодаря бракосочетанію его первымъ бракомъ, 4 мая, съ Еленой Павловной Подашевской

бывшею его слушательницею на Бестужевскихъ Высшихъ Женскихъ Курсахъ. Въ лицѣ своей супруги Дмитрій Федоровичъ приобрѣлъ вѣрнаго друга, переживавшаго вмѣстѣ съ нимъ всѣ дальнѣйшія событія жизни, дѣлившаго также и ея невзгоды. До послѣдняго момента жизни Дмитрія Федоровича, Елена Павловна окружала его своими заботами и прилагала всѣ усилія, чтобы создать наилучшія условія существованія среди всѣхъ эмигрантскихъ тяжестей жизни.

Черезъ два года послѣ своей женитьбы, въ 1910 году, Дмитрій Федоровичъ приобретаетъ званіе заслуженнаго профессора. Онъ продолжаетъ свою профессорскую дѣятельность и дальше въ Петроградскомъ Университетѣ.

Курсы, которые Дмитрій Федоровичъ преподавалъ въ университетѣ въ разное время были: Введеніе въ Анализъ, Дифференціальное Исчисленіе, Высшая Алгебра, Теорія Чиселъ, Высшая Геометрія.

Преподаваніе означенныхъ предметовъ продолжалось и при большевикахъ до 1922 года. Осенью этого года онъ былъ арестованъ и послѣ заключенія, продолжавшагося больше мѣсяца, былъ высланъ за границу, вмѣстѣ съ большой группой другихъ русскихъ ученыхъ.

19 ноября 1922 г. проф. Селивановъ выѣзжаетъ изъ Россіи на нѣмецкомъ пароходѣ въ Штетинъ. Затѣмъ, послѣ мѣсячнаго пребыванія въ Берлинѣ, переѣзжаетъ въ Прагу, по приглашенію Учебной Коллегіи, и пользуется здѣсь поддержкою Министерства Иностранныхъ Дѣлъ Чехословацкой Республики.

Мягкая мѣра, которую примѣнили большевики въ видѣ высылки за границу ряда виднѣйшихъ представителей русской науки, шла въ разрѣзъ съ обычной свирѣпостью большевицкаго режима, стирающаго съ лица земли все, что не слѣдовало за нимъ.

Дмитрій Федоровичъ отвѣчалъ на вопросы о причинахъ постигшаго его гоненія, что единственнымъ обвиненіемъ, выдвинутымъ противъ него, было указаніе, что онъ не умѣетъ преподавать математику „по красному“. При этомъ онъ прибавлялъ, что ему навсегда остается непонятнымъ, въ чемъ должно состоять „красное“ преподаваніе математики.

Безсмысленность обвиненія, формулированнаго большевиками, очевидна для всякаго, кто имѣетъ хотя бы элементарное представленіе о наукѣ, ея требованіяхъ и задачахъ.

И если и были, можетъ быть, какія либо гнусныя цѣли предательства въ дѣйствіяхъ большевиковъ, повторявшихъ нѣсколько разъ свой приѣмъ высылки значительныхъ группъ ученыхъ изъ предѣловъ Россіи, то можно съ увѣренностью сказать, что эти мѣры не оправдали возлагавшихся на нихъ надеждъ.

И профессоръ Селивановъ, и рядъ другихъ славныхъ представителей русской науки, раздѣлившихъ съ нимъ славу и доброе имя русскихъ ученыхъ, были выше какихъ либо подозрѣній. Они встрѣтили за рубежомъ, и со стороны русскихъ, и со стороны иностранцевъ то же самое уваженіе, какимъ пользовались и раньше.

Безумная мѣра растраты культурныхъ силъ, высылкой ихъ представителей изъ предѣловъ государства, возымѣла только одинъ благой результатъ, въ видѣ лучшаго ихъ сохраненія для будущей цивилизаціи Россіи, которая должна разцвѣсти съ паденіемъ большевизма.

Въ Прагѣ Дмитрій Федоровичъ продолжалъ свою плодотворную научную дѣятельность. Онъ читалъ для русскихъ студентовъ и всѣхъ желающихъ лекціи по слѣдующимъ предметамъ: Высшая Алгебра (численное рѣшеніе уравненій и алгебраическое рѣшеніе уравненій), Высшая Геометрія, Теорія Чиселъ, Интегрированіе Обыкновенныхъ Дифференціальныхъ Уравненій, Теорія Определенныхъ Интеграловъ, Теорія Функцій Комплекснаго Переменнаго, Основанія Теоріи Эллиптическихъ Функцій.

Всѣ эти курсы были прочитаны съ января мѣсяца 1923 года до конца мая 1929 года. Съ теченіемъ времени число русскихъ слушателей естественно убавлялось, но за то аудитория становилась болѣе квалифицированной. Такъ въ 1928—9 году однимъ изъ слушателей Дмитрія Федоровича былъ профессоръ Петръ Карлова Университета въ Прагѣ, о чемъ онъ говоритъ въ предисловіи своемъ къ изданію Чешской Академіи Наукъ, на чешскомъ языкѣ, книги профессора Селиванова „Объ исчисленіи конечныхъ разностей“.

Въ самые послѣдніе годы, по слабости своего здоровья и по недостатку русскихъ слушателей, Дмитрій Федоровичъ лекцій уже не читалъ.

Профессоръ Селивановъ скончался 5-го апрѣля 1932 г., въ 11 час. 30 мин. ночи, тихо и неожиданно, 77 лѣтъ отъ роду, послѣ непродолжительной болѣзни.

* * *

Позвольте теперь мнѣ удѣлить нѣсколько словъ краткому обзору трудовъ Дмитрія Федоровича.

Особенно интересной, по своимъ результатамъ и своему научному значенію, является первая опубликованная имъ статья, въ 1882 году, „Sur les intégrales définies uniformément convergentes“, напечатанная въ Bulletin de la Société Mathématique de France.

Наилучшей оцѣнкой этой работы является слѣдующее письмо Эрмита, отъ 13 ноября 1882 года, сохранившееся у

Дмитрія Федоровича, гдѣ этотъ знаменитый ученый пишетъ:

„Votre travail sur les intégrales définies uniformément convergentes m'a beaucoup intéressé, par la lumière qu'il jete sur un point important, et qu'à, grand tort, on ne traite pas avec l'attention qu'il mérite dans tous les traités de calcul intégral. Vous Vous êtes montré en apportant la rigueur nécessaire dans cette question un vrai et habile élève de M-r Weierstrasse et je mettrai vos résultats à profit, quand je rédigerai le second volume de mon Cours d'Analyse“...

За два года до появления разсматриваемой работы Д. Ф. Селиванова, въ августѣ мѣсяцѣ 1880 года, Вейерштрассъ показалъ (въ отчетахъ Берлинской Академіи Наукъ), что возможность дифференцированія бесконечныхъ рядовъ обуславливается ихъ равномерной сходимостью. Эта работа Вейерштрасса была опубликована въ переводѣ на французскій языкъ въ апрѣльскомъ выпускѣ, „Bulletin des Sciences Mathématiques de M. G. Darboux“ за 1881 годъ. Въ слѣдующемъ году появляется указанная статья Дмитрія Федоровича, гдѣ онъ распространяетъ понятіе о равномерной сходимости на опредѣленные интегралы и показываетъ, что возможность ихъ дифференцированія по параметру обуславливается равномерной сходимостью разсматриваемаго интеграла.

Этотъ результатъ имѣетъ большое не только теоретическое, но и практическое значеніе, при рѣшеніи цѣлаго ряда задачъ математической физики.

Свою теорію Дмитрій Федоровичъ иллюстрируетъ приложеніями къ опредѣленнымъ интеграламъ вида:

$$\int_0^{\infty} e^{-xz^2} dz, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos xz}{1+z^2} dz,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin xz}{1+z^2} dz, \quad \int_a^b \frac{f(\alpha, z)}{(z-b)^a} dz.$$

Не только Эрмитъ указываетъ въ своемъ письмѣ, что считаетъ необходимымъ изложенную теорію ввести въ свой курсъ. Появляющееся въ печати, вслѣдъ за работою профессора Селиванова, первое изданіе второго тома извѣстнаго курса Анализа С. Jordan'a цѣликомъ излагаетъ результаты Дмитрія Федоровича; и они затѣмъ становятся неотъемлемою частью всѣхъ современныхъ курсовъ интегрального исчисления.

Такимъ образомъ цитированное выше письмо Эрмита

является интересным историческим документом, устанавливающим влияние русского ученого на современное развитие одной из важных частей теории определенных интегралов.

Вторая статья профессора Д. Ф. Селиванова, опубликованная как *Extrait d'une lettre à M. Hermite* в „Bulletin des Sciences Mathématiques de G. Darboux“ (2-me série, t. VII, 1883), дает решение по способу Арнольда алгебраического уравнения четвертой степени. Дмитрий Федорович сообщил это решение письмом Эрмиту, который пишет ему в ответ, 28 июня 1883 года:

„Je viens Vous remercier de Votre bon souvenir et Vous dire tout le plaisir que m'a fait Votre communication sur la résolution de l'équation du 4-me degré. Aucune méthode n'a été donnée à ma connaissance qui soit plus simple et plus élégante, aussi me paraît-il qu'elle devait entrer dans l'enseignement des mathématiques Spéciales et être exposée par nos professeurs à leurs élèves. C'est à cette intention que je Vous prie, Monsieur, de me permettre d'en donner connaissance à M-r Darboux, en lui demandant de vouloir bien la publier dans son Bulletin, où Votre nom s'est fait connaître et apprécier par d'excellents articles“ ...

Дальнейшие исследования профессора Д. Ф. Селиванова сосредотачиваются на вопросах об алгебраическом решении уравнений и о разложениях многочленов и чисел на множители. Этим вопросам посвящены ряд исследований и об диссертации Дмитрия Федоровича, магистерская и докторская. В извлечениях некоторые из результатов печатались на французском языке в ряд статей, появившихся в „Bulletin de la Société Mathématique de France“, и в периодическом журнале „Acta Mathematica“.

Целью этих исследований является дальнейшее развитие теорий, основание которыми положили Лагранж, Гаусс, Коши, Абель, Галуа и последующие исследования Серре, Жордана и Кронекера. Профессор Селиванов является продолжателем этих работ.

Приступая к решению алгебраических уравнений, Дмитрий Федорович прежде всего занимается вопросом о разложении данного уравнения на простейшие неприводимые множители. С этой целью он изобретает особый способ основанный на применении функциональных сравнений. Из переписки с Эрмитом выясняется, как возникает эта метода у Дмитрия Федоровича и, наконец Эрмит дает ей свою оценку в письме от 27 февраля 1894 года:

... „Votre méthode pour obtenir les diviseurs quadratiques en introduisant la limite supérieure des racines est originale et ingénieuse“ ...

Отмѣчая сложность изложеній Галуа, Серре и Жордана, которые слишкомъ долго останавливаются на изученіи общихъ свойствъ теоріи подстановокъ, Дмитрій Федоровичъ стремится сдѣлать возможно болѣе доступной теорію алгебраическаго рѣшенія уравненій. На сколько онъ успѣваетъ ввести упрощенія въ рассматриваемую теорію, для этого достаточно указать на его изслѣдованіе „Объ уравненіяхъ пятой степени съ цѣлыми коэффициентами“. При примѣненіи къ нимъ общей теоріи, оказывается необходимымъ составить уравненіе 6-ой степени, которому должна удовлетворять такъ называемая метациклическая функція корней рассматриваемаго уравненія. Коэффициенты этого уравненія шестой степени представляютъ цѣлыя числа, для нахождения которыхъ приходится вычислять симметрическія функціи корней уравненія до 120 измѣренія включительно. На практикѣ эти вычисления невыполнимы, вслѣдствіе крайней сложности.

Это послѣднее обстоятельство дѣлаетъ рассматриваемую теорію непримѣнимой для рѣшенія поставленныхъ вопросовъ.

Поэтому пришлось внести необходимыя видоизмѣненія.

Благодаря своимъ изслѣдованіямъ и разработкѣ метода Варинга, для вычисления симметрическихъ функцій, Дмитрій Федоровичъ составляетъ свое уравненіе шестой степени. Коэффициенты послѣдняго уравненія выражаются черезъ симметрическія функціи корней даннаго уравненія, непревосходящія 12-го измѣренія.

Теорія профессора Селиванова получаетъ весьма лестную оцѣнку въ письмахъ Эрмита. Онъ пишетъ въ письмѣ отъ 1 мая 1885 года:

„Je viens Vous remercier de Votre bon souvenir, et en même temps Vous témoigner toute ma satisfaction que Vous ayez réalisé les espérances que me donnaient Votre talent et Votre zèle pour l'étude, lorsque Vous suiviez les cours de la Sorbonne“...

Указывая далѣе, что онъ самъ интересовался рассматриваемымъ вопросомъ, Эрмитъ говоритъ: ...„Si je n'apporte plus mon contingent d'efforts, je ne me désintéresse aucunement de ceux qui me remplacent et j'applaudi de tout coeur à leur succès“...

Наконецъ, въ упомянутомъ ранѣе письмѣ Эрмитъ пишетъ: ...„et de Votre travail sur l'équation du cinquième degré qui m'a bien vivement intéressé. Votre analyse est élégante et profonde; je ne crois pas qu'il soit possible de mieux établir la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation soit résoluble par radicaux... Sur tout les points Votre travail m'a paru excellent“...

Мы хотѣли бы отмѣтить еще одинъ изъ результатовъ, показывающихъ практическую примѣнимость теоріи

Д. Ф. Селиванова. Прилагая ее къ уравненію пятой степени

$$x^5 \pm x - v = 0, \quad \text{гдѣ } 0 < v < 7770,$$

Дмитрій Федоровичъ приходитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Разсматриваемое уравненіе, при положительномъ знакѣ во второмъ членѣ, разрѣшается въ радикалахъ, для значеній:

$$v = 1, 2, 6, 34, 246, 1028, 3130;$$

если знакъ второго члена отрицательный, то разсматриваемое уравненіе разрѣшается въ радикалахъ при значеніяхъ:

$$v = 15, 30, 240, 1020, 3120.$$

Другая область изслѣдованій профессора Селиванова относится къ исчисленію конечныхъ разностей.

Ему принадлежитъ соотвѣтствующій отдѣлъ въ *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* (I Band, 2 Teil). Кромѣ того имъ были изданы учебники Исчисленія Конечныхъ Разностей на русскомъ и нѣмецкомъ языкѣ.

Наконецъ, по порученію Чешской Академіи Наукъ, имъ было составлено руководство, изданное въ 1930 году, на чешскомъ языкѣ, „*Základy Počtu Diferenčního*“.

Профессоръ Петръ свое предисловіе, написанное къ этому изданію, заканчиваетъ слѣдующими словами: „...„Учебникъ профессора Селиванова, первый по Исчисленію Конечныхъ Разностей на чешскомъ языкѣ, излагаетъ основы этого исчисления кратко, ясно и точно, при томъ въ столь простой и легко доступной формѣ, что можетъ быть принятъ за образецъ составленія учебника. Чешскіе математики будутъ благодарны какъ профессору Селиванову, такъ и Чешской Академіи за его изданіе“.

Ниже мы прилагаемъ полный списокъ всѣхъ трудовъ изданныхъ Дмитриемъ Федоровичемъ, не упоминая однако о литографированныхъ лекціяхъ, издававшихся по его курсамъ. Кромѣ того сохранились еще двѣ рукописи.

Одна представляющая запись его лекцій по приложенію дифференціального исчисления къ геометріи:

Другая рукопись, составленная на чешскомъ языкѣ и приготовленная для изданія Чешской Академіей Наукъ, излагаетъ начала теоріи чиселъ. Это изданіе отредактировано изъ слѣдующихъ одиннадцати главъ:

I — О дѣлимости чиселъ. II — О сравнимости чиселъ. III — Сравненія первой степени. IV Сравненія выше первой степени. V — Вычеты степеней. VI — Сравненія второй степени. VII — Двучленные сравненія. VIII — Указатели и

ихъ примѣненія. IX — Ариѳметическія непрерывныя дроби. X — Безконечныя непрерывныя дроби. XI — Рѣшеніе нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ уравненій, при помощи непрерывныхъ дробей.

Къ великому сожалѣнію въ русской научной литературѣ почти не существуетъ оригинальныхъ основныхъ руководствъ по теоріи чиселъ, кромѣ замѣчательной диссертациі П. Л. Чебышева — Теорія Сравненій. Поэтому мы не можемъ не высказать пожеланіе, чтобы указанное руководство профессора Селиванова появилось бы также и на русскомъ языкѣ, въ возможно скоромъ времени.

Тѣ кто лично встрѣчались съ покойнымъ навсегда сохраняютъ воспоминаніе о его неизмѣнномъ, постоянномъ исключительно спокойномъ, безмятежномъ настроеніи, которое онъ всегда сохранялъ и которое представляетъ врожденную особенность его характера. Послѣдніе долгіе годы его жизни прошли въ трудныхъ и печальныхъ условіяхъ. Но и въ этотъ сумрачный періодъ онъ оставался оптимистомъ и никогда ни на что не жаловался. Какой бы минимумъ онъ не имѣлъ въ смыслѣ матеріальномъ, онъ считалъ себя удовлетвореннымъ. Не жаловался онъ также никогда и на здоровье, хотя и былъ очень слабъ въ послѣднее время.

„Тихій, спокойный, педантически аккуратный и добросовѣстный, онъ былъ пріятнымъ товарищемъ, всегда готовымъ оказать услугу своему коллегѣ. Чуждый какимъ бы то ни было интригамъ или домогательствамъ, чрезвычайно скромный и сдержанный, онъ всецѣло посвящалъ свое время занятіямъ и академической работѣ“... Такъ характеризуетъ профессора Д. Ф. Селиванова его долготѣнній сотоварищъ по академической дѣятельности въ Петроградѣ, профессоръ чистой математики Сергѣй Евгеньевичъ Савичъ.

Настоящій краткій очеркъ составленъ мною на основаніи личныхъ воспоминаній близкихъ друзей Дмитрія Федоровича Селиванова, документовъ и изданій, сохранившихся въ его архивѣ и библіотекѣ, а также на основаніи тѣхъ данныхъ, которыя сообщены были въ чешскомъ журналѣ „Časopis pro peštovené Matematiky a Fisyky v Praze 1930 (Číslo 2, Ročník LIX) въ статьѣ, посвященной 75 юбилею выдающаго русскаго математика Дмитрія Федоровича Селиванова.

Тѣло профессора Селиванова, согласно его желанію, было подвергнуто сожженію. „...Теперь его прахъ въ урнѣ сохраняется мною...“ пишетъ Елена Павловна, вдова покойнаго „здѣсь въ комнатѣ, гдѣ я Вамъ сейчасъ пишу. Я хотѣла бы купить мѣсто на кладбищѣ... Пока я живу, я предпочитаю имѣть его прахъ у себя“...



Профессоръ
Дмитрій Федоровичъ
СЕЛИВАНОВЪ.

Списокъ ученыхъ трудовъ
проф. Д. Ф. Селиванова.

1. Sur les intégrales définies uniformément convergentes (Bulletin de la Société Mathématique de France t. X, 1882).
2. Extrait d'une lettre à M. Hermite (Bulletin des Sciences Mathématiques de Darboux, 2-me série t. VII, 1883).
3. Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій (Магистерская Диссертация, Спб. 1885).
4. Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières (Bulletin de la Société Mathématique de France t. XIII, 1885).
5. Объ уравненіяхъ пятой степени съ цѣлыми коэффиціентами (Докторская Диссертация, Спб. 1889).
6. О функціяхъ отъ разностей корней даннаго уравненія (Математическій Сборникъ, Т. 15, Москва 1890).
7. О разложеніи чиселъ на множители (Математическій Сборникъ, Т. 15 и 16, Москва 1891, 1892).
8. О неопредѣленныхъ выраженіяхъ (Извѣстія Спб. Технологическаго Института, Спб. 1892).
9. О неперіодическихъ непрерывныхъ дробяхъ (Математическій Сборникъ, Т. 15, Москва 1891).
10. Quelques remarques sur les équations du cinquième degré (Bulletin de la Société Mathématique de France t. 21, 1893).
11. Sur les expressions algébriques (Acta Mathematica, t. 19, 1895).
12. О числовой функціи $\varphi(n)$ (Протоколы С.-Петербургскаго Математическаго Общества).
13. Differenzenrechnung (Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften Band, I. E. 1901).
14. Редактировать посмерт. изданіе сочиненія Д. Д. Оболмѣвскаго. Симметрическія функціи, Спб. 1903.
15. Lehrbuch der Differenzenrechnung, Leipzig 1904.
16. Безконечныя десятичныя дроби и ирраціональныя числа Спб. 1907.
17. Курсъ исчисленія конечныхъ разностей, Спб. 1908.
18. Основанія ариѳметики, Спб. 1912.
19. Курсъ введенія въ Анализъ, Спб. 1913.
20. Приближенныя вычисленія, Спб. 1922.
21. Основанія ариѳметики. Изданіе второе. Издательство Гржебина. Берлинъ, 1923.

22. О неприводимости уравнений (Ученые Записки Русской Учебной Коллегии в Праге. Т. II. Выпуск I. Прага, 1925).

23. О корнях изъ единицы. (Учен. Зап. Рус. Учебной Кол. в Праге. Т. II. Выпуск I. Прага, 1925).

24. Теорема Лагерра (Учен. Зап. Русск. Учебн. Кол. в Праге. Т. II. Выпуск I. Прага, 1925).

25. Sur quelques points de la théorie des fractions continues (Vestnik Král. Češ. Společ. Nauk. Tr. II. Roč. 1925).

26. Základy počtu diferenčního. V Praze. 1930.

Ан. Д. Билимовичъ.

О ВРАЩЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КАКЪ ЦѢЛАГО.

Цѣлый рядъ авторовъ занимался вопросомъ о возможности вращенія матеріальной системы около оси безъ измѣненія относительнаго положенія ея частей, другими словами, какъ одного цѣлаго. Но во всѣхъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ матеріальная система, если она не была твердой и не относилась къ случаямъ, трактуемымъ въ задачѣ n тѣлъ, хотя частично, состояла изъ жидкости ¹⁾

Въ нижеслѣдующихъ строкахъ мы занимаемся вращеніемъ совершенно произвольной матеріальной системы, — она можетъ быть какъ непрерывна, такъ и прерывна — и выводимъ необходимое условіе для возможности вращенія такой системы какъ цѣлаго; условіе это аналогично тому, которое извѣстно для системъ, имѣющихъ въ своемъ составѣ жидкость.

Сущность доказательства высказаннаго условія покоится на нашей методѣ ²⁾ разсмотрѣнія параллельно съ двигающейся произвольной матеріальной системой другой, фиктивной матеріальной системы, которую мы называемъ твердымъ тѣломъ, наименѣе отклоняющимся отъ данной матеріальной системы.

1. Разсмотримъ произвольную матеріальную систему, состоящую изъ n матеріальныхъ точекъ, причемъ n можетъ стремиться къ безконечности. Массы этихъ точекъ обозначимъ черезъ m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а скорости черезъ \vec{v}_i . Одновременно съ этой системой вообразимъ другую, фиктивную систему, изъ тѣхъ же матеріальныхъ точекъ, въ тѣхъ же

¹⁾ W. Jar detzky — Sur une condition nécessaire de rotation en bloc d'un système continu ayant des parties fluides. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. T. I. 1932. Тамъ же можно найти указанія на литературу вопроса.

²⁾ А. Билимовичъ. — О кретању материјалног система, који мало одступа од чврстог тела. Глас Српске Краљевске Академије CXLVI. Први разред 72. Београд. 1932.

положеніяхъ въ данный моментъ какъ и точки данной матеріальной системы, но со скоростями \vec{v}_i^* , которыя отвѣчаютъ движенію фиктивной системы, какъ системы неизмѣняемой; кромѣ того, для движенія фиктивной системы поставимъ условіе, чтобы сумма

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_i^*)^2$$

имѣла минимумъ. Написанное выраженіе надлежитъ разсматривать какъ функцію двухъ векторовъ: \vec{v}_c^* — скорости центра инерціи фиктивной системы и $\vec{\Omega}^*$ — угловой скорости этой системы по отношенію къ неподвижному пространству. Не трудно показать, что условія extremum'a выраженія (1) даютъ слѣдующія два условія для опредѣленія векторовъ \vec{v}_c^* и $\vec{\Omega}^*$:

a) Количества движенія \vec{M} и \vec{M}^* одной и другой системы, данной и фиктивной, въ каждый моментъ должны быть равны:

$$\vec{M}^* = \vec{M},$$

откуда непосредственно слѣдуетъ равенство скоростей центра инерціи данной и фиктивной системы, т. е.

$$\vec{v}_c^* = \vec{v}_c$$

b) Моменты количествъ движенія $\vec{G}^{(c)}$ и $\vec{G}^{(c)*}$, скажемъ для полюса C , также должны быть равны:

$$(2) \quad \vec{G}^{(c)*} = \vec{G}^{(c)}.$$

Принимая во вниманіе, что координаты вектора $\vec{G}^{(c)*}$ являются линейными функціями координатъ вектора $\vec{\Omega}^*$, на примѣръ

$$G_x^{(c)*} = I_x \Omega_x^* + P_{xy} \Omega_y^* + P_{xz} \Omega_z^*,$$

гдѣ черезъ I_x , P_{xy} , P_{xz} обозначены соотвѣтственно моменты и произведенія инерціи, векторіальное уравненіе (2) даетъ возможность опредѣлить векторъ $\vec{\Omega}^*$ по данному вектору $\vec{G}^{(c)}$ и данному распредѣленію массъ въ системѣ. Если тензоръ инерціи системы въ данный моментъ обозначимъ черезъ \mathbf{T} ,

а ему сопряженный через \mathbf{T}^{-1} , то изъ равенства (2), которое можно написать въ формѣ

$$(\mathbf{T}, \vec{\Omega}^*) = \vec{G}^{(c)},$$

гдѣ скобки означаютъ скалярное произведение тензора и вектора, непосредственно слѣдуетъ равенство:

$$\vec{\Omega}^* = (\mathbf{T}^{-1}, \vec{G}^{(c)}),$$

которое опредѣляетъ искомый векторъ. Такъ какъ третій инвариантъ ¹⁾ тензора \mathbf{T} всегда отличенъ отъ нуля, потому что равенъ произведенію главныхъ моментовъ инерціи системы, то такого рода рѣшеніе всегда возможно, причемъ мы исключаемъ случаи плоскаго и вдоль прямой линіи распредѣленія массъ.

Такимъ образомъ для всякой произвольной матеріальной системы S можетъ быть построена вспомогательная среда, обозначимъ ее черезъ S^* , которая имѣетъ движеніе, опредѣленное поступательной скоростью \vec{v}_c^* и угловой скоростью $\vec{\Omega}^*$.

2. Послѣ введенія вспомогательной среды S^* движеніе всякой системы S можемъ разложить на два движенія: на движеніе среды S^* по отношенію къ неподвижному пространству и на движеніе системы S по отношенію къ средѣ S^* .

Если мы здѣсь для нашей цѣли остановимся только на вращеніи системы около ея центра инерціи, то оба вышеуказанныя движенія опредѣляются слѣдующими дифференціальными уравненіями ²⁾:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{T}, \vec{\Omega}) = \vec{L},$$

$$(4) \quad m_i \dot{u}_i + m_i [\dot{\vec{\Omega}}^*, \vec{e}_i] + m_i [\vec{\Omega}^* [\vec{\Omega}^*, \vec{e}_i]] + \\ + 2m_i [\vec{\Omega}^*, u_i] = R_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Здѣсь приняты слѣдующія обозначенія:

1) См., напримѣръ, въ моей книгѣ „Геометријске Основе Рачуна са Диадама. I. Диада и Афинор“. Београд 1930. Стр. 105.

2) См. нашу работу „О кретању материјалног система, који мало одступа од чврстог тела. Глас Српске Краљевске Академије. CXLVI. Први разред 72. Београд. 1932, стр. 190.

- \mathbf{T} — тензор инерции материальной системы в данный моментъ,
 t — время,
 \vec{L} — моментъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на систему, около центра инерции,
 $\vec{\Omega}^*$, $\dot{\vec{\Omega}}^*$ — угловая скорость и ускорение среды S^* по отношенію къ неподвижному пространству,
 m_i — масса i' ой точки,
 \vec{u}_i , $\dot{\vec{u}}_i$ — относительная скорость и ускорение той же точки по отношенію къ средѣ S^* ,
 \vec{e}_i — векторъ положенія той же точки по отношенію къ центру инерции системы,
 \vec{R}_i — сила дѣйствующая на i' тую точку. Относительно этой силы сдѣлаемъ предположеніе, что она зависитъ только отъ относительнаго положенія точекъ системы; тогда можно написать:

$$\vec{R}_i = \text{fonct}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3. Будемъ теперь искать для написанной системы уравненій (3) и (4) частное рѣшеніе въ формѣ:

$$\vec{e}_i = \text{const.}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

считая эти векторы постоянными въ средѣ S^* , движущейся съ угловой скоростью $\vec{\Omega}^*$.

Въ этомъ случаѣ, такъ какъ точки не имѣютъ ни относительной скорости, ни относительнаго ускоренія по отношенію къ средѣ S^* , имѣемъ:

$$\vec{u}_i = 0, \quad \dot{\vec{u}}_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Уравненія (3) и (4) тогда принимаютъ форму:

$$(5) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{T}, \vec{\Omega}^*) = 0,$$

$$(6) \quad m_i [\dot{\vec{\Omega}}^*, \vec{e}_i] + m_i [\vec{\Omega}^* [\vec{\Omega}^*, \vec{e}_i]] = \vec{R}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Будемъ проектировать теперь члены написанныхъ векторіальныхъ уравненій на оси, неизмѣнно связанные со сре-

дой S^* ; такъ какъ эта среда въ нашемъ специальномъ случаѣ отождествляется съ матеріальной системой, ставшей неизмѣнной, то за оси проекцій можемъ выбрать главныя оси постоянного тензора инерціи этой системы. Если главные моменты инерціи этого тензора обозначимъ черезъ A, B, C , а проекціи угловой скорости $\vec{\Omega}^*$ на указанныя оси черезъ p, q, r , то изъ уравненій (5) и (6) можемъ написать слѣдующія скалярныя уравненія:

$$(7) \quad \begin{aligned} p' &= \frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A} qr, \\ q' &= \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B} rp, \\ r' &= \frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C} pq; \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} m_i (q' \zeta_i - r' \eta_i) + m_i [p(p \xi_i + q \eta_i + r \zeta_i) - \xi_i (p^2 + q^2 + r^2)] &= \\ &= R_{i\xi} = f_i^{(1)}(\xi_1, \eta_1, \dots, \zeta_n), \\ m_i (r' \xi_i - p' \zeta_i) + m_i [q(p \xi_i + q \eta_i + r \zeta_i) - \eta_i (p^2 + q^2 + r^2)] &= \\ &= R_{i\eta} = f_i^{(2)}(\xi_1, \eta_1, \dots, \zeta_n), \\ m_i (p' \eta_i - q' \xi_i) + m_i [r(p \xi_i + q \eta_i + r \zeta_i) - \zeta_i (p^2 + q^2 + r^2)] &= \\ &= R_{i\zeta} = f_i^{(3)}(\xi_1, \eta_1, \dots, \zeta_n), \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

здѣсь, кромѣ вышеуказанныхъ, введены слѣдующія обозначенія: ξ_i, η_i, ζ_i — координаты вектора \vec{q}_i по отношенію къ тѣмъ же осямъ, $R_{i\xi}, R_{i\eta}, R_{i\zeta}$ — тоже для вектора \vec{R}_i .

Послѣ замѣны въ уравненіяхъ (8) величинъ p', q', r' изъ уравненій (7) получимъ систему уравненій, которую кратко можемъ написать въ формѣ:

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi_i(p, q, r; \xi_1, \eta_1, \dots, \zeta_n) &= 0, \\ \psi_i(p, q, r; \xi_1, \eta_1, \dots, \zeta_n) &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \vartheta_i(p, q, r; \xi_1, \eta_1, \dots, \zeta_n) &= 0. \end{aligned}$$

Система (9), въ общемъ случаѣ¹⁾, не является тождественной по отношенію къ величинамъ p , q , r , поэтому ея рѣшеніе, если оно существуетъ, удовлетворяя всѣ уравненія системы, можетъ быть представлено только въ формѣ:

$$p = \text{const.}, \quad q = \text{const.}, \quad r = \text{const.}.$$

При полученномъ результатѣ уравненія (7) даютъ слѣдующія условія:

$$(B - C)qr = 0,$$

$$(C - A)rp = 0,$$

$$(A - B)pq = 0$$

для возможности вращенія системы какъ одного цѣлаго:

Эти условія могутъ удовлетворяться только при слѣдующихъ предположеніяхъ:

$$(I) \quad A = B = C.$$

Въ этомъ случаѣ каждая изъ осей есть главная ось инерціи, а потому и ось вращенія является главной осью инерціи во все время вращенія.

$$(II) \quad B = C \neq A$$

и затѣмъ или

$$a. \quad p = 0,$$

что соотвѣтствуетъ вращенію около оси въ плоскости равныхъ моментовъ, гдѣ каждая изъ осей есть главная ось инерціи, — или

$$b. \quad q = r = 0,$$

а тогда вращеніе происходитъ только съ угловой скоростью p , что отвѣчаетъ снова вращенію около главной оси инерціи.

$$(III) \quad A \neq B \neq C,$$

но тогда какая либо пара изъ величинъ p , q , r должна быть равна нулю, на примѣръ,

$$p = q = 0,$$

¹⁾ Болѣе детальный анализъ этой системы показываетъ, что система (9) сводится къ тождествамъ относительно p , q , r только въ томъ случаѣ, если матеріальная система дегенерируетъ въ точку.

а это приводит къ вращенію около оси, что отвѣчаетъ только угловой скорости r ; вращеніе снова происходитъ около главной оси инерціи.

Не трудно видѣть, что всѣ другія предположенія были бы лишь вариантами вышеприведенныхъ.

Такимъ образомъ во всѣхъ случаяхъ мы приходимъ къ результату, что вращеніе можетъ совершаться только около одной изъ главныхъ осей инерціи матеріальной системы.

Покажемъ теперь, что эта ось вращенія должна оставаться постоянной въ неподвижномъ пространствѣ.

Дѣйствительно, всегда можно расположить оси такъ, что вращеніе будетъ совершаться около оси $C\xi$ триэдра $C\xi\eta\zeta$, составленнаго изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи, и слѣдовательно при значеніяхъ:

$$(10) \quad p = q = 0, \quad r \neq 0.$$

Если теперь примемъ во вниманіе формулы для опредѣленія угловъ Euler'a, которыя, при извѣстной схемѣ, можно написать въ формѣ слѣдующихъ зависимостей:

$$\begin{aligned} q \sin \vartheta - p \cos \vartheta &= \psi' \sin \varphi, \\ q \cos \vartheta + p \sin \vartheta &= \varphi', \\ r &= \psi' \cos \varphi + \vartheta', \end{aligned}$$

то изъ нихъ при условіяхъ (10) слѣдуетъ

$$\psi' \sin \varphi = 0, \quad \varphi' = 0.$$

Такъ какъ изъ второго изъ написанныхъ условій слѣдуетъ

$$(11) \quad \varphi = \text{const.},$$

то изъ перваго можетъ быть два заключенія:

$$\alpha. \quad \psi' = 0$$

и значитъ

$$\psi = \text{const.},$$

что одновременно съ условіемъ (11) приводитъ къ постоянству положенія оси вращенія въ неподвижномъ пространствѣ;

$$\beta. \quad \sin \varphi = 0,$$

т. е., въ области нашихъ рѣшеній

$$\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = \pi.$$

И въ томъ и въ другомъ случаѣ ось вращенія совпадаетъ во все время движенія съ неподвижной въ пространствѣ осью Sz тріэдра $Sxyz$.

Собирая все вышеизложенное, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Произвольная матеріальная система подѣ дѣйствіемъ силъ, зависящихъ только отъ взаимныхъ разстояній, можетъ вращаться какъ одно цѣлое только въ томъ случаѣ, если осью вращенія служитъ главная ось инерціи этой системы; ось эта въ такомъ случаѣ остается неподвижной въ пространствѣ.

Ясно, что приведенная теорема даетъ необходимое, но не достаточное условіе возможности для матеріальной системы вращаться безъ измѣненія относительнаго положенія ея частей.



Изданія Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ:

Труды IV-го съѣзда русскихъ академическихъ организацій за границей. 1929. Часть 1. (Науки гуманитарныя) и 2 (Науки матем., ест.-ист. и технич.). — Цѣна 160 динаровъ или 80 динаровъ каждая часть отдѣльно.

Матеріалы для библиографіи русскихъ научныхъ трудовъ за рубежомъ. Выпускъ 1. 1931. — Цѣна 55 динаръ (1 долларъ).

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 1. 1930. — Цѣна 55 динаровъ.

А. Л. Погодинъ. Забѣтки объ изученіи былинь. — И. И. Лаппо. Уравненіе правъ В. К. Литовскаго и Короны Польской въ 1697 году. — Ѳ. В. Тарановскій. Предметъ и задача т. н. внѣшней исторіи права. — О. О. Марковъ. Статутъ гор. Котора. — В. В. Розенбергъ. Защита чистаго и прикладнаго искусства. — А. Н. Макаровъ. Вопросы кодификаціи основныхъ законовъ въ трудахъ комиссій XVIII вѣка. — Е. В. Аничковъ. Герценъ и Чернышевскій. — М. В. Шахматовъ. Государственно-національныя идеи „Чиновныхъ книгъ“. — Е. Ф. Шмурло. С. М. Соловьевъ. — С. Л. Франкъ. Онтологическое доказательство бытія Бога.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 2. 1930. — Цѣна 30 динаровъ.

А. А. Брандтъ. Обь аксіоматикѣ теоремы Карно и второго закона термодинамики. — В. Х. Даватцъ. Обь одномъ свойствѣ окружностей. — А. И. Косицкій. Объясненіе измѣненія расхода двигателя внутренняго сгорания — Н. А. Пушкинъ и М. Г. Каухчевъ. Электролит. гипохлоритная станція Петроград. водопроводовъ. — В. Э. Мартино. Забѣтки по экологіи млекопитающихъ Югославіи. — Н. В. Краинскій. Геометрич. и физич. основы морфологіи. — Г. Н. Піо-Ульскій. Исторія и соврем. направленіе прогресса паровой техники. — В. В. Фармаковскій. Тяговыя характеристики турбо-паровозовъ и тепловозовъ. — Ан. Д. Билимовичъ. Обь уравненіяхъ механики по отношенію къ главнымъ осямъ. — Г. Г. Злоковичъ. Принципы почвообразов. въ работахъ А. И. Набокихъ.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 3. 1931. — Цѣна 55 динаровъ.

Е. Шмурло. Русскіе католики конца XVII вѣка (съ факсимиле). — А. Л. Погодинъ. А. И. Соболевскій. — Н. Лосскій. Русская философія въ XX. вѣкѣ. — Ал. Маклецовъ. Проблема преступленія въ русской художественной литературѣ. — Е. В. Аничковъ. Къ религіознымъ воззрѣніямъ нашихъ шестидесятниковъ. — М. В. Шахматовъ. Купчія грамоты Московской Руси. — В. В. Розенбергъ. Правовыя и экономическія идеи до и послѣ войны. — Е. В. Спекторскій. Бенжаменъ Констанъ и Фюстель де Куланжъ. — А. А. Кизеветтеръ. Первый курсъ В. О. Ключевскаго 1873—74 г. — Р. К. Дрейлингъ. Воинскій Уставъ Петра Великаго и Суворовъ. — П. А. Остроуховъ. Обь источникахъ и

методахъ изученія торговли на Нижегородской ярмаркѣ въ XIX вѣкѣ до эпохи великихъ реформъ.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 4. 1931. — Цѣна 55 динаровъ.

Г. Г. Злоковичъ. Н. И. Васильевъ (некрологъ). — В. В. Фармаковскій. К. Д. Серебряковъ (некрологъ). — В. Х. Даватцъ. Къ вопросу объ огибающихъ семейства плоскихъ кривыхъ, зависящихъ отъ одного параметра. — Н. Н. Салтыковъ. Интегрированіе уравненій съ частными производными по способу измененія произвольныхъ постоянныхъ. — В. Жардецкій. О перманентномъ вращеніи изолированной жидкой массы. — Д. П. Рузскій. Работа центробѣжнаго насоса при переменныхъ условіяхъ. — Г. Н. Піо-Ульскій. О рациональномъ опредѣленіи коэффиціента полезнаго дѣйствія паровыхъ турбинъ. — А. Фанъ-деръ-Флитъ. Статически неопредѣлимый стержневой четырехугольникъ съ двумя проводочными диагоналями и съ шарнирами въ углахъ. — В. В. Фармаковскій. О выборѣ наивыгоднѣйшаго подъема при проектированіи желѣзнодорожныхъ линій. — Н. П. Абакумовъ. Относительная поправка за деформацию цѣпной линіи при измененіи базиса инварными проволоками. — А. А. Нилусъ. Наука и ея примѣненія въ военномъ дѣлѣ. — Л. В. Черносвитовъ. Резорбція мужскихъ половыхъ продуктовъ и ея значеніе для организма. — В. Мартино. Объ измененіи окраски мѣха у млекопитающихъ Югославіи. — Н. В. Краинскій. Электростатическія изслѣдованія и ихъ примѣненіе къ биологіи. — М. Н. Лапинскій. Активаторы психическихъ функций. — Г. Г. Злоковичъ. Нѣкоторыя данныя по морфологіи почвъ Ананьевскаго уѣзда. — Я. Хлытчиевъ. О гипотезѣ Журавскаго. — И. С. Свищевъ. Контроли правильности составленія условныхъ и нормальныхъ уравненій при уравниваніи нивеллирныхъ сѣтей способомъ наименьшихъ квадратовъ. — А. А. Брандтъ. Очеркъ исторіи примѣненія паровыхъ двигателей въ Россіи со времени ихъ появленія до 1875 года.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 5. 1931. — Цѣна 55 динаровъ.

Л. М. Сухотинъ. Къ пересмотру вопроса объ опричиннѣ. — Н. Н. Афанасьевъ. Провинціальныя собранія Римской Имперіи и Вселенскіе Соборы. — К. І. Зайцевъ. Крѣпостной земельный строй Россіи XVI—XVIII вв. и отраженіе его въ сочиненіяхъ Посошкова. — И. И. Лапшинъ. О схематизмѣ творческаго воображенія въ наукѣ. — Н. Лосскій. Интуитивизмъ и ученіе о трансубъективности чувственныхъ качествъ. — И. В. Пузинъ. Религіозно-философскія воззрѣнія Джіованни Пико деяла Мирандола. — А. Л. Погодинъ. Наблюденія надъ техникой народной лирики. — А. М. Петрункевичъ. Фюстель де Куланжъ. — С. В. Троицкій. Нелегальное кровное родство какъ препятствіе къ браку. — Г. А. Острогорскій. Аѳонскіе исихасты и ихъ противники. — С. Л. Волкобрунъ. Къ вопросу о процессуальной правѣ и дѣеспособности въ чешскомъ земскомъ правѣ. — М. А. Иностранцевъ. Вооруженныя силы, планы сторонъ и стратегическое развертываніе на русскомъ фронтѣ въ Міровую Войну.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 6. 1932 — Цѣна 35 динаровъ.

Н. Н. Салтыковъ. Способы Монжа-Ампера и Дарбу интегр. ур. съ части. производн. второго порядка и ихъ обобщеніе. — О. Л. Струве. О. А. Бредихинъ. — В. Жардецкій. Нѣкот. замѣчанія объ ур. движенія неоднородной непрерывной среды. — В. В. Фармаковскій. О выборѣ наивыгоднѣйшаго подъема при проектированіи желѣзнодорожныхъ линій. — Д. В. Фростъ. Къ теоріи магнитометрической развѣдки. — Т. В. Локоть. Идеи Менделя въ современномъ менделизмѣ. — М. Н. Лапинскій. Боль и ея сосудистый механизмъ. — Н. Е. Акацатовъ. Туберкулезная и члехоточная проблемы.

Складъ изданія: Руски Научни Институт, Краљице Наталије, 33 (Дом руске културе). — Institut Russe, Kraljice Natalije, 33 (Dom Ruske Kulture), Beograd, Jugoslavie.