ЗАПИСКИ
РУССКАГО НАУЧНАГО ИНСТИТУТА ВЪ БѢЛГРАДѢ.

ВЫПУСКЪ 8.

БѢЛГРАДЪ.
1933.

ЗАПИСКИ

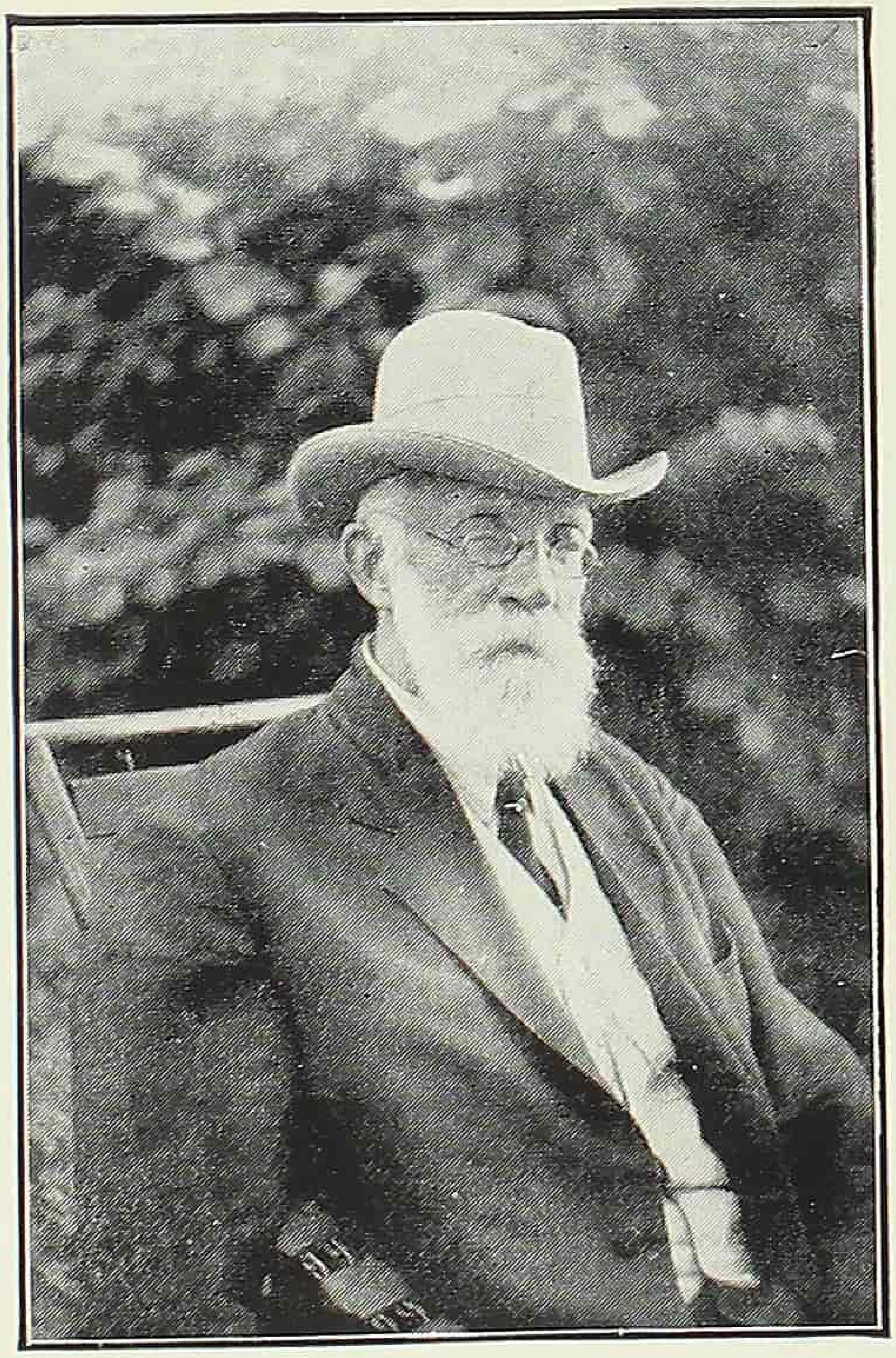
РУССКАГО НАУЧНАГО ИНСТИТУТА ВЪ БѢЛГРАДѢ.

ВЫПУСКЪ 8.

БѢЛГРАДЪ.
1933.

Типографія „Светлост“.
Београд. Бранкова бр. 20

СОДЕРЖАНІЕ.



Профессоръ
Александръ Андреевичъ
БРАНДТЪ.

Г. Н. Піо-Ульскій.

ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА АЛЕКСАНДРА АНДРЕЕВИЧА БРАНДТА.

Обзоръ его научной дѣятельности.

А. А. Брандтъ принадлежалъ къ разряду научно и притомъ всесторонне образованныхъ людей и являлся виднымъ представителемъ прежней генерацiи русскихъ профессоровъ. Его литературно-научная дѣятельность начинается почти съ самаго поступленія его въ качествѣ репетитора въ Институтъ Путей Сообщенія, гдѣ онъ работалъ по кафедрѣ паровыхъ машинъ и термодинамики и можетъ быть раздѣлена на два періода, изъ которыхъ въ первомъ вниманіе его останавливалось на техническихъ вопросахъ разной спеціальности, представлявшихъ въ то время новинку или злобу техническаго дня, во второмъ періодѣ онъ исключительно посвятилъ свои силы изученію вопросовъ, касающихся термодинамики въ самомъ широкомъ ея примѣненіи въ техникѣ и физической химіи.

Къ первому періоду принадлежатъ и его работы въ области теоріи паровыхъ машинъ, при чемъ онъ главнымъ образомъ интересовался примѣненіемъ паровыхъ машинъ къ локомотивамъ и къ движенію судовъ.

Въ этотъ періодъ онъ напечаталъ Очеркъ Исторіи паровой машины и примѣненіе паровыхъ двигателей въ Россіи. Въ этой прекраснымъ языкомъ написанной книжкѣ авторъ добросовѣстнымъ образомъ собралъ цѣнные матеріалы, касающіеся строительства паровыхъ машинъ въ Россіи и представилъ ясную картину прогресса этого дѣла на нашей родинѣ. При изложеніи исторіи паровой машины красною нитью проходитъ чувство истиннаго патріота, любящаго Россію и цѣнящаго все, что въ ней сдѣлано творческаго и чѣмъ она можетъ гордиться.

Въ 1896 году А. А., идя на встрѣчу потребностямъ студентовъ Института Путей Сообщенія напечаталъ курсы паровыхъ котловъ и паровыхъ машинъ, которые по тому времени являлись лучшими сочиненіями по этой спеціальности. Эти курсы были оригинально составлены и въ нихъ сказались крупныя педагогическія дарованія А. А. Краткость и ясность изложенія, присущая вообще всѣмъ научнымъ работамъ А. А., здѣсь особенно была цѣнна, такъ какъ курсъ паровыхъ машинъ не являлся первостепеннымъ предметомъ для студентовъ Института, интересы котораго были обращены больше на предметы эксплоатаціи и строительства желѣзныхъ дорогъ.

Въ 1879 году А. А. написалъ Построеніе діаграммы Цейнера по точному выраженію. Извѣстно, что діаграмма Цейнера, дающая возможность опредѣлять элементы парораспредѣленія золотника паровой машины, была составлена самимъ Цейнеромъ въ предположеніи безконечно длиннаго шатуна и, слѣдовательно, давала только среднія значенія элементовъ парораспредѣленія.

А. А. въ своей статьѣ предложилъ, кромѣ круговъ Цейнера, вычерчивать вспомогательные круги поправокъ, что давало возможность инженеру при проектированіи машины тотчасъ же устанавливать истинные элементы парораспредѣленія. Въ то время другихъ практическихъ поправокъ не существовало, такъ какъ поправки Брикса и Мюллера появились въ литературѣ значительно позднѣе. Въ 1880-ыхъ годахъ машины Compound хотя и были повсюду приняты, однако детальныхъ изслѣдованій работы этихъ машинъ въ русской литературѣ еще не было. А. А. первый занялся этимъ вопросомъ и напечаталъ въ 1880 году „Теоретическое изслѣдованіе работы машинъ системы Compound". Въ то время прогрессъ паровыхъ машинъ выдвинулъ рядъ вопросовъ кинематическаго характера, изъ которыхъ особенно занимало иностранную техническую литературу попытки устранить недостатки кулиссъ Стефенсона при работѣ съ малою степенью наполненія другими кулиссами съ однимъ эксцентрикомъ и безъ эксцентриковъ. Въ локомотивахъ тогда была введена кулисса Джоя, кинематическая схема дѣйствія которой оставалась достиженіемъ изобрѣтателя и заводовъ ее проектирующихъ. А. А. заинтересовался этимъ вопросомъ и написалъ прекрасное кинематическое изслѣдованіе кулиссы Джоя.

Появленіе на судахъ гребныхъ винтовъ Торнейкрофта не прошло для А. А. безъ послѣдствій. Онъ заинтересовался ими и написалъ въ 1888 г. обстоятельное описаніе дѣйствія этихъ винтовъ и ихъ преимущества передъ другими.

Интересуясь съ научной стороны вопросами паровой механики, А. А. не былъ чуждъ вопросовъ изъ другихъ областей знанія. Такъ, имъ напечатаны въ 1888—1891 годахъ три прекрасныхъ статьи „О зависимости удлиненій и сопротивленія стали отъ обработки и размѣровъ образцовъ“ и одна статья „О нагрѣваніи металловъ при растяженіи“.

Будучи всесторонне технически образованнымъ человѣкомъ, онъ не могъ быть не замѣченъ Министерствомъ Путей Сообщенія, куда неоднократно его призывали для консультаціи и гдѣ особенно цѣнили его спокойный разсудительный умъ и исключительную добросовѣстность въ изученіи порученнаго ему дѣла. Министерство приглашало его главнымъ образомъ по вопросамъ строительства портовыхъ сооруженій, въ которыхъ онъ являлся однимъ изъ компетентнѣйшихъ инженеровъ того времени.

Занятія вопросами портостроительства были причиною напечатанія имъ перевода съ собственными примѣчаніями статьи „Занесеніе портовъ пескомъ и голышемъ“ и оригинальной статьи „Производство землечерпанія въ песчаномъ грунтѣ при зыби“.

Неоднократно А. А. былъ командированъ внутри Имперіи и заграницу по разнымъ вопросамъ техники и каждая такая командировка обогощала литературу новыми произведеніями А. А. Результатомъ одной изъ такихъ командировокъ было „Описаніе изученія Коринфскаго канала“, напечатанное А. А. въ 1889 году.

А. А. любилъ работать и въ работѣ находилъ полное свое удовлетвореніе. Работа его всегда была самая разнообразная и всегда оставляла замѣтные слѣды его продуманныхъ и проученныхъ организацій, какъ въ области внутренняго распорядка учебнаго дѣла, такъ и въ области студенческаго быта, такъ и въ области научной и технической литературы. Работая цѣлую зиму, онъ на лѣто удалялся въ Финляндію въ свое Терріокское имѣнье или на берегъ Крыма въ свое другое имѣніе Семидворье. На отдыхѣ вдали отъ служебныхъ заботъ здѣсь онъ доканчивалъ начатыя свои научныя работы, а будучи на югѣ Крыма изучалъ его природу. Въ 1914 году имъ была напечатана статья „Замѣтки по археологіи Крыма“ (результатъ раскопокъ въ каменныхъ ящикахъ) и „Орошеніе садовъ подземною водою сухихъ Крымскихъ горныхъ рѣчекъ. Послѣдняя статья явилась послѣдствіемъ весьма удачно произведеннаго имъ опыта въ своемъ имѣніи по извлеченію подземной воды съ цѣлью орошенія находящагося тамъ фруктоваго сада.

При участіи своемъ на научныхъ конгресахъ и на праздновании юбилейныхъ событій онъ всегда оживлялъ эти общественныя и международныя собранія своими докладами обыкновенно имъ выполняемыми на трехъ европейскихъ языкахъ, которыми онъ владѣлъ въ совершенствѣ и это всегда возбуждало въ слушателяхъ чувство восхищенія. Во время празднованія столѣтняго юбилея пароходнаго дѣла въ Россіи имъ была напечатана брошюра посвященная этому юбилейному событію.

Изъ учебныхъ курсовъ кромѣ курсовъ паровыхъ котловъ и паровыхъ машинъ, А. А. напечатаны „Основы термодинамики"; эта книга въ началѣ вышла въ видѣ краткаго учебника для студентовъ Института Путей Сообщенія, а впослѣдствіи имъ было составлено и напечатано научное крупное сочиненіе по термодинамикѣ, которое было издано въ двухъ томахъ и которое было удостоено Россійской Академіей Наукъ большой Ломоносовской Преміи — рѣдкой и крупной награды, выдаваемой Академіей только за исключительно выдающіяся работы по естественнымъ отраслямъ знанія. Въ 1922 году книга эта была въ полномъ объемѣ переиздана московскимъ государственнымъ издательствомъ, а въ 1925 году переиздана тѣмъ же издательствомъ въ нѣсколько сокращенномъ видѣ. Всѣмъ намъ извѣстенъ также и курсъ Технической Термодинамики, написанной А. А. въ бытность его гонорарнымъ профессоромъ Бѣлградскаго Университета на сербскомъ языкѣ и которая была издана въ 1925 году.

Чисто научная литературная дѣятельность А. А., которую я назвалъ вторымъ періодомъ его научныхъ работъ и которая посвящена была исключительно вопросамъ термодинамики, начинается 1903 года и продолжается 27 лѣтъ включительно до 1931 года. А. А. написалъ и напечаталъ изъ области термодинамики столько научныхъ работъ, что въ краткомъ изложеніи нѣтъ никакой возможности сдѣлать хотя бы бѣглый ихъ обзоръ, а потому я ограничусь лишь указаніемъ общаго ихъ направленія и разсмотрѣніемъ нѣкоторыхъ изъ нихъ болѣе характерныхъ.

Изъ такихъ работъ особое вниманіе обращаетъ на себя работа А. А. „Объ аналогіи различныхъ видовъ энергіи". Нужно отмѣтить, что аналогія тепловой и другихъ видовъ энергіи давно уже обращала на себя вниманіе физиковъ. Этимъ занимались Ранкинъ, Эттингенъ, Гельмгольцъ, Гельшъ, Освальдъ, нашъ Бѣлградскій ученый профессоръ Петровичъ и многіе другіе.

Уже давно обращалось вниманіе, что дифференціалъ любой энергіи можетъ быть представленъ въ видѣ

$$dE = J dm,$$

гдѣ E — энергія, J — интенсивность энергіи, а m представляетъ факторъ емкости или матеріальный факторъ. Въ случаѣ тепловой энергіи это выраженіе можетъ быть переписано въ такомъ видѣ:

$$dE = T.dS,$$

гдѣ T — абсолютная температура — факторъ интенсивности энергіи, а S — матеріальный факторъ.

Такая аналогія въ выраженіяхъ различныхъ по природѣ энергій напрашивается сама собою, такъ какъ представляетъ какъ бы слѣдствіе общаго присущаго всѣмъ родамъ энергій постулата, высказаннаго Гельмомъ, а именно, что „Энергія имѣетъ стремленіе переходить сама собою отъ мѣстъ съ болѣе высокою напряженностью къ мѣстамъ съ меньшею напряженностью“. Такимъ образомъ разность напряженностей есть необходимое условіе всякихъ въ природѣ происходящихъ измѣненій, а самый переходъ энергіи съ мѣстъ большей напряженности къ мѣстамъ меньшей напряженности есть основная форма всѣхъ явленій природы.

Въ 90-хъ годахъ Освальдъ и Гельмъ пытались создать „Энергетику“, которая бы обнимала параллельно всѣ виды энергіи и представляла бы обобщеніе ученіе объ энергіи вообще. То же самое приблизительно, но еще съ болѣе общей точки зрѣнія сдѣлано проф. Петровичемъ.

Однако въ этихъ прекрасныхъ работахъ не было сдѣлано попытокъ провести аналогію между теплотою и другими видами энергіи дальше общихъ соображеній и уравненій типа

$$dE = Jdm.$$

А. А. Брандтъ въ своей статьѣ указываетъ на возможность вывода нѣкоторыхъ основныхъ уравненій, относящихся къ различнымъ родамъ энергіи, помощью аналогіи изъ уравненій термодинамики. Для примѣра онъ взялъ три уравненія термодинамики, относящіяся къ случаю изотермическаго расширенія тѣлъ, а именно;

1) Уравненіе Клапейрона

$$\text{Пред} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta v}\right)_t = AT\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v ,$$

дающаго количество тепла, которое нужно сообщить 1 грамму тѣла для изотермическаго расширенія на единицу объема.

2) Уравненія

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t = A\left[\, T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p \,\right]$$

дающаго измѣненіе внутренней энергіи объема единицы вѣса при изотермическомъ расширеніи на единицу объема, и

3) Уравненія

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_t = AT\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

дающаго измѣненіе теплоемкости при постоянномъ объемѣ при изотермическомъ расширеніи на единицу объема.

Эту аналогію А. А. показалъ на уравненіяхъ относящихся къ видамъ энергій лучистой, поверхностной, осмотической, химической и электрической. Напримѣръ, по отношенію къ лучистой энергіи онъ изъ ур (2) вывелъ извѣстное уравненіе Стефана Больтцмана, гласящаго, что энергія лучеиспусканія абсолютно чернаго тѣла пропорціональна четвертой степени его температуры.

Обыкновенный выводъ этого уравненія слѣдующій: Предположимъ имѣемъ искусственное абсолютно черное тѣло въ видѣ цилиндра, имѣющаго сѣченіе F и перемѣнную длину x. Цилиндръ пусть содержитъ UFx лучистой энергіи, а давленіе на кв. единицу его стѣнокъ $= \frac{1}{3}U$.

Приводится теплота ΔQ. Она идетъ на увеличеніе энергіи $Fd(Ux)$ и на работу $\frac{U}{3}Fdx$.

Поэтому

$$\Delta Q = F\left[d(Ux) + \frac{1}{3}Udx\right] = F\left(xdU + \frac{4}{3}Udx\right).$$

Дифференціалъ энтропіи

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = F\left(x\frac{dU}{T} + \frac{4}{3}\frac{U}{T}dx\right).$$

Эта величина есть полный дифференціалъ, слѣдовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{T}\right) = \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{U}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{4}{3}\frac{1}{T} - \frac{4}{3}\frac{U}{T^2}\frac{dt}{dU}$$

$$\text{или } \frac{dU}{U} = 4\frac{dt}{T}.$$

Зная, что U зависитъ только отъ T, получимъ, интегрируя

$$lg\ U = lg\ T^4 + lg\ K = log\ KT^4$$

$$\text{или } \quad U = CT^4.$$

Это же уравненіе по аналогіи выводится А. А. подстановкою въ ур (2) вмѣсто p выраженія $\frac{1}{3}U$, а вмѣсто U, энергію въ объемѣ v, т. е. Uv. Тогда

$$\left(\frac{\partial (Uv)}{\partial v}\right) = T\frac{\partial(\frac{1}{3}U)}{\partial t} - \frac{1}{3}U,$$

$$U = \frac{1}{3}T\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{3}U,$$

$$4U = T\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{dU}{U} = 4\frac{dt}{T};$$

$$lg\,U = lg\,T^4 + lg\,C \text{ или } U = CT^4.$$

Въ отношенiи химической энергiи А. А. выводитъ по аналогiи съ уравненiемъ Клапейрона, уравненiе Гельмгольца.

Дифференцiалъ химической энергiи равенъ πdx, гдѣ π — химич. потенц. (наибол. возм. работа химической реакцiи на 1 граммъ — молекулу веществъ, входящихъ въ реакцiю), а x — содержимое въ 1 граммѣ смѣси.

При изотермической реакцiи имѣемъ

$$AT\left(\frac{\partial \pi}{\partial t}\right)_{v,\,x_1,\,x_2\ldots\ldots} = Q_v\,.$$

Здѣсь Q_v — полная скрытая теплота реакцiи на 1 гр. мол. Она состоитъ изъ: 1) теплоты реакцiи U_v поглащаемой, когда реакцiя происходитъ изотермически при $v = \text{Const}$, и 2) химич. наиб. работы $= A\pi$.

Такимъ образомъ имѣемъ

$$AT\left(\frac{\partial \pi}{\partial t}\right)_{v,\,x_1,\,x_2} = A\pi + U_v\,.$$

Это и есть уравненiе Гельмгольца. Для другихъ видовъ энергiи А. А. указалъ также весьма яркую аналогiю нѣкоторыхъ уравненiй съ тремя взятыми имъ для примѣра уравненiями изъ термодинамики.

Въ статьѣ „Абсолютная энтропiя одноатомнаго идеальнаго газа“ А. А. указываетъ, что въ выраженiи энтропiи 1 грамма идеальнаго газа

$$S_1 = c_v\,lgn\,T + A\frac{H}{m}lgnv + K_1.$$

имѣется постоянная K_1, для нахожденiя которой можно или прибѣгнуть къ теоремѣ Нернста или воспользоваться опредѣленiемъ на основанiи теорiи вѣроятностей, которое дали Саккуръ, Тетроде и Планкъ. А. А. находитъ этотъ послѣднiй методъ очень сложнымъ, упрощаетъ его и даетъ изящное рѣшенiе этого вопроса также основанное на теорiи вѣроятностей.

Въ своей статьѣ „Теплота испаренія и упругость насыщеннаго пара при температурахъ, близкихъ къ абсолютному нулю" А. А. указываетъ на неправильность утвержденія E. Ariès, опубликованнаго имъ въ Comptes rendus Парижской Академіи Наукъ, что при температурѣ абсолютнаго нуля скрытая теплота испаренія твердыхъ и жидкихъ тѣлъ равна нулю, а также на неосновательность заключенія г. Ariès, опубликованнаго имъ въ другомъ номерѣ того же Comptes rendus, что извѣстное уравненіе Нернста и Планка

$$lgp = -\frac{mr_0}{2T} + \frac{mc_{p1}}{2} lgT + lgR + \frac{m}{2}(k_1 - c_{p1})$$

ошибочно.

Ошибку Ariès А. А. находитъ въ томъ, что онъ послѣ дифференцированія уравненія

$$pu = RT \text{ (дѣйств. при низк. давл. и темпер.)}$$

$$\frac{d(pu)}{dt} = p\frac{du}{dt} + u\frac{dp}{dt} = R$$

и преобразованія въ уравненіе

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R}{u} - \frac{p}{u}\frac{du}{dt} = \frac{p}{T} - \frac{p}{u}\frac{du}{dt}\cdot$$

величину $\frac{p}{u}\frac{du}{dt}$ полагаетъ равной нулю (u стремится къ ∞).

Это А. А. находитъ невѣрнымъ, такъ какъ г. Ariès забываетъ, что $\frac{du}{dt}$ съ уменьшеніемъ $\frac{p}{u}$ безпредѣльно возрастаетъ, что вполнѣ понятно. Такимъ образомъ уравненія Нернста и Планка являются вполнѣ правильными.

Весьма интересна работа А. А. „Выводъ уравненій термодинамики изъ разсмотрѣнія обратимыхъ циклическихъ и нециклическихъ процессовъ".

Уравненіе термодинамики и въ частности тѣ, куда входятъ частныя производныя, обыкновенно въ курсахъ Термодинамики выводятся математическимъ путемъ и только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ прибѣгаютъ къ графическому методу.

А. А. указываетъ въ своей статьѣ на педагогическое значеніе на ряду съ математическими выводами разсмотрѣнія графиковъ безконечно малыхъ циклическихъ и не циклическихъ процессовъ, которое выясняетъ физическое значеніе частныхъ производныхъ входящихъ въ уравненія и показываетъ учащемуся, что всѣ дифференціальныя уравненія термодинамики являются лишь математическимъ выраженіемъ перваго и второго закона термодинамики или обоихъ ихъ вмѣстѣ.

Въ этой статьѣ А. А. изъ разсмотрѣнія б. м. цикловъ показалъ выводъ уравненій:

$$1)\ \left(\frac{\partial l}{dt}\right)_v - \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right) = A\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v,$$

$$2)\ \left(\frac{\partial l}{\partial t}\right)_v - \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_t = \frac{l}{T},$$

$$3)\ \left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_p - \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_t = -A\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p,$$

$$4)\ c_p - c_v = l\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p,$$ а также

5) Уравненій, выведенныхъ въ 1902 году П. В. Котурницкимъ, для точныхъ выраженій внутренней энергіи и энтрогіи одного килограмма смѣси пара и жидкости при абсолютной температурѣ T_1, давленіи p_1 и степени сухости x_1 смѣси.

6) Уравненія $c_p - w_a = \frac{r}{u}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p$, выведеннаго также П. В. Котурницкимъ.

7) Выраженія Кирхгоффа для энергіи и энтропіи.

8) Выраженій разности теплоемкостей при постоянномъ объемѣ жидкости и сухого насыщеннаго пара и таковой же при постоянномъ давленіи.

Въ статьѣ А. А. „О соотношеніи между формулами Стефана для внутренняго давленія жидкостей и уравненіемъ Ванъ-деръ-Ваальса“ А. А. указываетъ, что формула Стефана неправильно цитируется и понимается Оствальдомъ, Тумлирцомъ и другими авторами. Какъ напримѣръ Тумлирцъ въ обширномъ изслѣдованіи доказываетъ, что формула Стефана не заслуживаетъ довѣрія для нѣкоторыхъ веществъ. А. А. показываетъ, что формула Стефана вытекаетъ изъ уравненія Ванъ-деръ-Ваальса, а потому она одинаково пригодна для всѣхъ тѣлъ, къ которымъ примѣнимо уравненіе Ванъ деръ-Ваальса.

Въ статьѣ „О соотношеніи между формулой Трутона и уравненіемъ Ванъ-деръ-Ваальса“ А. А. дѣлаетъ сопоставленіе между выводами изъ уравненій Клапейрона и Ванъ-деръ-Ваальса и формулою Трутона

$$\frac{r_1\ m_1}{T_1} = Const$$

и дѣлаетъ выводъ, что она пригодна только для случая отношенія $\frac{T_1}{T_k}$ = Const для всѣхъ веществъ, т. е. когда вещества разсматриваются при соотвѣтствующихъ температурахъ.

Далѣе идетъ рядъ статей А. А. о которыхъ я только упомяну, а именно: „Die thermodynamische Fläche des Wassers“, „Ueber die Differenz der spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen einer Flüssigkeit und ihres Dampfes“, „Betrachtungen über den Kohäsionsdruck“, „Ueber die Formeln von Gibbs, Planck, Raoult und Nernst für den Dampfdruck der Lösungen“, „Ueber die Formeln von Kirchhoff, Lechatelier und van't Hoff für die Lösungswärme in gesättigten Lösungen“, „Размышленія о теоремѣ Карно и о второмъ законѣ термодинамики“. „О другомъ законѣ термодинамики и о аксіомахъ Томсона, Клаузіуса и Каратеодори“.

Нужно замѣтить, что второй законъ термодинамики всегда особенно интересовалъ А. А. и ему онъ посвятилъ три прекрасныхъ и глубокихъ изслѣдованій. Въ одномъ изъ такихъ изслѣдованій, озаглавленномъ „Объ аксіоматикѣ теоремы Карно и второго закона термодинамики“ онъ указываетъ, что въ классической термодинамикѣ теорема Карно доказывается на основаніи двухъ постулатовъ: Клаузіуса: теплота не можетъ переходить сама собою отъ теплаго источника къ холодному, если при этомъ не происходитъ другихъ компенсирующихъ измѣненій и постулата Томсона, что невозможно построить perpetuum mobile 2 рода, т. е. невозможно построить періодически дѣйствующую машину пользуясь только однимъ источникомъ теплоты.

Для доказательствъ теоремы Карно разсматриваютъ на одномъ валу двѣ машины: паровую и воздушную одинаковой мощности, при чемъ одна работаетъ, какъ двигатель, а другая совершаетъ обратный циклъ. Затѣмъ роли машинъ мѣняются, воздушная становится двигателемъ, а паровая совершаетъ обратный циклъ. Если коэффиціентъ полезнаго дѣйствія обѣихъ машинъ предположить различнымъ, то получаются противорѣчія противъ 1-го или 2-го постулата.

По мнѣнію А. А. указанные постулаты совершенно не необходимы для доказательства теоремы Карно, которая можетъ быть выведена или изъ геометрическихъ или математическихъ соображеній, пользуясь только первымъ закономъ термодинамики. Свое геометрическое доказательство А. А. основываетъ на слѣдующемъ: Если возможна машина съ коэффиціентомъ полезнаго дѣйствія равнымъ единицѣ и съ однимъ тепловымъ источникомъ, то идеальный циклъ долженъ быть составленъ или изъ одной изотермы, пересѣкаемой адіабатой или изъ изотермы и двухъ адіабатъ, проведенныхъ изъ концовъ изотермы и пересѣкающихся или касающихся на нѣкоторомъ разстояніи. Однако, такіе циклы не осуществимы, такъ какъ изотерма не можетъ пересѣкать адіабату въ двухъ точкахъ. Невозможность такого построенія сводится къ невозможности пересѣченія двухъ адiабатъ, которое въ этомъ случаѣ получилось бы, если бы мы изъ второго пересѣченiя изотермы съ адiаб.той провели новую адiабату. Что же касается невозможности пересѣченiя двухъ адiабатъ, то это вытекаетъ изъ того соображенiя, что при допущенiи пересѣченiя адiабатъ мы бы получили противорѣчiе съ основнымъ физическимъ закономъ, т. е. что большему паденiю внутренней энергiи по адiабатѣ соотвѣтствовала бы меньшая произведенная работа, а это очевидно невозможно.

Изъ невозможности составленiя указанныхъ цикловъ А. А. выводитъ слѣдствiе, что идеальный циклъ для полученiя непрерывной работы долженъ быть составленъ изъ двухъ изотермъ и двухъ адiабатъ, т. е. необходимо существованiе двухъ источниковъ теплоты съ различными температурами. Этому геометрическому доказательству А. А. предпосылаетъ и математическое доказательство.

Въ рукописяхъ, оставленныхъ А. А., былъ найденъ рядъ неизданныхъ имъ при жизни научныхъ работъ и между ними два курса: „К у р с ъ п а р о в ы х ъ т у р б и н ъ“ и „К у р с ъ к и н е т и ч е с к о й т е о р i и г а з о в ъ“.

Въ большую заслугу А. А. слѣдуетъ поставить составленiе и напечатанiе очень полнаго „У к а з а т е л я л и т е р а т у р ы п о т е р м о д и н а м и к ѣ и е я п р и л о ж е н i я м ъ“.

Въ послѣднее время А. А., чувствуя, что приближаются дни разлуки его съ земною жизнью, рѣшилъ издать литературный сборникъ своихъ воспоминанiй подъ заглавiемъ: „Листья пожелтѣлые“. Воспоминанiя эти написаны прекраснымъ литературнымъ языкомъ и читаются съ большимъ интересомъ. Въ нихъ проглядываетъ душа идеалиста и исключительное вдумчивое отношенiе къ окружающему. Литературныя статьи А. А. помѣщались въ повременныхъ изданiяхъ и раньше Такъ, напримѣръ въ одномъ изъ номеровъ „Руля“ имъ былъ помѣщенъ интересный разсказъ о свиданiи его съ старцемъ Распутинымъ. Время отъ времени А. А. наѣзжалъ въ Владивостокъ по вопросамъ портостроительства и тамъ онъ заинтересовался японскою лирикою настолько, что рѣшилъ издать переводъ японскихъ стиховъ на русскiй языкъ, что и было имъ блестяще выполнено.

Этимъ короткимъ очеркомъ я заканчиваю обзоръ научной и литературной дѣятельности А. А. Брандта и теперь хочу только сказать нѣсколько заключительныхъ словъ въ память этого истиннаго ученаго, носителя наилучшихъ человѣческихъ идеаловъ. А. А. Брандтъ не только любилъ науку, но онъ любилъ и русскую молодежь, воспитанію которой въ нѣдрахъ высшей школы онъ придавалъ особенное, государственное значеніе. Эта любовь къ молодежи не прекращалась и въ его послѣднихъ годахъ жизни, когда онъ взялъ на себя трудъ помощи русскому студенчеству, для чего изыскалъ средства отъ американскихъ благотворителей и больше того, онъ удѣлялъ и изъ собственныхъ весьма скромныхъ средствъ, чтобы на нихъ воспитывать здѣсь и заграницею случайно знакомаго ему бѣднаго мальчика.

Бѣлградскій Университетъ въ свое время принялъ А. А. Брандта въ число своихъ гонорарныхъ профессоровъ по термодинамикѣ и не смотря на свой возрастъ А. А. не только читалъ лекціи, но и руководилъ практическими занятіями студентовъ, которыя посѣщались большимъ количествомъ слушателей. Уже больше года А. А. почувствовалъ себя настолько слабымъ, что долженъ былъ удалиться изъ Бѣлграда на Курортъ Бледъ, гдѣ чистый хорошій воздухъ нѣсколько поддерживалъ его здоровье. Бѣлградскій Университетъ цѣнилъ заслуги А. А. Брандта, не редуцировалъ его и выплачивалъ до самой его смерти 1500 динаръ гонорара и тѣмъ поддерживалъ его матеріально. Эту помощь мы, русскіе коллеги А. А. Брандта, не разсматриваемъ какъ благодѣяніе, но какъ благородный жестъ и долгъ братской славянской націи по отношенію къ своему славянскому ученому, который за оказанное ему гостепріимство не остался въ долгу, оставивъ послѣ себя цѣнный вкладъ въ техническую литературу своимъ курсомъ термодинамики, который еще долго будетъ оказывать помощь и инженерамъ, и учащейся молодежи. Мы твердо вѣримъ, что такое отношеніе близкой намъ русскимъ Югославянской націи для Исторіи не пропадетъ даромъ. Русскій народъ умѣетъ быть благодарнымъ и возстановленная правовая Россія вспомнитъ и тотъ благородный жестъ, который былъ сдѣланъ Югославіей по отношенію къ русскому ученому А. А. Брандту.

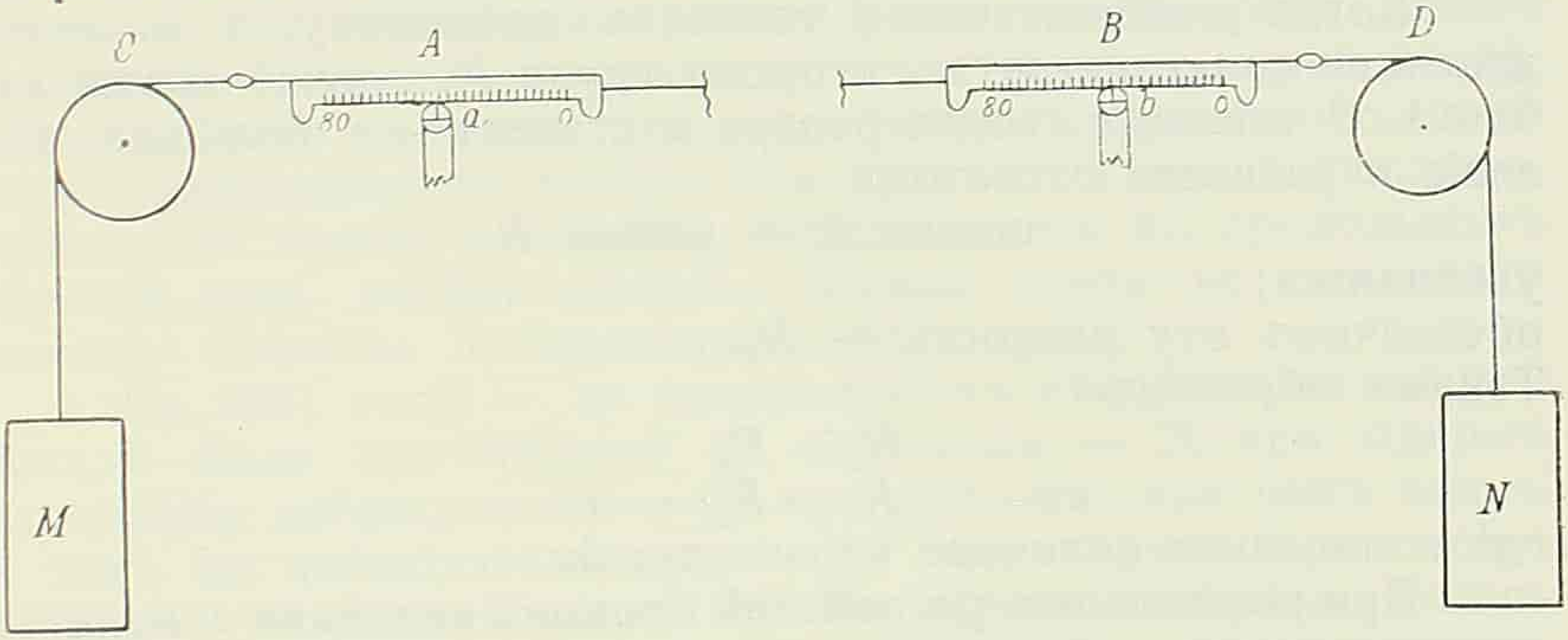
Проф. Н. Абакумовъ.

ВЛІЯНІЕ ТРЕНІЯ ВЪ БЛОКАХЪ БАЗИСНАГО ПРИБОРА ЕДЕРИНА НА ИЗМѢРЯЕМОЕ РАЗСТОЯНІЕ.

Инварныя проволоки базиснаго прибора Едерина обыкновенно натягиваются или при помощи динамометровъ или при помощи грузовъ M и N, которые висятъ на шнурахъ, перекинутыхъ черезъ блоки C и D (черт. 1).

Мы остановимся на разсмотрѣніи второго способа.

Естественно, что на измѣряемое разстояніе между реперами a и b окажетъ вліяніе треніе въ блокахъ C и D.



Черт. 1.

Такъ какъ надписи на миллиметровыхъ шкалахъ проволоки растутъ въ одну и ту же сторону, то благодаря тренію, при положеніи проволоки, указанномъ на черт. 1, черта репера b окажется на меньшихъ дѣленіяхъ шкалы, а репера a наоборотъ на бóльшихъ. Слѣдовательно отсчитанное разстояніе будетъ больше дѣйствительнаго.

Чтобы устранить это вредное вліяніе, обычно прибѣгаютъ къ такому методу отсчетовъ. Наблюдатель A осторожно передвигаетъ свою шкалу въ сторону гири M — тянетъ проволоку —, послѣ чего производятся отсчеты по обѣимъ шкаламъ; снова наблюдатель A передвигаетъ шкалу, но теперь уже въ сторону гири N — толкаетъ проволоку — послѣ чего производятся новые отсчеты по шкаламъ. Если для передвиженія проволоки будетъ употреблено одинаковое усиліе, то можно ожидать, что среднее ариѳметическое изъ двухъ такихъ отсчетовъ будетъ свободно отъ вліянія тренія.

Если наблюдатель, передвинувъ шкалу, слегка ее придержитъ, то разность между отсчетами, когда проволока тянется и когда она толкается, дастъ линейную величину вліянія тренія сложеннаго съ усиліемъ приложеннымъ для придержанія шкалы.

Если мы хотимъ получить чистое вліяніе тренія, то необходимо послѣ передвиженія шкалы, совершенно ее не придерживать, а дать возможность остановиться на произвольномъ дѣленіи, послѣ чего произвести отсчеты.

Когда наблюдатель A тянетъ проволоку, т. е. передвигаетъ свою шкалу въ сторону груза M, вліяніе тренія въ блокѣ C ослабляется и черта репера a станетъ на меньшее дѣленіе. Разность отсчетовъ

$$\text{шкала } A - \text{шкала } B$$

уменьшится;
обозначимъ эту разность — R_1.

Когда наблюдатель A толкаетъ проволоку, т. е. передвигаетъ свою шкалу въ сторону груза N, вліяніе тренія въ блокѣ C усилится, черта репера a станетъ на бóльшее дѣленіе и разность отсчетовъ

$$\text{шкала } A - \text{шкала } B$$

увеличится;
обозначимъ эту разность — R_2.
Такимъ образомъ

$$R_2 > R_1$$

$$\text{и} \qquad R_1 - R_2 = -r,$$

гдѣ r линейная величина вліянія тренія.

При роликовомъ устройствѣ блоковъ величина r будетъ, конечно, очень незначительна и можетъ быть опредѣлена только изъ большого ряда наблюденій.

Для практическихъ цѣлей совершенно не интересно знать дѣйствительную линейную величину вліянія тренія. Важно только опытнымъ путемъ убѣдиться въ ея ничтожности и главное установить постоянство средняго ариѳметическаго изъ противоположныхъ отсчетовъ

$$\frac{\text{проволока тянется} + \text{проволока толкается}}{2}$$

Такого рода испытанія не однократно производились въ интернаціональномъ бюро мѣръ и вѣсовъ въ Севрѣ, и всѣ они дали положительные результаты. Севрскія испытанія производились людьми опытными, въ совершенствѣ изучившими методы измѣренія длинъ инварными проволоками.

Любопытно такого рода испытанія произвести съ людьми мало опытными, такъ какъ къ точнымъ измѣреніямъ басисовъ прибѣгаютъ сравнительно рѣдко; слѣдовательно, въ большинствѣ случаевъ эти измѣренія будутъ производиться, строго говоря, людьми мало опытными.

Такого рода испытанія мнѣ удалось произвести со своими учениками, студентами культурно-геодезическаго отдѣленія Техн. Фак. Загребскаго университета, при учебныхъ измѣреніяхъ загребскаго базиса на каналѣ Кунищакъ (502 метра) въ 1930, 31 и 32 годахъ.

Геодезическому институту Загр. Ун. принадлежитъ 4 инварныхъ проволоки (Ateliers I. Carpentier) №№ 857, 858, 859, 860.

До и послѣ измѣренія базиса всякій разъ всѣ четыре проволоки сравнивались между собою на контрольныхъ столбахъ, поставленныхъ на разстояніи близкомъ къ 24 метрамъ на дворѣ Техническаго Факультета. Эти сравненія каждый годъ производились новыми методами и новыми лицами.

Въ 1930 году при сравненіи проволокъ на контрольныхъ столбахъ, на каждой шкалѣ производилось 20 отсчетовъ, при чемъ послѣ 10 отсчетовъ наблюдатели мѣнялись мѣстами для опредѣленія личной разности. Во время самого измѣренія базиса производилось 5 отсчетовъ на каждой шкалѣ. Базисъ былъ измѣренъ два раза. Впередъ при одномъ положеніи наблюдателей, назадъ при другомъ. Передъ каждымъ отсчетомъ шкала проволоки передвигалась въ продольномъ смыслѣ безъ особой системы. Шкала почти не придерживалась. Отсчеты производились безъ лупы.

Въ 1931 году — на контрольныхъ столбахъ на каждой шкалѣ было произведено 40 отсчетовъ — 20 при одномъ положеніи наблюдателей и 20 при другомъ; при чемъ одинъ и тотъ же наблюдатель сначала 10 разъ тянулъ проволоку, а затѣмъ 10 разъ толкалъ её. Во время измѣренія базиса производилось 4 отсчета на каждой шкалѣ; при чемъ одинъ и тотъ же наблюдатель два раза тянулъ проволоку и два раза толкалъ её. При измѣреніи назадъ наблюдатели помѣнялись мѣстами. Всѣ отсчеты дѣлались при помощи лупы.

Въ 1932 году — на контрольныхъ столбахъ на каждой шкалѣ было произведено 80 отсчетовъ — 40 при одномъ положеніи наблюдателей и 40 при другомъ. Порядокъ отсчетовъ былъ принятъ слѣдующій: первый наблюдатель 10 разъ тянетъ проволоку и 10 разъ толкаетъ, то же самое продѣлываетъ второй наблюдатель. Мѣна мѣстъ и повтореніе той же программы отсчетовъ. При измѣреніи базиса производилось 6 отсчетовъ на каждой шкалѣ; при чемъ одинъ и тотъ же наблюдатель три раза тянулъ проволоку и три раза толкалъ её. Вторичное измѣреніе базиса было произведено при другомъ положеніи наблюдателей. Всѣ отсчеты дѣлались безъ лупы.

Всѣ три раза измѣреніе базиса производилось только двумя проволоками №№ 857 и 858.

Всякій годъ, какъ было упомянуто, наблюдатели мѣнялись, но при каждомъ отдѣльномъ измѣреніи базиса одни и тѣ же наблюдатели сравнивали проволоки на контрольныхъ столбахъ и измѣряли базисъ.

Сопоставимъ полученные результаты по годамъ.

Во всѣхъ случаяхъ проволоки находились въ положеніи указанномъ на черт. 1.

1930 годъ

Сравненіе на контрольныхъ столбахъ

1-V-30

№№ провол.	I Набл. A въ стор. гр. M „ B „ „ „ N средн. изъ 10 отсч.	II B въ стор. гр. M A „ „ „ N средн. изъ 10 отсч.	Личная разность II — I
	mm	mm	mm
857	+ 14,75	+ 14,97	+ 0,22
858	15,12	15,20	0,08
859	15,19	15,42	0,23
860	15,28	15,45	0,17
			Сред. + 0,17

8-V-30

857	15,00	15,14	0,14
858	15,59	15,59	0,00
859	15,55	15,69	0,14
860	15,35	15,74	0,39
			Сред. + 0,17

Длина базиса приведенная на уровень моря
(Измѣр. произв. 5 V-30)

№№ провол.	I. Полож. наблюд. впередъ	II. Полож. наблюд. назадъ
	метра	
857	502,32613	502,32934
858	32562	33003
Средн.	502,32588	502,32969

Средн. 502,32778 ± 0,21 mm

Личная разность

$$\frac{502,32969 - 502,32588}{21} = +0,18 \text{ mm}$$

1931 годъ

Сравненіе на контрольныхъ столбахъ

4-V-31

Передвигаетъ проволоку только набл. *A*, придерживая шкалу.

I полож. набл.

№№ провол.	*A* тянетъ	*A* толкаетъ	Среднее	Тян.—Толк. *r*
	mm	mm	mm	mm
857	+15,32	+15,41	+15,37	−0,09
858	15,95	15,94	15,95	+0,01
859	15,81	16,11	15,96	−0,30
860	16,06	16,27	16,17	−0,21
				Ср. −0,15

II полож. набл.

857	15,19	15,47	15,33	−0,28
858	15,76	15,92	15,84	−0,16
859	15,79	16,19	15,99	−0,40
860	15,98	16,22	16,10	−0,24
				Ср. −0,27

Среднее $r = -0{,}21 \pm 0{,}04$ mm

Личная разность

II—I

	mm
857	−0,04
858	−0,11
859	+0,03
850	−0,07
Средн.	−0,05

9-V-31

Передвигаетъ *A*, придерживая.

I полож. набл.

857	15,25	15,44	15,35	−0,19
858	15,70	15,89	15,80	−0,19
859	15,79	15,92	15,86	−0,13
860	15,99	15,93	15,96	+0,06
				Ср. −0,11

II полож. набл.

857	14,99	15,19	15,09	−0,20
858	15,49	15,78	15,64	−0,29
859	15,72	15,83	15,78	−0,11
860	15,75	15,81	15,78	−0,06
				Ср. −0,17

Среднее $r = -\overset{mm}{0{,}14} \pm 0{,}04$

Личная разность

II—I

	mm
857	—0,26
858	—0,16
859	—0,08
860	—0,18
Ср.	—0,17

Средн. изъ опредѣл. 4 и 9 мая.

$r = -\overset{mm}{0{,}18} \pm 0{,}03$

Личная разн. $= -0{,}11 \pm 0{,}03$

Длина базиса (6-V-31).

№№ провол.	II. полож. набл. впередъ метр.	I. полож. набл. назадъ
857	502,32801	502,32874
858	32515	32914
Средн.	502,32658	502,32894
Средн.	502,32776 ± 0,71 mm	

Личная разность

$$\frac{502{,}32658 - 502{,}32894}{21} = -\overset{mm}{0{,}11}$$

Вліяніе тренія

$r = -\overset{mm}{0{,}03} \pm 0{,}01.$

1932 годъ

Сравненіе на контрольныхъ столбахъ

20-V 32

Передвигаетъ *A*, придерживая

I полож. набл.

№№ провол.	тянетъ	толкаетъ	Среднее	тян.—толк. r
	mm			
857	+15,72	+15,85	+15,79	—0,13
858	16,24	16,52	16,38	—0,28
859	16,31	16,56	16,44	—0,25
860	16,34	16,63	16,49	—0,29
				Ср. —0,24

Передвигаетъ B, придерживая

I полож. набл.

857	15,81	15,87	15,84	−0,06
858	16,40	16,38	16,39	+0,02
859	16,37	16,46	16,42	−0,09
860	16,38	16,62	16,50	−0,24
				Ср. −0,09

Передвигаетъ A, придерживая

II полож. набл.

857	15,90	15,99	15,95	−0,09
858	16,46	16,69	16,58	−0,23
859	16,53	16,66	16,60	−0,13
860	16,42	16,71	16,57	−0,29
				Ср. −0,19

Передвигаетъ B, придерживая

II полож. набл.

857	15,85	15,94	15,90	−0,09
858	16,47	16,46	16,47	+0,01
859	16,67	16,52	16,60	+0,15
860	16,53	16,62	16,58	−0,09
				Ср. −0,01

Ср. r для $A = -\overset{mm}{0{,}22} \pm 0{,}03$

" " " $B = -0{,}05 \pm 0{,}04$

Личная разность

№№ пров.	I	II	II—I
857	15,82	15,93	+0,11
858	16,39	16,53	+0,14
859	16,43	16,60	+0,17
860	16,50	16,58	+0,08
			Ср. +0,13

27-V-32

Передвигаетъ наблюдатель A, придерживая

I полож. набл.

857	15,71	15,65	15,68	+0,06
858	16,13	16,18	16,16	−0,05
859	16,18	16,21	16,20	−0,03
860	16,26	16,50	16,38	−0,24
				Ср. −0,07

Передвигаетъ *B*, послѣ продолжительнаго передв.

не придерживаетъ шкалу

I полож. набл.

857	15,72	15,71	15,72	+0,01
858	16,11	16,11	16,11	0,00
859	16,21	16,20	16,21	+0,01
860	16,27	16,37	16,32	−0,10
				Ср. −0,02

Передвигаетъ *A*, придерживая

II полож. набл.

857	15,60	15,88	15,74	−0,28
858	16,20	16,26	16,23	−0,06
859	16,29	16,48	16,39	−0,19
860	16,38	16,56	16,47	−0,18
				Ср. −0,18

Передвигаетъ *B*, не придерживая

II полож. набл.

857	15,79	15,69	15,74	+0,10
858	16,21	16,21	16,21	0,00
859	16,43	16,42	16,43	+0,01
860	16,44	16,54	16,49	−0,10
				Ср. 0,00

Ср. r для $A = -\overset{\text{mm}}{0{,}12} \pm 0{,}04$

„ „ „ $B = -0.01 \pm 0{,}03$

Личная разность

№№пров.	I	II	II — I
857	15,70	15,74	+0,04
858	16,14	16,22	+0,08
859	16,21	16,41	+0,20
860	16,35	16,48	+0,13
			Ср. +0,11

Среднее изъ опредѣл. 20 и 27 мая

для A $r = -\overset{\text{mm}}{0{,}17} \pm 0{,}02$

Личная разн. $= +0{,}12 \pm 0{,}02$

Длина базиса (24-V-32)

№№ провол.	II положеніе набл. впередъ	I положеніе набл. назадъ
	метра	
857	502,32926	502,32739
858	32928	32799
Средн.	502,32927	502,32769

Средн. 502,32848 $\pm$ 0,15 mm

Личная разность

$$\frac{502{,}32927-502{,}32769}{21}=+0{,}08 \text{ mm}$$

Вліяніе тренія

Передвигаетъ только A

$$r=-0{,}22 \pm 0{,}01 \text{ mm}$$

Сопоставимъ полученные результаты вліянія тренія

	Контр. столб.	Базисъ	Контр.—баз.
	mm		
31 годъ передв. A, прид.	$-0{,}18$	$-0{,}03$	$-0{,}15$
32 „ „ A, „	$-0{,}17$	$-0{,}22$	$+0{,}05$
„ „ „ B, „	$-0{,}05$		
„ „ „ B, не пр.	$-0{,}01$		

Изъ полученнаго матеріала можно сдѣлать слѣдующіе выводы:

1) Вліяніе тренія само по себѣ незначительно;

2) оно увеличивается, если наблюдатель, послѣ продольнаго передвиженія шкалы, придерживаетъ её;

3) въ послѣднемъ случаѣ оно различно для различныхъ наблюдателей, но среднiй результатъ

$$\frac{\text{Проволока тянется}+\text{проволока толкается}}{2}$$

остается во всѣхъ случаяхъ постоянной величиной.

Дѣйствительно, если мы образуемъ разности такихъ среднихъ результатовъ для двухъ наблюдателей при одномъ и томъ же положеніи ихъ, то получимъ такія величины:

№№ пров.	20-V-32 $A-B$ I полож.	II полож.	Средн.	27-V-32 $A-B$ I полож.	II полож.	Средн.
	mm					
857	$-0{,}05$	$+0{,}05$	$0{,}00$	$-0{,}04$	$0{,}00$	$-0{,}02$
858	$-0{,}01$	$+0{,}11$	$+0{,}05$	$+0{,}05$	$+0{,}02$	$+0{,}04$
859	$+0{,}02$	$0{,}00$	$+0{,}01$	$-0{,}01$	$-0{,}04$	$-0{,}03$
860	$-0{,}01$	$-0{,}01$	$-0{,}01$	$+0{,}06$	$-0{,}02$	$+0{,}02$
Средн.	$-0{,}012$	$+0{,}037$	$+0{,}012$	$+0{,}015$	$-0{,}010$	$+0{,}002$

Отклоненія носятъ чисто случайный характеръ. Среднее изъ всѣхъ отсчетовъ

$$A-B=+\overset{mm}{0,007}$$

величина ничтожная.

4) Методы отсчетовъ не повліяли на конечный результатъ. Необходимо только одинаковое число разъ тянуть проволоку и толкать её.

Послѣдній выводъ доказывается

a) прекрасною сходимостью длинъ базиса въ разные годы

	метра	mm
1930 годъ	502,32778	± 0,21
31 „	32776	± 0,71
32 „	32848	± 0,15,

b) устойчивостью личной разности

Годъ	Контр. столб.	Базисъ	Контр.—баз.
	mm		
30	+0,17	+0,18	−0,01
31	−0,11	−0,11	0,00
32	+0,12	+0,08	+0,04
			Ср. +0,01

c) устойчивостью разности проволокъ 858—857

30	+0,42	+0,42	0.00
31	+0,52	+0,46	+0,06
32	+0,53	+0,55	−0,02
			Ср. +0,01

Нѣкоторыя отклоненія имѣютъ свои вполнѣ опредѣленныя причины. Напримѣръ, измѣненіе разности проволокъ 858—857 между 30 и 31 годами объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что въ этомъ промежуткѣ времени проволоки были употреблены для измѣренія двухъ базисовъ. Сравнительно большое отклоненіе въ 0,06mm разности проволокъ 858—857 въ 1931 году, между измѣреніемъ на Контр. столбахъ и базиса, также имѣетъ свою причину — во время измѣренія базиса въ этомъ году дулъ сильный порывистый вѣтеръ. Это обстоятельство очевидно повліяло и на измѣненіе вліянія тренія: на контрольныхъ столбахъ было получено

$$r=-\overset{mm}{0,18}$$

а при измѣреніи базиса

$$r=-0,03.$$

В. Жардецкій

ТРАНСФОРМАЦІЯ КЛЕБША И МАЛЫЯ КОЛЕБАНІЯ ЖИДКОСТИ.

1. Какъ извѣстно изъ теоріи фигуръ небесныхъ тѣлъ, задача объ опредѣленіи формы поверхностей одинаковаго давленія въ жидкой массѣ пріобрѣтаетъ особое значеніе, такъ какъ отъ ея рѣшенія зависятъ наши знанія о возможныхъ внутреннихъ структурахъ и внѣшнихъ поверхностяхъ, если послѣднія задаются условіемъ вида $p = const$. Въ большинствѣ проблемъ, разсматривавшихся въ этой теоріи, мы имѣемъ дѣло съ неизмѣняемыми съ теченіемъ времени поверхностями и ихъ опредѣленіе сводится къ рѣшенію нѣкотораго функціональнаго уравненія.

Предположимъ, что движеніе нѣкоторой идеальной жидкой массы опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = grad Q, \tag{1}$$

въ которомъ $\vec{v}$ есть скорость, а

$$Q = U - \int \frac{dp}{\kappa}, \tag{2}$$

гдѣ U гравитаціонный потенціалъ, p — давленіе, κ — плотность жидкости. Уравненіе (1) справедливо, если силы дѣйствующія на жидкость имѣютъ потенціалъ (мы дальше допускаемъ, что это силы притяженія по закону Ньютона) и плотность есть функція только давленія

$$\kappa = f(p) \quad \text{или} \quad \kappa = const. \tag{3}$$

Мы имѣемъ далѣе уравненіе непрерывности

$$\frac{d\kappa}{dt} + \kappa div \vec{v} = 0 \tag{4}$$

или несжимаемости

(5) $$\operatorname{div}\vec{v}=0$$

Пусть давленіе и плотность выражены въ параметрической формѣ:

(6) $$p=p(a)\quad,\quad \kappa=\kappa(a).$$

Поверхности одинаковой плотности и давленія совпадаютъ и даются условіямъ

$$a=const.$$

Если жидкость имѣетъ свободную поверхность, то на ней $p=0$, $\kappa=const.$

Въ теоріи фигуръ небесныхъ тѣлъ играютъ прежде всего роль перманентныя вращенія изолированной жидкой массы около общей оси неподвижной въ пространствѣ, частнымъ случаемъ которыхъ являются равномѣрныя вращенія жидкости какъ одного цѣлаго. Подобныя движенія задаются условіемъ

(7) $$\vec{v}=[\Omega\vec{r}],$$

гдѣ Ω мгновенная угловая скорость, величина которой (ω) можетъ зависѣть отъ разстоянія (s) взятой частицы отъ оси вращенія, проходящей черезъ центръ инерціи, но не зависитъ отъ времени, $\vec{r}$ — векторъ опредѣляющій положеніе частицы по отношенію къ послѣднему.

При этихъ условіяхъ, какъ извѣстно, уравненія (1) даютъ слѣдующій интегралъ

$$Q+\int\frac{\omega^2}{2}ds^2=const.$$

или

(8) $$U+\int\frac{\omega^2}{2}ds^2=\int\frac{dp}{\kappa}+const.=fonct.(a)\,,$$

каковой и является уравненіемъ семейства поверхностей одинаковаго давленія. Уравненіе (8) есть функціональное, такъ какъ выраженіе для U зависитъ отъ поверхности одинаковой плотности, видъ которыхъ еще неизвѣстенъ. Въ немъ давленіе исключено, а неизвѣстная также функція отъ a въ правой части опредѣляется при рѣшеніи уравненія (8) въ связи съ дополнительнымъ условіемъ — постоянства заданной массы.

Когда мы переходимъ къ проблемамъ связаннымъ съ деформирующимися поверхностями, то условія (7) и (8) отпадаютъ. Необходимо, слѣдовательно, вывести аналогичное (8) условіе для случая поверхностей мѣняющихся съ теченіемъ времени. Это условіе является интеграломъ живой силы въ той формѣ, которую далъ A. Clebsch[1]).

2. Трансформація Clebsch-a. Изложимъ эту трансформацію векторіальнымъ методамъ, ибо при этомъ выясняется ея геометрическое значеніе. Такъ какъ скорость $\vec{v}$ какъ векторъ опредѣляется тремя скалярами, то мы можемъ всегда положить

$$\vec{v} = grad\,\varphi + m\,grad\,\psi \tag{9}$$

при чемъ φ, m, ψ являются вообще функціями координатъ x, y, z и времени t[2]).

Тогда лѣвая часть уравненія (1) преобразуется слѣдующимъ образомъ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = grad\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + m\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\} + \frac{\partial m}{\partial t} grad\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} grad m + \\ + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

Но

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2} grad \vec{v}^2 - [\vec{v}\, rot\vec{v}]$$

а

$$rot\vec{v} = rot\,(m\,grad\psi) = -[grad\psi,\ grad m].$$

Поэтому

$$-[\vec{v}\ rot\vec{v}] = \left[\vec{v}\ [grad\psi,\ grad m]\right] = grad\psi\ (\vec{v}\ grad m) - \\ - grad m\ (\vec{v} grad\psi).$$

Принимая во вниманіе, что полныя производныя по времени

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)m \quad \text{и} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\psi,$$

получаемъ слѣдующее выраженіе

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = grad\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + m\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2}\right\} + \frac{dm}{dt} grad - \psi\frac{d\psi}{dt} grad m$$

---

[1]) A. Clebsch. Ueber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. Crelle J. B. 54. S. 293. 1857.

Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. Crelle J. B. 56. S. 1. 1859.

[2]) Это равносильно извѣстному изъ теоріи формъ Пфаффа преобразованію:

$$udx + vdy + wdz = d\varphi + md\psi,$$

гдѣ u, v, w произвольныя функціи координатъ.

и уравненіе (1) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$(10)\quad grad\left\{Q-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-m\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\vec{v}^2}{2}\right\}=\frac{dm}{dt}grad\psi-\frac{d\psi}{dt}gradm$$

Послѣднее же уравненіе позволяетъ сдѣлать слѣдующій выводъ: существуетъ функція $\Pi(m, \psi, t)$, которая является потенціаломъ выраженія стоящаго въ правой части, а куда лишь входятъ величины m, ψ, t.

Такъ какъ

$$grad\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial\psi}grad\,\psi+\frac{\partial\Pi}{\partial m}grad\,m,$$

то получаемъ слѣдующія условія:

$$(11)\qquad \frac{dm}{dt}=\frac{\partial\Pi}{\partial\psi}\quad,\quad \frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial\Pi}{\partial n}.$$

Кромѣ того изъ уравненія (10) слѣдуетъ, что

$$(12)\qquad Q=U-\int\frac{dp}{\kappa}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+m\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\vec{v}^2}{2}+\Pi(m, \psi, t),$$

гдѣ къ Π можетъ быть прибавлена произвольная функція времени. Равенство (12) при $\kappa=const$ и есть общая форма интеграла живой силы по Клебшу. Онъ преобразуетъ уравненіе (12) въ слѣдующее

$$(12')\qquad U-\frac{p}{\kappa}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+m\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\vec{v}^2}{2},$$

освобождаясь отъ произвольной еще функціи Π при помощи условій

$$(13)\qquad \frac{dm}{dt}=0\quad,\quad \frac{d\psi}{dt}=0$$

и соединяя произвольную функцію времени съ φ.

При этихъ дополнительныхъ условіяхъ среди возможныхъ значеній функцій m и ψ выбираемъ такія, чтобы интегралы уравненій (13):

$$(14)\qquad m=const.\text{ и }\psi=const$$

опредѣляли въ своемъ пересѣченіи вихревыя линіи; они, слѣдовательно, остаются связанными во время движенія съ частицами жидкости. Такъ какъ Клебшъ разсматриваетъ несжимаемую жидкость, то кромѣ выше указанныхъ условій функціи φ, m и ψ должны удовлетворять условіе несжимаемости (5), т. е.

$$(15)\qquad div\{grad\,\varphi+m\,grad\,\psi\}=0.$$

Въ случаѣ жидкости сжимаемой необходимо взять уравненіе непрерывности

$$(16)\qquad \frac{d\kappa}{dt}+\kappa\, div\left\{ grad\,\varphi + m\, grad\,\psi\right\}=0$$

а интегралъ (12) можно написать въ формѣ, которая дана Hill-омъ [3])

$$(17)\qquad U-\int\frac{dp}{\kappa}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\,(grad\,\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\,(grad\,\psi)^2.$$

Это уравненіе получается, если подставимъ

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-(\vec{v}\nabla)\psi=-(grad\,\varphi\, grad\,\psi)-m(grad\,\psi)^2,$$

что имѣетъ мѣсто въ силу второго изъ условій (13), и затѣмъ

$$\vec{v}^2=(grad\,\varphi)^2+2m\,(grad\,\varphi\;\, grad\,\psi)+m^2\,(grad\,\psi)^2.$$

Уравненія (12′) и (17) очевидно даютъ намъ условія, которыя опредѣляютъ поверхности одинаковаго давленія.

Дѣйствительно изъ (6) и (17), напримѣръ, получаемъ

$$(18)\qquad U=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\,(grad\,\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\,(grad\,\psi)^2+fonct.\,a$$

т. е., если поле скоростей задано (даны φ, m, ψ какъ функціи координатъ и времени) мы имѣемъ это функціональное уравненіе, въ которомъ U зависитъ отъ формы поверхностей одинаковаго давленія, для ихъ опредѣленія.

Въ частности, если примѣнить этотъ результатъ къ движенію жидкости имѣющей свободную поверхность, то, такъ какъ на ней $p=0$, она будетъ принадлежать къ семейству поверхностей (18) зависящему отъ параметра a.

3. Рѣшеніе функціональнаго уравненія (18) въ общемъ видѣ представляетъ значительныя математическія трудности въ виду сложности лѣвой части, въ которой границы интегрированія неизвѣстны, когда существуетъ свободная поверхность жидкости деформирующаяся съ теченіемъ времени.

Но есть цѣлый рядъ случаевъ, когда это рѣшеніе можно свести къ задачамъ, анализъ которыхъ можетъ быть проведенъ извѣстными уже методами.

Пусть при нѣкоторомъ заданномъ движеніи извѣстна форма поверхностей одинаковаго давленія κ, слѣдовательно, можно найти выраженіе для U. Возьмемъ движеніе, которое мало отличается отъ заданнаго, т. е. даемъ новыя значенія функцій φ, m, ψ, которыя однако тоже должны удовлетво-

---

[3]) M. J. M. Hill. On the Motion of Fluid, part of which is moving Rotationally and part Irrotationally. Philos. Trans. R. S. London. Vol. 175 p. 363, 1884.

рять выведенныя для нихъ условія (13), (14), (15) или (16). Тогда мы можемъ допустить, что форма поверхностей одинаковаго давленія будетъ мало отличаться отъ перваго случая. При этомъ выраженіе для потенціала (U) можетъ быть разложено въ рядъ по членамъ различнаго порядка относительно нѣкоторой величины опредѣляющей отступленіе новыхъ поверхностей отъ первыхъ. Задача сведется тогда къ опредѣленію этой новой функціи (координатъ и времени) при помощи уравненія (18).

Такой ходъ разсужденія можно примѣнять, напримѣръ, въ задачахъ о движеніяхъ жидкостей мало отличающихся отъ состояній соотвѣтствующихъ извѣстнымъ уже формамъ равновѣсія, либо въ задачахъ о движеніяхъ близкихъ къ нѣкоторымъ болѣе общимъ перманентнымъ, при которыхъ также форма поверхностей одинаковаго давленія извѣстна. Такимъ образомъ можно разсматривать малыя колебанія около извѣстныхъ фигуръ жидкости, и даже мы имѣемъ средство изучать движенія прогрессивно удаляющіяся отъ другого заданнаго; въ послѣднемъ случаѣ однако въ теченіи такого интервала времени, въ которомъ остаются законными употреблявшіяся разложенія въ ряды.

Конечно послѣ формальнаго рѣшенія задачи необходимо доказательство дѣйствительнаго существованія найденной функціи (или нѣсколькихъ) удовлетворяющей условія задачи, а также выясненія вопроса не имѣетъ ли уравненіе (18) рѣшеній постороннихъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія.

Какъ приложеніе этого метода разсмотримъ въ связи съ изслѣдованіями Ляпунова малыя колебанія изолированнаго жидкаго шара.

4. Малыя колебанія изолированнаго жидкаго шара.

Фигурой равновѣсія изолированной однородной и несжимаемой жидкой массы, частицы которой притягиваются по закону Ньютона и которая находится въ состояніи покоя, является, какъ извѣстно, шаръ. Шаровой же поверхностью ограничена и неоднородная масса, и въ ней семействомъ, поверхностей одинаковаго давленія и плотности явится семейство концентричныхъ сферъ.

Остановимся на слѣдующемъ движеніи жидкости, которое можетъ быть выбрано среди возможныхъ выводящихъ ее изъ сферическаго вида. Положимъ

$$\vec{v} = grad\,\varphi, \tag{19}$$

гдѣ φ есть малая величина зависящая періодически отъ времени, а также и отъ координатъ, напримѣръ

$$\varphi = e^{i\gamma t}\,\varphi_*(x, y, z).$$

Тогда уравненіе (18) переходитъ въ слѣдующее

$$U = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(grad\varphi)^2 + fonct.\,(a)\,. \tag{20}$$

Очевидно, что полагая $m=0$, $\psi=0$ мы удовлетворимъ условія (13—14), а для несжимаемой жидкости, какъ видно изъ уравненія (15), φ должно быть рѣшеніемъ уравненія Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{21}$$

Уравненіе (20) справедливо для любой жидкости; мы же далѣе ограничиваемся случаемъ однородной несжимаемой жидкости и, задавая поле скоростей (19), возьмемъ для примѣра лишь гармоническую функцію второго порядка. Методъ же этотъ очевидно можно приложить для любого φ удовлетворяющаго уравненіе Лапласа (21).

Итакъ полагаемъ

$$\varphi = \varepsilon\,sin\,(\gamma t + \gamma_0)\,(2z^2 - x^2 - y^2)\,, \tag{22}$$

гдѣ ε есть параметръ имѣющій малыя значенія, періодъ же соотвѣтствующихъ свободныхъ колебаній:

$$T = \frac{2\pi}{\gamma}\,.$$

Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \varepsilon\gamma\,cos\,(\gamma t + \gamma_0)\,(2z^2 - x^2 - y^2) \tag{23}$$

$$(grad\varphi)^2 = 4\,\varepsilon^2\,sin^2\,(\gamma t + \gamma_0)\,(x^2 + y^2 + 4z^2)$$

и колебанія должны быть зональны, такъ какъ φ зональная функція.

Выраженіе для потенціала деформированнаго шара возьмемъ въ видѣ ряда

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots \tag{24}$$

который слѣдуетъ изъ общаго разложенія даннаго Ляпуновымъ[4]) для потенціала тѣла, въ которомъ поверхности одинаковаго давленія мало отличаются отъ семейства концентричныхъ подобныхъ эллипсоидовъ.

Для того, чтобы произвести необходимыя въ дальнѣйшемъ преобразованія, положимъ, что поверхности одинаковаго давленія заданы уравненіями

---

[4]) A. Liapounoff. Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. P. I. 1925. pp. 5-20. Publié par l'Acad.d. Sc. Leningrad.

$$x = ar(1+\varsigma)\,sin\vartheta\ cos\,\chi$$
(25) $$y = ar(1+\varsigma)\,sin\vartheta\ sin\chi$$
$$z = ar(1+\varsigma)\,cos\vartheta,$$

гдѣ ϑ и χ нутаціонный и прецессіонный углы на сферѣ радіуса равнаго единицѣ; a параметръ, значеніе котораго было указано, мѣняющійся отъ *0* (въ центрѣ) до *1* на свободной поверхности жидкости;

(26) $$\varsigma = \varsigma\,(a, \vartheta, \chi; t)$$

функція имѣющая малыя значенія, зависящія еще и отъ времени и опредѣляющая отступленіе деформирующихся поверхностей одинаковаго давленія отъ семейства концентричныхъ шаровъ.

Для опредѣленія смысла параметра a предположимъ, что объемъ ограниченный поверхностью уровня F_a, соотвѣтствующей данному значенію a, равенъ объему шара радіуса ar. Выведемъ равенство соотвѣтствующее этому условію. Элементъ объема, какъ это слѣдуетъ изъ равенствъ (25),

(27) $$d\tau = a^2 r^3\,(1+\varsigma)^2\left(1+\frac{\partial a\varsigma}{\partial a}\right) da\,d\sigma,$$

гдѣ элементъ поверхности сферы единичнаго радіуса

$$d\sigma = sin\vartheta\,d\vartheta\,d\chi\,.$$

Поэтому мы имѣемъ

$$r^3\int_0^a a^2 da\int\left(1+\varsigma\right)^2\left(1+\frac{\partial a\varsigma}{\partial a}\right) d\sigma = \frac{4}{3}\pi a^3 r^3,$$

при чемъ во второмъ интегралѣ предѣлы ϑ $(0, \pi)$, χ $(0, 2\pi)$. Послѣ интегрированія по a и очевидныхъ сокращеній находимъ

$$\int(1+\varsigma)^3 d\sigma = 4\pi\,.$$

Откуда слѣдуетъ, что

(28) $$\int\varsigma d\sigma = -\int\varsigma^2 d\sigma - \frac{1}{3}\int\varsigma^3 d\sigma\,.$$

Таково дополнительное условіе для функціи ς, являющееся слѣдствіемъ сдѣланнаго выше выбора значенія параметра a.

Обозначая потенціалъ черезъ fU, гдѣ f есть постоянная притяженія и черезъ d разстояніе между точками M (x, y, z) и M' (x', y', z'), мы имѣемъ

$$U = \int\frac{\kappa' d\tau'}{d}$$

или для однородной жидкости, принимая во вниманіе выраженіе (27).

(29) $$U=\kappa r^3\int_0^1 a'^2 da'\int\frac{\left(1+\varsigma'\right)^2\left(1+\frac{\partial a'\varsigma'}{\partial a'}\right)d\sigma'}{d}.$$

При этомъ, какъ видно изъ равенствъ (25),

(30) $$d^2=r^2\{[a(1+\varsigma)\sin\vartheta\cos\chi-a'(1+\varsigma')\sin\vartheta'\cos\chi']^2+\ldots+\ldots\}$$

Если выраженіе (29) разложить въ рядъ (24) по членамъ различнаго порядка относительно величины ς, которую мы считаемъ малой, то:

1) первый членъ U_0 есть потенціалъ однороднаго шара плотности κ и радіуса r

2) второй членъ имѣетъ видъ [5])

(31) $$U_1=(2U_0-4\pi r^3\kappa C)\varsigma+\kappa r^3\int\frac{\bar{\varsigma}'\,d\sigma'}{D(a,1)},$$

гдѣ чертой обозначено значеніе величины ς соотвѣтствующее $a=1$; $D(a,1)$ есть значеніе d, въ которомъ надо положить $\varsigma=\varsigma'=0$ и $a'=1$; постоянная C опредѣляется условіемъ

$$\int\frac{d\sigma'}{D(a,1)}=4\pi C.$$

Такъ какъ

$$\int\frac{r^2\,d\sigma'}{D(a,1)}$$

есть потенціалъ простого слоя, плотность котораго равна единицѣ и который распредѣленъ на сферѣ радіуса r, въ нѣкоторой точкѣ внутри ея, то эта постоянная величина равна $4\pi r$.

Поэтому

(32) $$C=\frac{1}{4\pi r^2}\int\frac{r^2\,d\sigma'}{D(a,1)}=\frac{1}{r}.$$

Въ дальнѣйшемъ намъ не понадобятся полныя выраженія для членовъ порядка выше перваго и мы для нихъ оставляемъ общія обозначенія U_2, $U_3\ldots$. Наконецъ,

3) Приведенное разложеніе потенціала въ рядъ справедливо, если функція ς удовлетворяетъ слѣдующія условія

(33) $$|\varsigma|<l\ ,\quad \frac{r(a+a')}{2}\,\frac{|\varsigma'-\varsigma|}{D}<g,$$

гдѣ l и g числа независящія отъ a, a', ϑ, ϑ', χ, χ', но зави-

---

[5]) См. A. Liapounoff l. c. стр. 18—19. Для простоты полагаемъ дальше $f=1$.

сящія отъ нѣкотораго параметра (ε) и обращающіяся въ ноль вмѣстѣ съ нимъ; кромѣ того

(34) $$l+g < 1.$$

По методу Ляпунова возможность допущеній (33) и (34) доказывается послѣ формальнаго рѣшенія задачи, т. е. для найденной функціи ς.

Такъ какъ потенціалъ U_0 внутри сферы ($a < 1$) данъ равенствомъ:

$$U_0 = 2\pi \kappa r^2 - \frac{2}{3}\pi \kappa (ar)^2,$$

то для коэффиціента при ς въ равенствѣ (31) находимъ

(35) $$2U_0 - 4\pi r^3 \kappa C = -4\pi a^2 r^3 K,$$

гдѣ

(36) $$K = \frac{\kappa}{3r}.$$

Подставляемъ теперь въ уравненіе (20) найденныя изъ (23), (24), (31), (35) выраженія и, оставляя слѣва члены содержанія ς въ первой степени, получаемъ слѣдующее уравненіе

(37) $$K\varsigma - \frac{\kappa}{4\pi a^2}\int \frac{\overline{\varsigma}'\, d\sigma'}{D(a,\,1)} = W + F(a),$$

гдѣ

(38) $$W = \frac{1}{4\pi a^2 r^3}\,[U_2 + U_3 + \ldots - \varepsilon\gamma \cos(\gamma t + \gamma_0)\, a^2 r^2 (1+\varsigma)^2 (3\cos^2\vartheta - 1) + 2\varepsilon^2 \sin^2(\gamma t + \gamma_0)\, a^2 r^2 (1+\varsigma)^2 (3\cos^2\vartheta + 1)],$$

такъ какъ изъ уравненій (25) слѣдуетъ, что

$$x^2 + y^2 = a^2 r^2 (1+\varsigma)^2 \sin^2\vartheta = a^2 r^2 (1+\varsigma)^2 (1 - \cos^2\vartheta)$$
$$2z^2 - x^2 - y^2 = a^2 r^2 (1+\varsigma)^2 (3\cos^2\vartheta - 1)$$
$$x^2 + y^2 + 4z^2 = a^2 r^2 (1+\varsigma)^2 (3\cos^2\vartheta + 1).$$

А функція $F(a)$ должна быть выбрана такъ, чтобы удовлетворялось условіе (28).

Въ частности $\overline{\varsigma}$, т. е. значеніе ς на свободной поверхности, являющееся функціей лишь угла ϑ, если положимъ $a=1$ и будемъ разсматривать лишь фигуры вращенія, должно быть рѣшеніемъ уравненія

(39) $$K\overline{\varsigma} - \frac{\kappa}{4\pi}\int \frac{\overline{\varsigma}'\, d\sigma'}{D(1,1)} = \overline{W} + const.$$

при чемъ послѣдняя постоянная есть $F(1)$.

Такъ какъ искомая функція ς должна исчезать при $\varepsilon = 0$, то будемъ ее искать въ видѣ ряда

(40) $$\varsigma = \sum_{i=1}^{\infty} \varsigma_i \, \varepsilon^i ,$$

въ которомъ коэффиціенты ς_i зависятъ отъ a и угла ϑ, и соотвѣтственно

(41) $$\bar{\varsigma} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varsigma}_i \, \varepsilon^i ,$$

гдѣ $\bar{\varsigma}_i$ зависятъ лишь отъ ϑ, а кромѣ того, конечно, и отъ времени.

Положимъ

(42) $$W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \, \varepsilon^i , \qquad F(a) = \Sigma F_i (a) \, \varepsilon^i ,$$

Тогда изъ (37) слѣдуетъ, что

$$K \varsigma_i - \frac{\kappa}{4\pi a^2} \int \frac{\bar{\varsigma}'_i \, d\sigma'}{D(a,1)} = W_i + F_i (a).$$

Послѣдній членъ можетъ быть исключенъ слѣдующимъ преобразованіемъ. Умножимъ предыдущее уравненіе на $d\sigma$ и проинтегрируемъ по сферѣ радіуса равнаго единицѣ. Обозначая еще

$$N_i = \int \varsigma_i d\sigma$$

находимъ

$$K N_i - \frac{\kappa}{4\pi a^2} \int \bar{\varsigma}'_i d\sigma' \int \frac{d\sigma}{D(a,1)} = \int W_i d\sigma + 4\pi F_i$$

и поэтому

(43) $$K \varsigma_i - \frac{\kappa}{4\pi a^2} \int \bar{\varsigma}'_i \left(\frac{1}{D(a,1)} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\sigma}{D(a,1)} \right) d\sigma' = W_i - $$
$$- \frac{1}{4\pi} \int W_i d\sigma + \frac{1}{4\pi} K N_i .$$

Соотвѣтственно изъ уравненія (39) получаемъ

(44) $$K \bar{\varsigma} - \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\bar{\varsigma}'_i d\sigma'}{D(1,1)} = \bar{W}_i + const.$$

Введеніе величинъ N_i имѣетъ слѣдующее значеніе. Если мы подставимъ рядъ (40) въ условіе (28), то оно разобьется на слѣдующія:

$$N_1 = \int \varsigma_1 d\sigma = 0$$

(45) $$N_2 = \int \varsigma_2 d\sigma = - \int \varsigma_1^2 d\sigma$$

изъ которыхъ видно, что величина N_i можетъ быть вычислена, когда извѣстны функціи $\varsigma_1, \varsigma_2 \ldots \varsigma_{i-1}$. Такъ какъ функція W_1 извѣстна, что видно изъ выраженія (38), то очевидно намѣчается слѣдующій ходъ вычисленія функцій ς_i. Изъ уравненія (44) надо опредѣлить $\bar{\varsigma}_1$, послѣ чего уравненіе (43) дастъ значеніе ς_1 во всей области занятой жидкостью; затѣмъ можно найти $\bar{\varsigma}_2$ изъ уравненія (44) и, такъ какъ N_2 станетъ извѣстнымъ, ς_2 — снова при помощи (43) и т. д.

Если ограничимся лишь вопросомъ объ опредѣленіи отступленія свободной поверхности жидкости отъ сферической, то въ первомъ приближеніи мы имѣемъ:

$$\overline{W}_1 = -\frac{1}{2\pi r}\gamma cos(\gamma t + \gamma_0)\frac{3cos^2\vartheta - 1}{2}$$

и уравненіе, слѣдующее изъ (44) и (36):

$$\bar{\varsigma}_1 - \frac{3r}{4\pi}\int\frac{\bar{\varsigma}_1' d\sigma'}{D(1,1)} = -\frac{3}{2\pi\kappa}\gamma cos(\gamma t + \gamma_0)\, P_2(cos\vartheta), \tag{46}$$

гдѣ P_2 — многочленъ Лежандра. Легко видѣть, что въ нашемъ случаѣ *const.* равняется нулю. Дѣйствительно

$$\int \overline{W}_1 d\sigma = 0$$

благодаря извѣстному свойству многочленовъ Лежандра.

Кромѣ того выраженіе

$$\int\frac{r^2 d\sigma}{D(1,1)}$$

есть потенціалъ простого слоя съ плотностью равной единицѣ на сферѣ радіуса равнаго r въ нѣкоторой точкѣ ея поверхности. Онъ есть постоянная величина, а поэтому членъ получающійся при переходѣ отъ уравненія (43) къ (44) въ силу перваго изъ условій (45):

$$\int \bar{\varsigma}_1'\left(\int\frac{d\sigma}{D(1,1)}\right) d\sigma' = c\int \bar{\varsigma}_1' d\sigma' = 0.$$

Итакъ нахожденіе функціи $\bar{\varsigma}_1$ сводится къ рѣшенію неоднороднаго интегральнаго уравненія (46). Соотвѣтствующее однородное интегральное уравненіе:

$$\xi - \nu\int\frac{\xi' d\sigma'}{D(1,1)} = 0 \tag{47}$$

имѣетъ, благодаря извѣстнымъ формуламъ для сферическихъ функцій (Y_n):

$$\int\frac{Y_n' d\sigma'}{D(1,1)} = \frac{4\pi Y_n}{(2n+1)r}, \tag{48}$$

такъ какъ мы разсматриваемъ фигуры вращенія, какъ фундаментальныя функціи — полиномы Лежандра, а характеристическія числа

$$\nu_n = \frac{2n+1}{4\pi} r.$$

Параметръ же ν имѣетъ слѣдующее значеніе

$$\nu = \frac{3r}{4\pi} = \nu_1.$$

Какъ извѣстно изъ общей теоріи Ляпунова, рѣшеніе уравненія вида (46) дается въ видѣ ряда

$$\bar{\varsigma}_1 = \Sigma \frac{A_n}{T_n} Y_n,$$

который въ нашемъ случаѣ сводится къ одному лишь члену. Такъ какъ

$$A_n = \frac{1}{\gamma_n} \int \overline{W}_1 Y_n d\sigma, \qquad \gamma_n = \int Y_n^2 d\sigma,$$

то всѣ эти коэффиціенты обращаются въ ноль за исключеніемъ

$$A_2 = \frac{5}{4\pi} \int \overline{W}_1 P_2(\cos\vartheta) d\sigma = -\frac{3}{2\pi\kappa} \gamma \cos(\gamma t + \gamma_0).$$

Выраженія же

$$T_n = \frac{\nu_n - \nu}{\nu},$$

и, такъ какъ

$$\nu_2 = \frac{5}{4\pi} r,$$

то

$$T_2 = \frac{2}{5}.$$

Поэтому мы окончательно получаемъ

$$\bar{\varsigma}_1 = -\frac{15}{4\pi\kappa} \gamma \cos(\gamma t + \gamma_0) P_2(\cos\vartheta), \tag{49}$$

въ справедливости чего можно убѣдиться непосредственно подстановкой этого выраженія въ уравненіе (46) и принимая во вниманіе равенство (48).

Изъ уравненій (25) мы находимъ уравненіе свободной поверхности:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(1 + \bar{\varsigma})^2.$$

Въ первомъ приближеніи можно положить

$$\cos\vartheta = \frac{z}{r},$$

ибо изъ третьяго изъ уравненій (25) слѣдуетъ, что

$$cos\vartheta=\frac{z}{r}(1-\bar{\varsigma}+\ldots),$$

и уравненіе свободной поверхности написать въ видѣ

$$x^2+y^2+z^2=r^2(1+2\bar{\varsigma}_1\varepsilon).$$

Тогда мы получаемъ при помощи равенства (49) и

$$P_2=\frac{1}{2}(3cos^2\vartheta-1)=\frac{3z^2}{2r^2}-\frac{1}{2}$$

слѣдующій видъ искомаго уравненія

$$(50)\quad x^2+y^2+z^2\left[1+\frac{45\varepsilon}{4\pi\kappa}\gamma cos(\gamma t+\gamma_0)\right]=r^2\left[1+\frac{15\varepsilon}{4\pi\kappa}\gamma cos(\gamma t+\gamma_0)\right].$$

Таково уравненіе деформирующейся съ теченіемъ времени свободной поверхности жидкости въ первомъ приближеніи.

Какъ видно изъ хода разсужденій при выводѣ его мы нигдѣ не должны были вести какихъ либо ограниченій относительно величины γ, т. е. періода $T=\frac{2\pi}{\gamma}$ колебаній. Но помимо вышеуказанныхъ условій мы будемъ имѣть еще одно—кинематическое, которое слѣдуетъ изъ равенствъ (22) и (25). Дѣйствительно:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Возьмемъ лишь одинъ полюсъ, т. е. $\vartheta=0$, и обозначимъ соотвѣтствующее значеніе ς черезъ ς_p. Тогда по предыдущему равенству находимъ послѣ сокращеній

$$(51)\qquad \frac{\partial\varsigma_p}{\partial t}=4\varepsilon sin(\gamma t+\gamma_0)\cdot(1+\varsigma_p).$$

Допустимъ, что колебанія настолько малы, что можно ограничиться первымъ приближеніемъ, которое выражается равенствомъ

$$\bar{\varsigma}_p=\bar{\varsigma}_{1p}\varepsilon.$$

Изъ уравненій (49) и (51) получаемъ

$$\frac{15}{4\pi\kappa}\gamma^2 sin(\gamma t+\gamma_0)\varepsilon=4\varepsilon sin(\gamma t+\gamma_0)$$

ибо $P_2(1)=1$, и отбрасывая членъ съ ε^2.

Откуда

$$\gamma^2=\frac{16\,\pi\kappa}{15},$$

и поэтому

(52) $$T=\frac{2\pi}{\gamma}=\sqrt{\frac{15\pi}{4\kappa}}\,.$$

Такъ какъ ускореніе силы тяжести на полюсѣ приблизительно равно по величинѣ:

$$\frac{4}{3}\pi r\kappa=g'\,,$$

то

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}\,,$$

гдѣ

$$l'=\frac{5}{4}r\,.$$

Такимъ образомъ мы получили извѣстный результатъ лорда Кельвина для безконечно малыхъ колебаній [6]). При выводѣ его W. Thomson пользуется извѣстными разложеніями потенціала въ ряды, относительно которыхъ впослѣдствіи уже Tisserand'омъ и друг. было высказано пожеланіе, чтобы была выяснена ихъ сходимость.

Мы не будемъ останавливаться на доказательствѣ сходимости указаннаго способа рѣшенія, такъ какъ таковое содержится въ общей теоріи Ляпунова. Другія приложенія вышеуказаннаго метода будутъ даны впослѣдствіи.

---

[6]) W. Thomson. Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompresible Liquid. Phil. Trans. R. S. London Vol. 153. P. II, p. 583, 1863. См. также: P. Appell. Sur les oscillations ellipsoïdales d'une sphère liquide C. R. T. 171. p. 761. 1920 и H. Lamb. Hydrodynamics. pp. 427, 671, 1924.

Я. Хлытчіевъ.

ПЕРЕМѢЩЕНІЯ ТОЧЕКЪ ДЕФОРМИРОВАННАГО ТѢЛА

(памяти И. Г. Бубнова).

Какъ извѣстно, зависимость между проекціями u, v, w малаго перемѣщенія точки деформированнаго тѣла съ одной стороны, и относительными удлиненіями e_x, e_y, e_z и сдвигами γ_x, γ_y, γ_z, съ другой, выражается уравненіями

$$\left.\begin{aligned} e_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ e_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ e_z=\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_x=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\ \gamma_y=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\ \gamma_z=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Нахожденіе линейныхъ деформацій и сдвиговъ помощью этихъ уравненій не представляетъ затрудненій, если извѣстны функціи u, v, w. Въ приложеніяхъ, обыкновенно, встрѣчается обратная задача разысканія перемѣщеній по заданнымъ функціямъ e_x, e_y, e_z; γ_x, γ_y, γ_z, т. е. интегрированія уравненій (1). Насколько мнѣ извѣстно, эта задача была вперные рѣшена въ общемъ видѣ И. Г. Бубновымъ, но рѣшеніе нигдѣ не было имъ опубликовано, кромѣ литографированныхъ лекцій по теоріи упругости, читанныхъ въ 1906 г. для крайне ограниченнаго числа слушателей кораблестроительнаго отдѣленія Политехническаго Института Императора Петра Великаго. Это рѣшеніе представляется мнѣ заслуживающимъ болѣе широкаго распространенія и потому я позволяю себѣ ниже изложить его съ нѣкоторыми, внесенными мной, упрощеніями, которыя будутъ оговорены въ концѣ статьи.

Начнемъ съ проекціи перемѣщенія на ось x, т. е. съ u. Первое изъ нашихъ уравненій намъ даетъ непосредственно $\partial u/\partial x$, намъ нужно найти еще $\partial u/\partial y$ и $\partial u/\partial z$ и тогда, пользуясь выраженіемъ полнаго диференціала, мы бы нашли и саму функцію u.

Для отысканія функціи $\partial u/\partial z$ найдемъ предварительно ея частныя производныя: $\partial^2 u/\partial x\partial$, $\partial^2 u/\partial y\partial z$ и $\partial^2 u/\partial z^2$, а затѣмъ изъ нихъ помощью того же выраженія для полнаго диференціала сможемъ найти $\partial u/\partial z$. Изъ этихъ трехь частныхъ производныхъ первую находимъ сразу дифференцированіемъ перваго изъ нашихъ уравненій по z:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial e_x}{\partial z}. \tag{2}$$

Дифференцируя пятое изъ уравненій (1) по y, а шестое по z и складывая, имѣемъ

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}.$$

или, принявъ во вниманіе третье изъ уравненій (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = {}^1/_2\left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}\right). \tag{3}$$

Дифференцированьемъ же пятаго изъ уравненій (1) по z и принявъ во вниманіе третье изъ нихъ, получимъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} \tag{4}$$

Теперь на основаніи (2), (3) и (4) можемъ представить $\partial u/\partial z$ въ видѣ

$$\frac{\partial u}{\partial z} = {}^1/_2 \int_0^y \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}\right) dy + \int_0^z \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x}\right)_{y=0} dz +$$

$$+ \int_0^x \left(\frac{\partial e_x}{\partial z}\right)_{\substack{y=0\\ z=0}} dx + q, \tag{5}$$

гдѣ q произвольная постоянная. Для этого, выраженія (2), (3) и (4) должны удовлетворять условіямъ

$$\left.\begin{aligned} {}^1/_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}\right) &= \frac{\partial^2 e_x}{\partial yz}, \\ {}^1/_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_z}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Пользуясь симметричностью уравненій (1) относительно x, y, z, можемъ изъ (5) помощью круговой перестановки найти

$$\frac{\partial v}{\partial x} = {}^1/_2 \int_0^z \left(-\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}\right) dz + \int_0^x \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y}\right)_{z=0} dx +$$

$$+ \int_0^y \left(\frac{\partial e_y}{\partial x}\right)_{\substack{z=0\\ x=0}} dy + r, \tag{7}$$

гдѣ r произвольная постоянная. Аналогично могли бы найти и $\partial w/\partial y$. Изъ (6) круговой перестановкой получимъ еще три условія возможности интеграціи

$$\left.\begin{aligned} &{}^1/_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \gamma_y}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_z}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_x}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x}, \\ &\frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}, \\ &\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

Уравненія (6) и (6′) представляютъ извѣстныя условія St. Venant'a для совмѣстимости деформацій и изъ самаго пути, которымъ мы къ нимъ пришли, ясенъ ихъ геометрическій смыслъ: лишь въ томъ случаѣ, когда они выполнены, возможны перемѣщенія точекъ, вызывающія заданныя линейныя деформаціи и сдвиги.

Пользуясь (7) и послѣднимъ изъ уравненій (1), можемъ теперь найти и послѣднюю изъ разыскиваемыхъ частныхъ производныхъ функціи u:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}=\gamma_z-{}^1/_2\int_0^z\left(-\frac{\partial \gamma_y}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_z}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_x}{\partial x}\right)dz-\int_0^x\left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial x}-\frac{\partial e_x}{\partial y}\right)_{z=0}dx- \\ -\int_0^y\left(\frac{\partial e_y}{\partial x}\right)_{\substack{z=0\\x=0}}dy-r, \end{aligned} \tag{8}$$

а затѣмъ и саму функцію u:

$$\begin{aligned} u=\int_0^x e_x dx+{}^1/_2\int_0^z\Big[\gamma_y+(\gamma_y)_{y=0}\Big]_{x=0}dz+{}^1/_2\int_0^y\Big[\gamma_z+(\gamma_z)_{z=0}\Big]_{x=0}dy- \\ -\int_0^y\int_0^y\left(\frac{\partial e_y}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\z=0}}dy dy-{}^1/_2\int_0^y\int_0^z\left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x}\right)_{x=0}dz dy-\int_0^z\int_0^z\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}dz dz+ \\ +qz-ry-(\gamma_y)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}}z+u_0 \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

гдѣ u_0 произвольная постоянная. Изъ этого выраженія можемъ немедленно получить и остальныя проекціи перемѣщенія круговой перестановкой.

Въ выраженіи (9) и получаемыхъ изъ него круговой перестановкой члены, содержащіе произвольныя постоянныя:

$$-ry+qz+u_0, \quad -pz+rx+v_0, \quad -qx+py+w_0$$

не зависятъ отъ деформаціи и выражаютъ малыя поступательныя движенія (u_0, v_0, w_0) и малыя вращенія (p, q, r) твердаго тѣла. Чтобы исключить изъ найденныхъ выраженій эти перемѣщенія, можно связать координатныя оси съ тѣломъ, напримѣръ, слѣдующимъ образомъ. Прежде всего исключимъ поступательныя движенія, связавъ начало координатъ съ точкой тѣла, въ которой оно находилось до деформаціи, т. е. для точки (o, o, o) положимъ $u=v=w=o$; тогда изъ выраженія (9) и ему подобныхъ слѣдуетъ

$$u_0=o,\ v_0=o,\ w_0=o \tag{10}$$

затѣмъ, исключимъ вращеніе около осей y и z тѣмъ, что заставимъ элементъ оси x сохранить свое направленіе въ тѣлѣ, т. е. для точки (dx, o, o) положимъ $v=w=o$; тогда изъ нашихъ выраженій, если пренебречь малыми высшаго порядка и сократить на dx, слѣдуетъ

$$r=o,\ q=(\gamma_y)_{\substack{x=0\\ y=0\\ z\;0}} \tag{11}$$

Наконецъ, исключаемъ и послѣднее возможное вращеніе, именно около оси x, заставивъ элементъ плоскости xy остаться въ ней въ деформированномъ состояніи, напримѣръ для точки (o, dy, o) положивъ $w=o$, что даетъ, послѣ отбрасыванія малыхъ высшаго порядка и сокращенія на dy:

$$p=o \tag{12}$$

Выраженія (9), (10), (11) и (12) даютъ въ окончательной формѣ перемѣщенія точекъ, вызванныя деформаціей тѣла. Упрощенія, внесенныя мной въ оригинальное изложеніе И. Г. Бубнова, состоятъ лишь въ введеніи шести произвольныхъ постоянныхъ u_0, v_0, w_0, p, q, r вмѣсто вводимыхъ имъ пятнадцати, которыя потомъ, естественно, оказываются связанными девятью линейными зависимостями, т. е. сводятся къ тѣмъ же шести независимымъ постояннымъ.

J. Klitchieff.

DÉPLACEMENTS DES POINTS D'UN CORPS DÉFORMÉ.

(à la mémoire de M. J. Boubnow).

Il est connu que les relations entre les petits déplacements u, v, w, d'un point donné d'un corps déformé d'une part, et les dilatations e_x, e_y, e_z et glissements γ_x, γ_y, γ_z d'autre part, s'expriment par des équations (1) *). L'obtention des dilatations et des glissements à l'aide de ces équations ne présente pas de difficultés au cas où les fonctions u, v, w, sont connues. Dans l'application cependant, c'est le problème inverse qui se pose ordinairement. Ce sont les déplacements que l'on recherche, les fonctions e_x, e_y, e_z et γ_x, γ_y, γ_z étant données, et l'on est amené par conséquent d'envisager l'intégration des équations (1). Pour autant que je sache, c'est feu M. J. Boubnow qui a, le premier, donné la solution de ce problème dans sa forme générale. Mais cette solution n'est exposée que dans son cours lithographié sur la Théorie de l'Elasticité. Ce cours, donné en 1906 à la section des Constructions Navales de l'Institut Polythechnique à St-Pétersbourg, ne s'adressait qu'à un nombre d'élèves très restreint et j'estime que l'intégration des équations (1) mérite d'être plus généralement connue. Je l'exposerai donc ci-dessous, en y apportant quelques simplifications que je ne manquerai pas de spécifier à la fin du present exposé.

Pour commencer, envisageons le déplacement suivant l'axe des x, c. à d. u. La première des équations (1) nous donne de suite $\partial u/\partial x$. Pour pouvoir déterminer la fonction u, nous avons à trouver en plus $\partial u/\partial y$ et $\partial u/\partial z$.

Pour trouver la fonction $\partial u/\partial z$, cherchons d'abord ses dérivées partielles $\partial^2 u/\partial x \partial z$, $\partial^2 u/\partial y \partial z$ et $\partial^2 u/\partial z^2$. Nous obtiendrons alors $\partial u/\partial z$ en partant de la formule du différentiel total. La première des trois dérivées partielles ci haut s'obtient de suite en différenciant la première des équations (1) par rapport à z:

*) voir le texte russe.

équation (2). En différenciant la cinquième équation (1) par rapport à y et la sixième par rapport à z, en les additionnant, et en tenant compte de la troisième équation (1), nous obtenons (3). D'autre part, par la différenciation de la cinquième équation (1) par rapport à z et compte tenu de la troisième des equations (1) nous arrivons à (4). A présent, nous basant sur (2), (3) et (4), nous pouvons représenter $\partial u/\partial z$ sous la forme (5) où q est une constante arbitraire; les équations (2), (3) et (4) doivent satisfaire aux conditions (6). Les équations (1) étant symetriques par rapport à x, y, z, nous pouvons par substitution cyclique, déduire de (5) l'équation (7) où r est une constante arbitraire; $\partial w/\partial y$ se trouve d'une manière analogue. Les équations (6) nous donnent, par substitution cyclique, trois autres conditions d'intégrabilité (6'). Les équations (6) et (6') représentent les conditions connues de compatibilité des déformations (St. Venant). Leur sens géometrique appert de la voie même que nous avons suivie pour les trouver: les déplacements des points déterminant, les dilatations et les glissements donnés ne sont possibles que quand ces conditions sont remplies.

De (7) et de la dernière équation (1) nous pouvons maintenant déduire la dernière des dérivées partielles de la fonction u: équation (8) et enfin, la fonction u elle même: équation (9), òu u_0 est une constante arbitraire. Cette formule, par substitution cyclique, nous donnera les déplacements v et w restant à déterminer.

Dans la formule (9), et dans celles qù'on en obtient par substitution cyclique les termes contenant les constantes arbitraires

$$-ry+qz+u_0\,, -pz+rx+v_0\,, -qx+py+w_0\,,$$

ne dépendent guère de la déformation et expriment les petites translations (u_0, v_0, w_0) et rotations (p, q, r) d'un corps solide. Pour exclure de nos formules ces translations nous pouvons rapporter les axes des coordonnées au corps, en procédant, par exemple, comme suit:

Excluons tout d'abord les translations, en rapportant le 0 des coordonnées au même point du corps où il se trouvait avant la déformation. C. à d., pour le point (0, 0, 0) posons $u=v=$ $=w=0$. La formule (9) et ses analogues nous donneront alors

$$u_0=0,\ v_0=0,\ w_0=0. \tag{10}$$

Excluons ensuite la rotation autour des axes des y et des z, ceci en amenant l'élément de l'axe des x à ne pas quitter le corps. C. à d., pour le point (dx, 0, 0) posons $v=w=0$. Abstraction faite des infinitésimales d'ordre supérieur, nos formules donneront alors

$$r=0,\quad q=(\gamma_y)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}}\ . \tag{11}$$

Excluons enfin la dernière rotation possible, celle autour de l'axe des x, amenant à cet effet l'élément du plan xy à y rester après déformation. C. à d., pour le point $(0, dy, 0)$ posons, p. ex. $w=0$. Après élimination des infinitésimales d'ordre supérieur, nous obtiendrons

$$p=0. \tag{12}$$

Les équations (9), (10), (11) et (12) nous donneront les formules définitives des déplacements des points provenant des déformations du corps.

Les simplifications introduites par moi dans la démonstration de M. J. Boubnow se résument dans la seule introduction de six constantes arbitraires au lieu de quinze; les quinze constantes de M. J. Boubnow se trouvent en effet liées entre elles par neuf équations linéaires.

le 4 juillet 1932.
Bled.

В. Н. Болдыревъ.

САХАРНАЯ БОЛѢЗНЬ И ПРОСТУДА.

Въ принятомъ нынѣ режимѣ діабетиковъ обращается вниманіе только на ихъ діэту. Ничего не говорится объ ограниченіи (или, при возможности, исключеніи) такихъ условій жизни, которыя влекутъ за собой повышеніе процессовъ горѣнія въ тѣлѣ, т. е. усиливаютъ общій обмѣнъ веществъ. Сюда относятся всевозможныя охлажденія тѣла, мышечныя упражненія, заразныя болѣзни и кое что еще.

Между тѣмъ всѣмъ хорошо извѣстно увеличеніе количества сахара въ крови діабетиковъ, что явно указываетъ на ухудшеніе у нихъ обмѣна углеводовъ подъ вліяніемъ страданія поджелудочной железы. Новѣйшія клиническія литературныя данныя, какъ и давнія физіологическія теоретическія соображенія, вполнѣ согласно говорятъ за то, что при діабетѣ падаетъ также обмѣнъ жировъ и бѣлковъ. Слѣдовательно, diabetes mellitus сопровождается процессами уменьшенія общаго обмѣна веществъ.

Не разъ въ своихъ печатныхъ трудахъ по физіологіи поджелудочной железы я указывалъ, что общій обмѣнъ веществъ зависитъ отъ работы названной железы. Отсюда понятно, что при страданіяхъ ея поражается неизбѣжно и обмѣнъ веществъ. Итакъ, въ частности, при сахарной болѣзни (diabetes mellitus) подавлены, уменьшены процессы сгоранія различныхъ веществъ (углеводовъ, жировъ и бѣлковъ) въ тѣлѣ больного, а значитъ, и самое нагрѣваніе тѣла, обусловливаемое ими.

Ясно, что такое состояніе тѣла дѣлаетъ его менѣе защищеннымъ отъ охлажденія, менѣе устойчивымъ въ выравниваніи, въ поддержаніи нормальной температуры тѣла. Другими словами, сахарная болѣзнь предрасполагаетъ къ простудѣ. Врачамъ и людямъ, страдающимъ такой болѣзнью, необходимо твердо помнить это и послѣднимъ нужно неусыпно, тщательно беречься простуты.

Такая мысль еще не усвоена врачебнымъ міромъ и потому я посвящаю этому вопросу настоящую замѣтку.

Ниже приводится экспериментальное доказательство вреда и даже губительности охлажденія для животныхъ, у коихъ работа поджелудочной железы ослаблена. Вредъ охлажденія тѣла въ этихъ условіяхъ зависитъ отъ того, что вызванное холодомъ избыточное горѣніе въ тѣлѣ для поднятія нормы пониженной холодомъ температуры тѣла побуждаетъ больную железу къ усиленной дѣятельности. Усиленіе (тѣмъ болѣе значительное, или частое) работы больного органа, конечно, губитъ его, особенно въ тѣхъ случаяхъ, когда онъ нуждается въ полномъ покоѣ.

И если врачи, составляя діэтетическую программу діабетика, всячески стараются беречь его поджелудочную железу, то, несомнѣнно, ее нужно охранять такъ же тщательно и отъ всякихъ другихъ, выпадающихъ на ея долю сильныхъ раздраженій.

Не трудно понять, что и другіе стимулы, рѣзко повышающіе общій обмѣнъ веществъ въ тѣлѣ, у діабетика должны исключаться изъ обихода жизни или, по крайней мѣрѣ, сильно ограничиваться.

Въ силу этого, всякія излишнія мышечныя напряженія у больныхъ сахарной болѣзнью должны быть подъ строгимъ контролемъ и врача, и самого паціента.

Но эта тема разсматривается мной отдѣльно въ другомъ мѣстѣ и здѣсь я лишь вскользь упоминаю о ней для полноты картины, для того, чтобы не была упущена изъ виду также и упомянутая сторона жизненнаго режима діабетика.

Перехожу къ экспериментальнымъ даннымъ. Уже давно, лѣтъ 25 тому назадъ, еще не имѣя точныхъ доказательствъ вліянія поджелудочной железы на обмѣнъ веществъ, я случайно сдѣлался свидѣтелемъ очень сильнаго вреда приносимаго простудой (хроническимъ охлажденіемъ) собакамъ, поджелудочная железа которыхъ была выведена изъ физіологическаго равновѣсія. Данныя эти до сихъ поръ нигдѣ не были не только напечатаны, но даже сообщены устно, и появляются здѣсь впервые.

Двумъ собакамъ цвѣтущаго здоровья и въ возрастѣ 2—3 лѣтъ были сдѣланы мною поджелудочныя фистулы большого протока. Поджелудочныя железы у обѣихъ были въ отличномъ состояніи. Весь пищеварительный аппаратъ и другіе органы тѣла такъ же. По выздоровленіи собакъ отъ операціи, когда операціонныя раны совершенно закрылись первичнымъ натяженіемъ, спустя около 3-хъ недѣль послѣ операціи, обѣ собаки, имѣвшія густую и длинную шерсть и жившія до операціи на дворѣ, были, вопреки моему распоряженію, по недоразумѣнію, помѣщены на свои прежнія мѣста. Дѣло было въ январѣ, въ Петроградѣ, при умѣренно-холодной зимѣ (температура колебалась отъ 5 до 15 градусовъ Реомюра). У обѣихъ собакъ очень быстро развилась стойкая и обильная гиперсекреція поджелудочнаго сока, убившая ихъ въ теченіе всего 2-хъ недѣль. Итакъ продолжительное рѣзкое охлажденіе, переносившееся раньше здоровыми собаками безо всякаго ущерба для ихъ здоровья, очень скоро убило ихъ, какъ только ихъ поджелудочныя железы были ослаблены.

Точно такъ же всевозможныя охлажденія — сквозной вѣтеръ, купальныя помѣщенія въ сырыхъ комнатахъ, обильное потѣніе на вѣтру и т. п., совершенно безопасныя для большинства изъ насъ и для самого діабетика въ тѣ дни, когда его поджелудочная железа была здорова, при пораженіи ея являются крайне опасными, иногда прямо убійственными.

Возвращаюсь къ нашимъ собакамъ. Всѣ болѣзненныя явленія протекали у обоихъ животныхъ совершенно одинаково и одновременно привели ихъ къ смерти.

Подобная гиперсекреція нерѣдко наблюдается у собакъ съ поджелудочными фистулами и обычно является, рано или поздно, причиной ихъ смерти. Но большею частью она вызывается погрѣшностями въ діэтѣ, употребленіемъ неподходящей или слишкомъ обильной пищи. Вызываніе же гиперсекреціи поджелудочнаго сока путемъ длительнаго охлажденія (равнымъ образомъ, чрезмѣрными мышечными упражненіями; инфекціонныя заболѣванія дѣйствуютъ подобнымъ же образомъ) у животныхъ съ ослабленной дѣятельностью поджелудочной железы до сихъ поръ было неизвѣстно.

Нѣтъ никакого сомнѣнія, что и у людей, поджелудочная желѣза коихъ поражена такъ или иначе, въ томъ числѣ и у діабетиковъ, подвергающихся простуживанію (а также и другимъ упомянутымъ выше вреднымъ для нихъ вліяніямъ), происходитъ усиленная работа pancreas, что можетъ сильно истощать и безъ того больной органъ и даже повлечь за собой роковой исходъ, какъ то случилось съ упомянутыми двумя собаками.

Поэтому всѣмъ, страдающимъ сахарной болѣзнью, надлежитъ постоянно слѣдить за собой и всячески избѣгать длительнаго или повторнаго сильнаго охлажденія тѣла.

Итакъ, вырабатывая правила жизни и поведенія для больного сахарной болѣзнью, мы должны твердо помнить, что поджелудочная железа есть не только важный органъ пищеваренія, но и главный дѣятель въ общемъ обмѣнѣ веществъ. Мой послѣдній докладъ на XIV международномъ физіологическомъ съѣздѣ въ Римѣ (въ 1932 г.) посвященъ послѣднему вопросу. И раньше я писалъ на ту же тему. Читатель можетъ найти подробности въ этихъ трудахъ.

Въ соотвѣтствіи съ двойной ролью pancreas — 1. въ дѣлѣ питанія и 2. въ обмѣнѣ веществъ — правила жизни для людей, поджелудочная железа коихъ поражена такъ или иначе (діабетъ и нѣкоторыя другія болѣзни), должны быть направлены въ сторону не только регулированія діэты, но и всѣхъ условій, вліяющихъ на обмѣнъ веществъ въ тѣлѣ человѣка. Діэту нужно устанавливать легкую и не обильную, а условія жизни обставлять такъ, чтобы обмѣнъ веществъ былъ пониженъ до minimum.

Тогда только pancreas получитъ должный покой, такъ нужный больному органу, и будетъ дана полная возможность больному, если не выздоровленія, то хоть наибольшаго облегченія его тяжкаго страданія.

Проф. Н. В. Краинскій.

МЕХАНИЗМЪ НЕРВНОЙ ДѢЯТЕЛЬНОСТИ И РОЛЬ ВЕГЕТАТИВНОЙ НЕРВНОЙ СИСТЕМЫ.

I.

Сущность проблемы. Длинный рядъ изслѣдованій опубликованныхъ мною начиная съ 1895 г. поставилъ своею задачею вопросъ о сущности нервнаго процесса, о видѣ той энергіи, которая проявляется въ нервныхъ центрахъ и периферическихъ нервныхъ волокнахъ, и которая получаетъ въ психическихъ центрахъ субъективную форму душевнаго процесса, составляющаго содержаніе нашего Я. Вся совокупность фактовъ и явленій намъ извѣстныхъ не оставляетъ никакого сомнѣнія въ томъ, что мозговой процессъ есть процессъ энергетическій: нервный токъ проходящій по двигательному нерву вызываетъ мускульное сокращеніе и слѣдовательно представляетъ собою физическую силу. Но вопросъ о той формѣ энергіи, которую представляетъ собою нервный токъ, весьма труденъ для разрѣшенія. Энергетическая картина земныхъ явленій оказывается недостаточною для полнаго объясненія нервнаго процесса. Приходится отрѣшиться отъ механическаго міросозерцанія классической физики и признать существованіе еще многихъ формъ энергіи, частью еще совершенно неизвѣстныхъ, частью же указанныхъ свободными мыслителями (Оствальдъ, Махъ), не боящимися отступить отъ догматическаго рутинерства.

Я первый указалъ на то, что уже давно пора отказаться отъ механической модели бомбардировки мельчайшими частицами органа обонянія и признать существованіе особой формы энергіи запаха. Оствальдъ установилъ чрезвычайной цѣнности понятіе энергіи формы, указавъ на то, что всякая деформація въ земной природѣ связана съ поглощеніемъ или освобожденіемъ энергіи и доказалъ превращеніе механической энергіи въ энергію формы (поверхности и объема). Но главныя трудности представляетъ пониманіе и толкованіе механическихъ явленій. Именно классическая механика въ ея математической и догматической формулировкѣ представляетъ собою непреодолимый тормазъ для развитія біофизики и пониманія нервнаго процесса. Надо совершенно отрѣшиться, конечно не отъ фактовъ, а отъ ихъ толкованія и моделированія — и пора воображаемые эксперименты классической механики замѣнить дѣйствительными. Этой революціи противъ классической механики посвященъ рядъ моихъ работъ, а потому я здѣсь повторяться не буду. Надо отказаться отъ законовъ Ньютона, отъ многихъ опредѣленій учебной механики, отъ ея терминологіи. Надо иначе взглянуть на интегралы, дифференціалы и производную. Надо замѣнить ея формулы, выраженныя въ координатныхъ величинахъ, энергетическими уравненіями. Классическая механика, изучая движеніе, упускаетъ изъ виду форму энергіи, неразрывно связанную съ энергіей движенія при всѣхъ видахъ несвободнаго движенія, — а именно: энергію давленія. На нее, правда неясно, указалъ Махъ въ своей механикѣ, поставивъ вопросъ о томъ, какъ „движеніе переходитъ въ давленіе". Съ введеніемъ энергіи формы и энергіи давленія энергетическая механика получаетъ совершенно новую форму. Упраздняется ученіе о силахъ и тѣмъ получается возможность объяснить механизмъ прикосновенія и давленія матерьяльнаго тѣла на кожную поверхность и возникновеніе въ нервномъ окончаніи, въ нервѣ и соотвѣтствующемъ центрѣ энергетическаго процесса съ его коррелатомъ, субъективнымъ ощущеніемъ. По третьему закону Ньютона дѣйствіе (давленія) равно противодѣйствію, два встрѣчныхъ вектора символизирующихъ силу взаимно уничтожаются и въ результатѣ получается геометрическій нуль. Слѣдовательно весь процессъ въ нервѣ и въ психическомъ центрѣ, а также въ опорѣ, долженъ былъ бы возникать ex nihilo. По моему же ученію всякое вѣсомое тѣло, находящееся въ полѣ тяготѣнія, давитъ на опору (а не опора на него!). Сущность этого давленія сводится къ тому, что тяжелое тѣло непрерывно поглощаетъ опредѣленное количество энергіи тяготѣнія соотвѣтственно коэффиціенту поглощенія вещества его составляющаго и превращаетъ ее въ энергію давленія, находящуюся въ состояніи динамическаго равновѣсія. Эта энергія по мѣрѣ своего образованія непрерывнымъ потокомъ отводится черезъ опоры въ землю, направляясь къ центру земли и сгущаясь вмѣстѣ съ общимъ потокомъ энергіи тяготѣнія воспринимаемымъ землею. По выведенной мною формулѣ этотъ потокъ энергіи давленія-вѣса равенъ

$Apgt$ т. е. на 1 килограм. секунду

$0{,}0000234 \cdot 1000 \cdot 980 \cdot 1 = 23$ калоріи въ секунду,

а на 1 грм. 0,023 калоріи.

Энергія же движенія воспринимаемая опорою при ударѣ о нее твердаго движущагося тѣла равна

не $\frac{mv^2}{2}$, а (при свободномъ паденіи)

$$\frac{Apgt^2}{2}.$$

Энергетика механическихъ явленій изложена мною въ двухъ моихъ книгахъ: „Energetik der mechanischen Erscheinungen“ 1924 и „Математич. осн. естествознанія“ 1927. Ученіе объ энергіи формы изложено мною въ работѣ: „Геометрич. и физич. основы морфологіи“ (Зап. Русск. Научн Инст.).

Уже давно указывалось на сходство нервнаго тока съ электрическимъ, при чемъ подъ послѣднимъ терминомъ разумѣлся токъ гальваническій. Широко примѣнялась для объясненія электрофизіологическихъ явленій теорія іоновъ. Изучая электрофизіологическія явленія съ точки зрѣнія физики, пришлось однако скоро отказаться отъ тѣхъ воззрѣній, которыя господствовали въ электрофизикѣ до самаго послѣдняго времени и стать на новыя точки зрѣнія, которыя нынѣ, благодаря успѣхамъ радіотехники, получаютъ все большее признаніе. Уже элементарная провѣрка опыта Гальвани поставила на очередь вопросъ о различіи явленій электростатическихъ отъ явленій гальваническихъ, ибо экстра-токъ, вызывающій въ опытѣ Гальвани мускульное сокращеніе, есть токъ электростатическій, а не гальваническій. И здѣсь догматическое господство теоріи іоновъ тормозило пониманіе явленій, т. к. классическая физика не проводила должнаго различія между явленіями гальваническими и электростатическими.

Мои опытныя изслѣдованія и теоретическая ихъ обработка привели къ полному скептицизму по отношенію ко всему отдѣлу электрофизики касающемуся электростатики. Эти изслѣдованія опубликованы въ работѣ „Электростатическія изслѣдованія и ихъ примѣненіе къ біологіи“, напечатанной въ Зап. Русск. Научн. Инст. 1931 г. Пришлось полностью отказаться отъ всѣхъ общепринятыхъ теорій и моделей, а также констатировать ошибочное выполненіе и толкованіе основныхъ электростатическихъ опытовъ. По моимъ взглядамъ всѣ явленія, обнимаемыя электрофизикою дѣлятся на двѣ самостоятельныя группы и обнимаютъ собою двѣ разновидности: энергію гальваническаго тока и энергію чисто электрическую. Послѣдняя и составляетъ сущность весьма слабо изученныхъ электростатическихъ явленій. Теорія іоновъ оказывается къ нимъ совершенно не приложимой. Экстратокъ, возникающій въ гальванической цѣпи въ моментъ ея замыканія, размыканія и измѣненія силы тока, есть токъ чисто электрическій, а не гальваническій и можетъ быть отфильтрованъ отъ послѣдняго при помощи конденсатора.

Энергія электрическая обладаетъ совершенно иными свойствами чѣмъ энергія гальваническаго тока. Гальваническій токъ возникаетъ только въ замкнутой цѣпи и, слѣдуя закону Кирхгофа, не распространяется униполярно. Онъ подчиненъ закону Ома, даетъ магнитное поле вокругъ проводниковъ и вызываетъ электролизъ.

Электрическая энергія проявляется въ трехъ формахъ: заряда, электростатическаго поля и электрическаго тока. Этотъ токъ не подчиненъ законамъ Ома и Кирхгофа, распространяется униполярно, проходитъ черезъ діэлектрикъ, образуя въ немъ электрическое поле, скопляется на поверхности раздѣла діэлектрика и металла въ формѣ энергіи заряда. Въ немъ нѣтъ никакихъ фантастическихъ іоновъ или электроновъ.

Оказывается, что этотъ униполярный электрическій токъ тождественъ или, по крайней мѣрѣ, весьма сходенъ съ нервнымъ токомъ, проходящимъ по двигательному волокну и вызывающимъ мускульное сокращеніе. Оба тока одинаково дѣйствуютъ на телефонъ, капилярный электрометръ и нервно-мускульный препаратъ, при томъ униполярно, въ разомкнутой цѣпи. Никогда не удается получить изолированно реакцію н. мускульнаго препарата безъ реакціи двухъ другихъ инструментовъ.

Въ живомъ организмѣ и въ нервной системѣ нѣтъ замкнутыхъ цѣпей, нѣтъ чистыхъ металловъ соприкасающихся съ электролитами, нѣтъ магнитныхъ полей, въ которыхъ движутся проводники, а потому въ нихъ невозмножно возникновеніе гальваническихъ токовъ. Наоборотъ, наличность электростатическихъ явленій въ живыхъ тканяхъ констатирована съ несомнѣнностью и главнымъ видомъ этихъ явленій служитъ вызываніе мускульнаго сокращенія.

Цѣпи нейроновъ и рефлекторныя дуги суть цѣпи разомкнутыя, съ униполярнымъ токомъ, а потому въ нихъ невозможенъ ни гальваническій токъ, ни токъ іоновъ.

Эти данныя привели меня къ общему выводу, что энергія нервнаго процесса, какъ въ центрахъ такъ и въ нервахъ, тождественна съ электрическою, resp. электростатическою, или по крайней мѣрѣ съ нею весьма сходна. Т. к., съ другой стороны, электростатическая энергія есть энергія радіоаппарата, уже теперь опредѣляется общій взглядъ на мозгъ и нервную систему какъ на радіо-аппаратъ и такимъ образомъ намѣчается весь дальнѣйшій путь изслѣдованія нервнаго процесса.

II.

Энергетика внѣшнихъ раздраженій. Согласно принципу единства физическихъ силъ и закону сохраненія энергіи, всѣ т. наз. силы природы суть лишь различныя формы единой міровой энергіи, могущія превращаться одна въ другую въ эквивалентныхъ количествахъ. Живой организмъ есть матерьяльное тѣло, находящееся въ динамическомъ полѣ земли и потому подверженное воздѣйствію весьма различныхъ видовъ энергіи. Нѣкоторыя изъ этихъ формъ энергіи вовсе не дѣйствуютъ на живой организмъ и имъ не воспринимаются, какъ напр. магнитная и радіо-эмиссія. Другіе виды энергіи, какъ тяготѣніе, какъ механическая энергія и теплота, дѣйствуютъ на живой организмъ какъ и на всякое физическое тѣло и, наконецъ, третій видъ энергетическихъ потоковъ воспринимается живымъ организмомъ специфически черезъ посредство органовъ чувствъ, которые т. обр. являются воспріемниками энергіи и ея трансформаторами.

Тѣ силы природы, resp. виды энергіи, которые дѣйствуютъ на органы чувствъ, называются внѣшними раздраженіями и являются источникомъ нервной дѣятельности и психическаго процесса согласно классической формулѣ: nihil est in intellectu, quod non prius fuerit in sensu.

Всякій видъ энергіи дѣйствуетъ на органы чувствъ въ зависимости отъ напряженія или потенціала, который есть количество энергіи Q (въ калоріяхъ) отнесенное къ единицѣ координатныхъ величинъ пространства, времени и вещества. Математически это выражается такъ:

$$\frac{Q}{l\,(cm)};\quad \frac{Q}{l\,(cm^2)};\quad \frac{Q}{l\,(cm^3)};\quad \frac{Q}{t};\quad \frac{Q}{p}.$$

То напряженіе (иначе говоря относительное количество энергіи), которое начинаетъ восприниматься органомъ чувствъ и порождаетъ въ психикѣ ощущеніе, называется порогомъ раздраженія. Съ увеличеніемъ интенсивности раздраженія по закону Вебера Фехнера возрастаетъ и интенсивность ощущенія, хотя и медленнѣе.

$$E=f(R)$$

а слѣд. существуетъ разность

$$R-E \quad \text{ибо} \quad R>E.$$

Эта разность откладывается въ архивѣ памяти въ потенціальномъ состояніи и образуетъ запасъ энергіи памяти

$$R-E=M$$

при чемъ всѣ три величины — раздраженіе, мозговой процессъ отвѣчающій ощущенію и запасъ памяти должны быть выражены въ единицахъ одного и того же наименованія.

III.

Субъективныя отраженія внѣшняго міра и тѣлесныя ощущенія. Превращеніе энергіи внѣшнихъ раздраженій въ энергію нервнаго тока происходитъ въ периферическихъ аппаратахъ органовъ чувствъ, которые т. обр. являются не только пріемниками, но и трансформаторами энергіи внѣшнихъ раздраженій. Въ формѣ нервнаго тока эта энергія проводится черезъ цѣпь афферентныхъ нейроновъ къ чувствительнымъ центрамъ, расположеннымъ въ мозговой корѣ. Въ нихъ, вмѣстѣ съ энергетическимъ (химико-физическимъ) процессомъ, нарождается и его субъективный коррелатъ въ формѣ ощущенія.

Но кромѣ этихъ внѣшнихъ въ тѣсномъ смыслѣ слова раздраженій порождающихъ въ субъективномъ полѣ комплексъ ощущеній, являющихся отраженіемъ внѣшняго міра, психика воспринимаетъ и тѣлесныя ощущенія, источникомъ которыхъ также являются энергетическіе процессы, но разыгрывающіеся въ тканяхъ собственнаго организма. Механизмъ воспріятія этихъ раздраженій и сами тѣлесныя ощущенія очень слабо изучены. Однако обѣ группы ощущеній довольно рѣзко отличаются другъ отъ друга. Ощущенія порождаемыя раздраженіями дѣйствующими на органы чувствъ экстеризируются: мы относимъ ихъ источникъ во внѣшній міръ. Тѣлесныя же ощущенія мы переживаемъ непосредственно какъ часть нашего Я. При этомъ на сцену выступаетъ особое ихъ свойство: всѣ ткани и органы тѣла въ здоровомъ состояніи нами почти не ощущаются, какъ и всѣ вегетативные процессы, почему эти функціи и называются физіологическими. Порогъ для тѣлесныхъ раздраженій оказывается очень высокимъ и лишь при абнормальныхъ по силѣ раздраженіяхъ, какъ напр. при патологическихъ состояніяхъ, появляется сначала неопредѣленное чувство недомоганія, а затѣмъ боль.

Болевое ощущеніе есть сигналъ бѣдствія или опасности для организма. Энергетическими процессами, вызывающими тѣлесныя ощущенія, являются химическія, механическія реакціи и деформаціи. Тѣлесныя ощущенія очень разнообразны: боль, недомоганіе, тошнота, голодъ, жажда, половое наслажденіе, а также позывы къ опорожненію мочевого пузыря и прямой кишки. Нѣкоторыя тѣлесныя ощущенія на столько слабы, что обнаружить ихъ можно лишь направивъ на нихъ свое вниманія.

Естественно возникаетъ вопросъ, каковы же аппараты воспринимающіе тѣлесныя раздраженія, каковы проводящіе пути для нихъ и гдѣ находятся центры въ которыхъ возникаютъ эти ощущенія.

Въ тканяхъ и внутреннихъ органахъ имѣется концовая сѣть и сплетенія тончайшихъ нервныхъ, т. наз. безмякотныхъ волоконъ, частью со свободными концами, принадлежащія вегетативной нервной системѣ. Но съ точностью не установлены вегетативные пути ни въ спинномъ, ни въ головномъ мозгу.

Т. наз. вегетативная нервная система до послѣдняго времени считается исключительно центрифугальною, эфферентною. Предполагаютъ, что она инервируетъ гладкую мускулатуру и железы внутреннихъ органовъ. Гдѣ же въ такомъ случаѣ находятся для нихъ чувствительныя волокна и ихъ начала? Т. обр. возникаетъ необходимость детально пересмотрѣть ученіе обь инерваціи сосудовъ и железъ, а также вопросъ о чувствительныхъ путяхъ, которые проводятъ энергію тѣлесныхъ и болевыхъ раздраженій къ мозговымъ центрамъ.

IV.

Соматическая и вегетативная нервная система. Современная физіологія принимаетъ существованіе соматической системы мякотныхъ, міэлиновыхъ волоконъ, какъ чувствительныхъ, исходящихъ отъ периферическихъ аппаратовъ органовъ чувствъ, такъ и двигательныхъ, направляющихся къ поперечно-полосатой мускулатурѣ. Сензорные пути исходящіе отъ внутреннихъ органовъ и тканей мало изучены, хотя предполагается, что такіе пути существуютъ въ формѣ мякотныхъ афферентныхъ волоконъ. Предполагается, что мякотныя, сензорныя волокна идутъ афферентно въ составѣ n. vagi и splanchnici. Мы не знаемъ афферентныхъ волоконъ, которыя проводятъ нервный токъ къ центрамъ мышечнаго чувства и ощущеній отъ составовъ. Гистологія констатируетъ существованіе мякотныхъ міэлиновыхъ волоконъ весьма различнаго діаметра, но мы не знаемъ ихъ физіологической роли и даже не умѣемъ отличить сензорнаго волокна отъ моторнаго.

Т. наз. вегетативная или аутономная нервная система, включающая въ себя симпатическую и парасимпатическую, разсматривается какъ центрифугальная, эфферентная, которая инервируетъ гладкую мускулатуру и железы. Для вегетативной системы характерны гангліи, расположенные внѣ костнаго футляра заключающаго головной и спинной мозгъ. Гангліи эти представляютъ собою станціи, въ которыхъ заканчиваются прегангліонарныя волокна исходящія (или входящія?!) изъ спинного мозга и начинаются (или кончаются?!) постгангліонарныя периферическія волокна распространяющіяся по тканямъ тѣла. Эти волокна считаются безмякотными, аміэлиновыми. Они входятъ въ стволы периферическихъ соматическихъ нервовъ и въ ихъ составѣ распространяются по тканямъ тѣла. Однако оба типа нервныхъ волоконъ въ нервныхъ стволахъ не рѣзко разграничены. Въ большинствѣ нервовъ находятся вегетативныя волокна. Ихъ особенно много въ n. vagus, а въ truncus sympaticus мы находимъ и міэлиновыя волокна. До сихъ поръ не выяснено значеніе и связь периферическихъ гангалій въ сердцѣ и кишечникѣ, работающихъ болѣе или менѣе аутономно. Fraçois-Frank однако давно указывалъ на сензорную функцію симпатическихъ нервовъ.

Центры вегетативной системы предполагаются въ промежуточномъ мозгу, въ области hypothalamus и въ сѣромъ веществѣ 3 го жулудочка.

Вегетативную нервную систему согласно взглядамъ Langley'а часто разсматриваютъ какъ аутономную. Ни анатомически, ни физіологически однако такое толкованіе основанія не имѣетъ. Периферическая вегетативная система не самостоятельна, а связана черезъ посредство прегангліонарныхъ волоконъ съ центральною нервною системою, представляя собою ея периферическіе нейроны. По утвержденію Gaskel'я и Langley'а прегангліонарныя волокна (albi) состоятъ изъ мякотныхъ волоконъ малаго калибра, тогда какъ периферическія волокна вегетативной системы безмякотны. Концовыя развѣтвленія вегетативныхъ нервовъ свободны и не имѣютъ спеціальныхъ концовыхъ аппаратовъ.

По моимъ изслѣдованіямъ, однако, безміэлиновыхъ волоконъ вовсе не существуетъ. Всѣ вегетативныя периферическія волокна содержатъ въ себѣ липоиды—міэлинъ и даютъ окраску съ осміевой кислотой. У нихъ нѣтъ обособленнаго мякотнаго футляра и осевого цилиндра. Вегетативное волокно по всему своему протяженію имбибировано липоидомъ. По моимъ изслѣдованіямъ (см. ниже) веществомъ проводящимъ нервный токъ, сходный съ электростатическимъ, служитъ не аксонъ, а липоидъ-діэлектрикъ, т. е. міэлиновая обкладка.

Структура міэлиноваго волокна очень сложна. Міэлиновый футляръ состоитъ изъ ряда прерывисто слѣдующихъ одинъ за другимъ сегментовъ, отдѣленныхъ перерывами Ранвье и Шмидтъ—Ланермановыми нарѣзками. Группы образуемыхъ ими воронокъ имѣютъ взаимнообратное направленіе и отдѣляются одна группа отъ другой спеціальной формы члениками (рис. 1).

Что проводникомъ нервнаго тока служитъ міэлиновая обкладка, а не аксонъ, доказывается тѣмъ, что: 1. функція нервныхъ волоконъ появляется тогда, когда образованіе міэлиноваго футляра закончено; 2. при всѣхъ заболѣваніяхъ, при которыхъ происходитъ дегенерація и коагуляція міэлина, при сохраненномъ еще аксонѣ, нарушается ихъ проводимость; 3. всѣ наркотики, тормозящіе проводимость, растворяются въ липоидахъ.

При принятіи за проводящее вещество въ нервѣ его липоиды и принимая во вниманіе прерывистую структуру волокна, мы должны признать: 1. прерывистость нервнаго тока индуктивно распространяющагося отъ сегмента къ сегменту и 2. медленность распространенія нервнаго тока. Мои изслѣдованія показываютъ, что напр. по дереву и по полудіэлектрикамъ электростатическій униполярный токъ распространяется съ большимъ замедленіемъ (до 1 метра въ секунду).

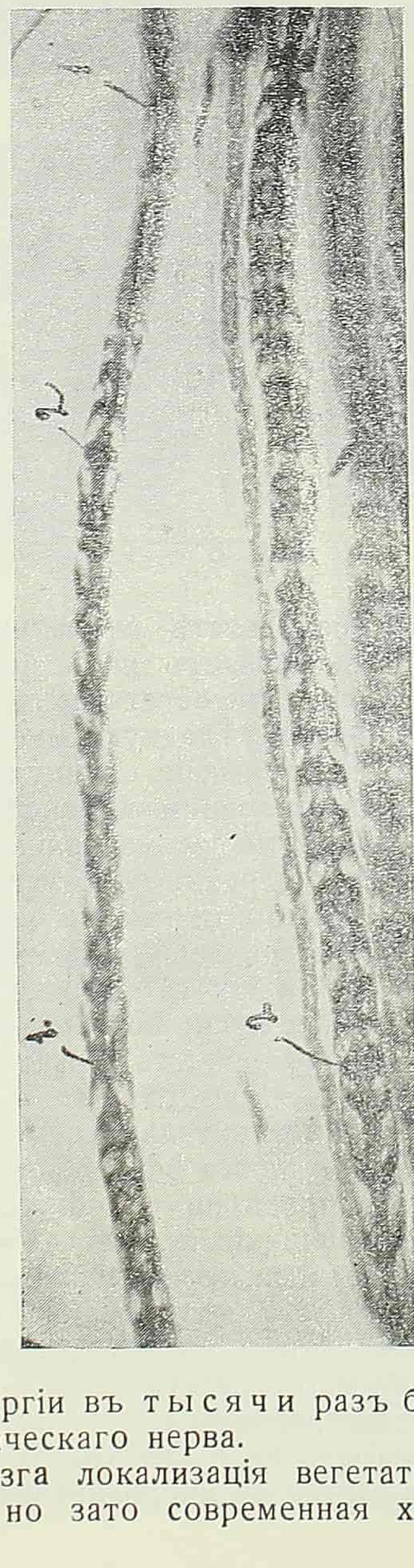


Рис. 1.
Міэлиновыя волокна. 1 и 2 — переходные членики.

Нервъ тѣмъ лучше проводитъ токъ, чѣмъ больше въ немъ міэлина. Т. к. тонкія вегетативныя волокна содержатъ мало липоида, то и проводимость ихъ относительно мала.

Прилагамыя микрофотографіи (таблица 1) показываютъ содержаніе липоидовъ въ вегетативныхъ волокнахъ. Рис. 3, 4, 5 и 6 импрегнированы осміевою кислотою, 7 и 8 серебромъ.

Этимъ объясняется констатированный физіологами фактъ, что порогъ раздраженія для вегетативныхъ нервовъ очень высокъ. Они проводятъ нервный и электрическій токъ приблизительно въ десять разъ медленнѣе чѣмъ міэлиновыя, ибо ихъ сопротивленіе больше. Для раздраженія симпатическаго нерва требуется энергіи въ тысячи разъ больше, чѣмъ для раздраженія соматическаго нерва.

Въ сѣченіи спинного мозга локализація вегетативныхъ путей точно не установлена, но зато современная хирургія въ результатѣ т. наз. операціи хордотоміи намѣчаетъ положеніе центростремительныхъ путей проводящихъ температурныя и болевыя раздраженія въ передне-боковыхъ столбахъ, вблизи говерсова пучка. Это вполнѣ подтверждается прилагаемою микрофотографіей поперечнаго перерѣза спинного мозга въ случаѣ tabes dorsalis, гдѣ эти пути вмѣстѣ съ задними столбами перерождены. Именно при tabes dorsalis извѣстенъ цѣлый рядъ болѣзненныхъ разстройствъ вегетативной инерваціи брюшныхъ и тазовыхъ органовъ (рис. 2).

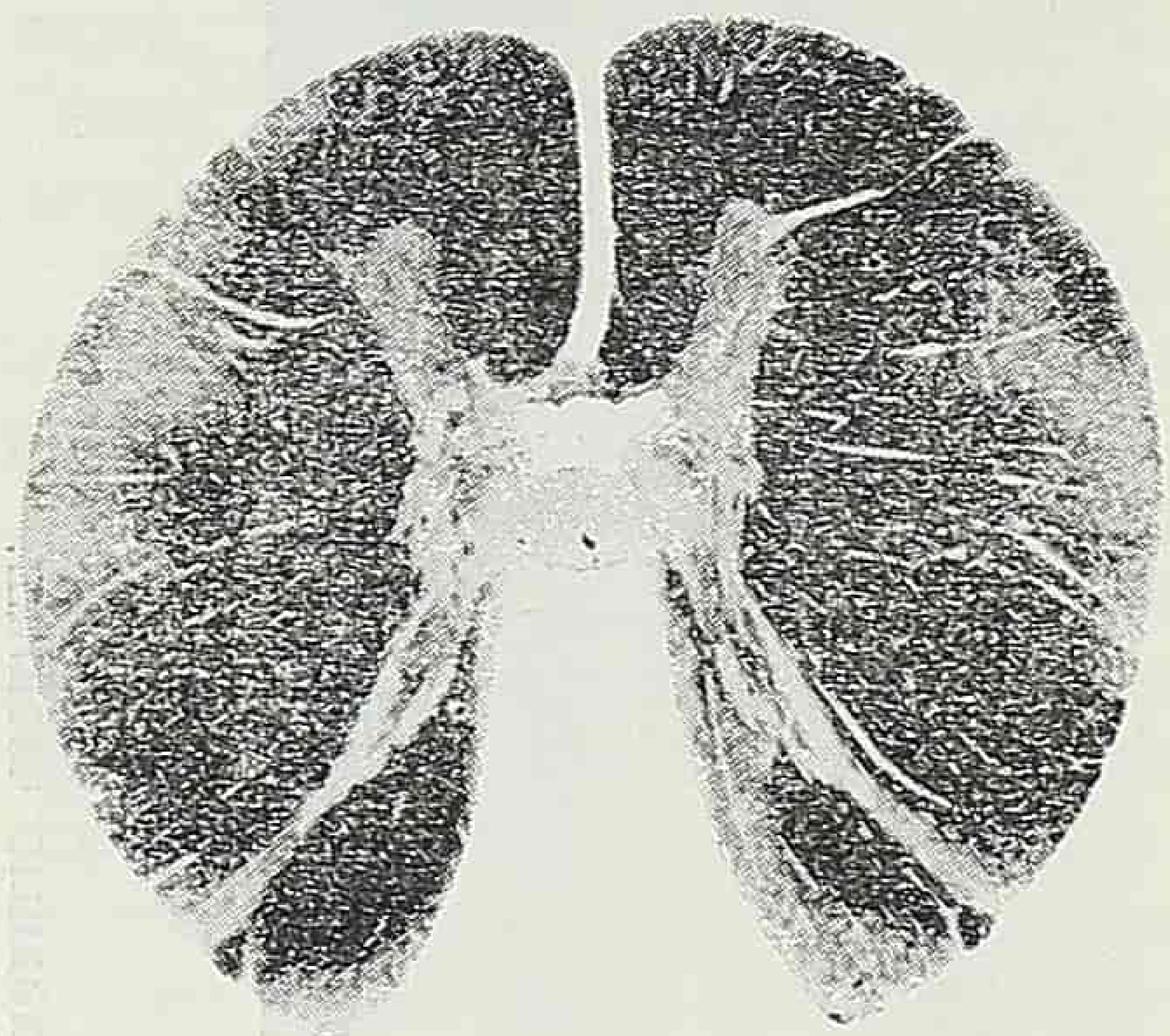


Рис. 2.

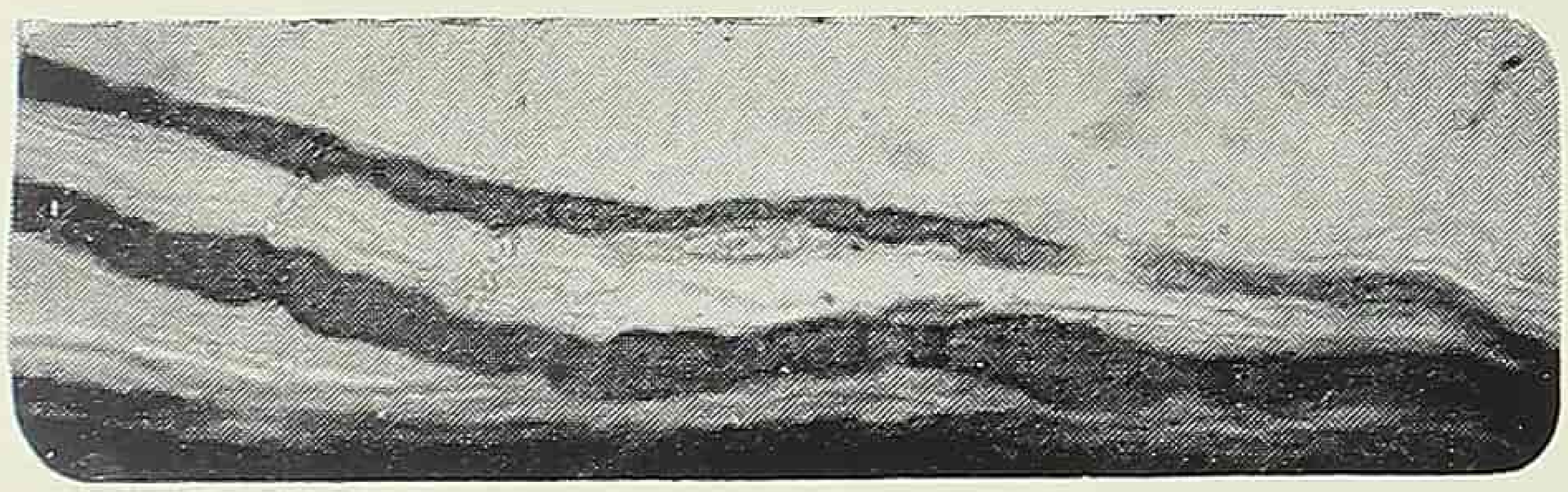
Центральная связь главныхъ вегетативныхъ центровъ (въ thalamus opticus и въ окрестностяхъ третьяго желудочка) съ корою мозга неизвѣстна.

Въ новѣйшее время мы располагаемъ колоссальнымъ хирургическимъ опытомъ въ результатѣ симпатикотоміи и частью хордотоміи, который заставляетъ насъ поставить на очередь вопросъ: дѣйствительно ли вегетативная система эфферентна и инервируетъ сердце, гладкую мускулатуру и железы? Обращаютъ на себя вниманіе слуѣдующіе факты.

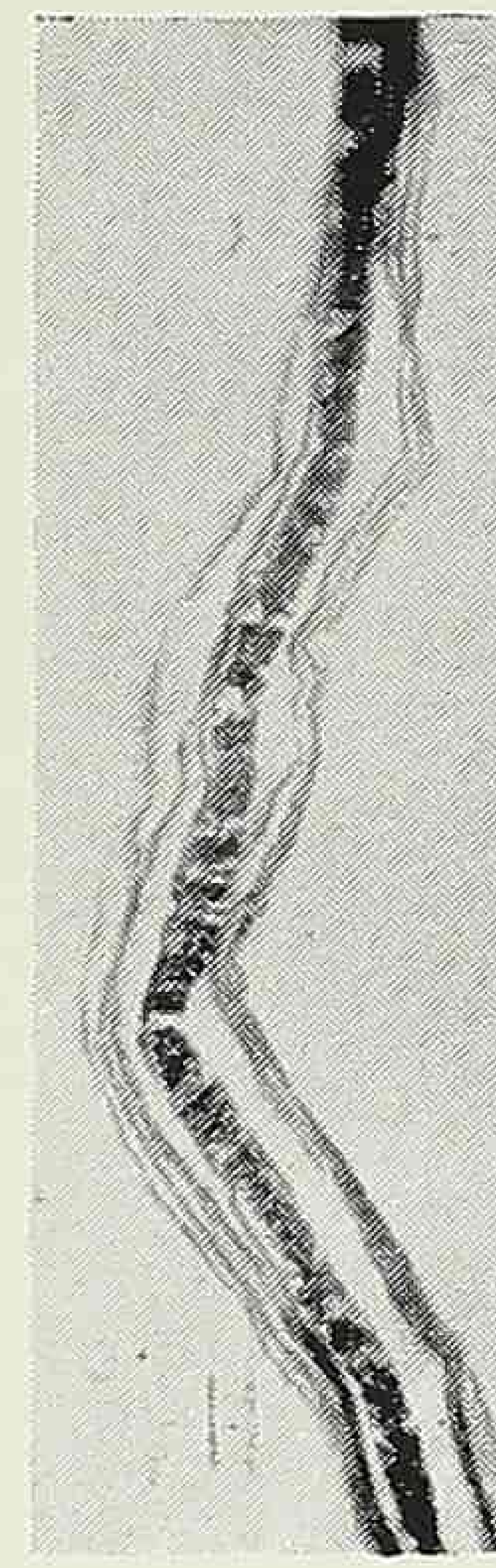
Масса внутреннихъ тканей и органовъ относительно кожной поверхности весьма велика. Изъ этихъ внутреннихъ тканей только поперечно-полосатая мускулатура управляется эфферентными соматическими мякотными волокнами. Имъ отвѣчаютъ афферентныя, мякотныя соматическія волокна исходящія отъ кожи и органовъ чувствъ, образуя совмѣстно рефлекторныя дуги; но намъ неизвѣстны сензорные пути отъ тканей и внутреннихъ органовъ, которые должны проводить тѣлесныя раздраженія.

Если дѣйствительно сердце, гладкая мускулатура и железы инервируются эфферентно вегетативными нервами, то перерѣзка послѣднихъ должна была бы вызвать соотвѣтствующее выпаденіе функціи. Между тѣмъ колоссальный хирургическій и физіологическій опытъ говоритъ намъ, что послѣ перерѣзки вегетативныхъ нервовъ, послѣ удаленія вегетативныхъ ганглій и хордотоміи функція тканей, будто бы инервируемыхъ вегетативно — не выпадаетъ, а лишь временно разстраивается.

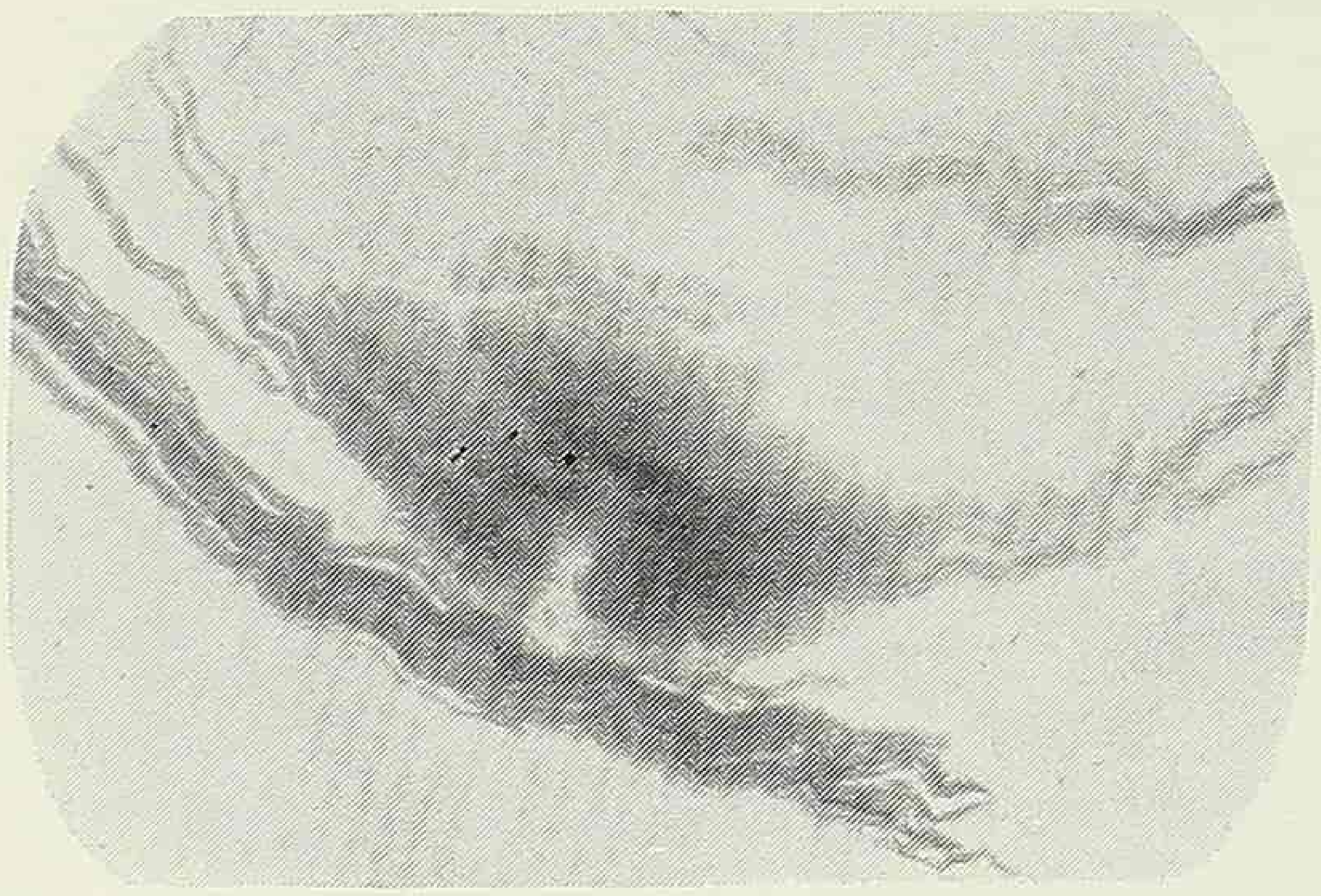
Никогда не было доказано, что условіемъ функціи железы является ея инервація вегетативными нервами. Всѣ же-



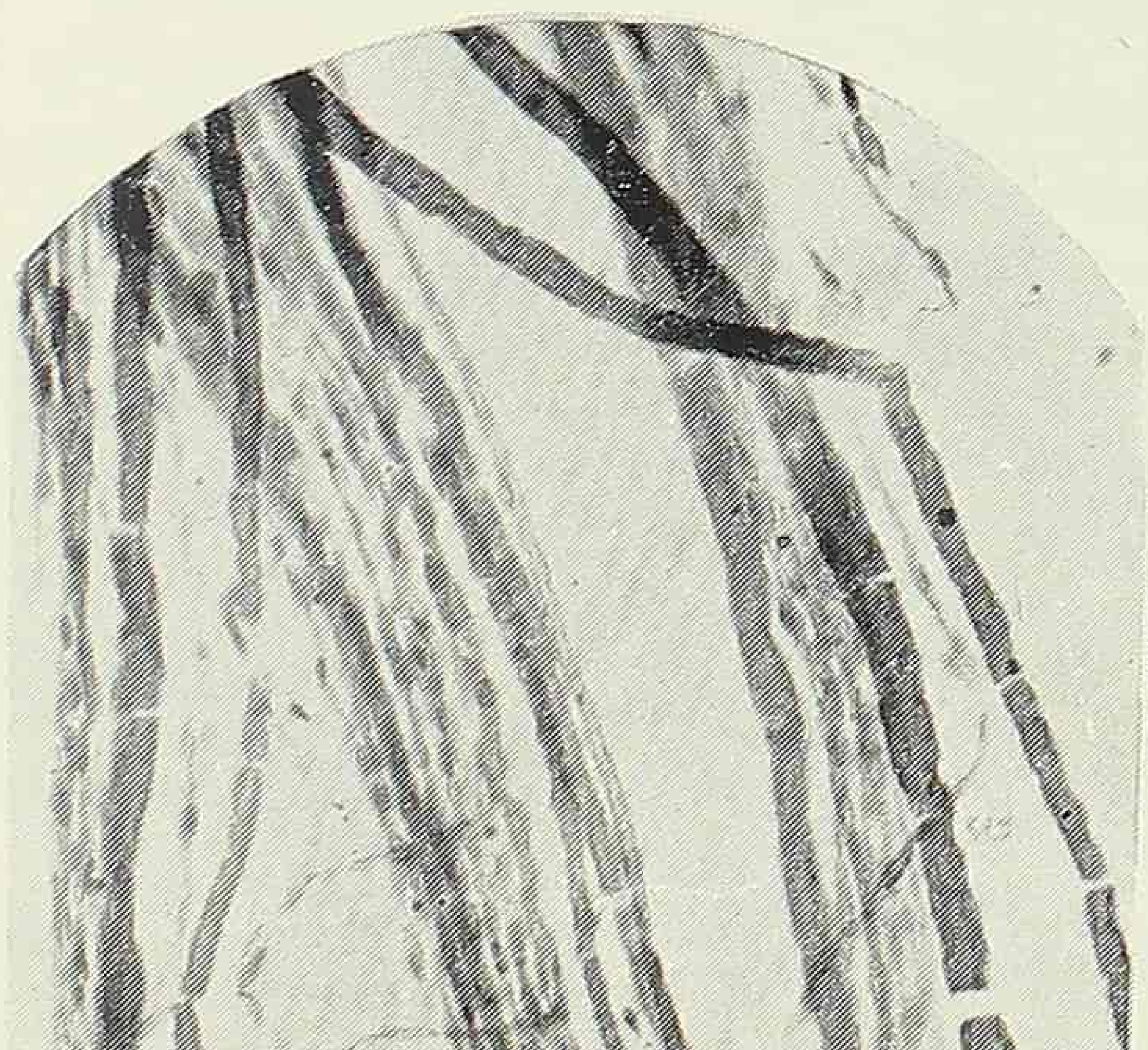
3



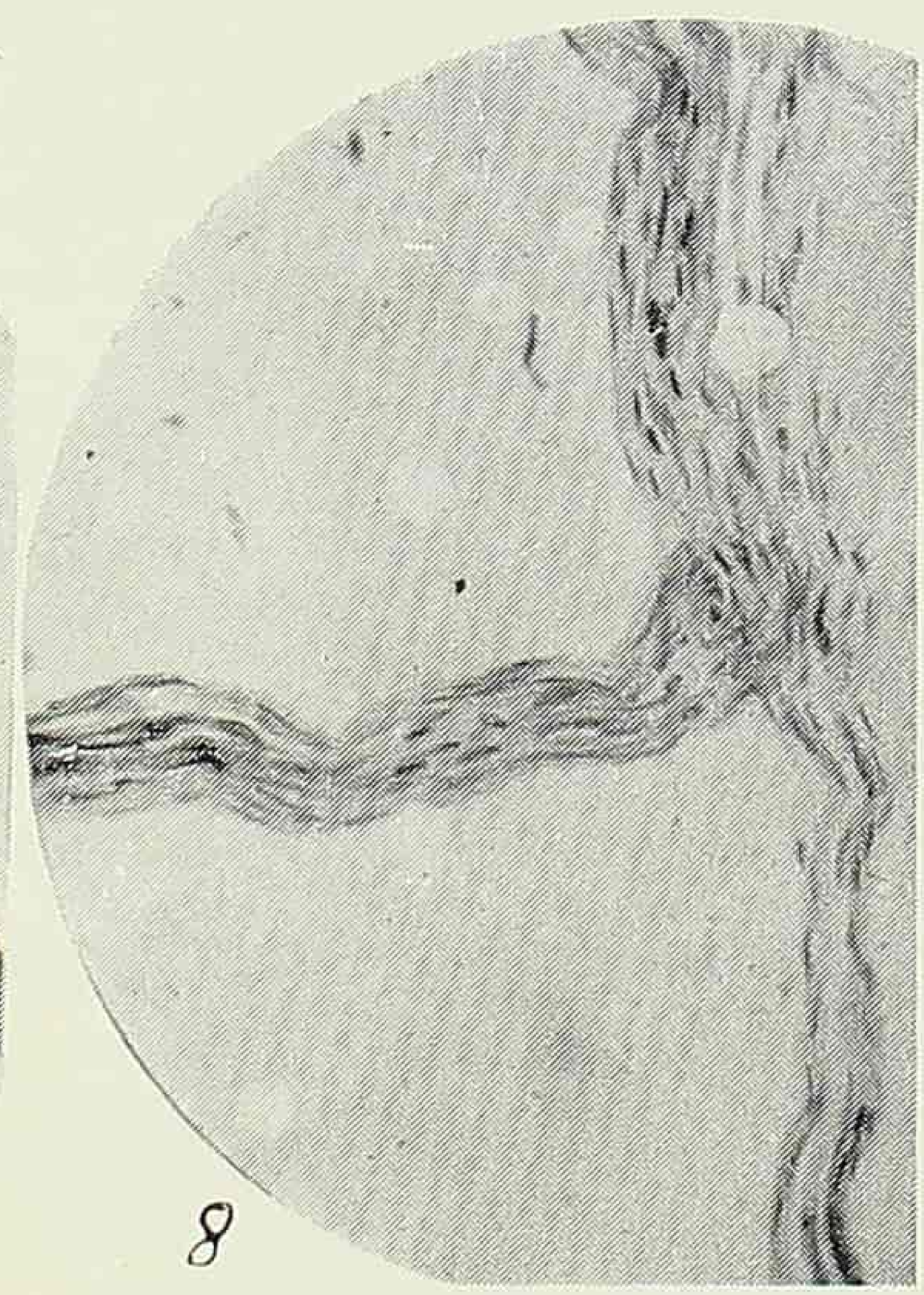
4



5



6



8

7

3, 4, 5 и 7 — симпатич. нервы.
6 и 8 — n. vagus.

лезы работаютъ аутономно и послѣ перерѣзки нервовъ, а также будучи удалены изъ организма. Даже сердце продолжаетъ работать послѣ перерѣзки n. vagi и sympathici.

Физiологическiй методъ раздраженiя электрическимъ (индуктивнымъ) токомъ вегетативныхъ нервовъ въ этомъ отношенiи не можетъ быть признанъ рѣшающимъ, т. к. раздражается ткань en masse. Трудно дифференцировать непосредственную реакцiю ткани отъ реакцiи на раздраженiе нерва, а токъ можетъ распространяться и въ обратномъ направленiи, т. е. антидромно.

По отношенiю къ предполагаемой вегетативной инервацiи гладкой мускулатуры надо замѣтить, что современными гистологическими изслѣдованiями инервацiя каждой клѣтки гладкой мускулатуры отрицается

Вся система гладкой мускулатуры даннаго органа обыкновенно реагируетъ какъ цѣлое, а не отдѣльными пучками, какъ мы видимъ это въ поперечно-полосатой мускулатурѣ. Послѣ симпатикотомiи получается сначала спазмъ сосуда, а затѣмъ его длительное расширенiе. Въ теченiи нѣсколькихъ дней или недѣль функцiя выравнивается.

На основанiи обширнаго хирургическаго опыта симпатикотомiи, удаленiя шейныхъ ганглiй, перерѣзки n. hypogastrici и sacrales можно утверждать, что эти нервы вовсе не инервируютъ соотвѣтствующихъ тканей и органовъ и что послѣднiе могутъ функцiонировать аутономно и послѣ перерѣзки нервовъ и удаленiя ганглiй.

За то тотъ же хирургическiй опытъ безъ всякаго сомнѣнiя установилъ другой результатъ этихъ операцiй — а именно: исчезновенiе боли исходящей отъ этихъ органовъ. Знаменитый хирургъ Leriche уже сдѣлалъ соотвѣтствующiй выводъ, заявивъ, что симпатическiе нервы — это: болевые нервы.

Всѣ эти факты ставятъ на очередь утвержденiе объ афферентной функцiи вегетативной нервной системы.

Я разсматриваю всю вегетативную нервную систему какъ афферентную и спецiально болевую.

Она имѣетъ своимъ назначенiемъ обереженiе тканей организма и внутреннихъ органовъ отъ всякихъ черезмѣрной силы или патологическихъ влiянiй. Какъ только въ тканяхъ возникаетъ болѣзненный процессъ, приводится въ дѣйствiе сигнальный аппаратъ и боль возвѣщаетъ сознанiю опасность, приводя въ дѣйствiе защитительные механизмы.

Фармакологическiй методъ не можетъ точно разграничить дѣйствiе химическихъ веществъ непосредственно на ткань, отъ посредственнаго дѣйствiя на нее черезъ вегетативные нервы. Антагонизмъ между симпатическою и парасимпатическою системою въ послѣднее время справедливо подвергается сомнѣнію. Возможно, что здѣсь реагируютъ не нервы, а сами ткани.

Надо остановить вниманіе на интересномъ фактѣ. Никогда клиника и патологическая анатомія не констатировали при очаговыхъ заболѣваніяхъ мозга выпаденія вегетативныхъ процессовъ въ тканяхъ и внутреннихъ органахъ, а это служитъ лучшимъ доказательствомъ аутономности не вегетативной нервной системы, а самихъ органовъ и тканей, которые имѣютъ только афферентную вегетативную систему и вовсе не имѣютъ эфферентной инерваціи.

Это вполнѣ вяжется съ общепринятымъ мнѣніемъ, что вегетативные нервы имѣютъ преимущественно лишь регулирующее вліяніе на органы и ткани. Не существуетъ ни одного факта, который доказывалъ бы эфферентную функцію вегетативной нервной системы.

Симпатическія волокна начинаются (а не кончаются!) въ тканяхъ свободными отростками или сѣтями. Во всей концовой системѣ имѣются анастомозы. Этимъ объясняется неточная локализація и иррадіація болевыхъ ощущеній. По моей схемѣ периферическія вегетативныя волокна являются прегангліонарными, а не постгангліонарными.

Положеніе вегетативныхъ ганглій, какъ и сензорныхъ спинальныхъ внѣ центральной нервной системы также говоритъ о ихъ чувствительной функціи.

Обонятельный нервъ съ его гангліемъ, состоящій изъ безмякотныхъ волоконъ, по своимъ свойствамъ стоитъ ближе къ вегетативной системѣ чѣмъ къ соматической.

Никотинъ, дѣйствующій на симпатическіе гангліи, смягчаетъ непріятныя тѣлесныя ощущенія и въ этомъ секретъ курильщиковъ.

Но если мы признаемъ парадоксальное мое утвержденіе о томъ, что вся вегетативная система афферентна, что гладкая мускулатура, железы и ткани тѣла не имѣютъ эфферентной инерваціи, естественно возникаетъ вопросъ, какъ же объяснить все же несомнѣнно существующее воздѣйствіе психическихъ процессовъ на вегетативные процессы въ тканяхъ? Такой механизмъ несомнѣнно долженъ существовать и мы легко найдемъ его, если вспомнимъ о томъ, что мозгъ работаетъ по типу радіо-аппарата и что рядомъ съ проволочнымъ телеграфомъ существуетъ и безпроволочный.

Конечные центры вегетативной системы въ thalamus и промежуточномъ мозгѣ являются по моему мнѣнію пріемниками, а не станціями отправленія и т. к. непосредственной связи ихъ съ корою мозга не установлено, то надо искать механизмъ, который могъ бы объяснить взаимодѣйствіе центровъ тѣлесныхъ ощущеній съ центрами ощущеній являющихся результатомъ воспринятія внѣшнихъ раздраженій. Для этого придется остановиться на сущности нервнаго процесса.

Давно извѣстно, что перерѣзка вегетативныхъ путей не уничтожаетъ чисто вегетативную функцію родового механизма, который является совершенно аутономнымъ. Также независима отъ инерваціи и лактація въ послѣродовомъ періодѣ.

V.

Сущность нервнаго процесса. Опубликованныя мною въ предыдущихъ работахъ изслѣдованія приводятъ къ заключенію, что нервный токъ въ периферическомъ двигательномъ нервѣ тождественъ съ униполярнымъ электростатическимъ токомъ, порождаемымъ инфлюенцмашиной, а процессъ въ мозговыхъ центрахъ есть процессъ электростатическій. Нейроны суть электростатическіе элементы, монтированные индуктивно въ разомкнутой цѣпи. Липоиды мозга являются хранителями нервной энергіи въ формѣ зарядовъ. Периферическіе нервы проводятъ токъ не по аксону, а по міэлиновому футляру, который, имѣя прерывистое строеніе, проводитъ токъ индуктивно и прерывисто. Т. к. число перерывовъ зависитъ — какъ это показываетъ опытъ съ лейденскими банками статической машины — отъ емкости конденсаторовъ, то нервный токъ является прерывистымъ, при чемъ число перерывовъ не одинаково для различныхъ нервовъ. Носителемъ нервной энергіи въ нервныхъ центрахъ являются липоиды, которые обладаютъ большимъ коэффиціентомъ поглощенія электрической энергіи.

Нервный токъ имѣетъ очень низкое напряженіе. Оно, какъ и электростатическій токъ вообще, неправильно измѣряется въ электростатическихъ вольтахъ, ибо послѣдній вовсе не равенъ вольту гальваническому.

Основные опыты, на которые опирается это утвержденіе, состоятъ въ слѣдующемъ.

Опытъ № 1. Гальвани. На поверхности парафиновой пластинки впаяны на разстояніи 2 см. одна отъ другой мѣдная и цинковая пластинки. На этомъ столикѣ располагаемъ н.-муск. преппаратъ лягушки такъ, чтобы нервъ лежалъ на одной, а мускулъ на другой пластинкѣ. Замыкая и размыкая цѣпь, получаемъ мускульныя сокращенія. Въ этомъ основномъ опытѣ н. м. препаратъ одновременно является и электроскопомъ и источникомъ, ибо гальванич. токъ въ цѣпи возникаетъ на мѣстѣ соприкосновенія электролита тканей съ металлами пластинокъ. Этотъ основной опытъ показываетъ, что раздражителемъ н. м. препарата является не гальванич. токъ, а электрическій (экстра-токъ), возникающій въ моменты замыканія и размыканія цѣпи, по своимъ свойствамъ тождественный съ электростатическимъ токомъ.

Вводимъ въ цѣпь этого опыта ключъ, гальванометръ, телефонъ и капилярный электрометръ. Телефонъ и н. м. препаратъ даютъ реакцію лишь въ моментъ замыканія и размыканія тока, гальванометръ же даетъ отклоненіе стрѣлки втеченіе всего времени пока цѣпь замкнута. Капилярный электрометръ при замыканіи даетъ отклоненіе мениска, которое сохраняется и послѣ размыканія цѣпи. Это значитъ, что онъ реагируетъ не на гальваническій токъ, а на экстра-токъ, который заряжаетъ электрометръ. Для того, чтобы менискъ вернулся къ начальному положенію, надо снять зарядъ съ электрометра, замкнувъ его на самаго себя.

Этотъ элементъ Гальвани, имѣетъ ничтожное напряженіе меньшее чѣмъ одинъ милливольтъ. Но если мы введемъ въ цѣпь сопротивленіе до одного мегаома, реакція сокращенія мускула все еще получится. Т. е. сила гальванич. тока еще дающая экстра-токъ оказывается ничтожною.

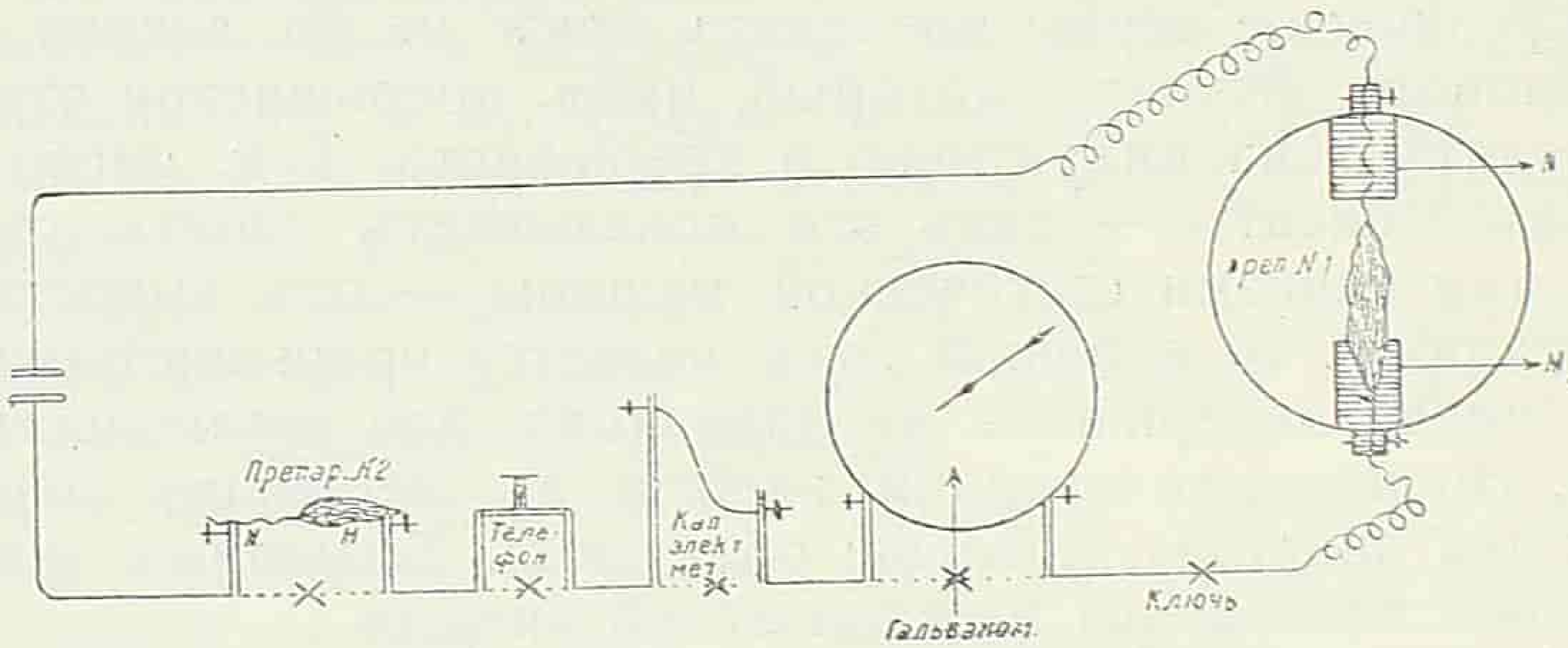


Рис. 9.

Введемъ въ эту цѣпь радіо-конденсаторъ. Цѣпь теперь разомкнута въ двухъ мѣстахъ — въ ключѣ и въ діэлектрикѣ конденсатора. Слѣдовательно гальванич. тока въ такой разомкнутой цѣпи возникнуть не можетъ. Тѣмъ не менѣе при замыканіи ключа реагируютъ всѣ аппараты кромѣ гальванометра. Телефонъ и н. м. препаратъ даютъ 1—2 реакціи, которыя при дальнѣйшихъ замыканіяхъ ключа угасаютъ. Для того, чтобы получить ихъ вновь, надо снять зарядъ съ конденсатора, соединивъ его клеммы металлическимъ ключемъ. Т. обр. гальванич. токъ отфильтровывается, а въ разомкнутой цѣпи получается лишь экстра-токъ, на который реагируетъ телефонъ, н. м. препаратъ и кап. электрометръ.

Опытъ № 2. Постановку опыта можно усовершенствовать, отдѣливъ источникъ отъ электроскопа. Для этого въ основномъ элементѣ замѣняемъ н. м. препаратъ полоскою фильтровальной бумаги смоченной въ рингеровскомъ растворѣ, а на другомъ парафиновомъ столикѣ на желятиновыхъ электродахъ расположенъ н. м. препаратъ. Эти электроды моей системы устроены такъ: въ парафинѣ выдолблены двѣ канавки заполненныя желятинированнымъ рингеровскимъ растворомъ. На одномъ концѣ этихъ пластинокъ поперечно располагается н. м. препаратъ, а на другомъ въ нихъ вертикально вплавлены угольные цилиндрики соединенные съ проводами. Т. обр ткани предохраняются отъ соприкосновенія съ металломъ электродовъ. Вся аппаратура должна быть хорошо изолирована отъ земли.

Опытъ показываетъ: 1. Отфильтрованіе гальванич. тока отъ экстра-тока. 2. Наличіе электрическаго тока въ разомкнутой цѣпи въ моменты замыканія и размыканія ключа, когда вводится участокъ цѣпи отъ ключа до конденсатора. 3. Заряженіе электрическимъ токомъ конденсатора и кап. электрометра. 4. Общность реакцій н. мускульнаго препарата, телефона и кап. электрометра.

Оказывается, что интенсивность реакціи зависитъ отъ ёмкости конденсатора, при одномъ и томъ же источникѣ. При ёмкости конденсатора въ 400 см. реакціи приборовъ почти не получается. Отъ 1000 см. до 4 микрофарады реакція приборовъ быстро возрастаетъ.

Въ этомъ опытѣ мы сталкиваемся съ фактомъ совершенно игнорируемымъ электрофизіологіей: мускульное сокращеніе вызывается прохожденіемъ черезъ мѣсто соединенія нерва съ мускуломъ электрическаго resp. нервнаго униполярнаго тока. Если мускулъ заряженъ электростатически, т. е. насыщенъ электрической энергіей, дальнѣйшее движеніе электричества въ формѣ тока невозможно и слѣдовательно з а р я ж е н н ы й м у с к у л ъ реагировать на электрическое раздраженіе не можетъ.

Этотъ опытъ сокращенія мускула безъ металла воспроизводится въ слѣдующей формѣ:

Опытъ № 3. На эбонитовомъ столикѣ располагается н. м. препаратъ такъ, чтобы мускулъ лежалъ на столикѣ, а нервъ свободно свѣшивался черезъ его край. Къ свободному концу нерва быстро приближаемъ конецъ натертой шелкомъ, т. е. наэлектризованной эбонитовой палочки. Мускулъ сокращается 1—2 раза, но дальнѣйшихъ сокращеній не даетъ. Для того, чтобы ихъ получить, надо „снять" зарядъ съ мускула, дотронувшись къ нему проводникомъ соединеннымъ съ землею. Т. о. з а р я ж е н н ы й э л е к т р о с т а т и ч е с к и м у с к у л ъ с о к р а щ е н і й н е д а е т ъ.

Система проводовъ съ конденсаторомъ и кап. электрометромъ подобна сосуду въ который вливается столько энергіи сколько позволяетъ ёмкость проводниковъ при неизмѣнномъ напряженіи источника. Если въ постановкѣ опыта № 1 или 2, въ цѣпь которыхъ введенъ телефонъ съ двумя раковинами слушателицъ, ударимъ эти раковины другъ о друга, при замкнутомъ ключѣ, то н. м. препаратъ будетъ давать сокращенія сколько угодно разъ безъ всякаго затуханія, причемъ съ конденсатора не слѣдуетъ снимать зарядъ. Это происходитъ въ цѣпи разомкнутой діэлектрикомъ конденсатора. Слѣдовательно магнито индукціонный толчекъ возникаетъ въ разомкнутой цѣпи и конденсаторъ для него проходимъ. Но онъ не даетъ заряженія ни конденсатора ни кап. электрометра и тѣмъ отличается отъ электрическаго толчка. Если отвинтимъ верхнюю часть раковины и будемъ касаться полюсовъ электромагнита желѣзнымъ или магнитнымъ якоремъ, получимъ мускульныя сокращенія. Кап. электрометръ при такомъ касаніи даетъ скачекъ внизъ (меньшій), а при открываніи бо́льшій скачекъ вверхъ. Менискъ кап. электрометра послѣ каждаго вздрагиванія возвращается къ начальному положеiию.

Тѣ же явленія можно получить, если вмѣсто замыканія и размыканія гальванич, тока въ цѣпи быстро мѣнять силу тока при помощи ручки реостата, ибо и при этомъ возникаетъ экстра токъ.

VI.

Принципъ рефлексовъ. До настоящаго времени вся дѣятельность нервной системы разсматривается какъ сложный комплексъ рефлексовъ. Рефлекторная дуга есть разомкнутая цѣпь нейроновъ съ афферентною сензорною и эфферентною моторною полудугами.

Токъ идетъ по рефлекторной дугѣ униполярно отъ начальнаго аппарата заложеннаго въ органѣ чувствъ, по афферентному волокну къ центру и оттуда къ мускулу. Но, какъ мы видѣли выше, эфферентныхъ путей къ гладкимъ мускуламъ и железамъ не существуетъ. Слѣдовательно классическая схема рефлекса примѣнима только къ реакціи поперечно-полосатой мускулатуры на раздраженія органовъ чувствъ. Въ этомъ, т. сказать „проволочномъ“, рефлексѣ мускулъ соединенъ съ чувствительнымъ центромъ нервными проводниками. Наоборотъ вегетативныя ткани и органы не соединены съ центрами нервными проводами и слѣд. импульсы къ нимъ отъ соотвѣтственнныхъ центровъ должны передаваться „безпроволочно“, путемъ радіо-эмиссіи.

Въ одной изъ послѣднихъ своихъ экспериментальныхъ работъ я обратилъ вниманіе на то, что число афферентныхъ периферическихъ нервныхъ волоконъ значительно превышаетъ число эфферентныхъ. Это несоотвѣтствіе рѣзко возрастаетъ, если примемъ вегетативную систему за аффентную. Существуетъ лишь небольшая относительно часть эфферентныхъ проводниковъ въ формѣ двигательныхъ нервовъ идущихъ къ поперечно-полосатой мускулатурѣ. Вся остальная инервація вегетативныхъ органовъ — безпроводниковая.

Изъ несоотвѣтствія афферентныхъ и эфферентныхъ периферическихъ нервовъ явствуетъ, что кромѣ полныхъ рефлексовъ и рефлекторныхъ дугъ, должны существовать еще рефлекторныя полудуги. Таковыя прежде всего должны быть констатированы въ афферентной системѣ. Въ результатѣ функціи афферентной полудуги, состоящей изъ цѣпи послѣдовательно соединенныхъ нейроновъ, въ ея конечной станціи — психическомъ центрѣ — возникаетъ ощущеніе. При полномъ соматическомъ сензорно-моторномъ рефлексѣ энергія сензорнаго центра передается по ассоціоннымъ волокнамъ къ моторному центру и по периферическому моторному волокну къ мускулу.

Но не всякое ощущеніе вызываетъ двигательную или вегетативную реакцію. Въ такомъ случаѣ энергія психическаго центра не можетъ исчезнуть и единственный путь ей остающійся — это излученіе путемъ эмиссіи.

Мы знаемъ только одинъ полный рефлексъ — это сензорно-моторный, напр. кожно мускульный. Сензорные полурефлексы не подлежатъ сомнѣнью. Этимъ путемъ возникаетъ то множество ощущеній, которыя субъективно переживаются, но не вызываютъ никакихъ тѣлесныхъ реакцій.

Съ другой стороны физіологія и фармакологія констатировали эфферентные полурефлексы, вызываемые безъ посредства внѣшнихъ раздраженій путемъ центальнаго раздраженія — гуморальнымъ или электрическимъ путемъ — клѣтки периферическаго нейрона. Таково напр. раздраженіе электрическимъ токомъ моторныхъ центровъ, дѣйствіе стрихнина и другихъ ядовъ. Принимая афферентную функцію вегетативной системы, надо признать только систему афферентныхъ полудугъ, заканчивающихся въ вегетативныхъ, мозговыхъ, сензорныхъ центрахъ.

Но то, что въ нихъ возникаетъ, есть электрическая или весьма съ нею сходная энергія, которая исчезнуть не можетъ. Поэтому, если отсутствуетъ соотвѣтствующая эфферентная полудуга, а вегетативные органы на эти ощущенія реагируютъ (эмоціональныя реакціи железъ и гладкой мускулатуры), то долженъ существовать аппаратъ передающій энергію вегетативныхъ центровъ къ периферическимъ органамъ. Такимъ механизмомъ является передача по тканямъ безъ посредства нервныхъ волоконъ радіо-эмиссіи, излучаемой центрами энергіи. Распространяясь потоками-волнами по тканямъ организма, которыя являются для этой энергіи проводниками, встрѣчая на своемъ пути ткани, обладающія соотвѣтствующею емкостью, а слѣдовательно настроенныя для ея принятія, эти потоки энергіи вызываютъ реакцію на это раздраженіе. Т. обр. полный вегетативный рефлексъ имѣетъ два звена: 1) внутреннее тѣлесное раздраженіе, напр. химическое —

вегетативнаго афферентнаго волокна. По вегетативному пути оно достигаетъ высшихъ вегетативныхъ центровъ (hypothalamus, corpus striatus). Оттуда 2) волну нервной эмиссіи, которая безпроволочно, волнами и потоками, распространяется по тканямъ организма и во внѣшнюю среду и, встрѣчая на своемъ пути соотвѣтственно настроенную ткань, заставляетъ ее реагировать.

Т. образомъ эфферентный рефлекторный механизмъ, т. е. эфферентная рефлекторная полудуга, можетъ быть или проводниковая (моторные соматич. нервы) или безпроводниковая (вегетативная). Сензорныя же афферентныя полудуги повидимому всѣ проводниковыя.

Особеннаго вниманія заслуживаетъ рефлексъ памяти, объясняющій условные рефлексы Павлова. Этотъ рефлексъ, какъ соматическій, такъ и соматически-вегетативный, вызывается ассоціацией, которая физически сводится на резонансъ или детонацію.

Энергія внѣшняго раздраженія превращается въ энергію ощущенія лишь частично. Другая часть, слѣдуя приблизительно закону Вебера Фехнера, накопляется и откладывается въ аккумуляторахъ памяти.

$$R > E\,; \qquad R - E = M \text{ (энергія памяти)}.$$

Энергія памяти т. обр. представляетъ собою остатокъ энергіи внѣшняго раздраженія не израсходованный при возникновеніи ощущенія. При репродукціи образа воспоминанія опредѣленная кванта потенціальной энергіи памяти раздраженія переходитъ въ кинетическую энергію образа воспоминанія переживаемаго субъективно. Образъ памяти также порождаетъ токъ въ эфферентной полудугѣ двигательнаго пути или путемъ радіо-эмиссіи можетъ вызвать вегетативныя реакціи.

Рефлексъ памяти есть по отношенію къ данному моменту полурефлексъ, ибо разряжается изъ центра. Но энергія для него была получена раньше черезъ сензорную полудугу и была лишь временно задержана въ центрахъ памяти въ потенціальномъ состояніи.

Аккумуляторы памяти имѣютъ типъ электростатическихъ конденсаторовъ, заряжаясь сразу, легко и быстро, ибо запоминаніе зависитъ отъ силы раздраженія (и отъ времени дѣйствія раздраженія (?))

$$M = f(R,\ t).$$

Конденсаторъ, будучи замкнутъ большимъ сопротивленіемъ, разряжается малыми порціями и въ теченіе долгаго времени, слѣдуя закону экспоненціальной функціи.

Не подлежитъ сомнѣнію взаимодѣйствіе вегатативной сферы съ центрами мозговой коры. Психическіе образы, какъ зеркальныя отраженія внѣшняго міра, вызываютъ вегетативныя реакціи, вѣроятно, черезъ посредство вегетативныхъ центровъ. Но нервная эмиссія повидимому присуща также и высшимъ психическимъ сензорнымъ центрамъ. Безпроводниковый резонансъ и детонація, разряженіе психической энергіи взрывами — все это суть функціи радіо-аппарата, которымъ по существу и является мозгъ живого организма.

Психическіе образы памяти и фантазіи могутъ вызывать двигательныя, вазомоторныя и секреторныя реакціи въ собственномъ тѣлѣ. Но они могутъ также ничѣмъ не проявляться въ тѣлесныхъ реакціяхъ, и въ этомъ случаѣ должна существовать психо-эмиссія, которая при извѣстныхъ условіяхъ можетъ вызывать телепатическія явленія.

Мы видимъ т. обр. что классическая схема проводниковаго рефлекса должна подвергнуться большимъ измѣненіямъ. Должны быть признаны система полурефлексовъ, фактъ эмиссіи энергіи нервными центрами и воспринятія ихъ вегетативными органами. Но психо- и нервно эмиссія только регулируетъ функцію вегетативныхъ органовъ. Вообще говоря послѣдніе аутономны и могутъ работать даже внѣ организма безъ всякой инерваціи. Принципъ полныхъ рефлекторныхъ дугъ уже не отвѣчаетъ фактамъ.

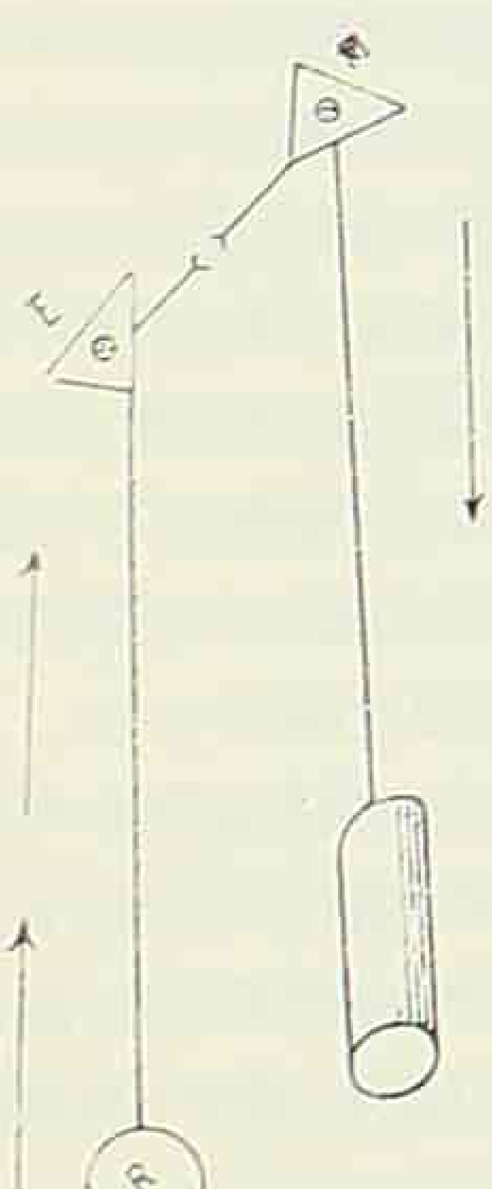


Рис. 10.
Полный соматическій сензорномоторный рефлексъ.

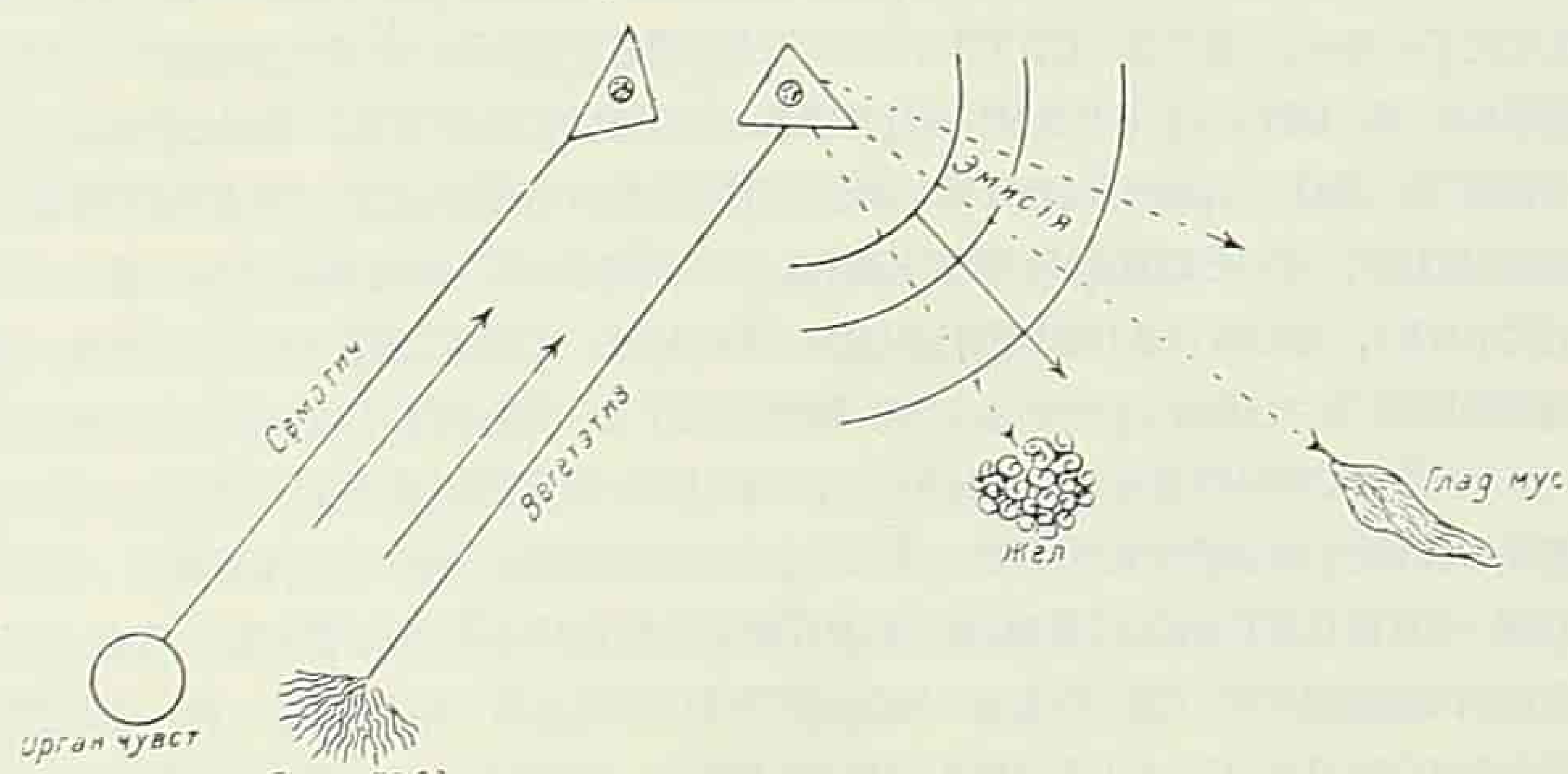


Рис. 11.
Вегетативный и соматично-вегетативный радіорефлексъ (безпроводниковый въ эфферентной части).

Всѣ эмоціональныя реакціи организма вегетативны и вызываются психо-эмиссіей изъ мозговыхъ центровъ. Въ отвѣтъ на эти волны эмиссіи вегетативный органъ или ткань реагируетъ обыкновенно in toto. Таковыя реакціи покраснѣнія, поблѣдненія, холоднаго пота, т. наз. медвѣжьей болезни (реакціи на стыдъ и страхъ).

Мы въ свое время такъ привыкли къ проволочному телеграфу, что первыя вѣсти о безпроволочномъ телеграфѣ казались невѣроятными. Совершенно также въ настоящее время нервы считаются единственно возможными проводниками нервной энергіи и признать существованіе нервной безпроводниковой эмиссіи будетъ не легко.

Однако развѣ не существуетъ колоссальный міръ растительныхъ живыхъ организмовъ, у которыхъ вовсе нѣтъ нервной системы и которые не смотря на это чувствуютъ и реагируютъ?

У насѣкомыхъ, гдѣ преобладаетъ вегетативный типъ нервной системы, нервный процессъ вовсе не такъ строго подчиненъ схемѣ рефлекса, ибо даже подраздѣленіе на афферентныя и эфферентныя волокна очень проблематично.

Дойдя до главныхъ вегетативныхъ центровъ мозга энергія тѣлесныхъ и болевыхъ раздраженій дальше по нервнымъ волокнамъ не проходитъ, ибо путь законченъ. Есть пути, которые вообще въ кору мозга не проникаютъ и дѣйствуютъ вполнѣ аутономно отъ сознанія, какъ напр. вестибулярный механизмъ равновѣсія. Отъ вегетативныхъ центровъ существуетъ лишь одинъ путь — путь излученія.

Какъ ни невѣроятной казалась мнѣ такая схема, когда я къ ней пришелъ, дальнѣйшія изслѣдованія и размышленія ее все больше подтверждали. Центрально инервируется только поперечно-полосатая мускулатура. Гладкая мускулатура, железы и внутренніе органы вовсе не инервируются и работаютъ по принципу безпроволочнаго телеграфа. Обладая различною, специфическою, а быть можетъ и перемѣнною емкостью, сократительная ткань реагируетъ на эмиссію вегетативныхъ центровъ, а можетъ быть и мозговой коры.

Аутономны ткани, а не вегетативные нервы, будто-бы ихъ инервирующіе. Естественно, что если мы перерѣжемъ при симпатикотоміи афферентный нервъ, то радіо-эмиссія вегетативнаго центра нарушится, а слѣд. и регуляція функціи аутономнаго органа можетъ временно нарушиться.

Эмиссіей нервной (психической) энергіи объясняются всѣ явленія внушенія въ состояніи гипноза, а также телепатическія явленія.

Вегетативная система даетъ множество радіо-реакцій. Сюда относятся всевозможные спазмы сосудовъ, сфинкторовъ, трофическія разстройства. Мускулатура мочевого пузыря и матки работаетъ безъ всякой инерваціи. Вся сексуальная инервація основана на радіо-эмиссіи. Т. наз. любовные флюиды, взаимныя симпатіи и цѣлый рядъ взаимоотношеній основанъ на эмиссіи и ея воспріятіи.

Возможно, что гормоны гуморальнымъ путемъ возбуждаютъ вегетативную афферентную систему, а изъ вегетативныхъ центровъ эта энергія излучаясь, дѣйствуетъ на центры мозговой коры вызывая эротическія грезы.

VII.

Схема радіо-аппарата въ примѣненіи къ нервному процессу. Радіо аппаратъ въ своихъ существенныхъ частяхъ состоитъ изъ трехъ частей: эмиссіоннаго аппарата (отправляющей антены), пріемнаго аппарата (принимающей антены) и пространства между ними заполненнаго потоками электрической энергіи, т. е. электрич. поля. Отправляющая станція вырабатываетъ электрическую энергію. Отправляющая антена есть разомкнутая цѣпь индуктора или магнитно-электрич. машины, одинъ конецъ которой соединенъ съ землею, а второй — свободный — излучаетъ электрическую энергію въ воздухъ. Т. обр. по существу эмиссія униполярна. Въ чистомъ видѣ это такъ и происходитъ если излучающимъ источникомъ служитъ кондукторъ инфлюенцъ-машины. Тогда излучается толчками электричество одного знака, т. е. униполярно. На разомкнутыхъ борнахъ вторичной катушки индуктора толчки излученія такъ же униполярны, но перемѣнны по очереди и направленію.

Въ магнито-индукціонныхъ (динамо-машинахъ) эмиссія также униполярна, но перемѣнна по величинѣ и направленію подчиняясь синусоидальному закону.

Антена есть всякій проводникъ соединенный съ землею или съ большою емкостью. Съ этой точки зрѣнія всякій живой организмъ есть антена. Однако антена воспринимаетъ не всякую эмиссію, а лишь только ту, на которую она настроенна, а это достигается введеніемъ на ея протяженіи перемѣнной емкости въ формѣ конденсатора или катушки съ перемѣнною намоткою. Тогда воспринимаемая антеною эмиссія можетъ быть перехвачена и отведена въ детекторъ и телефонъ или уловлена н. муск. препаратомъ или капилярнымъ элекрометромъ.

Отюда ясно, какую громадную роль играютъ въ радіотехникѣ конденсаторы, теорія которыхъ однако неправильно разработана.

Конденсаторъ есть система двухъ металлическихъ пластинокъ раздѣленныхъ діэлектрикомъ, которая вводится или въ гальваническую или въ электрическую цѣпь. Эта система обладаетъ способностью впитывать и хранить въ себѣ опредѣленное количество электрической энергіи въ формѣ заряда, но до сихъ поръ мнѣнія расходятся, находятся ли эти заряды на поверхностяхъ пластинокъ или въ веществѣ діэлектриковъ. Моя теорія конденсаторовъ изложена въ работѣ „Электростатическія излѣдованія".

Индукція есть распространеніе потока электрич. энергіи черезъ діэлектрикъ электрич. поля отъ заряженнаго тѣла къ незаряженному. Она опредѣляется двумя свойствами діэлектриковъ: способностью поглощать въ себя опредѣленное количество энергіи или электроемкостью и способностью пропускать черезъ себя электрич. энергію, т. е. электропроводностью. Эти два свойства аналогичны теплоемкостя и теплопроводности.

Вставимъ плоскій конденсаторъ типа Кольрауша въ униполярный проводъ ведущій отъ кондуктора инфл. машины къ землѣ и станемъ измѣнять разстояніе пластинокъ или вставлять между ними различные діэлектрики. Т. обр. будемъ изслѣдовать пропускающую способность конденсатора. Онъ будетъ задерживать электрическій токъ и зарядъ будетъ скопляться на поверхности центральной пластинки. Это конденсаторъ униполярный.

Но можно соединить оба борна конденсатора съ полюсами гальванич. элемента или съ кондукторами инфл. машины. Это конденсаторъ биполярный. Онъ при этомъ заряжается.

Процессъ заряженія и разряженія конденсатора весьма важенъ для нервной физіологіи, ибо аккумуляторы памяти построены и функціонируютъ по типу конденсаторовъ. Особенно интересенъ тотъ фактъ, что конденсаторы памяти заряжаясь при процессѣ запоминанія, сразу, разряжаются при репродукціи образа памяти малыми квантами, вспышками, а потому важно найти такой опытъ, въ которомъ, зарядивъ конденсаторъ мгновенно, можно было бы его разряжать малыми порціями.

Опыты показываютъ слѣдующее.

Заряжаемъ биполярно конденсаторъ, введя его въ гальванич. цѣпь. Отъ гальванич. батареи непосредственно или при помощи потенціометра отводимъ цѣпь разомкнутую черезъ конденсаторъ. Въ цѣпь введенъ ключъ. Опытъ демонстративнѣе при употребленіи потенціометра. Замыкая ключъ № 1 (въ основной цѣпи), мы посылаемъ въ разомкнутую гальв. цѣпь толчокъ экстра-тока, который заряжаетъ конденсаторъ. Гальванометръ показываетъ въ моментъ его прохожденія баллистич. отклоненіе. При размыканіи основной цѣпи зарядъ конденсатора изчезаетъ, а гальванометръ показываетъ обратное отклоненіе стрѣлки на то же число дѣленій. Энергія заряда слѣд. обратно уходитъ въ источникъ. Это показываетъ, что токъ заряженія равенъ току разряженія.

Но зарядъ на конденсаторѣ можно задержать, если сначала разомкнемъ ключъ № 2, а потомъ № 1. Тогда энергія заряда назадъ не уйдетъ и мы можемъ изслѣдовать зарядъ конденсатора. При изслѣдованіи разряженія конденсатора замыкнемъ его клеммы проводомъ, въ который введемъ ключъ, (или метрономъ) и измѣрительные приборы: гальванометръ, кап. электометръ, н. м. препаратъ или телефонъ.

Заряженіе происходитъ мгновеннно. Конденсаторъ заряжается соотвѣтственно своей емкости и больше энергіи

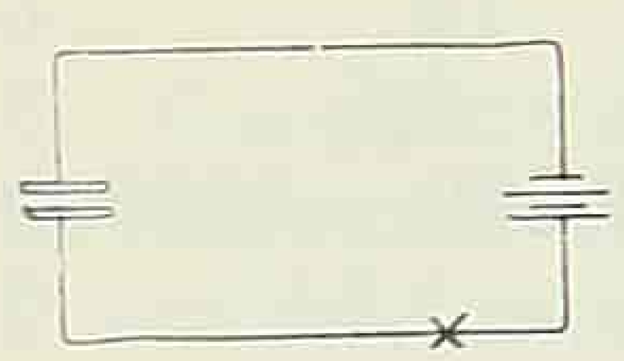


Рис. 12.

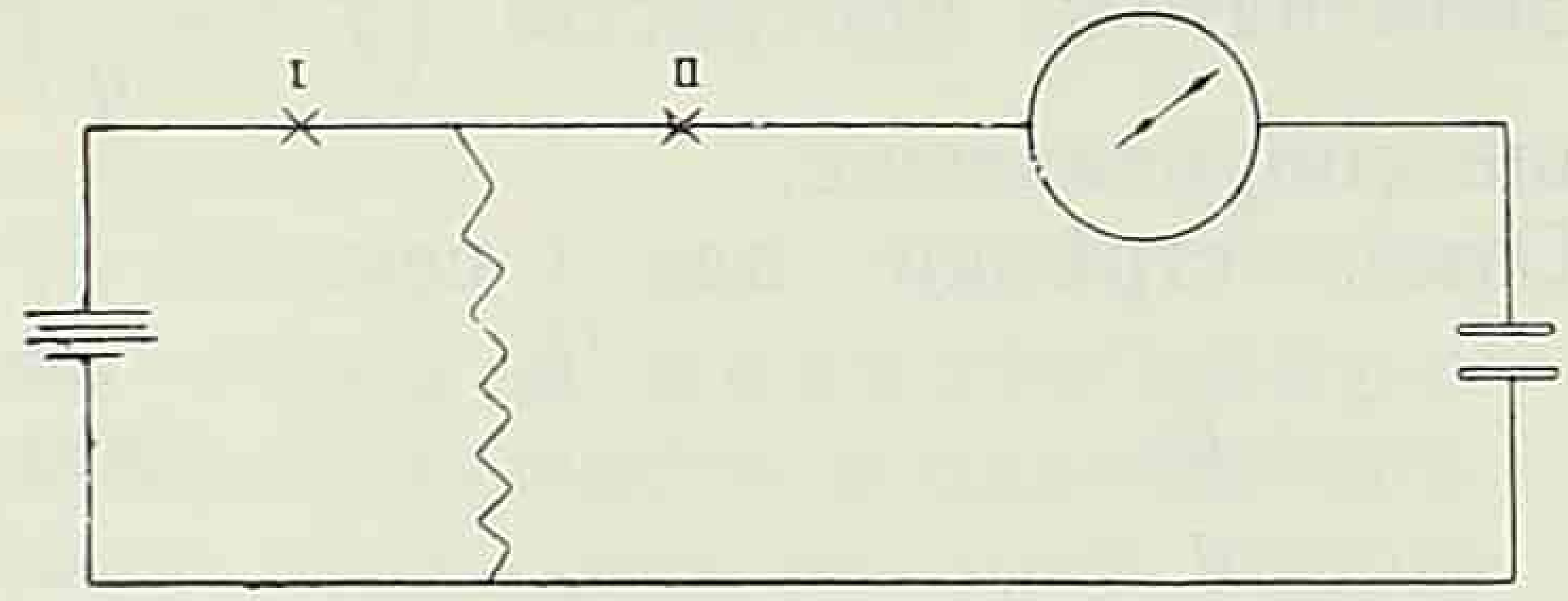


Рис. 13.

заряда не воспринимаетъ. Этотъ фактъ весьма важенъ, ибо ставитъ на очередь вопросъ, зависитъ ли запоминаніе отъ времени дѣйствія впечатлѣнія.

Величина заряда конденсатора зависитъ отъ емкости конденсатора и отъ напряженія источника.

$$V \cdot C = const.$$

Въ моихъ прежнихъ работахъ я показалъ, что вопреки общепринятому мнѣнію на клеммахъ хорошо изолированнаго отъ земли аккумулятора (гальв. элемента) электростическихъ зарядовъ нѣтъ. Энергія заряда въ конденсаторѣ совершенно отлична отъ энергіи гальванич. тока, хотя изъ послѣдняго образуется.

Уже давно извѣстно, что даже при быстромъ разряженіи конденсатора въ немъ остается остаточный зарядъ, который по моему мнѣнію хранится въ діэлектрикѣ, изъ котораго постепенно переходитъ на обкладки. Такой же остатокъ мы находимъ и въ процессѣ памяти. Отношеніе основного разряда къ остаточному, показываемому стрѣлкой гальванометра 37 : 2 (при $V = 6$ и $C = 4$).

Надо различать остаточный зарядъ отъ остающагося при неполномъ разряженіи. Замедленіе разряженія конденсатора достигается введеніемъ въ цѣпь большихъ сопротивленій отъ 50000 Ω до 500000 π. Зарядъ тогда задерживается въ конденсаторѣ. Время разряда, т. е. время замыканія цѣпи регулируется при помощи метронома Бодвича.

Всѣ опыты очень точно показываютъ слѣдованіе разрядовъ экспоненціальной функціи. По этому закону убываютъ отклоненія стрѣлки гальванометра при каждомъ послѣдующемъ замыканіи цѣпи на тотъ же промежутокъ времени.

Количество энергіи разряда пропорціонально времени и сопротивленію.

$$Q = x. \quad R \cdot t.$$

Чѣмъ больше время разряда, тѣмъ полнѣе разряжается конденсаторъ и чѣмъ больше сопротивленіе, тѣмъ медленнѣе онъ разряжается. Послѣдовательные разряды въ единицу времени убываютъ какъ рядъ членовъ геометрич. прогрессіи. Знаменатель прогрессіи $\left(q^{-1} = \frac{1}{q}\right)$ тѣмъ меньше, чѣмъ больше сопротивленіе.

Откл. стрѣлки для 1 сек.	37	27	14	6
$^1/_2$	33	18	8,5	3
R	1000	50000	100000	300000
q	1,12	1,5	1,64	2
$\frac{1}{q}$	0,89	0,66	0,6	0,5

Тѣ же результаты, но въ гораздо болѣе чувствительной формѣ даетъ кап. электрометръ, съ котораго однако послѣ каждаго эксперимента надо снимать зарядъ, замыкая его на самого себя. Особенно хорошо онъ показываетъ остаточный зарядъ.

ТАБЛИЦА
протоколовъ опытовъ съ разрядомъ конденсатора.

R омы	T секунды	Отклоненіе стрѣлки гальваномегра. Номеръ по порядку разряда. 1	2	3	4	5	6	Остаточный разрядъ.
0	1	37	2,5	0,5	—	—	—	2
	$^1/_2$	37	2	—	—	—	—	
	$^1/_3$	37	2	—	—	—	—	
10000	1	37	2,5	1	—	—	—	
	$^1/_2$	33	4,5	1	0,5	—	—	
	$^1/_3$	31	5,3	1,5	0,5	—	—	
50000	1	27	7,5	2,5	1	0,3	—	
	$^1/_2$	18	9	5	3	1,5	1	
	$^1/_3$	15	9	5,5	3	1,7	1	
100000	1	14	8,5	5,5	3,3	2	1,2	
	$^1/_2$	8,5	6	4,5	3	2,6	2	
	$^1/_3$	6	5	4	3	2	2	
300000	1	6	5	4	3,2	2,7	2	
								Остающійся зарядъ.
	$^1/_2$	3	2,75	—	2,5	2	—	
	$^1/_3$	2,2	2	2	—	—	—	29
500000	1	—	—	—	—	—	—	37
1 мегаомъ (металъ)	1	7	5,5	4,7	4	3	2,5	12
	$^1/_2$	4	3,2	3	2,7	2,4	2	14
	$^1/_3$	3	3	2,7	2,5	2,2	2	22

Гораздо труднѣе опыты съ заряженіемъ конденсатора униполярнымъ электрическимъ токомъ. Эти опыты мною не закончены.

Мы видимъ т. обр., что законы заряженія и разряженія электрическихъ конденсаторовъ хорошо объясняютъ законы запоминанія и воспоминанія. Во всякомъ случаѣ это лучшая модель, которую мы имѣемъ и она только укрѣпляетъ взглядъ на нервные элементы — нейроны, какъ на электростатическіе элементы.

VIII.

Свойства нервнаго тока и понятіе нейрона. Нервный токъ униполяренъ, прерывистъ и однозначенъ. Въ этомъ отношеніи онъ ближе подходитъ къ току порождаемому инфлюенцъ-машиной. И индукторъ и динамо-машина даютъ перемѣнные по направленію токи Мы знаемъ, что восходящій и нисходящій электрич. токи имѣютъ различное физіологическое дѣйствіе и что экстра-токъ возникающій на катодѣ обладаетъ болѣе раздражающими свойствами.

Однако не легко экспериментально выяснить знакъ нервнаго тока, ибо сокращеніе мускула даютъ оба направленія тока. Это задача будущихъ изслѣдованій.

Существуетъ фактъ заслуживающій внимательнаго изученія. Подобно тому какъ догматически признается общность принципа рефлексовъ, исповѣдуется и принципъ нейроновъ. Утверждается, что нейронъ состоитъ изъ нервной клѣтки, ея приводящихъ отростковъ-дендриговъ и отводящаго — нейрита. И это совершенно вѣрно по отношенію ко многимъ видамъ клѣтокъ, напр. къ пирамидальнымъ большимъ клѣткамъ мозговой коры. Но эту картину даетъ лишь единственно методъ Гольджи, да и то по отношенію ко многимъ видамъ клѣтокъ трудно разграничить нейритъ отъ дендидовъ, какъ напр. въ звѣздчатыхъ и биполярныхъ элементахъ. Тотъ, кому приходилось тысячи разъ изслѣдовать строеніе мозговыхъ центровъ всѣми другими методами импрегнаціи, какъ напр. методами Ramon i Cajal'я и Bielschowsk'аго, не можетъ не задуматься надъ тѣмъ фактомъ. что констатированіе для каждой клѣтки ея нейрита вовсе не легко, а часто и невозможно.

Сѣть тончайшихъ нервныхъ волоконъ, которыя иногда бываетъ не легко дифференцировать отъ волоконъ нейрогліи, часто кажется совершенно самостоятельною. Въ петляхъ ея, оплетенныя корзиночными аппаратами лежатъ какъ-будто свободно нервныя клѣтки (безъ нейритовъ?). И нельзя доказать, что вся эта сѣть есть сплетеніе отростковъ клѣтокъ. Вспомнимъ ко зиночный типъ антенъ въ радіотехникѣ. Одно-уже несомнѣнно, что принципъ индукціи въ нервной системѣ имѣетъ мѣсто, и что непосредственно соприкосновеніе нейроновъ (подобно гальванической копуляціи въ радіо-техникѣ) нужно лишь для проволочнаго телеграфа. Я пробовалъ подойти къ рѣшенію вопроса подсчетомъ числа нервныхъ волоконъ и клѣтокъ, ибо кажется, что здѣсь существуетъ полное несоотвѣтствіе. Однако такая задача оказывается при современной техникѣ почти неразрѣшимою.

Нѣтъ сомнѣнія, что въ периферической части нервной системы каждому нервному волокну отвѣчаетъ опредѣленная клѣтка и принципъ нейроновъ т. обр. соблюденъ. Но по отношенію къ строенію мозговой коры и субкортикальныхъ центровъ это не доказано. Никогда не былъ констатированъ спеціальный нейритъ для каждой клѣтки. Behte и Nissl давно утверждали относительную самостоятельность нервныхъ клѣтокъ отъ нервнаго сплетенія и сѣти въ формѣ нейропила. Корзиночныя сплетенія вокругъ клѣтокъ лежащихъ въ ихъ полости надо разсматривать какъ пріемочныя антены, принимающія энергію излучаемую электростатическими элементами, каковые представляютъ собою клѣтки. Свободнолежащія въ тончайшей сѣти и сплетеніяхъ нервныхъ волоконъ клѣтки могутъ вовсе не имѣть нейритовъ, которые мы находимъ рѣдко и лишь въ моторныхъ центральныхъ и периферическихъ путяхъ. Дѣленіе отростковъ на нейриты и дендриды по моему мнѣнію должно проводиться очень осторожно. Дѣленіе ихъ роли на афферентную и эфферентную также повидимому не выдерживаетъ критики. Индукція не нуждается въ проводниковомъ механизмѣ, который до сихъ поръ считается необходимымъ.

И здѣсь т. обр. возникаетъ потребность повнимательнѣе пересмотрѣть догматическія, принятыя на вѣру и путемъ преждевременнаго обобщенія, положенія. Очень вѣроятно что въ ближайшемъ будущемъ придется въ значительной мѣрѣ отрѣшиться отъ принциповъ нейроновъ и проводниковыхъ, полныхъ рефлексовъ, на которыхъ зиждется вся современная неврологія.

IX.

Ходъ проводящихъ путей вегетативной нервной системы и центральныя нервныя эмиссіонныя станціи. Если приведенныя мною соображенія вѣрны, то въ центральной нервной системѣ должны существовать эмиссіонныя станціи. Таковою повидимому въ большой мѣрѣ является мозговая кора, безпроводниково вліяющая на вегетативныя реакціи. Но естественно надо ожидать существованіе и настоящей вегетативной радіо станціи. По моимъ соображеніямъ таковою является мозжечекъ.

Афферентныя волокна периферическихъ вегетативныхъ нервовъ входятъ черезъ rami communicantes albi съ передними корешками въ спинной мозгъ. Предполагается, что слѣдующая послѣ периферическихъ ганглій станція находится въ кларковыхъ столбахъ и въ центрахъ substantia intermedia и боковыхъ рогахъ спинного мозга. Гдѣ находятся дальнѣйшіе пути, точно не установлено. Естественно искать ихъ въ передне-боковыхъ столбахъ. Здѣсь извѣстны два восходящихъ пути, которые могли бы быть продолженіемъ вегетативныхъ путей — пути Flechsig'a и Gowers'a. Къ послѣднему прилегаетъ путь уже фактически найденный хирургами — это проводники болевыхъ и температурныхъ раздраженій. Кромѣ того существуетъ весьма важный спино-оливарный путь, который до сихъ поръ считается нисходящимъ, однако его эфферентный по отношенію къ мозгу характеръ нельзя считать доказаннымъ. Всѣ эти пути я считаю афферентными и вегетативными. Всѣ эти пути мы можемъ прослѣдить до оливъ и corpus restiforme, черезъ которое они, частью минуя оливы, а частью черезъ нихъ, входятъ въ мозжечекъ. Весь соматическій сензорный путь отъ кожной поверхности, а также моторный пирамидальный путь проходятъ черезъ мостъ и продолговатый мозгъ, непосредственно не заходя въ мозжечекъ. Связь мозжечка съ высшими вегетативными центрами hypothalamus существуетъ черезъ посредство brachia conjunctiva, заканчивающимися въ nucl. rubri, которые считаются по отношенію къ мозжечку эфферентными (?).

Функція мозжечка въ настоящее время совершенно невыяснена. Структура его коры не имѣетъ ничего общаго съ таковою большого мозга, а клѣтки Пуркинье представляютъ собою странные аппараты, которые должны имѣть своеобразную функцію. Вся кора мозжечка однородна и локализація отдѣльныхъ функцій въ ней не доказана. Въ веществѣ мозжечка имѣется четыре небольшихъ промежуточныхъ центра — станціи (nucl. globosus, emboliformis, fastigii, и dentatus, послѣдній по строенію сходенъ съ оливою). По своему строенію мозжечекъ долженъ быть совершенно однороднымъ органомъ.

Мозжечекъ оказывается связаннымъ съ спиннымъ, продолговатымъ и головнымъ мозгомъ, но едва ли можно его считать за промежуточную станцію.

Вліяніе мозжечка какъ на двигательные, такъ и на чувствительные пути остается загадочнымъ. По одному строенію, невозможно судить о функціи органа.

Съ физической точки зрѣнія клѣтки Пуркинье съ ихъ кустовидными дендридами, съ ихъ корзиночными сплетеніями и типичнымъ нейритомъ являются типичными электростатическими антенами. Ихъ аксоны считаются по отношенію къ клѣткамъ эфферентными, но такая ихъ функція не доказана и настоящими методами доказана быть не можетъ. Эти нейроны униполярны и не имѣютъ парныхъ клѣтокъ обратной функціи необходимыхъ для рефлекторныхъ дугъ. Всѣ соединенія нейроновъ въ корѣ мозжечка съ ихъ корзиночными антенами и т-образными бифуркаціями типичны для радіо аппарата. Также и коллатерали аксоновъ нервныхъ клѣтокъ могутъ стать понятными только съ точки зрѣнія электростатики, а не замкнутыхъ гальваническихъ цѣпей. Вся система клѣтокъ Пуркинье съ ея сложнѣйшею системою вспомогательныхъ соединеній представляетъ собою одно цѣлое, а именно излучающую систему, которую я и разсматриваю какъ главную вегетативную радіо станцію центральной нервной системы. Во всей центральной нервной системѣ существуетъ типичное для радіо-аппарата индуктивное соединеніе нейроновъ съ униполярными слѣпыми отвѣтвленіями, которыхъ въ гальваническихъ цѣпяхъ быть не можетъ.

Много органовъ и тканей тѣла, которые обильно снабжены вегетативными (афферентными) волокнами, посылаютъ раздраженія къ центру, но они никогда не доходятъ до психическихъ центровъ и не переживаются субъективно. Это повидимому и есть та энергія, которая питаетъ радіо-станцію, которая отвѣтной эмиссіей регулируетъ вегетативные процессы. Это повидимому есть функція мозжечка.

Но тѣлесныя раздраженія, достигнувъ опредѣленной интенсивности, переживаются субъективно въ формѣ болевыхъ ощущеній. Неизвѣстно, гдѣ находятся центры этихъ ощущеній. Ихъ предполагаютъ въ thalamus, но тогда неизвѣстны пути, по которымъ они туда достигаютъ.

Мало вѣроятно, чтобы такіе центры находились въ мозжечкѣ. Но т. к. всѣ вегетативные пути сосредоточиваются въ мозжечкѣ, то должны существовать пути, соединяющіе его съ thalamus, Такіе пути видятъ въ brachii consunctiva, которые эфферентны относительно мозжечка, и афферентны по отнош нію къ nucl. rubra. Но возможно, что механизмъ передачи здѣсь и другой. Это во всякомъ случаѣ задачи будущихъ изслѣдованій.

Одно можно утверждать опредѣленно, что боль отъ всѣхъ тканей организма передается по вегетативнымъ нервамъ, которые и надо считать аппаратомъ боли. Но афферентная инервація существуетъ и ниже порога. Она и питаетъ повидимому радіо станцію. Весь мышечный тонусъ, равновѣсіе, всѣ половыя функціи регулируются нервной эмиссіей излучаемой центрами безъ посредства проводниковъ.

Самая форма клѣтокъ и мозговой коры чрезвычайно типична для антенъ и нужно думать, что нервная (или психическая) эмиссія есть весьма важная функція мозговой коры.

Prof. N. V. Kraïnskij.

Sur le mécanisme de l'activité nerveuse et le rôle du système nerveux végétatif.

(Résumé).

Les phénomènes éléctrostatiques sont des manifestations d'une forme d'énérgie, qui est complètement differente de l'énérgie galvanique. L'électricité se presente en deux formes: l'énérgie des phenomènes élécrtostatiques et l'énérgie du courant galvanique. L'énérgie éléctrostatique ne suit pas les lois d'Ohm, de Kirchhoff. Il n'éxiste pas de champ magnétique autour du circuit. Le courant électrique se manifeste en chaîne ouverte et peut être transferré sous la forme d'induction à distance sur un autre corps materiel. L'énérgie éléctrique se manifeste sous trois formes differentes: la charge, le champ éléctrique et le courant éléctrique. On peut séparer l'énérgie éléctrique de l'énérgie galvanique au moyen d'un condensateur. On doit identifier le courant nerveux avec le courant éléctrique unipolaire. Il donne les mêmes réactions avec le téléphone, l'électromètre capilaire et la préparation de la grenouille. La théorie du condensateur de la physique moderne est totallement fausse. C'est le diéléctrique, les lipoïdes, qui sont les accumulateurs de l'énérgie sous forme de mémoire. La vitesse ralentie du courant nerveux depend du nerf qui est un demidiéléctrique. Ce n'est pas l'axon qui transmet le courant nerveux, mais la substance lipoïde, qui l'entoure. Ce courant est périodique.

Il n'éxiste pas des nerfs amyelinique. Les nerfs de Remak contiennent la myeline, qui transmet le courant. La quantité plus petitte des lipoïdes éxplique leur résistence plus grande. Tout le système des nerfs végétatives est afférent. Le corps et ses tissus sont innervés par les nerfs sympathiques et parasympathiques, qui transférent le courant nerveux vers les centres psychiques. La sympathicothomie et les conclusions de Leriche confirment cette opinion. Les voies nerveuses efférentes pour la musculature lisse et pour les glandes sont inconues. Elles n'éxistent pas. La musculature volontaire seule a une innervation fibrillaire centrifugalle. Pour la musculature lisse et pour les glandes c'est une émission sans fils, qui fait regler les réactions végétatives. Il n'éxiste qu'un seul type du réflexe complet: c'est le transport de l'éxitation des organes de sens vers la musculature volontaire.

Les réflexes végétatives sont des demi-reflexes. La moitié afférente est un transport par les fils nerveux, mais la moitié efférente est un transport sans fils, par l'émission nerveuse.

Toutes les voies nerveuses végétatives dans la moelle épinière sont afférentes. Elles entrent dans le cerebellum, qui est la radiostation générale du cerveau. Les celulles de Pourquinje sont des anthènnes éléctrostatiques. L'émission nerveuse éxiste aussi dans l'écorce cerebralle. La forme de ses cellules est typique pour les anthènnes. Il faut reconnaitre dans le système nerveux central deux mecanismes: un mecanisme à fils, analogique au télégraphe, et un mécanisme sans fils, analogique au radio-télégraphe. Toutes les réactions végétatives sont innervées par la radio emission nerveuse. La théorie des réflexes complets et la théorie des neurones ont une valeur rélative. Il éxiste des demi reflexes (afferents) et des cellules nerveuses au sens de Bethe et de Nissl, qui ne sont pas liées aux chaînes neuroniques. Les celulles nerveuses végetatives n'ont pas des neurites et des dendrites qu'ont peut bien différer. La fonction du cerveau est une combinaison d'un télégraphe à fils avec un radioappareil sans fils à émission nerveuse.

Проф. В. В. Фармаковскій.

НАИВЫГОДНѢЙШАЯ СКОРОСТЬ И НАИВЫГОДНѢЙШІЙ ВѢСЪ ТОВАРНЫХЪ ПОѢЗДОВЪ.

Подъ аналогичнымъ заголовкомъ авторъ опубликовалъ въ 1923 г. работу[1]), которая въ свое время вызвала обширные дебаты въ собраніяхъ Союза Русскихъ Инженеровъ въ Бѣлградѣ; она подверглась критикѣ нѣкоторыхъ моихъ конспеціалистовъ (проф. В. Н. Щегловитовъ) и въ своей методологической части встрѣтила сочувствіе и одобреніе лишь весьма немногихъ (проф. П. Н. Рышковъ). Тогдашніе дебаты приняли такой характеръ, при которомъ обсужденіе мелкихъ неточностей и шероховатостей работы отодвинуло на второй планъ главное — новую методу рѣшенія вопроса, предложенную авторомъ, которая во всякомъ случаѣ могла открыть нѣкоторыя новыя перспективы для рѣшенія одного изъ важнѣйшихъ вопросовъ эксплоатаціи желѣзныхъ дорогъ. Эта новая метода базировалась на вычисленіи себѣ стоимости транспорта при помощи вычисленія расходовъ на топливо и на оцѣнкѣ переходнаго коэффиціента ε, представляющаго отношеніе расходовъ на топливо ко всѣмъ расходамъ транспорта. За истекшее десятилѣтіе главныя затрудненія при оцѣнкѣ переходнаго коэффиціента ε оказались побѣжденными и именно въ смыслѣ вполнѣ благопріятномъ для новой методы автора. Сильный толчекъ въ этомъ направленіи далъ проф. К. Р. Савичъ, косвенно доказавшій[2]), что переходной коэффиціентъ ε зависитъ только отъ интенсивности форсированія паровоза

[1]) Проф. В. В. Фармаковскій. „Наивыгоднѣйшая скорость и наивыгоднѣйшій составъ желѣзно-дорожныхъ поѣздовъ" — „Инженеръ" (Бѣлградъ), 1923, № 1. Въ этой работѣ переходной коэффиціентъ ε былъ обозначенъ черезъ β.

[2]) Проф. К. Р. Савичъ. „Наивыгоднѣйшій вѣсъ поѣзда и сравненіе варіантовъ ж. д. трасъ" — „Инженеръ" (Бѣлградъ) 1931, № 4/5.

(точнѣе нагрузки рѣшетки B_1/R) и потому легко и точно вычисляемъ для данныхъ условій. Это дало возможность автору нѣсколько ближе подойти къ окончательному рѣшенію вопроса о наивыгоднѣйшей скорости и наивыгоднѣйшемъ вѣсѣ товарныхъ поѣздовъ [3]). Все изложенное выше побуждаетъ автора еще разъ вернуться къ этой вѣчно-новой и важной темѣ и обработать ее еще разъ, основываясь въ главномъ на прежней методѣ автора, но избѣгая тѣ недочеты и погрѣшности, которые вкрались въ его первоначальную работу.

I. Тяговая характеристика паровоза.

Совершенно a priori ясно, что наивыгоднѣйшая скорость и вѣсъ поѣзда въ первую голову зависятъ отъ типа паровоза, то есть отъ его тяговой характеристики. Поэтому для рѣшенія зада и надо выбрать конкретный типъ паровоза; вполнѣ естественно, что это долженъ быть современный „нормальный“ для данной линіи паровозъ. Какъ таковой мы въ данное время принимаемъ паровозъ типа *I—E—O* со сцѣпнымъ вѣсомъ около 90 *t*. Это отвѣчаетъ напр. новымъ паровозамъ Югославянскихъ ж. д. сер. 589—900. Къ крайнему нашему сожалѣнію для этихъ паровозовъ не имѣется еще „тягового паспорта“, составленнаго на основаніи полнаго опытнаго изслѣдованія паровоза [4]). Ввиду этого мы пользуемся въ дальнѣйшемъ тяговыми характеристиками совершенно идентичнаго по типу и вѣсу паровоза Польскихъ государственныхъ ж. д. (Р. К. Р.) сер. Ту 23, испытаннаго подъ руководствомъ профессора А. О. Чечотта (Czeczott), причемъ результаты испытанія опубликованы для общаго пользованія въ видѣ „паспортной книжки“ [5]).

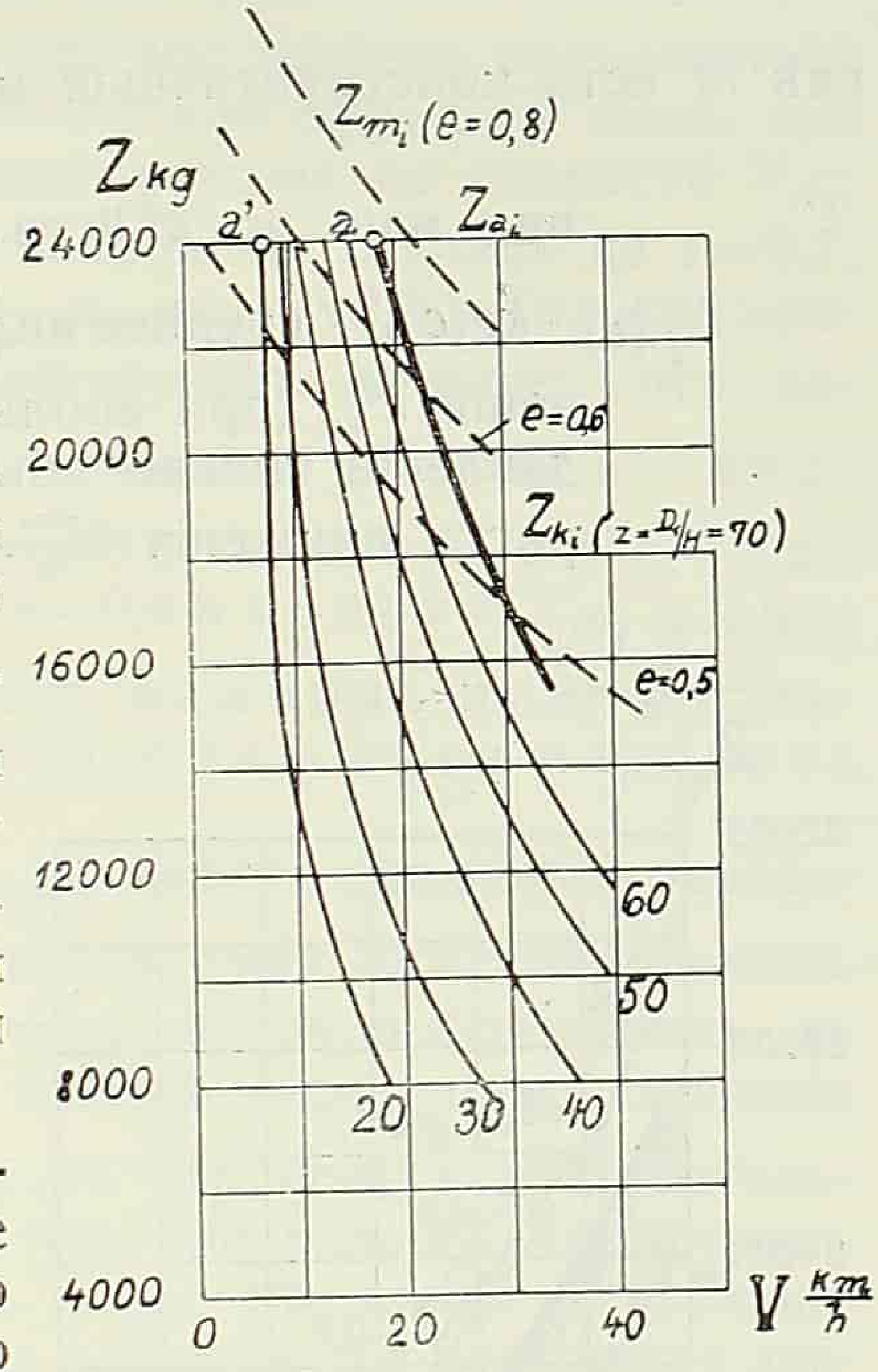
Обычно на тяговыхъ характеристикахъ (фиг. 1) паровозовъ принято наносить линію „сцѣпной“ силы тяги Za_i (т. е. предѣльныхъ значеній силы тяги по элементамъ сцѣпленія, притомъ до послѣдняго времени обычно — въ предположеніи постояннаго значенія коэффиціента сцѣпленія) и кривыя „котловой силы тяги“ Zk_i (т. е. предѣльныхъ значеній силы тяги по паропроизводительности котла), вычисленныхъ при различной интенсивности парообразованія ($z=D_1/H_u$) или, что

[3]) Проф. В. В. Фармаковскій. „О выборѣ наивыгоднѣйшаго подъема при проэктированіи ж. д. линіи“. — Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ, вып. 6, стр. 69 и сл.

[4]) Нѣкоторыя, но совершенно недостаточныя опытныя данныя о паровозахъ *I—E—O*, Югославянскихъ ж. д. находимъ въ статьѣ: R. Wagner. Lokomotivtypisierung der Jugoslawischen Staatsbahn. ZVDI. 1931, № 5.

[5]) Ch. d. f. d. E. P. „Résultats principaux des essais des locomotives Type 1—5—0 Ty 23“ eloborés par le prof. A. Czeczott. Varsovie, 1929.

то-же, для различныхъ степеней форсированія колосниковой рѣшетки (B_1/R). Вычертить эти кривыя на основаніи нѣкотораго количества испытаній паровоза или пользуясь извѣстными эмпирическими зависимостями не представляетъ особаго труда. Однако ни линія Za_i, ни кривыя Zk_i не даютъ истинной тяговой характеристики паровоза. Какъ бы ни былъ великъ сцѣпной вѣсъ паровоза и какъ бы ни было велико форсированіе котла, фактически, если машина паровоза не работатаетъ — то сила тяги равна нулю. Кривыя Za_i и Zk_i суть только идеальныя ограниченія для силы тяги Zm_i, развиваемой машиной паровоза, онѣ являются лишь *рамкой* для кривой силы тяги Zm_i.



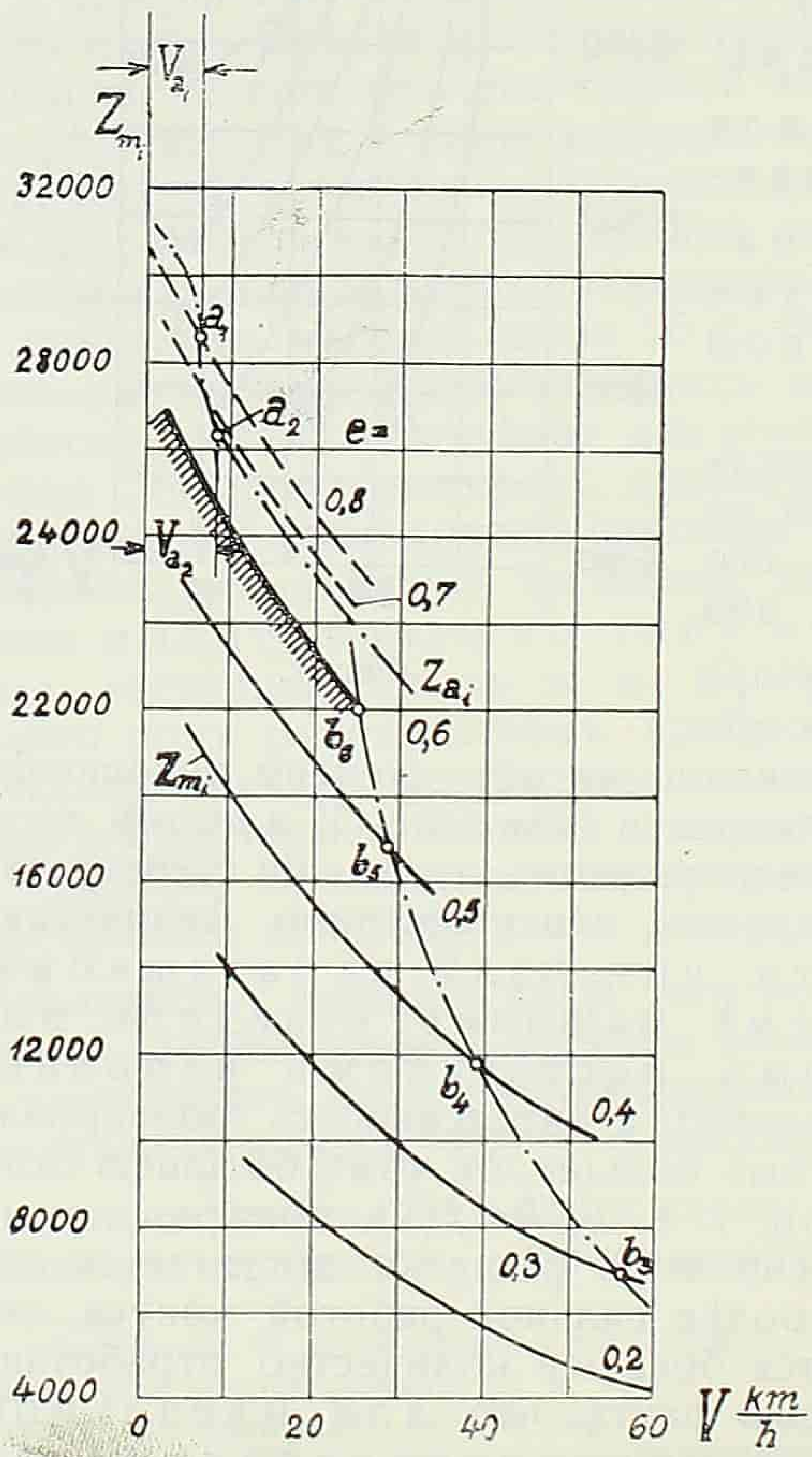
Фиг. 1.

Далѣе самъ способъ регулированія работы паровоза не позволяетъ использовать его по нѣкоторой кривой Zk_i, ибо это предполагало-бы ѣзду при постоянствѣ форсированія рѣшетки ($B_1/R=const$) независимо ни отъ степени наполненія цилиндровъ $e^0/_0$, ни отъ скорости движенія V и кромѣ того требовало бы ѣзду при непрерывномъ измѣненіи степени наполненія, что (и одно и другое) неосуществимо физически. Въ дѣйствительности, при ѣздѣ на затяжномъ однородномъ подъемѣ машинистъ ведетъ поѣздъ при нѣкоторомъ постоянномъ наполненіи цилиндровъ ($e=const$), а интенсивность форсированія рѣшетки при этомъ тѣмъ больше, съ чѣмъ бóльшею скоростью движется паровозъ, т. е. $B_1/R=f(V)$, причемъ повышеніе интенсивности форсированія рѣшетки достигается совершенно автоматически болѣе сильной работой конуса, черезъ который эвакуируется бóльшее количество отработаннаго пара. Давно извѣстенъ фактъ, что для идеальной работы паровоза паропроизводительность паровознаго котла въ любой моментъ (при установившемся режимѣ работы) равна потребленію пара машиною, поэтому фактичееки для наполненія $e^0/_0$ имѣетъ мѣсто условіе $Zm_i\,(e)=Zk_i\,(e)$, причемъ

$$Zm_i\,(e)=Mp_i\,(e),$$

гдѣ M есть конструктивный модуль $\left(M=\frac{d^2}{D}h\right.$ — для 2-хъ цил. маш. пр. дѣйств.$\left.\right)$

$P_i\,(e)$ - kg/cm^2 - среднее индикаторное давленіе при наполненіи $e^0/_0$ (при вполнѣ открытомъ регуляторѣ). Это давленіе сильно убываетъ [6]) съ возростаніемъ скорости движенія $V\frac{km}{h}$.



Фиг. 2.

Бо́льшей силы тяги, чѣмъ $Mp_i\,(e)$ мы, на основаніи изложеннаго, не можемъ получить и по производительности котла; поэтому при рѣшеніи практическихъ тяговыхъ задачъ для насъ мѣродавна не кривая „котловой" силы тяги $Zk_i\,(D_1/H)$ (фиг. 1) являющаяся лишь идеальной границей, а лишь единственно кривая силы тяги по машинѣ $Zm_i\,(e)$ при опредѣленномъ наполненіи цилиндровъ $e^0/_0$ (фиг. 2). На фиг. 2 нанесены кривыя силы тяги паровоза *Ту* 23 для степеней наполненія отъ $e=0{,}2$ (или $20^0/_0$) до $e=0{,}8$ (или $80^0/_0$). Такъ какъ фактическая кривая наибольшихъ допустимыхъ по сцѣпленію силъ тя-

[6]) Данныя для $p_i\,(e)=f\,(V)$ см. напр. V. Farmakovski. Opšta teorija lokomotiva, 1927 стр. 23—25 (по даннымъ Lyhotzky).

ги Z_{a_i} при малыхъ скоростяхъ имѣетъ сильный наклонъ къ оси абсциссъ[7]), то мы получаемъ точку пересѣченія a_1 кривой Z_{r_i} $(e=0{,}8)$ съ кривой Z_{a_i} при очень малой скорости движенія. Это показываетъ, что мы можемъ пользоваться наибольшимъ наполненіемъ ($e=0{,}8$ или 80% х.п.) лишь при троганіи съ мѣста и при началѣ разгона до скорости V_{a_1}, когда мы должныуменьшить наполненіе сначала до $e=0{,}7$, а затѣмъ, при скорости V_{a_2}, и до $e=0{,}6$. Только кривая Z_{r_i} $(e=0{,}6)$ впервые удовлетворяетъ условію, что постоянно Z_{m_i} $(e=0{,}6) < Z_{a_i}$ и поэтому какъ наибольшее эксплоатаціонное наполненіе для паровоза мы признаемъ $e=0{,}6$ и кривую Z_{m_i} $(e=0{,}6)$ должны считать кривою наибольшей, въ эксплоатаціи осуществимой, силы тяги паровоза *Ту* 23.

Каждая изъ кривыхъ Z_{m_i} (e) имѣетъ нижнюю ограничительную точку b_i получаемую на основаніи нижеслѣдующихъ соображеній. Равенство силы тяги по парообразованію съ силою тяги по машинѣ Z_{m_i} (e) имѣетъ свое полное значеніе лишь для идеальнаго паровоза. Въ паровозахъ дѣйствительныхъ наблюдается то явленіе, что при малыхъ скоростяхъ очень легко держать и уровень воды въ котлѣ и давленіе пара постоянными; иногда даже наблюдается повышеніе давленія. Это показываетъ, что пара намъ вполнѣ хватаетъ на полученіе силы тяги Z_{m_i} (e) и на работу инжекторовъ и иныхъ вспомогательныхъ приборовъ. Однако при ѣздѣ съ нѣкоторою бо́льшею скоростью замѣчается явленіе обратнаго по-

---

[7]) Ibidem, стр. 19—21; кромѣ того:

W i c h e r t. El. Bahnen 1927, Heft 3, S. 70.

M ü l l e r. Zentralbl. elektr. Zugbetrieb 1928, 63 i ETZ, Heft 1, S. 17.

P r o f. D r. N o r d m a n n. Neue Versuche und Versuchsergebnisse auf dem Gebiet der Dampflokomotive. „Glasers Annalen" 1928, № 1235. Стр. 144.

T h. Q u i r c h m a y e r. Die Abhängigkeit des Reibungswertes von der Fahrgeschwindigkeit und die „Reibungsleistung" bei Lokomotiven. Z. Oe. I. u. A. V. 1930 Heft 9/10.

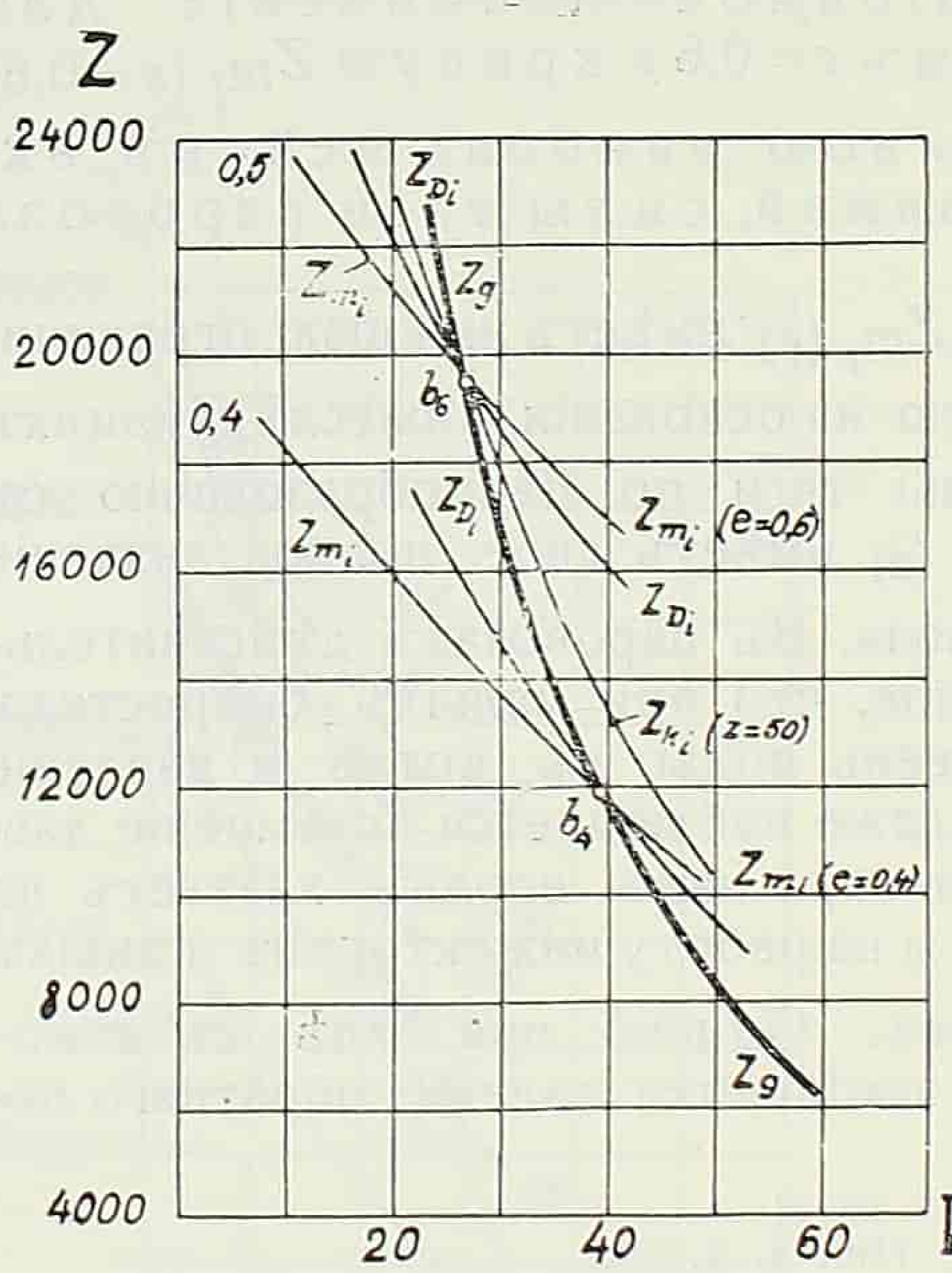
P r o f. D r. N o r d m a n n. Die Mechanik der Zugfoerderuug in ihrer Entwicklung und ihren neuesten Ergebnissen. „Glasers Annalen", 1932, Bd. 111, Heft 11, S. 93: ...„e r h e b l i c h f a l l e n d e V e r l a u f d e r R e i b u n g s z u g k r a f t i m B e r e i c h d e r k l e i n e r e n G e s c h w i n d i g k e i t e n"...

P r o f. D r. I n g. F. M e i n e k e. Kurzes Lehrbuch des Dampflokomotivbaues. Berlin. 1931, стр. 60.

Dr. Ing. L u b i m o f f. Über rechnerische und zeichnerische Ermittlungen der Fahrzeiten von Eisenbahnzügen. 1932, стр. 7.

Dr. Ing. W. L u b i m o f f. Ermittlung einiger Gesetzmässigkeiten bei Versuchsergebnissen von Dampflokomotiven. Organ 1933. Heft 12.

рядка — паръ начинаетъ садиться, уровень въ котлѣ неудержимо падаетъ и наступаетъ „исчерпаніе котла" паровоза, приводящее къ необходимости перейти на болѣе легкій режимъ работы. Это ясно указываетъ на существованіе такой скорости движенія, при которой, для даннаго наполненія $e\,^0/_0$, наблюдается дѣйствительное равенство между силою тяги $Z_{m_i}(e)$ и силою тяги по паропроизводительности котла $Z_{D_i}(e)$. Эти скорости получаются какъ абсциссы точекъ пересѣченія b_i кривыхъ $Z_{m_i}(e)$ и Z_{D_i}. (фиг. 3). Точки b_i можемъ назвать точками „равновѣсной работы котла и машины". Кривая соединяющая точки „равновѣсной работы" — $b_6 b_5 b_4 \ldots b_2$ является границей „равновѣсной работы котла и машины" и въ эксплоатаціи не слѣдовало бы выходить за ея предѣлы, ибо только въ этомъ случаѣ мы можемъ быть гарантированы отъ опозданій вслѣдствіе „слабости" паровоза. Эта кривая $Z_{(g)}$ для даннаго паровоза и топлива только одна и она никакъ не совпадаетъ ни съ одной изъ кривыхъ Z_{k_i}, конструируемыхъ для постоянства D_1/H или B_1/R. Кривыя $Z_{(g)}$ можетъ быть добыта лишь при опытномъ изслѣдованіи паровоза. Мы пользуемся для этой цѣли (на фиг. 2, 3 и 4) результатами опытовъ проф. А. О. Чечотта надъ паровозами *Ту* 23 [8]).



Фиг. 3.

Наконецъ — для силы тяги паровоза необходимо принимать во вниманіе еще ограниченіе, зависящее отъ трудоспособности кочегара и абсолют-

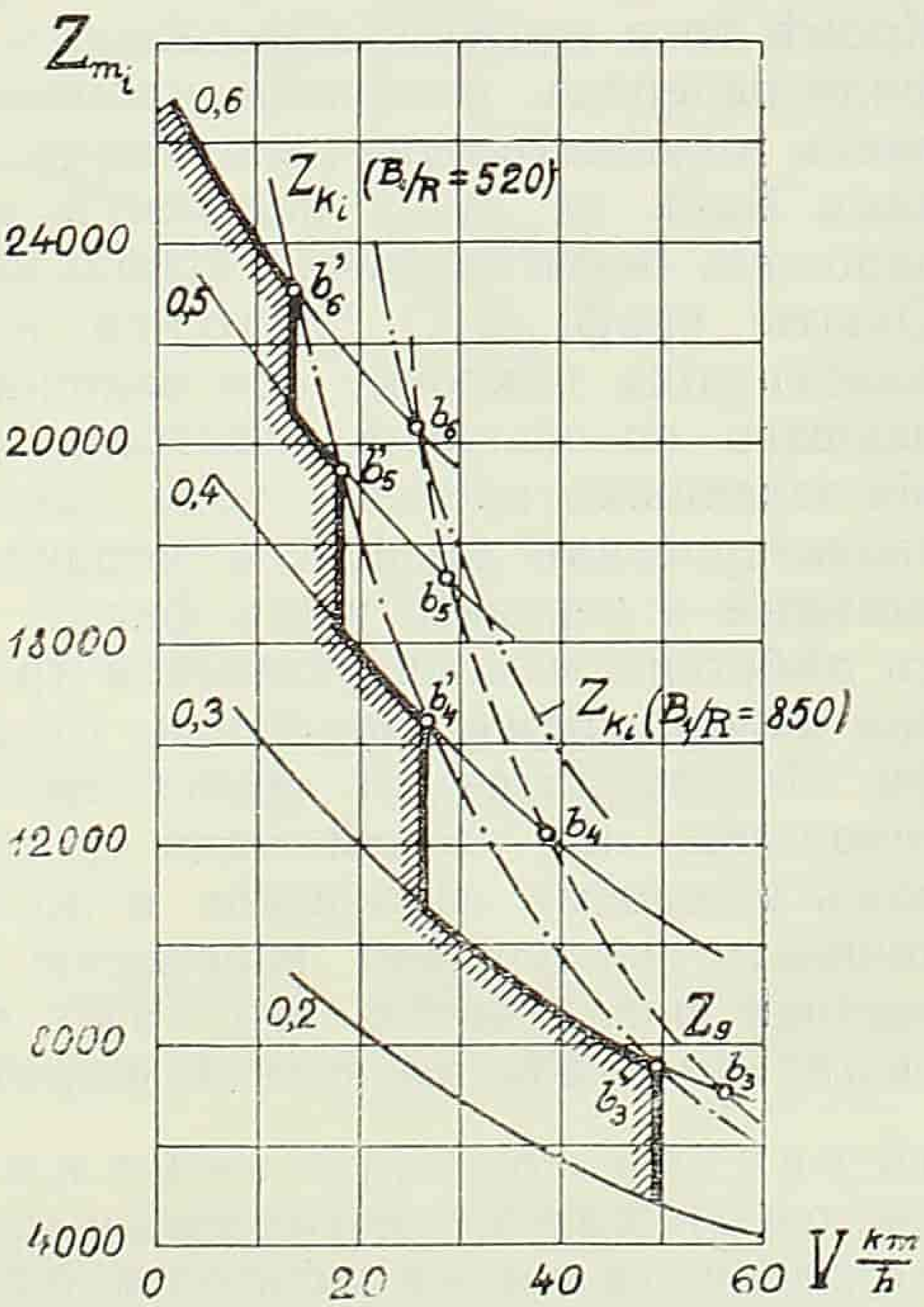
[8]) Проф. А. О. Чечоттъ передалъ мнѣ лѣтомъ 1932 г. цѣлый рядъ графиковъ для паровоза Ту 23, которые всесторонне освѣщаютъ вопросъ о „исчерпаніи" котла и о „равновѣсной работѣ котла и машины". Эти графики, еще не изданные въ паспортѣ, составлены на основаніи опытнаго изслѣдованія и являются весьма цѣннымъ добавленіемъ къ графикамъ, заключающимся въ паспортѣ паровоза Ту 23 Р. К. Р.

ныхъ размѣровъ рѣшетки котла $R(m^2)$. Длительная эксплоатаціонная наибольшая трудоспособность кочегара не превосходитъ $B_1 max = 2300-2500$ kg/h. Отюда мы легко получаемъ наибольшее, въ эксплоатаціи длительно осуществимое, форсированіе рѣшетки $B_1 max/R$ kg/m^2h. Оно такимъ образомъ чисто индивидуально для каждаго типа паровоза и по нему мы можемъ легко вычислить предѣлъ силы тяги Z_{R_i} изъ равенства

$$Z_{R_i} = \frac{270 \cdot B_1 max/R \cdot R}{B_i \cdot V}$$

гдѣ B_i $kg/$и. л. с. ч. — провѣренный опытомъ расходъ даннаго сорта топлива на 1 и. л. с. — часъ при скорости $V km/h$.

Паровозъ *Ту* 23 имѣетъ $R = 4{,}5$ m^2, поэтому получаемъ $B_1 max/R = 520$ kg/m^2h. При наличіи на паровозѣ кромѣ помощника машиниста еще и кочегара значеніе $B_1 max/R$ могло бы быть значительно повышено (примѣрно до 700 $kg/m^2 h$), а при наличіи механическаго стокера[9]) — доведено и до 900—1000 kg/m^2h, что конечно соотвѣтственно повысило бы предѣльныя значенія силы тяги по работоспособности кочегара. Изъ тяговой характеристики фиг. 4 паровоза *Ту* 23 видно, что при принятой нормѣ $B_1 max/R = 520$ кривая Z_{R_i} ограничиваетъ силу тяги, тогда какъ напр. при нормѣ $B_1 max/R = 850$ кривая Z_{R_i} лежитъ выше кривой равновѣсной работы котла и машины Z_g и при такой нормѣ работы ограниченіемъ силы тяги была бы именно кривая Z_g.



Фиг. 4.

На фиг. 4 дана полная тяговая характеристика паровоза *Ту* 23 въ томъ видѣ, какъ мы ею можемъ пользоваться для рѣшенія нашей задачи. Мы можемъ пользоваться

---

9) Проф. В. Фармаковскій. О механическомъ отопленіи паровозныхъ котловъ. „Инженеръ“ 1932, № 1. На одномъ изъ паровозовъ *Ту* 23 поставленъ для испытанія стокеръ типа „Standard“.

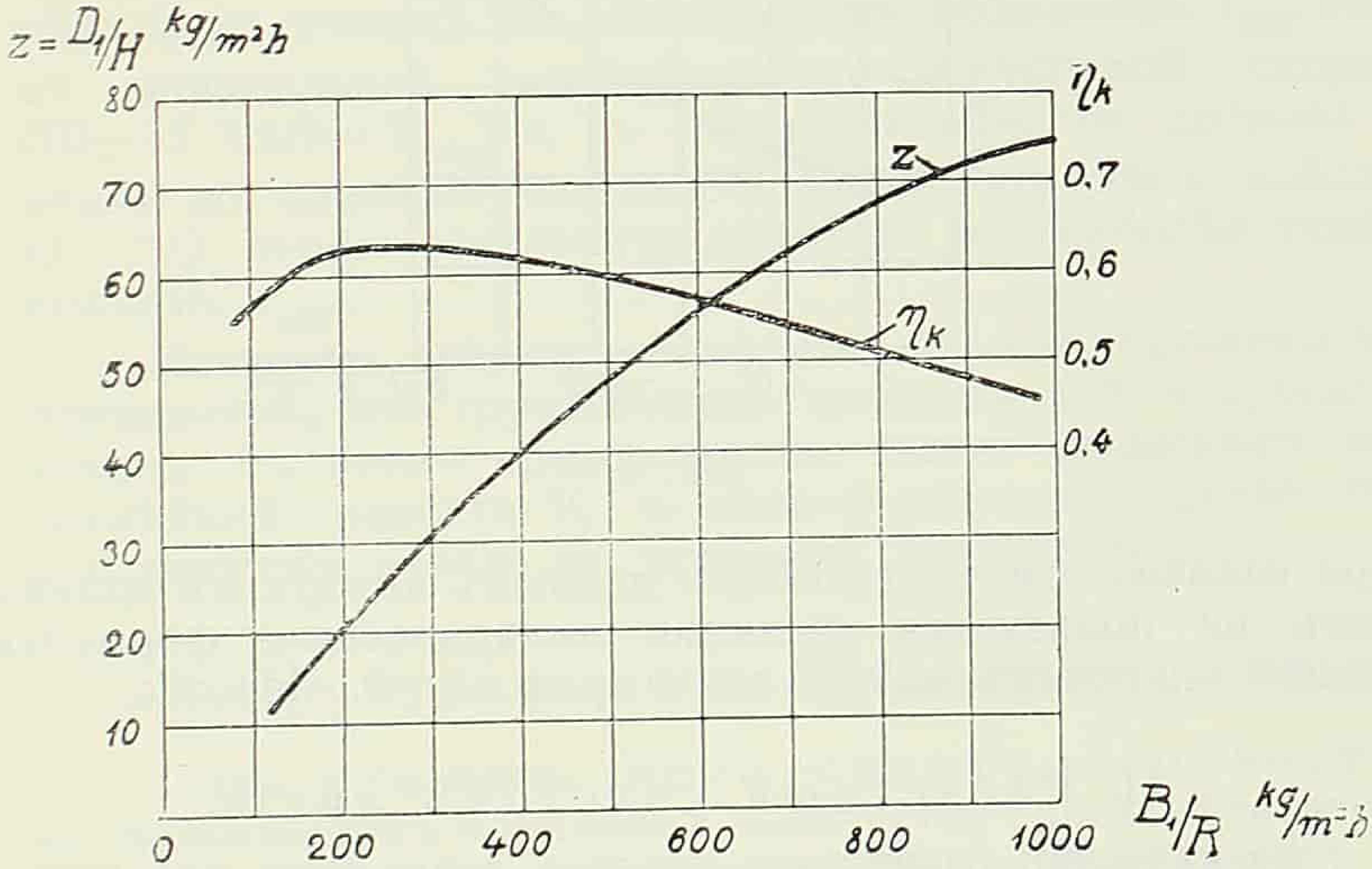
наполненіемъ $e=0{,}6$ (или 60°/₀) до скорости Vb'_6, при которой должны, чтобы не нарушать предѣла работоспособности кочегара, перейти на наполненіе $e=0{,}5$ (50°/₀) и т. д. Для наполненія $e=0{,}2$ силу тяги ограничитъ уже кривая равновѣсной работы Z_g. Въ силу того, что машинисты регулируютъ работу машины обычно на цѣлый зубъ реверса (10°/₀ х. п.), то мы и переходимъ отъ наполненія $e=0{,}6$ сразу на 0,5, потомъ на 0,4 и т. д. Резултатомъ такого способа регулированія является **предѣльная тяговая характеристика паровоза въ видѣ ступенчатой подштрихованой линіи**, что принципіально отличается отъ общепринятой тяговой характеристики по фиг. 1 (Za_i и Zk_i). Изъ сравненія фиг. 4 и 1 видно, что **дѣйствительныя силы тяги** (фиг. 4) **меньше таковыхъ, получаемыхъ изъ фиг. 1.** Поэтому нѣтъ ничего удивительнаго, что при вычисленіи времени хода по тяговой характеристикѣ фиг. 1 приходится къ разсчетному временн хода поѣзда додавать еще 10—20°/₀, чтобы въ дѣйствительности время хода поѣзда можно было бы выдержать. Наоборотъ расчетъ времени хода по характеристикѣ фиг. 4 чрезвычайно точенъ. Кромѣ того имѣется возможностъ для каждаго участка профиля напередъ назначать наполненіе машины e, что позволяетъ осуществлять „ѣзду подъ диктовку", т. е. не такъ, какъ Богъ на душу положитъ машинисту, а такъ, чтобы паровозъ былъ наилучше использованъ какъ тяговая машина. Опыты проф. А. О. Чечотта на польскихъ дорогахъ съ ѣздою подъ диктовку при наличіи машиниста, впервые попавшаго на опытный участокъ, дали въ смыслѣ соблюденія заданныхъ временъ хода блестящіе результаты. Далѣе характеристика по фиг. 4 вполнѣ совпадаетъ (принявъ во вниманіе и верхнюю часть фиг. 2, не вошедшую въ фиг. 4) съ дѣйствительными условіями троганія съ мѣста и разгона при наибольшемъ наполненіи, тогда какъ характеристика по фиг. 1 находится съ дѣйствительностью въ полномъ противорѣчіи, ибо по ней надо трогать съ мѣста при нѣкоторомъ меньшемъ наполненіи и по мѣрѣ разгона поѣзда увеличивать непрерывно наполненіе. Наконецъ, изъ характеристики фиг. 4 видно, что **такъ называемой „критической" точки** (a на фиг. 1) **пересѣченія линій** Za_i и Zk_i **ни внутри контура ни на контурѣ практической тяговой характеристики** (фиг. 4) **вообще нѣтъ, а потому она и не можетъ обладать приписываемыми ей свойствами** — давать наибольшее значеніе „продуктивности паровоза" $Q_a\ V_a$ [10]), причемъ, какъ слѣдствіе,

[10]) Ученіе о „критической скорости" и ея выгодахъ, насколько мнѣ извѣстно, впервые введено проф. Ю. В. Ломоносовымъ въ его ли-

„критическая“ скорость V_a, равная абсиссѣ критической точки a, является для даннаго паровоза наивыгоднѣйшей, а наивыгоднѣйшимъ составомъ поѣзда является Q_a, — т. е. тотъ вѣсъ, который данный паровозъ можетъ тащить на наибольшій подъемъ съ критической скоростью V_a.

На необходимость пользованія кривою Z_{m_i} для наибольшаго практически-осуществимаго наполненія $e^0/_0$, какъ кривою предѣльной силы тяги при рѣшеніи практическихъ вопросовъ авторъ этихъ строкъ уже и раньше настойчиво указывалъ, равно какъ и на несостоятельность ученія о „критической точкѣ“ [11]). Поэтому, по этому вопросу ограничиваемся здѣсь лишь вышеизложенными краткими замѣчаніями.

Въ качествѣ вспомогательныхъ данныхъ, необходимыхъ намъ для рѣшенія поставленной задачи о розысканіи наивыгоднѣйшей скорости и вѣса поѣзда, заимствуемъ изъ паспорта паровоза *Ту* 23 нижеслѣдующіе графики: фиг. 5, на



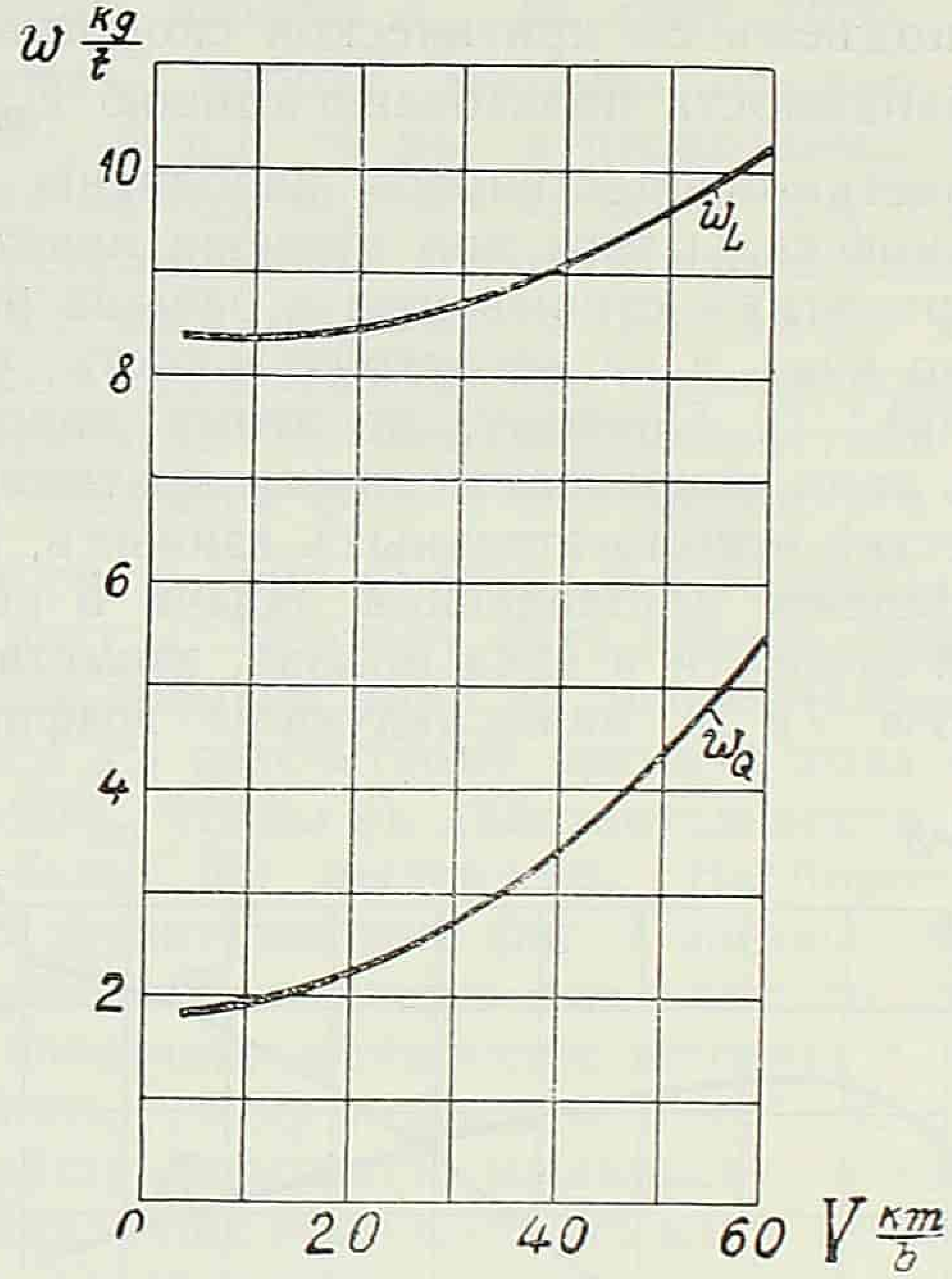
Фиг. 5.

которой даны свѣдѣнія о полезномъ дѣйствіи котла η_k, паропроизводительности поверхности парогрѣва D_1/H и

тографированномъ курсѣ паровозовъ въ Кіевскомъ Политехн. Инст. въ 1903 г. и было воспринято цѣлой группой тяговыхъ спеціалистовъ въ Россіи. Ломоносовъ и до послѣдняго времени остается въ этомъ пріятномъ заблужденіи. См. G. L o m o n o s s o f f. Die Lokomotivversuche in Russland. Berlin 1926, стр. 326—328.

[11]) Prof. V. F a r m a k o v s k i. Opšta teorija lokomotiva. 1927, стр 128—130.

форсированiи колосниковой рѣшетки B_1/R; фиг. 6, на которой читатель находитъ опытныя данныя о сопротивленiи паровоза Ty 23 и товарныхъ вагоновъ польскихъ ж. д. Благо-



Фиг. 6.

даря наличiю этихъ опытныхъ данныхъ авторъ въ дальнѣйшемъ не пользуется никакими эмпирическими формулами, а лишь опытнымъ матерiаломъ проф. А. О. Чечотта.

II. Расчетный участокъ линiи.

Въ качествѣ расчетнаго участка линiи надо, внѣ всякаго сомнѣнiя, принимать такъ называемый „задерживающiй перегонъ", т. е. для однопутной линiи тотъ перегонъ, для котораго сумма временъ хода поѣзда въ обоихъ направленiяхъ является наибольшей, ибо именно онъ ограничиваетъ величину пропускной способности ж.д. линiи, а слѣдовательно и ея доходность. Этотъ перегонъ въ общемъ случаѣ можетъ и не совпадать съ участкомъ наибольшаго подъема, онъ можетъ быть въ частности даже горизонталью, ибо то, что онъ является задерживающимъ, зависитъ не только отъ величины подъема $i^0/_{00}$, но и отъ длины перегона S km. Однако большею частью задерживающiй перегонъ совпадаетъ съ участкомъ наибольшаго подъема линiи $i_{max}\ ^0/_{00}$.

Чтобы выдѣлить задерживающій перегонъ линіи, необходимо и достаточно произвести расчетъ времени хода поѣзда произвольно выбраннаго вѣса съ произвольно выбраннымъ паровозомъ и притомъ расчетъ произвести наиболѣе простымъ способомъ расчета по установившимся скоростямъ движенія. Ибо насъ интересуетъ въ данное время не точное значеніе временъ хода поѣзда, а лишь сравненіе таковыхъ для всѣхъ перегоновъ ж.д. линіи.

Въ дальнѣйшемъ, ради упрощенія вопроса, мы принимаемъ, что задерживающій перегонъ является участкомъ съ постояннымъ общимъ подъемомъ $i^0/_{00}$ (т. е. участкомъ съ постояннымъ сопротивленіемъ).

Выдѣливъ задерживающій перегонъ линіи и рѣшивъ для него задачу нахожденія наивыгоднѣйшей скорости V_1 и наивыгоднѣйшаго вѣса поѣзда Q (для тяжелаго направленія линіи), мы должны еще для случая, когда $i < i_{max}$, провѣрить возможность движенія поѣзда найденнаго наивыгоднѣйшаго вѣса Q на участкѣ съ наибольшимъ подъемомъ i_{max} хотя бы съ минимальной эксплоатаціонно-допустимой скоростью ($10—12$ km/h $= V_{min}$) и, въ случаѣ надобности, должны, принимая во вниманіе сказанное, уменьшить вѣсъ поѣзда до $Q_1 < Q$, чтобы обезпечить движеніе по наиболѣе тяжелому подъему i_{max}.

Наконецъ слѣдуетъ замѣтить, что для упрощенія задачи принимаемъ, что грузооборотъ линіи въ обѣ стороны одинаковъ. Въ этомъ предположеніи задача розысканія наивыгоднѣйшей скорости V_1 и вѣса Q рѣшается далѣе только для движенія поѣзда въ тяжеломъ направленіи.

III. Пропускная способность ж. д. линіи.

Подъ терминомъ „пропускная способность" мы въ дальнѣйшемъ понимаемъ количество тоннъ вѣса вагоновъ (брутто) или количество тоннъ вѣса грузовъ (нетто), перевозимыхъ на задерживающемъ перегонѣ въ сутки въ одномъ направленіи. На основаніи этого опредѣленія брутто-пропускная способность линіи есть Qn, гдѣ Q въ тоннахъ брутто для единичнаго поѣзда, а n — число поѣздовъ въ сутки въ одномъ направленіи (численно равное очевидно числу паръ поѣздовъ на линіи въ сутки).

а) *брутто-пропускная способность линіи.*

Вѣсъ поѣзда Q для данной равномѣрной скорости движенія V_1 на подъемѣ $i^0/_{00}$ опредѣляется по силѣ тяги Z_{m_i} даннаго паровоза при скорости V_1 (причемъ Z_{m_i} беремъ изъ тяговой характеристики фиг. 4) изъ основного уравненія тяги $Z-W=O$, а именно:

$$Q(t)=\frac{Z_{m\cdot(e,\,V_1)}}{w_Q+i}-L\frac{w_L+i}{w_Q+i},$$

гдѣ обозначено:

w_Q (kg/t) — удѣльное сопротивленіе вагоновъ на горизонтали при скорости V_1

w_L (kg/t) — то-же паровоза съ тендеромъ

$L\,(t)$ — вѣсъ паровоза съ тендеромъ (въ служебномъ состояніи).

Число поѣздовъ въ сутки n для случая, когда мы время хода поѣзда опредѣляемъ по равномѣрнымъ скоростямъ движенія, не принимая во вниманіе потерь времени при разгонѣ, замедленіи и на служебныя станціонныя операціи („сношенія станцій“) по пріемкѣ и отправкѣ поѣздовъ, получается для однопутной линіи изъ равенства (это предположеніе равносильно прохожденію поѣзда всего участка проходомъ, безъ остановокъ на станціяхъ):

$$n=n_1=\frac{24}{t_1+t_2}=\frac{24S}{S(t_1+t_2)}=\frac{24^{S}/_{t_1}}{S(1+{t_2}/_{t_1})}=\frac{24V_1}{S(1+{t_2}/_{t_1})}\;.\;.\;.\;.\qquad(1)$$

гдѣ t_1 (часовъ) — время хода въ тяжеломъ направленіи

t_2 „ „ „ „ легкомъ направленіи

V_1 km/h — равномѣрная скорость для тяжелаго направленія

S km — длина задерживающаго перегона

$n=n_1\;\frac{\text{поѣздовъ}}{\text{сутки}}$ — число поѣздовъ въ сутки въ одномъ направленіи для однопутной линіи.

Для дорогъ двухколейныхъ соотвѣтственно имѣемъ

$$n=n_2=\frac{24}{t_1}=\frac{24S}{St_1}=\frac{24^{S}/_{t_1}}{S}=\frac{24V_1}{S}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(1\text{ a})$$

гдѣ $n_2=n$ — число поѣздовъ въ сутки въ тяжеломъ направ леніи.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ рѣшать интересующій насъ вопросъ лишь въ отношеніи однопутныхъ линій.

На основаніи вышеизложеннаго брутто - пропускная способность „идеальнаго“ участка (т. е. такого участка, гдѣ нѣтъ потерь времени) равна

$$Qn=\frac{24}{S(1+{t_2}/_{t_1})}\,QV_1=\beta QV_1\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(2)$$

Уже уравненіе (2) ясно показываетъ, что наибольшую пропускную способность идеальнаго участка мы получаемъ совсѣмъ не для той скорости V_1, для которй получается наибольшая „часовая продуктивность" QV_1 (какъ это принимаютъ послѣдователи Ю. В. Ломоносова), а для той, когда максимума достигаетъ цѣлое выраженіе βQV_1, причемъ коэффиціентъ β зависитъ отъ нѣсколькихъ параметровъ и, какъ не трудно убѣдиться, сильно убываетъ съ возрастаніемъ скорости.

Для численнаго примѣра беремъ участокъ длиною $S=10$ km и пользуемся для вычисленія Q тяговой характеристикой паравоза $Ty23$ (фиг. 4). Скорость движенія въ легкомъ направленіи V_2 считаемъ независимой отъ V_1 и постоянной для даннаго $i^0/_{00}$, ибо на практикѣ V_2 назначется въ зависимости отъ числа тормозовъ. Принимаемъ для дальнѣйшаго $i=10^0/_{00}$ и $V_2=30$ km/h. Для этихъ данныхъ значенія коэффиціента β приведены ниже въ таблицѣ I

Таблица I

Скорость V_1km/h	10	15	20	30	40
$\beta=$	1,80	1,60	1,40	1,20	1,03

Въ уравненіе (2) должна быть далѣе введена поправка въ видѣ особаго коеффиціента α, который учитывалъ бы потери времени при разгонѣ, замедленіи и отъ служебныхъ операцій (сношенія станцій), которыя уменьшаютъ суточное количество поѣздовъ отъ n_1 до αn_1, причемъ

$$\alpha n_1 = \frac{t_1 + t_2}{t_1 + t_2 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2\tau_3} n_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ обозначены:

$\tau_1 = t_1' - t_2''$ (час) потеря времени при разгонѣ

$\tau_2 = t_1' - t_2'$, (час) „ „ „ замедленіи

τ_3 (час) „ „ на служебныя операціи (сношеніе станцій)

t_1' (час) . . дѣйствительное время хода поѣзда въ тяжеломъ направленіи за время разгона поѣзда до скорости V_1.

t_1''(час) . . время хода поѣзда за время разгона поѣзда до скорости V_1, вычисленное по этой самой скорости V_1

$\left.\begin{matrix} t_1' \text{ и} \\ t_2'' \end{matrix}\right\}$ соотвѣтственно при замедленіи поѣзда отъ скорости V_1 до полной остановки.

Потери времени τ_1 и τ_2 для бóльшихъ скоростей V_1 будутъ естественно больше, чѣмъ для малыхъ скоростей V_1, но мы ради надежности и упрощенія считаемъ ихъ независящими отъ скорости V_1 и постоянными. Потери времени τ_3 въ главномъ зависятъ отъ принятой на линіи системы сношеній станцій, сигнализаціи, опытности и расторопности персонала и т. д. и могутъ быть довольно значительны. Во всякомъ случаѣ мы ихъ принимаемъ независимыми отъ скорости V_1.

Для нашего численнаго примѣра оцѣниваемъ всю сумму потерь времени $\Sigma\tau = 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2\tau_3 = 0{,}37$ часа. Оставляя прежнія значенія для временъ хода t_1 и t_2 получаемъ значенія коэффиціента α согласно нижеслѣдующей таблицы II, изъ которой видно, что и коэффиціентъ α значительно убываетъ съ возрастаніемъ скорости V_1.

Таблица II

Скорость $V_1 =$	10	15	20	30	40
$\alpha =$	0,8	0,73	0,69	0,64	0,61

Таблица III.

Наполненіе цилиндровъ e %	Скорость $V_1 \frac{km}{h}$	10	15	20	30	40
60% или 0,6	сила тяги: $Z_{V_1} =$ продуктивн. $QV_1 =$ проп. способ.: $\alpha\beta QV_1 =$	24000 18700 27000	22600 24500 28300	21200 30200 29800	18700 40700 31300	Не было осуществлено при испытаніи паровоза
50% или 0,5	(kg) Z_{V_1} (t km/h) QV_1 (t/сутки) $\alpha\beta QV_1$	21500 16400 23600	20100 21400 25000	19100 25600 25300	16800 33200 25600	14700 33300 20800
40% или 0,4	Z_{V_1} QV_1 $\alpha\beta QV_1$	18000 12700 18300	17000 17500 20400	16000 21500 21300	13600 24000 18400	11700 25000 15700
30% или 0,3	Z_{V_1} QV_1 $\alpha\beta QV_1$	14000 9400 13600	13000 12500 14650	12000 15000 14850	10100 17900 13900	8700 18000 11350
Примѣчанія		1) Вычисленія сдѣланы логарифм. линейкой. 2) Данныя справо отъ жирной черты лежатъ за предѣлами предѣльной силы тяги по характер. фиг. 4 при $B_{1max}/R = 520$.				

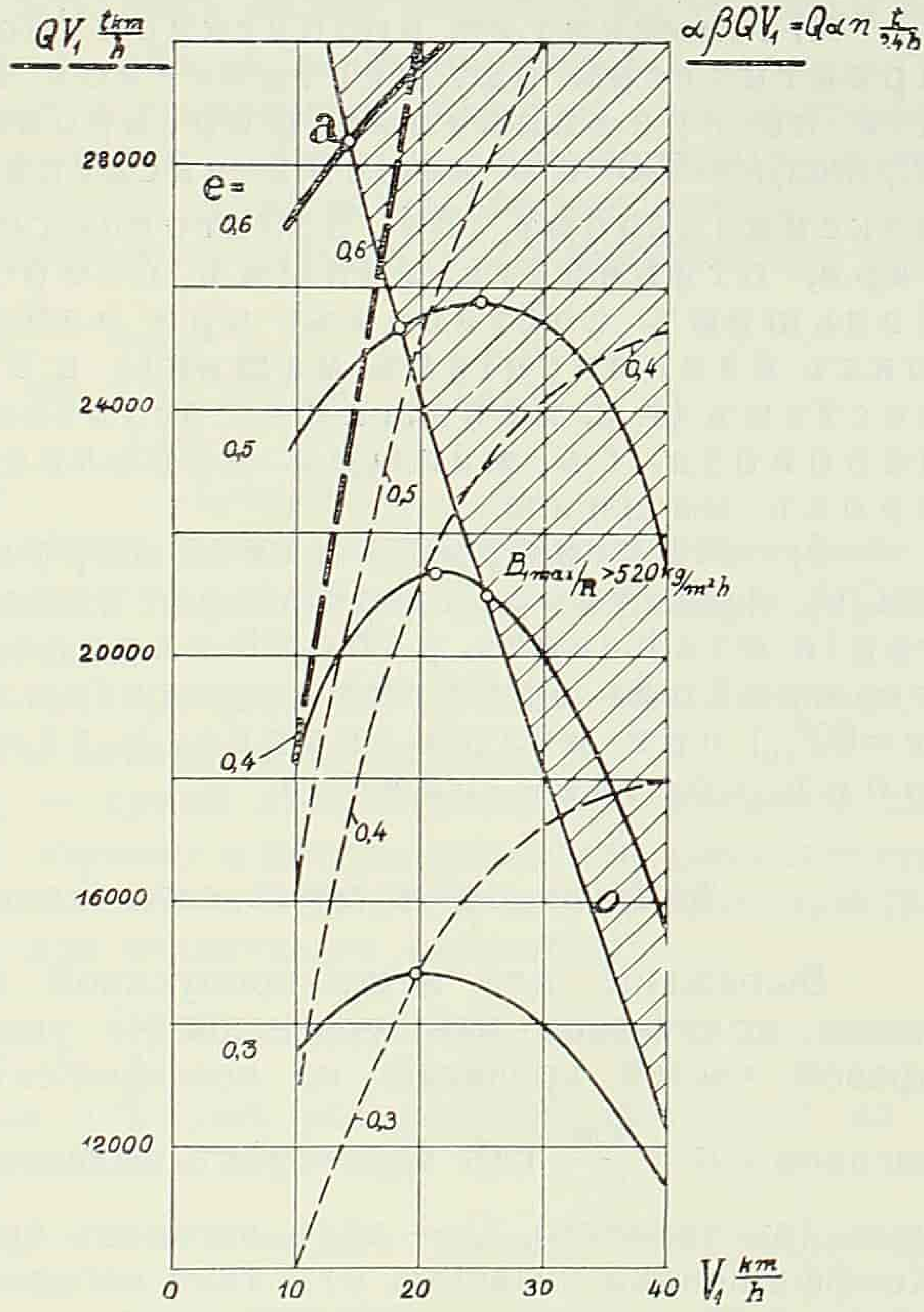
Принимая во вниманіе поправку по формулѣ (3) получаемъ значеніе **дѣйствительной максимальной брутто-пропускной способности линіи**

$$Qn = \alpha\beta QV_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

Уравненіе (4) пригодно для вычисленія Qn для случая максимальнаго параллельнаго (воинскаго) графика движенія, т. е. для случая, когда всѣ безъ исключенія поѣзда идутъ съ одинаковыми скоростями.

При нахожденіи максимума выраженія (4) [и далѣе] мы пользуемся не математическимъ, а ариѳметическо-графическимъ методомъ ввиду того, что α, β и Q являются сложными функціями отъ V_1, причемъ для Q функція эта еще и прерывная и чрезвычайно сложная, такъ что математическій методъ нахожденія максимума оказывается непродуктивнымъ.

Результаты ариѳметическаго изслѣдованія величины Qn для нашего численнаго примѣра сведены въ табл. III (на стр. 94) и представлены графически на фиг. 7.



Фиг. 7.

Изъ разсмотрѣнія результатовъ талб. III, относящейся къ нашему численному примѣру, можно, однако, извлечь нижеслѣдующіе выводы, имѣющіе общее значеніе:

1) **Для работы паровоза при любой степени наполненія цилиндровъ машины максимумъ выраженія $\alpha\beta QV_1$ — дѣйствительной пропускной способности линіи — наступаетъ при меньшей**

скорости движенія V_1, чѣмъ максимумъ часовой продуктивности паровоза QV_1.

2) Возрастаніе выраженія $\alpha\beta QV_1$ при повышеніи скорости V_1 происходитъ значительно медленнѣе чѣмъ возрастаніе величины QV_1.

3) Послѣ прохожденія максимума величина пропускной способности $\alpha\beta QV_1$ начинаетъ падать довольно быстро.

4) Максимумъ пропускной способности $\alpha\beta QV_1$, практически осуществляемой въ эксплоатаціи по предѣльному форсированію рѣшетки ($B_i\, max/R=520$ въ нашемъ численномъ примѣрѣ), максимальному по работоспособности кочегара, отвѣчаетъ малымъ скоростямъ (т. е. и большимъ составамъ) при работѣ при большихъ наполненіяхъ машины и бо̀льшимъ скоростямъ (т. е. меньшимъ составамъ) при работѣ паровоза съ малыми наполненіями цилиндровъ машины.

5) Максимумъ максиморумъ величины $\alpha\beta QV_1$, практически осуществимый въ эксплоатаціи, отвѣчаетъ работѣ паровоза съ длительно-наибольшимъ наполненіемъ цилиндровъ ($e=60\%$) при малой скорости движенія и большомъ составѣ поѣзда.

b) Нетто-пропускная способность линіи.

Выраженіе для нетто-пропускной способности линіи легко получается изъ уравненія (4) умноженіемъ лѣвой и правой частей уравненія на коэффиціентъ полногрузности вагоновъ $a=\frac{Q_m}{Q}$, гдѣ Q_m — вѣсъ полезнаго груза въ вагонахъ (въ тоннахъ), Q — вѣсъ вагоновъ брутто (въ тоннахъ). Коэффиціентъ a зависитъ отъ типа вагоновъ и рода грузовъ и колеблется въ практикѣ въ широкихъ предѣлахъ отъ 0 для порожнихъ вагоновъ до $\backsim 0,7$ для массовыхъ тяжелыхъ грузовъ (уголь, руда, камень, жито, рельсы и пр.). Такъ какъ мы ищемъ максимальныя величины для пропускной способности, съ одной стороны, и такъ какъ отъ величины a положеніе максимума интересующаго насъ выраженія не мѣняется, съ другой стороны, то мы для численнаго примѣра усваиваемъ значеніе $a=0,7$.

Итакъ, выраженіе для нетто пропускной способности линіи при выполненіи максимальнаго параллельнаго графика движенія будетъ

$$aQn=Q_m n=\alpha\beta a QV_1 \ldots \quad (5)$$

Максимумъ этого выраженія получается при той же скорости V_1, что и выраженія (4), а потому общія заключенія 1—5 въ концѣ предыдущаго отдѣла справедливы и по отношенію къ нетто пропускной способности $\alpha\beta a Q V_1$.

с) Поправка въ уравненіяхъ (4) и (5) для случая выполненія нормальнаго коммерческаго графика движенія.

Въ нормальномъ комерческомъ графикѣ движенія число паръ товарныхъ поѣздовъ малой скорости n_m въ сутки всегда меньше чѣмъ n, ибо на линіи обращаются, помимо товарныхъ м. с., еще и ускоренные товарные, пассажирскіе и скорые поѣзда, которые отнимаютъ время отъ товарнаго движенія малой скорости. Дѣйствительное максимальное число товарныхъ поѣздовъ малой скорости n_m опредѣляется выраженіемъ

$$n_m \leq \frac{24 - \sum\limits_{i=0}^{i=n_c} (t_{1c} + t_{2c} + \Sigma\tau_c)_i}{t_1 + t_2 + \Sigma\tau}, \ldots \quad (6)$$

причемъ n_m есть всегда цѣлое число, ближайшее меньшее къ значенію правой части неравенства. Въ выраженіи (6) обозначены дополнительно:

n_c — число паръ ускоренныхъ товарныхъ, пассажирскихъ и скорыхъ поѣздовъ въ сутки,

$t_{1c} + t_{2c} + \Sigma\tau_c$ (час.) — сумма дѣйствительныхъ временъ хода туда и обратно и потерь времени на сношеніе станцій для одного поѣзда ускоренныхъ категорій (различная для различныхъ категорій),

$\sum\limits_{i=0}^{i=n_c} (t_{1c} + t_{2c} + \Sigma\tau_c)_i$ — общее время, отнимаемое въ сутки на движеніе поѣздовъ ускоренныхъ категорій на задерживающемъ перегонѣ.

Отношеніе $\frac{n_m}{n} = \gamma \ldots$ (7) можно назвать коэффиціентомъ выполненія максимальнаго товарнаго графика при идеальномъ коммерческомъ графикѣ движенія.

Принявъ во вниманіе поправку по выраженію (6) окончательно получаемъ: б р у т т о - п р о п у с к н а я с п о с о б н о с т ь линіи есть

$$Q n_m = \alpha\beta\gamma Q V_1 \ldots \quad (8) \text{ или } (4^a)$$

и н е т т о-п р о п у с к н а я с п о с о б н о с т ь л и н і и есть

$$Q_m n_m = a\alpha\beta\gamma Q V_1 = \alpha\beta\gamma Q_m V_1 \ldots \quad (9) \text{ или } (5^a)$$

Изслѣдованіе показываетъ, что величина коэффиціента выполненія графика γ зависитъ отъ скорости V_1 и именно γ фактически нѣсколько уменьшается съ увеличеніемъ V_1. Полагая, напр., $t_{1c}+t_{2c}+\Sigma\tau_c=0{,}527$ часа (для нашего участка длиною $S=10\,km$) и $n_c=4$, находимъ, что для $V_1=10\,km/h$ $\gamma=0{,}93$, а для $V_1=30\,km/h$ $\gamma=0{,}91$.

При большомъ числѣ n_c и большихъ значеніяхъ времени $t_{1c}+t_{2c}+\Sigma\tau_c$ (поѣзда пассажирскіе, товаро пассажирскіе и ускоренные товарные) вліяніе коэффиціента γ можетъ быть весьма значительнымъ въ смыслѣ уменьшенія пропускной способности линіи.

При вычисленіи коэффиціента γ мы не принимаемъ въ расчетъ его уменьшеніе отъ причинъ случайнаго характера, напр. таковое отъ замѣшательствъ въ движеніи, которое бываетъ часто на ж. д. и хронично и подчасъ весьма значительно по потерямъ времени.

IV. Себѣ-стоимость транспорта, наивыгоднѣйшая скорость V_1 и наивыгоднѣйшій вѣсъ поѣзда Q.

Характеристикою себѣ стоимости перевозки на данномъ участкѣ является отношеніе суммы расходовъ транспорта C дин./сутки къ соотвѣтствующей суточной нетто пропускной способности линіи, т. е. отношеніе

$$c\,\frac{\text{дин}}{\text{t}}=\frac{C\ \text{дин./сутки}}{a\alpha\beta\gamma Q V_1\ t/\text{сутки}}\quad\ldots\quad(10)$$

Величину суммы расходовъ транспорта C мы можемъ расчленить на три части и считать $C=C_1+C_2+C_3$, гдѣ:

C_1 дин./сутки — суточные расходы транспорта, за время движенія поѣздовъ съ установившейся скоростью V_1, т. е. при постоянномъ форсированіи рѣшетки.

C_2 дин./сутки — суточные расходы транспорта, относящіеся къ времени потери при разгонѣ поѣздовъ, когда форсированіе рѣшетки перемѣнно.

C_3 дин./сутки — суточные расходы транспорта, относящіеся къ времени, когда на паровозѣ закрытъ регуляторъ (замедленіе и простой на станціяхъ за время сношенія станцій), когда форсированіе рѣшетки постоянно и притомъ минимально (принимаемъ $B_{0_1}/R=60\ kg/m^2h$).

Величины C_1, C_2 и C_3 согласно нашему предложенію могутъ быть получены изъ соотвѣтствующихъ расходовъ на топливо путемъ дѣленія ихъ на переходной коэффиціентъ ε_i, представляющій отношеніе расходовъ на топливо къ суммѣ расходовъ транспорта. Выясненію закона измѣненія коэффиціента ε въ зависимости отъ форсированія колосниковой рѣшетки паровоза, т. е. $\varepsilon=f(B_1/R)$, посвящена нами спеціально глава V настоящей статьи, здѣсь же мы считаемъ, что для любого форсированія рѣшетки мы имѣемъ соотвѣтственное численное значеніе ε. Тогда мы опредѣляемъ интересующія насъ величины C_1, C_2 и C_3 изъ уравненій (11), (12) и (13), а именно:

$$C_1 = n_m \cdot t_1 B_1 k / \varepsilon_1 = \frac{\alpha\beta\gamma S B_1 V_1 k}{\varepsilon_1} = \frac{\alpha\beta\gamma V_1 t_1 B_1 k}{\varepsilon_1} \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

гдѣ обозначены:

t_1 (час.) время хода, вычисленное по устан. скор. V_1.

$\alpha\beta\gamma V_1 = n_m \left(\frac{\text{поѣздъ}}{\text{сутки}}\right)$ число товарныхъ поѣздовъ въ сутки (малой скорости) въ одномъ направленіи.

$B_1 \left(\frac{t}{\text{поѣздъ} \times \text{час.}}\right)$ — расходъ топлива при скорости V_1 при данномъ наполненіи $e^0/_0$.

$S\,(km)$ — длина участка.

$B_l = \frac{B_1}{V_1}$ (t/km) — расходъ топлива на 1 поѣздъ $\times$ километръ при скорости V_1 и при данномъ наполненіи $e^0/_0$.

k дин./t — стоимость топлива.

ε_1 — переходной коэффиціентъ, равный отношенію расходовъ на топливо къ суммѣ расходовъ транспорта; здѣсь должно быть взято то его численное значеніе, которое отвѣчаетъ постоянному форсированію рѣшетки паровоза B_1/R, имѣющему мѣсто при скорости V_1 и данномъ наполненіи цилиндровъ $e^0/_0$. О выборѣ этихъ численныхъ значеній см. главу V наст. работы.

$$C_2 = \frac{n_m \tau_1 B_{\tau_1} k}{\varepsilon_1'} = \frac{\alpha\beta\gamma V_1 \tau_1 B_{\tau_1} k}{\varepsilon_1'} \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Здѣсь добавочно обозначены:

$B_{\tau_1} \left(\frac{t}{\text{поѣздъ} \times \text{часъ}}\right)$ — часовой расходъ топлива при средней скорости разгона, равной $V_1/2$.

τ_1 (час.) — потеря времени при разгонѣ.

$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2}$ — среднее значеніе переходного коэффиціента ε для періода разгона, когда форсированіе рѣшетки перемѣнно и увеличивается отъ значенія B_{01}/R при закрытомъ регуляторѣ до B_1/R, которое соотвѣтствуетъ скорости V_1 при данномъ наполненіи $e^0/_0$.

Наконецъ

$$C_3 = \frac{n_m(\tau_2 + \tau_3) B_{01} k}{\varepsilon_0} = \frac{\alpha\beta\gamma V_1 (\tau_2 + \tau_3) B_{01} k}{\varepsilon_0} \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

гдѣ введены еще обозначенія:

$B_{01}\left(\frac{t}{\text{поѣздъ}\times\text{часъ}}\right)$ — часовой расходъ топлива при закрытомъ регуляторѣ (принятый въ численномъ примѣрѣ 60 kg/m^2h), т. е. за время замедленія и за время стоянки на станціи во время сношенія станцій.

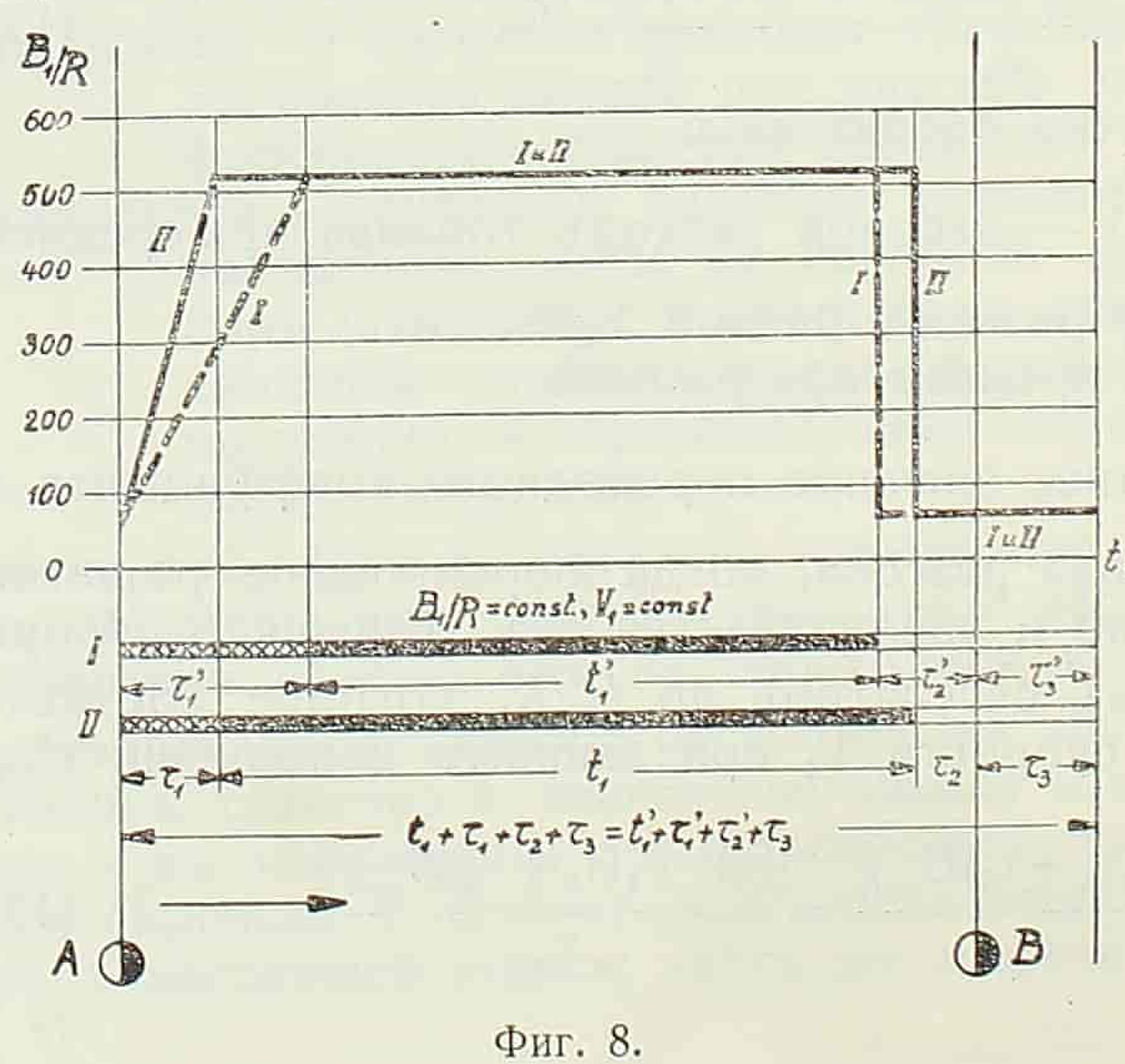
ε_0 — значеніе переходного коэффиціента при закрытомъ регуляторѣ, то есть при форсированіи рѣшетки B_{01}/R.

Подставляя значенія C_1, C_2 и C_3 изъ уравненій (11), (12) и (13) въ уравненіе (10), получаемъ характеристику себѣстоимости транспорта въ видѣ

$$c\ \text{дин}/t = k \cdot \frac{\frac{t_1 B_1}{\varepsilon_1} + \frac{\tau_1 B_{\tau_1}}{\varepsilon_1'} + \frac{(\tau_2+\tau_3) B_{01}}{\varepsilon_0}}{aQ} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Выраженіе (14) является мѣриломъ для сравненія различныхъ режимовъ работы паровоза при выборѣ наивыгоднѣйшей скорости V_1 и наивыгоднѣйшаго вѣса поѣзда Q. Тотъ режимъ является наивыгоднѣйшимъ, для котораго характеристика себѣстоимости транспорта c является наименьшей. Для случая, когда нѣсколько режимовъ оказываются равноцѣнными въ смыслѣ себѣстоимости транспорта c, очевидно слѣдуетъ отдать предпочтеніе тому изъ нихъ, для котораго нетто пропускная способность $a\alpha\beta\gamma QV_1$ оказывается наибольшей.

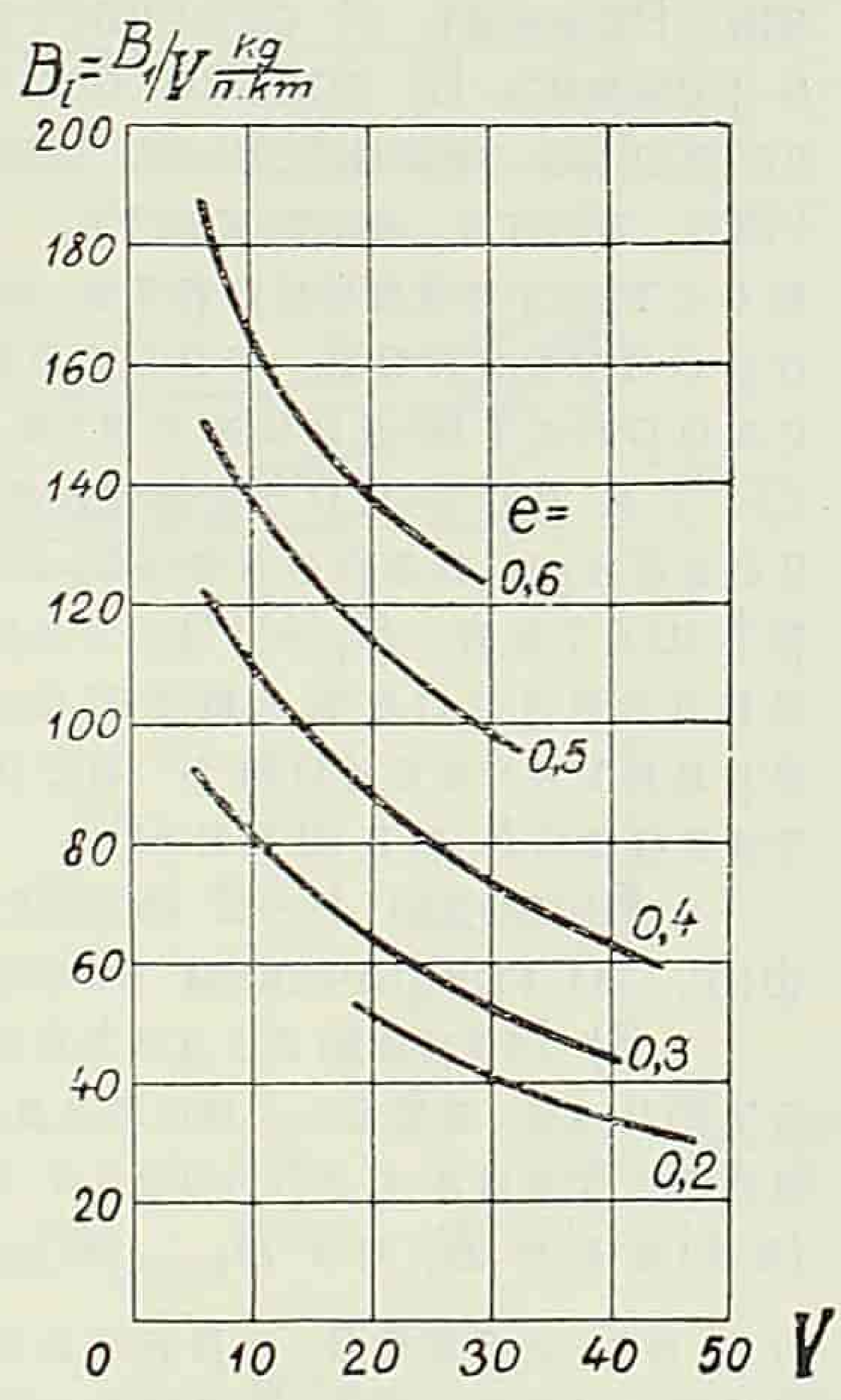
При выводѣ уравненій (11) до (14) мы нѣсколько переоцѣниваемъ величину времени t_1 и преуменьшаемъ дѣйствительное время разгона и замедленія. Сравненіе измѣненія форсированія колосниковой рѣшетки B_1/R для дѣйствительнаго случая и для того какъ мы этотъ законъ приняли ради упрощенія при выводѣ вышеуказанныхъ уравненій данъ наглядно на фигурѣ 8. Изъ нея видно, что мы



Фиг. 8.

переоцѣниваемъ нѣсколько расходъ топлива по сравненію съ дѣйствительностью, но принятый нами законъ II вполнѣ аналогиченъ закону I и потому, хотя абсолютная величина C у насъ получается нѣсколько (на 2—5$^0/_0$) больше дѣйствительной, соотношеніе величинъ c при сравненіи различныхъ режимовъ работы остается то-же, что въ дѣйствительности и сравненію не мѣшаетъ.

Для возможности вычисленій c для нашего численнаго примѣра на фиг. 9 даны кривыя, полученныя опытомъ, для паровоза $Ту23$, дающія расходы топлива B_l въ kg на 1 поѣздо-километръ при различныхъ наполненіяхъ $e^0/_0$ отъ 20 до 60$^0/_0$ ($e=0{,}2$ до 0,6). Изъ величинъ B_l легко получаются нужные намъ часовые расходы топлива $B_i = B_{l_i} \times V_i$ при различныхъ скоростяхъ движенія. Данныя для выбора величины ε содержитъ фиг. 10, о которой см. спеціально въ главѣ V настоящей работы. Результаты подсчетовъ характеристики себѣстоимости транспорта c для нашего численнаго примѣра сведены въ таблицѣ IV. Изъ разсмотрѣнія результатовъ этой таблицы можно вывести слѣдующія заключенія общаго характера (ибо и для всякаго другого типа паровоза соотношенія между величинами приблизительно сохраняются, измѣнятся лишь цифровыя значенія отдѣльныхъ величинъ).



Фиг. 9.

1) Если разсматривать движеніе поѣздовъ при постоянной скорости $V_1 = const$, т. е. при разныхъ наполненіяхъ цилиндровъ машины $e^0/_0$, то оказывается, что себѣ-стоимость транспорта тѣмъ меньше, чѣмъ полнѣе использованъ паровозъ, какъ тяговая машина, т. е. съ чѣмъ большимъ наполненіемъ работаетъ машина. Поэтому на задерживающемъ перегонѣ, совпадающемъ съ максимальнымъ подъемомъ линіи, слѣдуетъ ѣхать съ практически наибольшимъ наполненіемъ (около 60$^0/_0$ для пар. $Ту23$).

2) Сравнивая примѣненіе различныхъ скоростей V_1 видимъ, что для паровоза $Ту23$ наивыгоднѣйшій режимъ отвѣчаетъ при $e=0{,}6$ скорости около $V_1 = 30$ km/h. Однако этотъ

режимъ лежитъ далеко за предѣломъ, ограничивающимъ силу тяги паровоза по максимальной длительной практической работоспособности кочегара ($B_1/R = 520$ kg/m²h). Если откинуть изъ разсмотрѣнія всѣ режимы работы при которыхъ $B_1/R > 520$, то оказывается, что два режима даютъ одинаковую характеристику себѣ-стоимости транспорта, а именно: a) $V_1 = 15$ km/h прн $e = 0{,}6$ и b) $V_1 = 20$ km/h при $e = 0{,}5$. Въ этомъ случаѣ очевидно, слѣдуетъ предпочесть тотъ режимъ, который даетъ бо́льшую нетто пропускную способность линіи. Режимъ a) отвѣчаетъ величинѣ $a\alpha\beta\gamma QV_1 = 17500$ t/сутки, а режимъ b) только $a\alpha\beta\gamma QV_1 = 16300$ t/сутки, первый слѣдовательно значительно благопріятнѣе въ смыслѣ доходности. Изъ этого вытекаетъ, что наименьшую себѣстоимость транспорта при наибольшей возможной пропускной способности линіи даютъ малыя скорости движенія V_1 при тяжелыхъ поѣздахъ Q[12]) и при предѣльномъ практическомъ использованіи паровоза, какъ въ смыслѣ форсированія рѣшетки B_1/R[13]), такъ и въ смыслѣ наполненія цилиндровъ машины (т. е. при предѣльномъ практическомъ использованіи паровоза, какъ тяговой машины).

Выводы 1—2 особенно ясно вытекаютъ изъ діаграммы фиг. 10 графически воспроизводящей таблицу IV.

3) Наивыгоднѣйшая скорость V_1 и соотвѣтствующій вѣсъ поѣзда Q индивидуальны для каждаго типа паровоза и для каждаго сорта топлива (вліяніе B_i на $B_{1\max}/R$) и его стоимости. Скорость V_1 ни въ какой причинной связи съ „критической скоростью“ Ломоносова не находится.

4) Для случая, если подъемъ $i^0/_{00}$ на задерживающемъ перегонѣ является въ то-же время и максимальнымъ для всего тягового участка, то задача, какъ она изложена выше, уже до конца рѣшена.

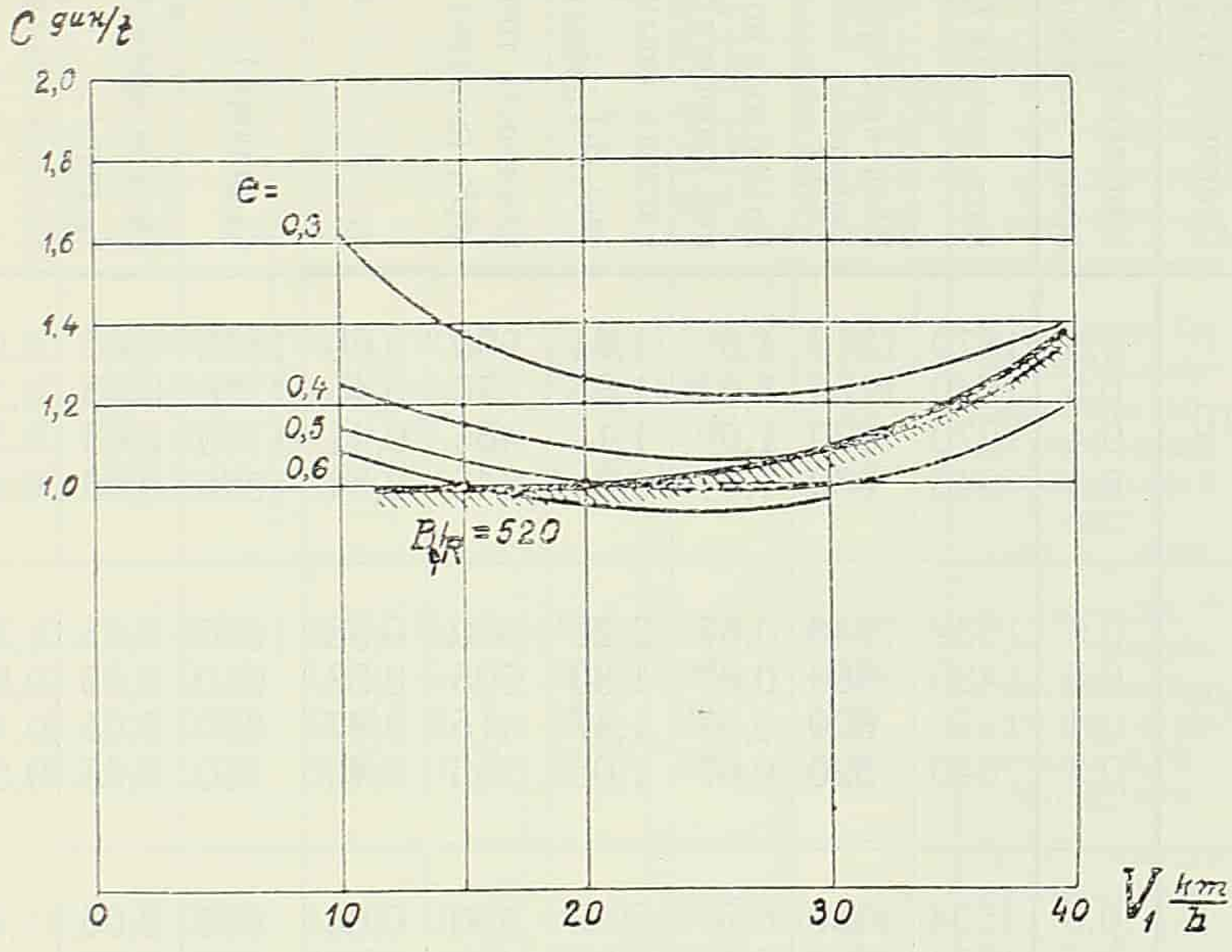
Въ случаѣ, если наибольшій подъемъ на тяговомъ участкѣ $i_{\max} > i$ для задерживающаго перегона, то, опредѣливъ сначала, какъ указано выше, наивыгоднѣйшую скорость V_1 и вѣсъ поѣзда Q для подъема $i^0/_{00}$ (т. е. для задерживающаго перегона), слѣдуетъ затѣмъ провѣрить возможность движенія поѣзда полученнаго вѣса Q на наибольшемъ подъемѣ ли-

---

12) Это заключеніе вполнѣ совпадаетъ по существу съ выводами проф. К. Р. Савича: „Инженеръ“ 1931, № 4/5, которые получены при совершенно иномъ методѣ рѣшенія той же задачи.

13) Это положеніе вполнѣ подтверждаетъ выводъ автора, сдѣланный ранѣе, исходя изъ иныхъ соображеній, см. W. Farmakowsky. Die betriebswirtschaftlichste Arbeitslage Lokomotivkessels. Glasers Annalen 1930, № 1281, стр. 115.

нiи i_{max} со скоростью V_1', хотя и меньшей V_1, но которая все-же была бы больше напередъ заданной наименьшей скорости движенiя, допустимой изъ чисто эксплоатацiонныхъ соображенiй (обычно $V_1'{}_{min} \geq 10-12$ km/h), причемъ какъ и раньше мы можемъ использовать силу тяги при наибольшемъ практически осуществимомъ наполненiи ($e=0{,}6$). Если



Фиг. 10.

бы при этой провѣркѣ оказалось, что $V_1' \leq V_1'{}_{min}$ то было бы необходимо отступить отъ наивыгоднѣйшаго вѣса поѣзда Q въ смыслѣ его уменьшенiя до предѣла, отвѣчающаго $V_1' = V_1'{}_{min}$ на наибольшемъ подъемѣ $i_{max}{}^0/_{00}$. Но тогда, очевидно, на задерживающемъ перегонѣ, т. е. на подъемѣ $i^0/_{00}$, пришлось бы или, сохраняя наполненiе $e=0{,}6$, допустить бо́льшую скорость движенiя, чѣмъ наивыгоднѣйшая V_1, или, сохраняя V_1, ѣхать съ уменьшеннымъ наполненiемъ. И то и другое соотвѣтствовало бы повышенiю себѣстоимости транспорта, т. е. нѣкоторому отклоненiю отъ режима наивыгоднѣйшей работы. Отсюда недалеко до вывода, что съ точки зрѣнiя величины себѣстоимости транспорта выгоднѣе, чтобы задерживающiй перегонъ совпадалъ съ наибольшимъ подъемомъ i_{max} для всего тягового участка, что обычно и имѣетъ мѣсто на ж.д. линiяхъ.

5) Для углей высокой калорической способности B_1 мень-

Т а б

Скорость $V_1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	Наполненіе цилиндровъ машины e	Вчсъ поѣзда Q (t)	Вѣсъ пол. груза aQ (t)	Время хода по установ. скорости t_1 (час.)	Расходъ топлива въ часъ $B_1 \left(\frac{t}{\text{поѣздъ-часъ}}\right)$	Стоимость топлива kt_1B_1 (динаръ)	ε_1	C_1 (динаръ)	Потеря времени τ_1 (час.)	Расходъ топлива $B\tau_1 \left(\frac{t}{\text{п. т.}}\right)$	Стоимость $k\tau_1 B\tau_1$ (динаръ)
10	0,6	1870	1310	1,0	1,64	690	0,50	1375	0,05	0,95	20,0
	0,5	1640	1150	1,0	1,35	570	0,45	1270	0,05	0,70	14,7
	0,4	1270	890	1,0	1,1	465	0,41	1140	0,05	0,58	12,2
	0,3	940	660	1,0	0,8	346	0,34	1020	0,05	0,43	9,0
15	0,6	1632	1140	0,67	2,20	620	0,58	1070	0,05	1,27	26,5
	0,5	1430	1000	0,67	1,80	505	0,53	950	0,05	0,93	19,5
	0,4	1170	820	0,67	1,47	415	0,47	890	0,05	0,765	16,0
	0,3	840	590	0,67	1,05	295	0,40	740	0,05	0,555	11,5
20	0,6	1504	1050	0,5	2,82	590	0,64	925	0,05	1,64	34,5
	0,5	1274	890	0,5	2,20	460	0,58	800	0,05	1,13	24,0
	0,4	1074	750	0,5	1,76	370	0,52	710	0,05	0,91	19,0
	0,3	740	520	0,5	1,24	260	0,44	590	0,05	0,65	13,5
30	0,6	1360	950	0,333	3,75	520	0,71	730	0,05	2,20	46,0
	0,5	1060	750	0,333	3,10	435	0,65	670	0,05	1,58	33,0
	0,4	800	560	0,333	2,13	300	0,57	525	0,05	1,095	23,0
	0,3	598	420	0,333	1,57	220	0,50	440	0,05	0,815	17,0
40	0,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,5	830	580	0,25	3,36	350	0,68	515	0,05	1,71	36,0
	0,4	625	440	0,25	2,62	278	0,62	450	0,05	1,34	28,0
	0,3	450	315	0,25	1,76	185	0,52	355	0,05	0,91	19,0

лица IV.

ε'_1	C_2 (динаръ)	Потеря времени $\tau_2+\tau_3$ (час.)	Расходъ топлива при закр. рег. $Bo_1\left(\frac{t}{\text{п. ч.}}\right)$	Стоимость топлива $k(\tau_2+\tau_3)\Sigma o_1$ (динаръ)	ε_0	C_3 (динаръ)	Расходы транспорта $C=C_1+C_2+C_3$ (дин.)	Характеристика себѣстоимости транспорта $c=\frac{C_1+C_2+C_3}{aQ}\left(\frac{\text{дин.}}{t}\right)$
0,37	54	0,133	0.06	3,36	0,15	22,5	1451,5	1,11
0,3	49	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	1341,5	1,16
0,25	43,5	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	1206	1,25
0,245	36,5	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	1079	1,65
0,43	61,5	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	1154	**1,0***
0,34	57,5	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	1030	1,08
0,31	62	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	964,5	1,17
0 275	42	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	804,5	1,36
0,49	70	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	1027,5	[0,985]
0.36	67,5	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	890	**1,0***
0,335	57	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	789,5	1,05
0,295	46	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	638,5	1,23
0,43	107	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	849,5	[0,90]
0,40	82	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	774,5	[1,03]
0,36	64	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	611,5	1,10
0,325	52	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	514,5	1,22
—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,42	86	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	623,5	[1,07]
0,385	73	0,133	0,06	3,36	0,15	22,5	545,5	[1,24]
0,335	57	0,132	0,06	3,36	0,15	22,5	434,5	[1,38]

Примѣчаніе

[1]) Значенія [c] требуютъ форсированія рѣшетки больше практическаго макс. (520 kg/m²h)

[2]) Значенія * суть наивыгоднѣйшія при практич. ограниченіи $B_1/R=$ 520 kg/m²h

[3]) Стоимость топлива принята $k=420\ \frac{\text{дин.}}{\text{t}}$

[4]) Принято: $\tau_1=0{,}05=cons$ $\tau_2+\tau_3=0{,}133=cons$ независимо отъ скорости V_1.

[5]) Таблица считана помощью логарифмической линейки.

ше и Z_{R_i} больше. Поэтому наивыгоднѣйшая скорость нѣсколько больше чѣмъ для слабыхъ топливъ.

V. О переходномъ коэффиціентѣ $\varepsilon = f(B_1/R)$.

Рѣшеніе нашей задачи (по предложенному авторомъ способу) о розысканіи наивыгоднѣйшей скорости и наивыгоднѣйшаго вѣса товарныхъ поѣздовъ, изложенное въ главѣ IV невозможно, если мы не умѣемъ опредѣлить точныхъ значеній переходного коэффиціента ε для соотвѣтствующихъ режимовъ работы паровоза (т. е. для данныхъ B_1/R, e и V_1), причемъ напомнимъ, что переходной коэффиціентъ ε представляетъ собою отношеніе расходовъ на топливо, точнѣе на паровозные матеріалы (топливо, воду и смазку), ко всѣмъ расходамъ транспорта. Проф. К. Р. Савичъ первый показалъ, что аналогичный нашему ε коэффиціентъ форсиросированія паровоза α зависитъ только отъ величины B_1/R[14]) и измѣняется въ линейной зависимости отъ B_1/R. Въ этихъ предположеніяхъ авторъ настоящей работы вычислилъ значенія коэффиціента ε для условій Югославянскихъ ж.д. (для паровоза типа 1—Е—О), хотя при этомъ и указалъ, что въ дѣйствительности зависимость $\varepsilon = f(B_1/R)$ имѣетъ болѣе сложный характеръ[15]). Предположеніе, что $\varepsilon = aB_1/R$ при вычисленіи наивыгоднѣйшаго подъема линіи было вполнѣ допустимо, ибо тамъ расходы транспорта малы сравнительно съ расходами службы капитала по выплатѣ $^0/_0{}^0/_0$ на затраченный на постройку линіи капиталъ, по амортизаціи строительнаго капитала и пр.

Здѣсь же мы рѣшаемъ задачу для данной, уже существующей линіи, а потому мѣриломъ для сравненія являются исключительно только расходы транспорта. Поэтому желательно получить ихъ возможно точнѣе, а для этого слѣдуетъ точнѣе опредѣлить законъ иамѣненія $\varepsilon = f(B_1/R)$, что впрочемъ и не трудно сдѣлать. Дѣйствительно

$$\varepsilon = \frac{Cx}{Cx + \Sigma A} \; \dots \qquad (15)$$

гдѣ $x = B_1/R$

$Cx = 1{,}06\ B_1/R \cdot R \cdot k' \ \dfrac{\text{динаровъ}}{\text{активный часъ}}$, причемъ

B_1/R — kg/m^2h — форсированіе рѣшетки

R — m^2 — площадь рѣшетки

k' дин/kg — стоимость 1 kg топлива

---

[14]) „Инженеръ" 1931, № 4/5.

[15]) Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ, вып. 6—1932 стр. 72.

1,06 — коэфиціентъ, учитывающій стоимость питательной воды паровоза и паровозной и поѣздной смазки.

$\Sigma A - \frac{\text{дин.}}{\text{акт. часъ}} = A_1 + A_2 + A_3$ — сумма остальныхъ расходовъ транспорта, куда входятъ (согласно схемѣ расчета проф. К. Р. Савича) слѣдующія слагаемыя:

$A_1 - \frac{\text{дин.}}{\text{акт. часъ}}$ — „стоимость паровоза" на активный паровозо-часъ[16]); здѣсь учитывается амортизація стоимости паровоза, амортизація стоимости деповскихъ устройствъ, амортизація стоимости главныхъ паровозныхъ мастерскихъ, стоимость капитальнаго ремонта въ главныхъ мастерскихъ, стоимость текущаго ремонта въ депо. Нами было вычислено $A_1 = 335$ дин./акт. час.

A_2 дин./акт. паровозо$\times$часъ — „стоимость вагоновъ", получаемая по схемѣ, аналогичной съ схемой при вычисленіи A_1. Величину A_2 мы исчислили какъ $A_2 = 35 \frac{\text{дин.}}{\text{а. п. ч.}}$ независимо отъ числа вагоновъ въ поѣздѣ.

A_3 дин./акт. часъ — „стоимость поѣздного персонала": машинистъ и помощникъ машиниста, кочегаръ (вообще паровозная бригада), кондукторская бригада и тормозильщики. Эту статью принимаемъ какъ $A_3 = 315$ дин./акт. часъ.

Такимъ образомъ $\Sigma A = 335 + 35 + 315 = 685$ и наше уравненіе для ε принимаетъ видъ (для паровоза типа 1-Е-0)

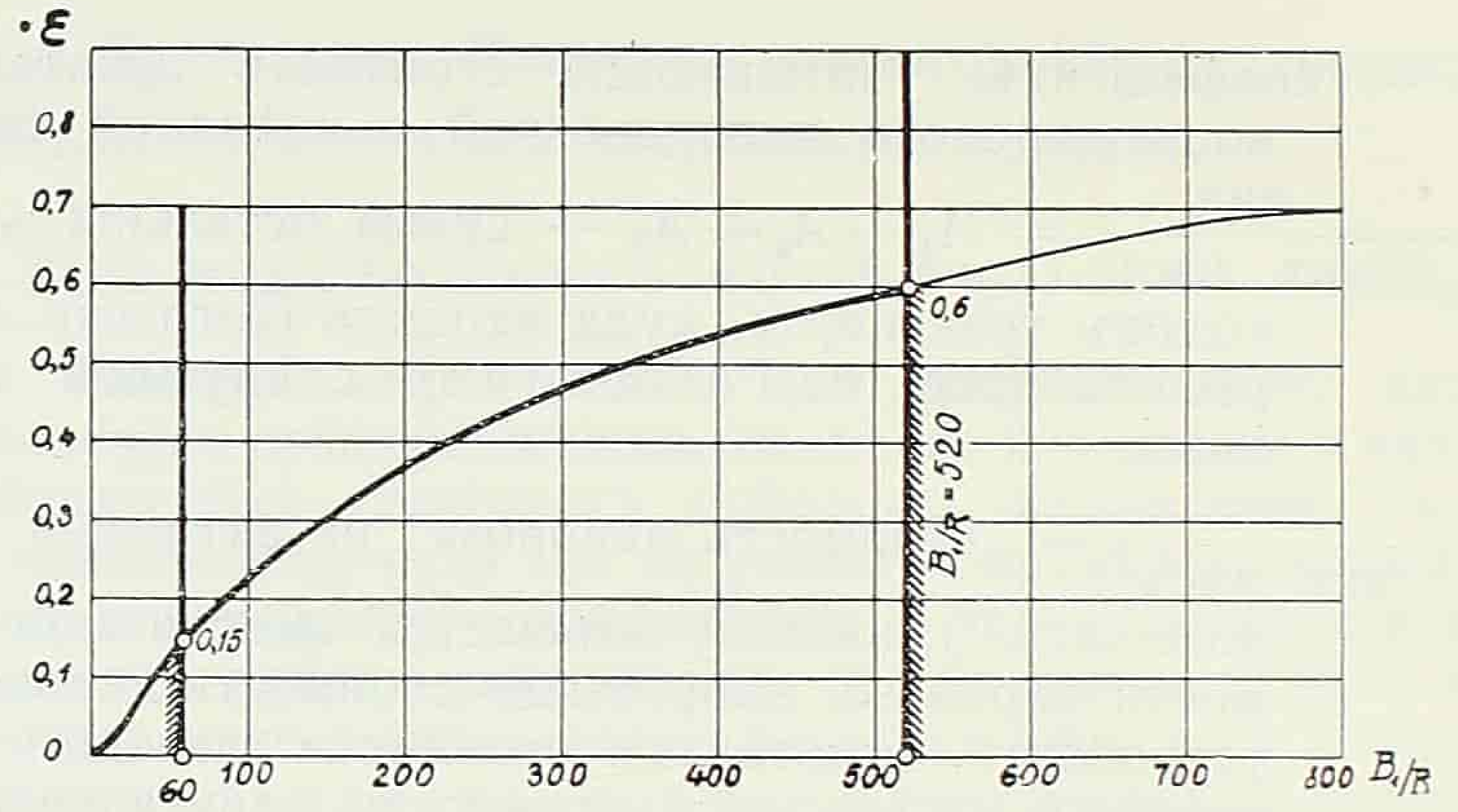
$$\varepsilon = \frac{1{,}06 B_1/R \cdot R \cdot k'}{685 + 1{,}06 B_1/R \cdot R \cdot k'} \quad . \; . \; . \; . \qquad (16)$$

Принимая $k' = 0{,}42$ дин./kg для домбровскаго угля „Ренаръ" съ теплотворной способностью $h_u = 6300$ kcal/kg, получаемъ значенія коэффиціента ε, данныя въ графической формѣ на фиг. 11, которыми мы и пользуемся для вычисленій въ главѣ IV.

Полезно замѣтить, что при работѣ паровоза съ постояннымъ наполненіемъ $e^0/_0$ каждому форсированію рѣшетки B_1/R соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе скорости V. Поэтому если $\varepsilon = f(B_1/R)$, то это также значитъ, что (въ случаѣ постоянства наполненія)

---

[16]) Какъ „активное" время работы паровоза считаемъ время пробѣга между станціями и часть времени стоянки на станціяхъ — именно необходимое время стоянки, отвѣчающее времени „сношенія станцій". Остальное время простоевъ на станціяхъ въ счетъ активнаго времени не принимается.



Фиг. 11.

$$\varepsilon = F(V) \; . \; . \; . \qquad (17)$$

каковая зависимость напрашивается сама собою a priori, но которая слишкомъ сложна а потому и не удобна для использованія при рѣшеніи практическихъ задачъ.

Проф. А. И. Косицкій.

КОЭФФИЦІЕНТЪ ПОЛЕЗНАГО ДѢЙСТВІЯ ПРОЦЕССА ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЯГО СГОРАНІЯ.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Математическихъ и Техническихъ наукъ 24 февраля 1933 г.)

Какъ извѣстно термическій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія теоретическаго процесса двигателя внутренняго сгоранія, у котораго сгораніе происходитъ при постоянномъ объемѣ (рис. 1) (процессъ, отвѣчающій принципу Otto), въ предположеніи, что теплоемкость есть величина постоянная и что не происходитъ измѣненія природы рабочаго медіума, выражается[1]) формулой:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{m-1}},$$

гдѣ

$\varepsilon = V_1 : V_2$ — степень компрессіи,

m — показатель степени линіи сжатія и расширенія.

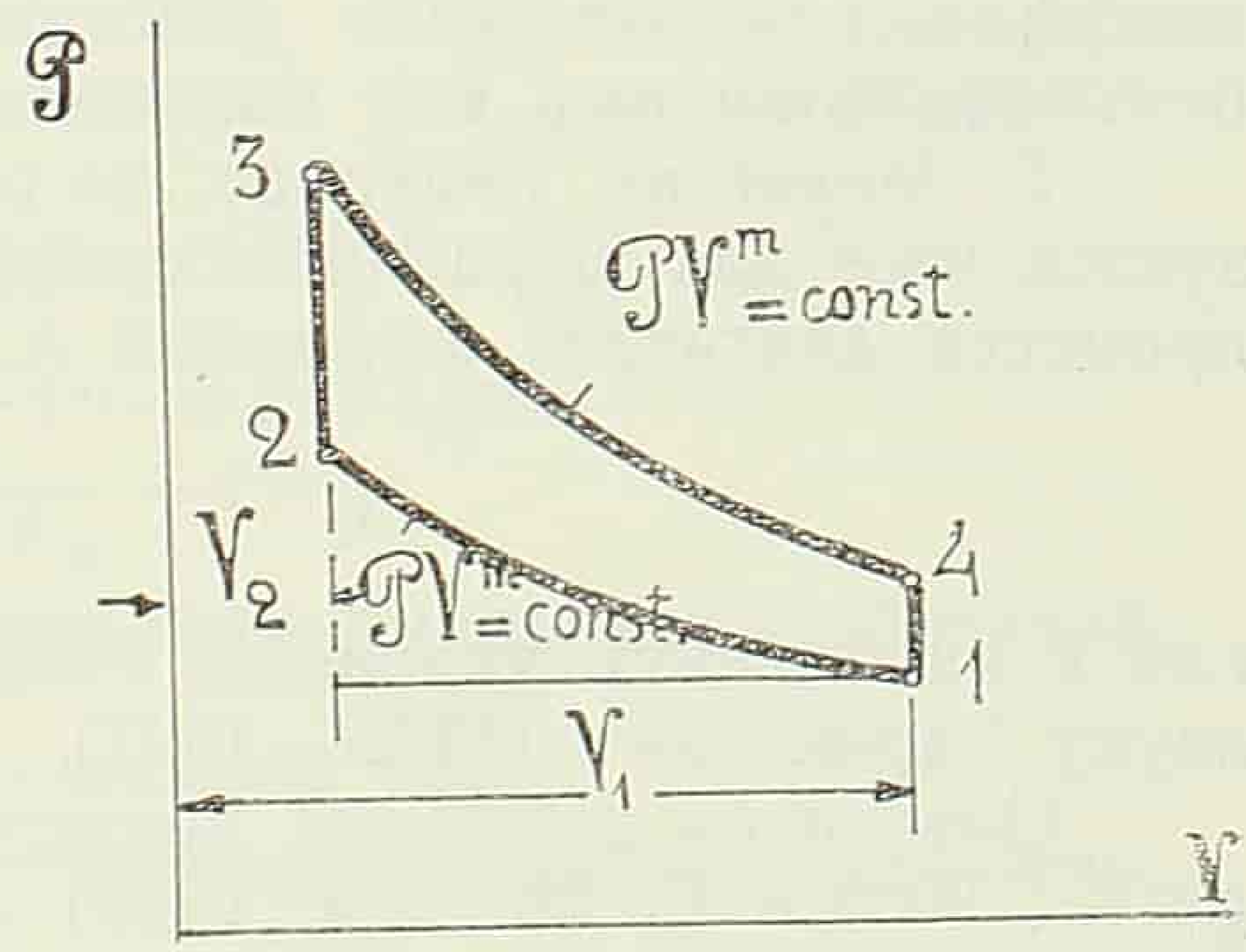


Рис. 1.

Разсматривая это выраженіе коэффиціента полезнаго дѣйствія процесса видимъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія процесса двигателя, возрастаетъ съ уменьшеніемъ максимальной температуры процесса, такъ какъ m увеличивается съ увеличеніемъ коэффиціента избытка воздуха (λ), съ которымъ двигатель работаетъ.

Слѣдствіемъ этого является, что къ процессу двигателя

[1]) См. А. Косицкій. Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ, 1930 г., 2 выпускъ.

внутренняго сгоранія не приложимъ общій для всѣхъ тепловыхъ процессовъ принципъ Карно, по которому использованіе теплоты будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше разность температуръ процесса. Значеніе границъ температуръ для использованія теплоты въ тепловомъ процессѣ классически показалъ Zeuner.

Въ виду указанныхъ особенностей коэффиціента полезнаго дѣйствія процесса двигателя, насъ заинтересовалъ вопросъ, кому принадлежитъ выводъ написаннаго ранѣе коэффиціента полезнаго дѣйствія процесса двигателя.

Изслѣдованія, произведенныя нами, показали, что впервые такое выраженіе для коэффиціента полезнаго дѣйствія процесса двигателя выведено Donat'омъ Banki (Z. V. D. I. 1898. стр. 893 и слѣд.). D. Banki вывелъ выраженіе коэф. полезнаго дѣйствія процесса на основаніи данныхъ 3-го изданія термодинамики Zeuner'a 1877 года, въ видѣ:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

и при этомъ отмѣтилъ: „die thermische Wirkungsgrade sind von den eingeführten Wärmemengen unabhängig".

Zeuner въ IV изданіи своей термодинамики, вышедшемъ въ 1900 году, не приводитъ указаннаго выраженія Banki, для коэффиціента полезнаго дѣйствія процесса двигателя, хотя безъ сомнѣнія онъ ему былъ извѣстенъ.

E. Meyer въ 1900 году, на основаніи вывода Banki, пользуется уже для выраженія коэффиціента полезнаго дѣйствія процесса двигателя формулой A. Witz'a (1883) въ видѣ:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}},$$

гдѣ k экспонентъ уравненія Poisson'a (1822 г.), введенный въ науку Laplace'омъ (1749—1827).

Опыты съ газовыми двигателями профессоровъ A. Nägel'a (1904) и E. Meyer'a (1905) показали, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія процесса двигателя измѣняется въ зависимости отъ коэффиціента смѣшенія, то есть отъ отношенія количества газа къ количеству воздуха въ смѣси для заряда двигателя и именно такъ, что чѣмъ меньше газа въ смѣси, тѣмъ больше коэффиціентъ полезнаго дѣйствія процесса двигателя.

Такъ обстоитъ въ настоящее время дѣло съ оцѣнкой теоретическаго процесса двигателя внутренняго сгоранія.

Разсмотримъ случай оцѣнки теоретическаго процесса двигателя, когда намъ нужно спроэктировать двигатель для даннаго топлива, работающій съ заданнымъ напередъ коэф. избытка воздуха λ.

Какъ извѣстно мы можемъ построить теоретическую діаграмму процесса двигателя для заданныхъ условій [2]), принимая во вниманіе сгораніе и непостоянство теплоемкостей.

Изъ построенной теоретической діаграммы опредѣлимъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія процесса по выраженію:

$$\eta = \frac{Q' - Q_2}{Q'} \; . \; . \; . \qquad (1)$$

гдѣ Q' количество теплоты, введенное въ теоретическій процессъ двигателя, Q_2 количество теплоты отданное наружу при совершеніи процесса.

Разсмотримъ случай газообразнаго топлива, какъ наиболѣе сложный для вычисленій. Въ этомъ случаѣ, считая, что процессъ совершаетъ 1 m^3_H газообразнаго топлива, $\lambda Lmin_H$ m^3 воздуха и V_{2H} m^3 продуктовъ сгоранія, имѣемъ для температуры сгоранія t_3 выраженіе:

$$t_3 = \frac{24 H_u + \Sigma V'_i \left(Mc_v \right)_{0_i}^{t_2} \cdot t_2}{\left(1 + \frac{V_{2H}}{V''}\right) \Sigma V''_i \left(Mc_v \right)_{0_i}^{t_3}}$$

Ибо:

объемъ смѣси до сгоранія

$$V' = \sum_{i=1}^{i=n} V'_i = 1\, m^3_H \text{ газа } + \lambda Lmin_H \text{ воздуха } + V_{2H} \text{ прод. сгоранія}$$

объемъ продуктовъ сгоранія смѣси:

$$V'' = \sum_{i=1}^{i=n} V''_i = CO''_2 + H_2O'' + N'_2 + (\lambda - 0{,}21)\, Lmin.$$

$\left(Mc_v \right)_{0_i}^{t}$ — средняя молекулярная теплоемкость газообразной соотвѣтствующей составной части,

H_u — нижній предѣлъ теплотворной способности топлива.

Пользуясь приведенными обозначеніями найдемъ:

$$Q' = t_3 \left(1 + \frac{V_{2H}}{V''}\right) \Sigma V''_i \left(Mc_v \right)_{0_i}^{t_3} - \Sigma V'_i \left(Mc_v \right)_{0_i}^{t_1} \cdot t_1.$$

$$Q_2 = \left(1 + \frac{V_{2H}}{V''}\right) \Sigma V''_i \left[\left(Mc_v \right)_{0}^{t_4}{}_{i} \cdot t_4 - \left(Mc_v \right)_{0}^{t_1}{}_{i} \cdot t_1 \right]$$

и потому имѣя, теоретическую діаграмму процесса, всегда можемъ опредѣлить его коэффиціентъ полезнаго дѣйствія.

---

[2]) См. А. Косицкій. Глас Српске Краљевске Академије Наука. Књига CXXX. 1928.

Предположимъ, что теплоемкости постоянны и что при процессѣ не происходитъ сгоранія, а только сообщеніе извнѣ теплоты, тоесть сдѣлаемъ тѣ же предположенія, которыя указаны въ началѣ статьи, тогда найденныя выраженія для Q' и Q_2 представятся въ видѣ:

$$Q' = V \cdot C_v\ (T_3 - T_2) + V \cdot C_v\ (T_2 - T_1) = V \cdot C_v\ (T_3 - T_1)$$

$$Q_2 = V \cdot C_v\ (T_4 - T_1)$$

Въ послѣднихъ выраженіяхъ Q' и Q_2 ради простоты объемъ газовъ, участвующихъ въ процессѣ, обозначены черезъ V; T_1; T_2; T_3 и T_4 абсолютныя температуры для соотвѣтствующихъ точекъ процесса.

Подставляя найденныя выраженія для Q' и Q_2 въ формулу (1) получимъ:

$$\frac{Q' - Q_2}{Q'} = \frac{T_3 - T_1 - T_4 + T_1}{T_3 - T_1} = \frac{T_3\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)}{T_3\left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon^{m-1}}}{1 - \frac{T_1}{T_3}}$$

или что то же:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} = \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right)\left(1 - \frac{Q_2}{Q'}\right) \ldots \quad (2$$

то есть изъ послѣдняго выраженія видимъ, что коэф. полезнаго дѣйствія процесса двигателя равенъ произведенію двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ есть коэф. полезнаго дѣйствія процесса Карно для границъ температуръ, въ которыхъ протекаетъ процессъ двигателя, а другой есть отношеніе между работой, полученной благодаря процессу двигателя и работой процесса Карно въ тѣхъ же границахъ температуръ. Имѣя теперь выраженіе для коэф. полезнаго дѣйствія процесса двигателя въ видѣ двухъ множителей (2), мы такъ же видимъ, что коэф. полезнаго дѣйствія процесса двигателя будетъ тогда maximum, когда множитель

$$\frac{Q' - Q_2}{Q'} = 1.$$

Это будетъ тогда, когда $\lambda = \infty$, такъ какъ при этомъ условіи: $t_3 = t_2$; $t_4 = t_1$; $Q_2 = 0$ и $Q' = V_c\,(T_2 - T_1)$, то есть величина конечная, и потому для этого условія:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\Sigma^{k-1}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

то есть процессъ двигателя обращается въ процессъ Карно и поэтому коэф. полезнаго дѣйствія процесса достигаетъ maximum'a. Съ уменьшеніемъ же значенія λ отъ $\lambda = \infty$, коэф.

полезнаго дѣйствія процесса двигателя долженъ убывать, такъ какъ множитель:

$$\left(1 - \frac{Q'}{Q_2}\right)$$

при этихъ условіяхъ все убываетъ, а посему процессъ двигателя все отдаляется отъ процесса Карно для тѣхъ же границъ температуръ.

Какъ видно, представленіе выраженія для коэф. полезнаго дѣйствія процесса двигателя въ видѣ двухъ множителей, ясно показываетъ почему этотъ коэф. возростаетъ съ увеличеніемъ λ и что противорѣчія съ принципомъ Карно нѣтъ.

Разсматривая извѣстное выраженіе коэф. полезнаго дѣйствія процесса двигателя со сгораніемъ при $P = const.$ (Процессъ Дизеля) (рис. 2) имѣемъ:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}$$

Это выраженіе при $\lambda = \infty$, когда $t_3 = t_2$; $t_4 = t_1$; $\rho = 1$, принимаетъ видъ:

$$\eta_{t_{\lambda=\infty}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

то есть обращается въ коэф. полезнаго дѣйствія процесса Карно, а посему и достигаетъ maximum'a.

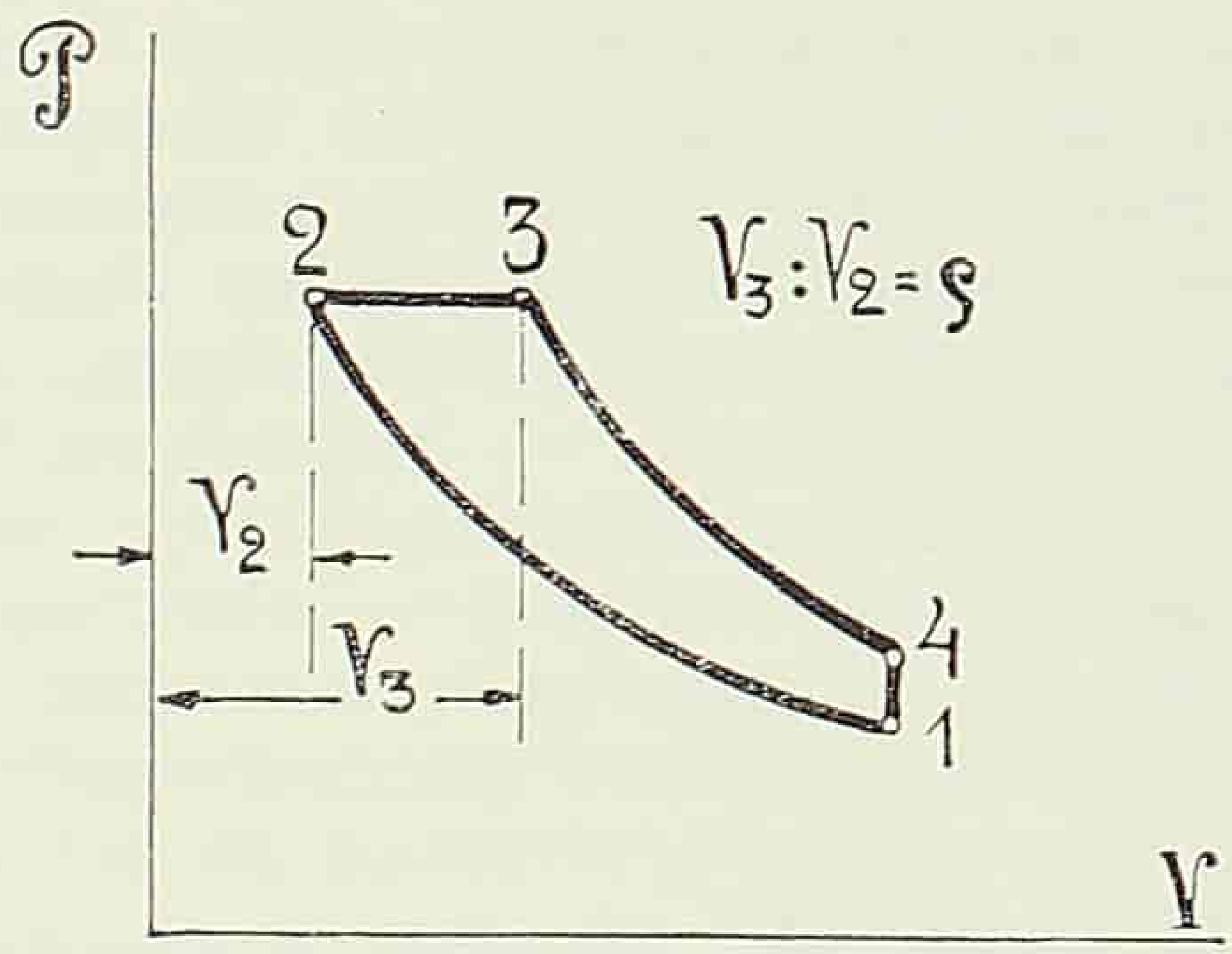


Рис. 2.

Отсюда ясно почему съ уменьшеніемъ нагрузки, то есть съ увеличеніемъ λ, коэф. полезнаго дѣйствія и этого процесса двигателя увеличивается.

На основаніи всего изложеннаго мы видимъ, что процессъ Карно является годнымъ масштабомъ сравненія для оцѣнки процесса двигателя и потому не раздѣляемъ противнаго мнѣнія, высказываемаго въ литературѣ; на примѣръ: проф. G. Zerkowitz (Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik. 11 Auflage. III Band. Erste Hälfte. Braunschweig 1926. S. 1046).

Проф. Т. В. Локоть.

ИЗЪ БІОЛОГІИ КУЛЬТУРНЫХЪ РАСТЕНІЙ.

Методъ опытовъ въ вегетаціонныхъ сосудахъ, являющійся средствомъ возможно болѣе точнаго изученія дѣйствія вегетативныхъ факторовъ на сельскохозяйственныя растенія, въ то же время позволяетъ дѣлать надъ ними и нѣкоторыя чисто біологическія наблюденія. Въ своихъ вегетаціонныхъ опытахъ — въ „стакларѣ Огледног Добра Пољопривредног Факультета" въ Земунѣ — наряду съ основной задачей — опредѣленія транспираціоннаго коэфиціента отдѣльныхъ культурныхъ растеній — я имѣлъ возможность освѣтить положительными данными такое важное въ методологическомъ отношеніи біологическое явленіе, какъ вліяніе индивидуальности на развитіе растенія въ одной и той же средѣ при однихъ и тѣхъ же условіяхъ. Біологическое явленіе кущенія хлѣбовъ точно также точнѣе и тщательнѣе можетъ изучаться въ условіяхъ вегетаціонныхъ опытовъ. Количественное соотношеніе частей растенія—стебля, листьевъ, соцвѣтія, плода и т. д.,— имѣющее не только практическое значеніе, но и біологическій интересъ, какъ явленіе достаточно постоянное. Соотношеніе между корневой системой и надземными органами растенія—біологическое явленіе, освѣщающее многіе вопросы практическаго характера въ культурѣ растеній. Біологія паразитныхъ растеній, освѣщающая столь важные въ сельскохозяйственной культурѣ вопросы фитопатологіи. И т. д. Все это явленія и вопросы — помимо чисто техническихъ культурныхъ вопросовъ составляющихъ основное содержаніе вегетаціонныхъ опытовъ въ агрономіи, — особенно удобно, хотя и попутно изучаемые, въ предѣлахъ агрономическихъ опытовъ, въ вегетаціонныхъ сосудахъ.

Изученіе транспираціоннаго коэфиціента риса — въ условіяхъ сосудныхъ опытовъ, о чемъ я скажу ниже, уже само по себѣ представляетъ и біологическій интересъ, такъ какъ оно ясно показываетъ, что „болотный" характеръ этой важной въ міровомъ хозяйствѣ культуры никакъ не является біологически обязательнымъ.

1. „Зубача".

Но прежде, чѣмъ перейти къ этимъ главнымъ опытамъ и наблюденіямъ въ моихъ вегетаціонныхъ работахъ въ „стакларѣ", я хотѣлъ бы отмѣтить нѣкоторыя случайныя, но біологически интересныя наблюденія, которыя попутно мнѣ пришлось произвести — частью въ сосудахъ, частью въ полѣ, а частью даже — на бетонномъ полу самой „стаклары".

Бетонная площадка, на которой была монтирована желѣзная конструкція нашей „стаклары", имѣла толщину 20—40 сант. Немедленно послѣ укладки рельсъ для вагонетокъ бетонъ былъ залитъ асфальтомъ толщиною около 5 сант. Думать о томъ, что на бетонѣ, покрытомъ алфальтомъ, могла въ первый же годъ возникнуть какая-либо растительность, конечно, было бы почти невѣроятно. Но эта невѣроятность оказалась дѣйствительностью. И именно въ томъ отдѣленіи „стаклары", которое покрыто стекломъ, такъ что и условія влажности для растительности были самыя неблагопріятныя, въ первый же годъ — къ нашему изумленію — изъ-подъ асфальта стала пробиваться „зубача" [1])—типичное и страшное для мѣстныхъ почвъ сорное растеніе Cynodon dactylon, изъ сем. Gramineae (нѣм. — Hundszahngras; рус. Пальчатая трава — по Т а л ь е в у). Растеніе съ страшно развитыми корневищами, обильно снабженными стеблевыми и корневыми почками. Достаточно кусочка такого корневища зубачи, чтобы это растеніе принялось и быстро разрослось густой сѣтью корневищъ въ землѣ и стеблей иа поверхности почвы. Растущій конецъ корневища заостренъ тонко, дѣйствительно какъ собачій зубъ, страшно плотный, такъ что легко прободаетъ при своемъ ростѣ не только такіе объекты, какъ напр. клубни картофеля, но и начинающіе разлагаться куски дерева и т. п. Въ этомъ отношеніи зубача сходна съ пыреемъ (Triticum repens), но корневища зубачи много толще и сильнѣе корневищъ пырея. Описываемый мною рѣдкій случай хорошо иллюстрируетъ вегетативную мощь этого растенія. Очевидно, небольшой кусочекъ корневища зубачи случайно задержался на бетонѣ нашей „стаклары", былъ залитъ горячимъ асфальтомъ, и тѣмъ не менѣе не потерялъ своей жизнеспособности. Питаясь тѣми запасами влаги и питательныхъ веществъ, какіе заключаются

---

[1]) Это весьма удачное народное названіе растенія П а н ч и ћ ввелъ въ свою „Флору".

въ толстомъ плотномъ корневищѣ, растеніе смогло продолжать, — на бетонѣ подъ асфальтомъ — свой ростъ, образовало новое — сначала небольшое — корневище, которое своимъ острымъ и мощнымъ зубомъ пробило асфальтъ, и въ первый же годъ дало нѣсколько слабыхъ стеблей и листьевъ. Въ слѣдующемъ году на этомъ мѣстѣ образовалась уже болѣе замѣтная трещина, изъ которой все гуще и зеленѣе выбивалась зубача, давшая и свои характерныя пальчатыя соцвѣтія. Пришлось уже принять мѣры противъ дальнѣйшаго распространенія зубачи на защищенномъ отъ дождей бетонно-асфальтовомъ полу нашей „ стаклары".

Растеніе съ такой огромной вегетативной мощью, конечно, легко вытѣсняетъ другія растенія и потому въ культурѣ является весьма опаснымъ сорнякомъ. Но съ другой стороны — оно легко размножается, является засухоустойчивымъ, малотребовательнымъ и потому вполнѣ пригоднымъ, напр. для пастбищъ, подобно тому, какъ, напр., на южнорусскихъ черноземныхъ степяхъ пырей даетъ хорошее степное сѣно. Въ Америкѣ Cynodon dactylon дѣйствительно и вводится уже въ культуру — подъ именемъ „Бермудской травы" — на пастбищахъ. На степное сѣно она не годится, такъ какъ стебли ея слишкомъ коротки, частью—ползучіе, при чемъ тутъ получается и другое интересное біологическое явленіе: помимо сильныхъ подземныхъ корневищъ, зубача можетъ давать и корневища надземныя, т. е. ея стебель, стелясь по землѣ, часто выпускаетъ внизъ корни, а вверхъ новые короткіе стебли съ густо расположенными узкими листьями. Зубача даетъ хорошій дернъ, и напр. для задерненія крутыхъ откосовъ была бы отличнымъ матеріаломъ. Но здѣсь мы наталкиваемся на новую біологическую особенность этого растенія, правда довольно частую для дикихъ растеній, размножающихся по преимуществу вегетативнымъ путемъ: зубача тоже съ трудомъ развивается изъ сѣмянъ! Я два раза высѣивалъ сѣмена зубачи на дѣлянкахъ въ полѣ, и оба раза — безъ всякаго успѣха! Зубача изъ сѣмянъ совершенно не взошла ни въ первый, ни во второй годъ. Для размноженія изъ сѣмянъ она оказалась слишкомъ нѣжнымъ растеніемъ. Для контроля я высѣялъ тѣ же сѣмена зубачи въ сосудѣ — съ поливкой, и сосудъ оказался вскорѣ густо заросшимъ зубачей, стебли которой далеко свѣшивались черезъ край сосуда, а корвевища въ почвѣ сосуда—развились, конечно, уже много слабѣе: густота посѣва и обиліе влаги сдѣлали біологически излишними корневища. Это — путь, которымъ дикая зубача можетъ сдѣлаться культурной травой.

2. Виды Сорго.

Другимъ — столь же опаснымъ, какъ и зубача,—сорнымъ растеніемъ на здѣшнихъ почвахъ — является **дикое сорго** — **Sorghum halepense**, считающееся въ наукѣ прародителемъ культурныхъ видовъ сорго. И дѣйствительно — среди вндовъ культурнаго сорго есть такіе, которые морфологически весьма сходны съ S. halepense. Таковъ, напр., видъ Sorghum Sudanense, культурное сорго, являющееся однолѣтнимъ кормовымъ растеніемъ, особенно цѣннымъ въ болѣе южныхъ и менѣе влажныхъ районахъ. Но между этими двумя видами сорго, весьма сходными морфологически, есть существенная біологическая разница

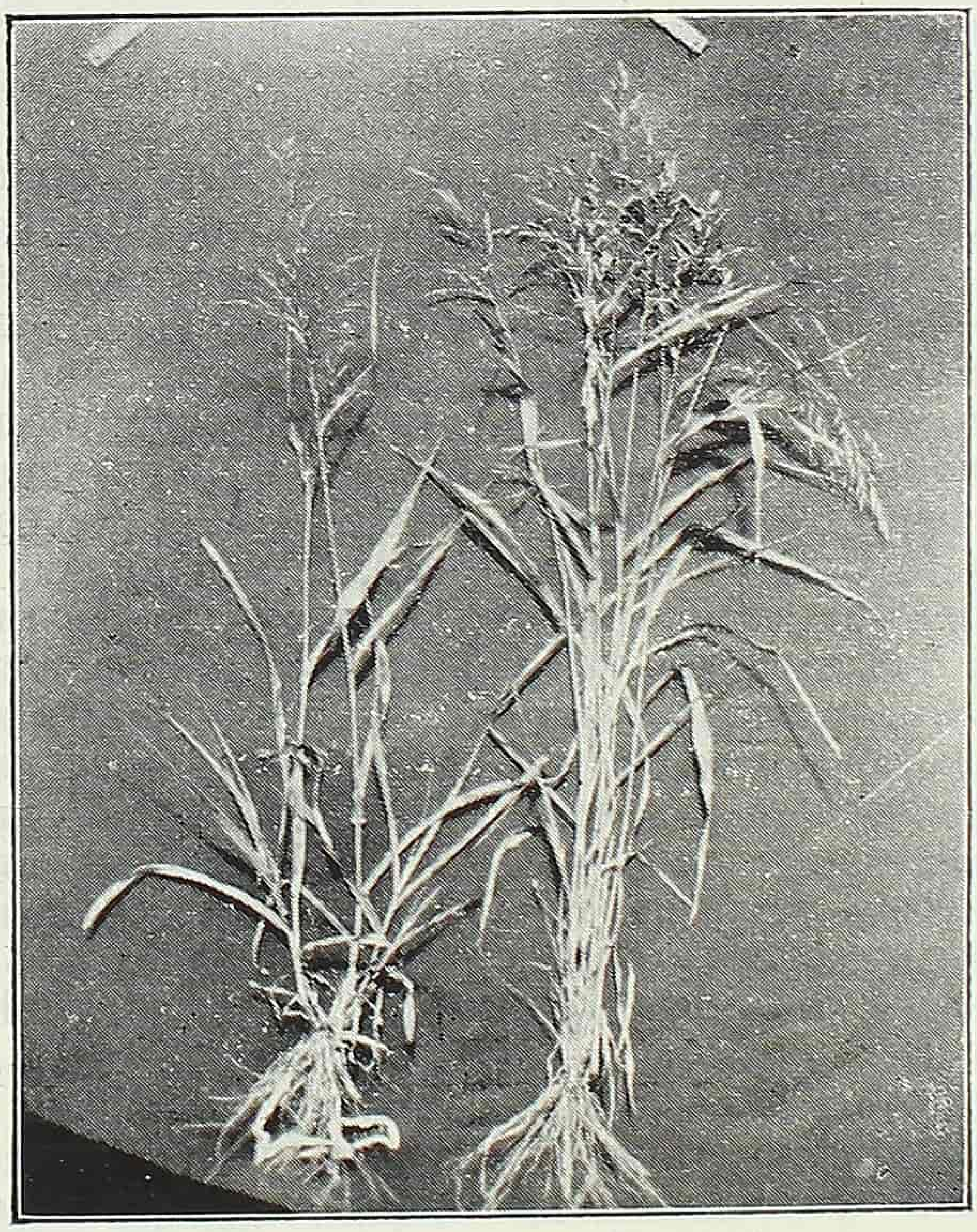


Рис. 1.

(рис. 1): дикое сорго имѣетъ мощныя красноватыя корневища, при помощи которыхъ это растеніе преимущественно и размножается, подобно зубачѣ, являясь такимъ образомъ растеніемъ многолѣтнимъ; тогда какъ Суданское сорго является однолѣтнимъ растеніемъ, для культуры, конечно, гораздо болѣе удобнымъ, и корневищъ совершенно не имѣющимъ. Если предположить, что эволюціоннымъ путемъ дикое сорго — въ культурѣ — постепенно теряло и потеряло корневища, подобно тому, какъ, напр., культурныя формы овса постепенно теряютъ осья на своихъ пленкахъ, — и такимъ образомъ создалась раса суданскаго сорго, то станетъ ясно, почему эта культурная раса даетъ болѣе мощное развитіе надземныхъ органовъ, — главной цѣли культуры: за счетъ потери корневищъ неизбѣжно увеличивается созданіе надземныхъ органовъ и особенно соцвѣтій — метелки и плодовъ, какъ это мы видимъ, напр., и при культурѣ зубачи въ сосудахъ.

Весьма близкимъ видомъ является и Sorghum exiguum, точно такъ же травянистое сорго, но еще болѣе мощное чѣмъ S. Sudanense. Переходъ къ видамъ сорго съ типичнымъ толстымъ и высокимъ стеблемъ, сходнымъ съ кукурузой, совершается до извѣстной степени постепенно.

Формы Sorghum vulgare, особенно служащія для выдѣлки сорговыхъ метелокъ, есть и низкія, хотя и съ сильно развитыми вѣточками соцвѣтія; есть и высокія — со столь же развитыми соцвѣтіями. Дѣля виды сорго на двѣ основныя группы — низкихъ травянистыхъ и высокихъ крупностебельныхъ, мы во второй группѣ видимъ различія или морфологическія — особенно по формѣ метелокъ — отъ сильно развѣсистыхъ до комовидныхъ, напр., сибирская джугара (Sorghum cernuum), а еще характернѣе Sorghum Africanum, или біологическія, въ томъ числѣ — и по химическому составу сока, — напр., сахарное сорго (Sorghum Sacharatum).

3. Къ вопросу объ устойчивости раздѣльнополости у кукурузы и о причинахъ парности рядовъ на початкахъ кукурузы.

На дѣлянкахъ, занятыхъ испытаніемъ сортовъ кукурузы, намъ удалось найти — помимо обычныхъ, частыхъ аномалій — и такую рѣдкую аномалію, которая можетъ служить весьма ясной демонстраціей для объясненія давно уже интересующихъ науку біологическихъ явленій у кукурузы. Аномаліи кукурузы весьма давно извѣстны какъ въ практикѣ, такъ и въ наукѣ, въ которой и утвердилось то положеніе, что біологическая особенность кукурузы — ея раздѣльнополость, доходящая до почти полной однодомности, т. е. размѣщенія мужскихъ и женскихъ цвѣтковъ на совершенно отдѣльныхъ соцвѣтіяхъ, хотя и находящихся на одномъ и томъ же растеніи, — и до сихъ поръ не является еще вполнѣ константнымъ, вполнѣ біологически завершеннымъ явленіемъ. Мы всегда находимъ среди кукурузныхъ растеній какъ метелки — мужскія соцвѣтія, — на которыхъ попадаются и женскіе цвѣты, способные къ опыленію и дающіе плоды — зерна, такъ и початки — женскія соцвѣтія — на которыхъ развиваются вѣточки мужскихъ соцвѣтій, несущія исключительно мужскіе цвѣты. Кромѣ безспорнаго подтвержденія неустойчивости, вѣрнѣе — біологической незаконченности раздѣленія половъ у кукурузы такія аномаліи даютъ намъ возможность утверждать и то, что женское соцвѣтіе кукурузы — початокъ, несмотря на колосовидную форму, представляетъ совсѣмъ не колосъ, а такую же метелку, какъ и мужское соцвѣтіе, только біологически сильно измѣненную.

Особенно хорошо это видно на тѣхъ нашихъ фотографіяхъ, которыя изображаютъ аномальный початокъ съ совершенно ясными развѣтвленіями.

Эти же фотографіи даютъ намъ вполнѣ доказательное и ясное объясненіе устойчивости парности рядовъ зеренъ на початкѣ кукурузы. На фотографіи мы видимъ рядъ вѣточекъ, какъ бы не успѣвшихъ сростись въ одинъ общій мясистый початокъ. На каждой вѣточкѣ, особенно на вѣточкахъ, находящихся какъ бы еще въ эмбріональной стадіи развитія, мы ясно видимъ только два ряда зеренъ, или ихъ зачатковъ — въ видѣ точекъ. Вѣточекъ съ однимъ рядомъ зеренъ еще никому не удавалось находить, за исключеніемъ развѣ атрофіи отдѣльныхъ цвѣтковъ и зачатковъ зеренъ. Точно такъ же никому до сихъ поръ не удавалось находить нормальныхъ початковъ съ непарнымъ числомъ рядовъ зеренъ. Встрѣчающаяся иногда — и то весьма рѣдко — частичная непарность рядовъ, напр., вверху и у основанія початковъ, сопутствуемая обычно переплетенностью рядовъ, отсутствіемъ нормальной прямолинейности рядовъ, можетъ говорить лишь объ атрофіи отдѣльныхъ цвѣтковъ, или нѣкоторыхъ частей рядовъ, но не о возможности существованія нормальныхъ первичныхъ вѣточекъ початка только съ однимъ рядомъ зачатковъ зеренъ. Тѣмъ болѣе, что колоски кукурузныхъ соцвѣтій — по природѣ своей — двухцвѣтковые. Можно поэтому думать, что вѣточки той сильно метаморфизированной метелки, которую представляетъ собой початокъ, вполнѣ естественно и должны нести на себѣ два правильныхъ ряда цвѣтковъ и зачатковъ плодовъ, а при зрѣлости — и самихъ плодовъ — зеренъ. Біологическій процессъ, приведшій къ образованію колосовиднаго початка съ сильно разросшимся стержнемъ, мы должны представлять себѣ такимъ образомъ: первичныя вѣточки, изъ которыхъ — съ эмбріональной точки зрѣнія — должна состоять метелка женскаго соцвѣтія, срастаются въ одинъ цилиндръ, внѣшне сходный съ стержнемъ колоса, заполняя полость цилиндра сердцевинной тканью. Отъ числа вѣточекъ, образовавшихъ стержень початка, зависитъ число рядовъ зеренъ на зрѣломъ початкѣ. Это число вѣточекъ равно числу рядовъ зеренъ, подѣленному на два. Нормально — въ кукурузѣ мы имѣемъ початки кукурузы, начиная отъ 8 и до 26 рядовъ зеренъ, т. е. стержни такихъ початковъ должны бы были образоваться отъ срастанія 4 до 13 вѣточекъ. Въ зависимости отъ числа вѣточекъ и рядовъ должна стоять и крупность зеренъ. Иногда — особенно при меньшемъ числѣ рядовъ, напр., на 8-рядномъ початкѣ — даже и на зрѣлыхъ початкахъ часто совершенно ясна видна граница тѣхъ четырехъ вѣтокъ, которыя срослись въ одинъ общій стержень. Еще яснѣе это удается прослѣдить на зачаточныхъ початкахъ — вскорѣ послѣ закончившагося оплодотворенія кукурузы. Початки съ 4 и 6 рядами зеренъ — весьма рѣдки и едва ли константны; съ 2 рядами — едва ли даже возможны; это противорѣчило бы самому понятію „метелки". Поэтому — минимальное число рядовъ зеренъ на початкѣ кукурузы должно быть — четыре.

4. Образованіе корней на стеблѣ подсолнечника Helianthus annuus.

Мощность стебля подсолнечника, достигающаго иногда,— какъ это было и въ нашихъ опытахъ, — высоты до 4 метровъ, какъ-то съ трудомъ вяжется съ мыслью о возможности появленія на такомъ грубомъ стеблѣ дополнительной корневой системы даже при благопріятныхъ для этого условіяхъ. А между тѣмъ наши наблюденія вполнѣ подтверждаютъ эту возможность.

Выросшій въ мусорной ямѣ на „Огледномъ Добрѣ" въ Земунѣ подсолнечникъ имѣлъ уже шляпки соцвѣтія, когда яма была засыпана землей что-то на высоту до одного метра по стеблю подсолнечника. Когда подсолнечникъ почти созрѣлъ, онъ былъ осторожно выкопанъ вмѣстѣ съ корнями, и по всей поверхности нижней части его стебля — отъ настоящей — первой его корневой системы и до самой поверхности земли — оказалась густая сѣть новой—второй— корневой системы, образовавшейся во второй періодъ его жизни — уже послѣ цвѣтенія. Такимъ образомъ — и въ огрубѣвшей уже корѣ стебля подсолнечника, во второй половинѣ его жизни, все же еще оказались жизнеспособныя почки, или другіе элементы, которые тронулись въ ростъ и создали свѣжую сѣть корневой системы, усилившей питательную жизнедѣятельность растенія. О чисто механической роли этой дополнительной корневой системы, сходной — въ извѣстныхъ случаяхъ — съ ролью воздушныхъ корней у кукурузы въ борьбѣ ея противъ вѣтра, здѣсь, конечно, и говорить не приходится: функція дополнительной корневой системы — въ данномъ случаѣ — была только питательной.

5. Вѣтвленіе овса.

Отличительной морфологической особенностью хлѣбовъ изъ Gramineae, особенно такъ наз. „настоящихъ" хлѣбовъ (въ отличіе отъ „просовидныхъ")—т. е. пшеницы, ржи, овса и ячменя, — является неспособность ихъ вѣтвиться. У этихъ четырехъ хлѣбныхъ злаковъ только чрезвычайно рѣдко удается найти вѣтвленіе. Мнѣ лишь однажды удалось видѣть вѣтвленіе стебля пшеницы — на экземплярѣ, найденномъ въ Туркестанѣ (Ташкентъ) студентомъ Ново-Александрійскаго Института, отбывавшимъ тамъ свою дипломную практику. Изъ пазухи листа на верхнемъ междоузліи пшеницы выросла вѣтвь, не принесшая колоса. На нашей фотографіи овса — точно такъ же въ пазухѣ послѣдняго или даже и предпослѣдняго листа — развилась вѣтвь, несущая на себѣ какъ бы дополнительную метелку. Во всякомъ случаѣ эта дополнительная метелка никакъ не можетъ считаться составной частью основной метелки. Она представляетъ самостоятельную морфологическую часть на стеблѣ овса, которую съ полнымъ правомъ можно признать вѣткой, т. е. рѣдкимъ явленіемъ при развитіи стебля хлѣбовъ. А поскольку такое явленіе было бы найдено только у основанія послѣдняго междоузлія овса, нормально несущаго въ верхней своей части обычную метелку, всегда состоящую изъ нѣсколькихъ ярусовъ группами расположенныхъ — на каждомъ ярусѣ — маленькихъ вѣточекъ—метелокъ, — то и въ такомъ случаѣ это являлось бы аномаліей метелки, вполнѣ напоминающей настоящее вѣтвленіе.

6. О видахъ Oenothera.

Растеніе, занимавшее столь видное мѣсто въ работахъ Гуго де-Фриза, автора мутаціонной теоріи, интересовало многихъ ботаниковъ-біологовъ главнымъ образомъ съ точки зрѣнія провѣрки самой мутаціонной теоріи — путемъ выясненія истинныхъ причинъ появленія мутацій. Эти причины, раньше и самимъ де-Фризомъ считавшіяся „неизвѣстными", въ настоящее время, — повидимому, въ большинствѣ случаевъ, — связываются съ измѣненіями въ хромозомномъ аппаратѣ этого растенія—Oenothera Lamarkiana и ея мутантовъ, — на что современная біологія и обращаетъ преимущественное вниманіе.

Я въ этомъ направленіи работать не имѣлъ и не имѣю возможности. Заинтересовался же этимъ растеніемъ лишь въ чисто учебно-демонстративныхъ цѣляхъ, чтобы слушатели мои имѣли возможность видѣть то растеніе, о которомъ приходится упоминать, говоря о мутаціонной теоріи. У меня въ сосудахъ до сихъ поръ удавались слѣдующіе виды: Oenothera Lamarkiana, Oen. acaulis, Oen. rhizocarpa, Oen. Drumondii и Oen. coccinea. Изъ нихъ Oen. Lamarkiana — двухлѣтнее растеніе, въ первый годъ дающее только розетку довольно крупныхъ листьевъ и хорошо перезимовывающее— даже въ сосудахъ; на второй годъ — выгоняетъ крѣпкій высокій стебель, не вѣтвящійся, обильно покрытый листьями; въ пазухахъ листьевъ — по одному крупному цвѣтку — съ 4-хъ лепестковымъ вѣнчикомъ — въ началѣ цвѣтенія бѣлымъ, но нѣсколько мѣняющейся окраской — отъ розоватой до свѣтло-фіолетовой, появляющейся уже на второй день — конецъ цвѣтенія. Явленіе — типичное, напр., и для хлопчатника (Gossipium) и для нѣкоторыхъ видовъ Hibiscus, напр., Hibiscus esculentus и Hib. cannabinus (кенафа).

Трубчатая свѣтлая чашечка достигаетъ нѣсколькихъ сантиметровъ длины, и черезъ всю трубку идетъ столбикъ— съ четырехъ-лопастнымъ рыльцемъ; тычинокъ — со столь же длинными нитями — восемь.

Цвѣтеніе продолжается не больше 1—2 дней, послѣ чего трубчатая чашечка и вѣнчикъ — завядшіе — опадаютъ, а нижняя завязь быстро выростаетъ въ характерный удлиненный четырехстворчатый плодъ—съ очень мелкими желтыми сѣменами.

Еще типичнѣе цвѣтеніе у Oen. acaulis, у которой---какъ говоритъ само названіе — стебля совсѣмъ нѣтъ, какъ и у третьяго вида — Oen. rhizocarpa, сходнаго съ предыдущимъ, но не съ такими крупными цвѣтками. Oen. acaulis, расцвѣвши утромъ, имѣла бѣлый цвѣтокъ, къ вечеру уже ставшій фіолетовымъ, а на другой день уже завявшій. Лепестки цвѣтка до 4 сант. въ длину и почти столько же въ ширину — округло-квадратной формы; трубка цвѣтка до 12 сант. длины; въ полости трубки (чашечки) — восемь тычинокъ съ качающимися — при выходѣ изъ трубки — пыльниками, на на другой день — при завяданіи цвѣтка — уже высохшими. Столбикъ—длиною тѣхъ же 12 сант.—съ четырьмя лопастями рыльца, на другой день прижавшимися друъ къ другу и покрытыми еще пыльцей. Вѣнчикъ и чашечка послѣ цвѣтенія скручиваются въ конусъ, который отходитъ въ сторону — подъ угломъ къ трубкѣ, и вскорѣ увядшій цвѣтокъ опадаетъ, а оригинальной формы четырехгранный плодъ изъ нижней завязи развивается на самой землѣ, даже— какъ будто отчасти въ самой землѣ, — особенно у Oen. rhizocarpa, какъ показываетъ само названіе вида.

Oen. Drumondii по характеру цвѣтенія и по формѣ плодовъ ближе стоитъ къ Oen. Lamarkiana, но она однолѣтнее, а не двухлѣтнее растеніе и стебель ея сильно вѣтвится, чего нѣтъ у Oen. Lamarkiana.

Наконецъ, Oen. coccinea — сильно отличается отъ всѣхъ описанныхъ выше видовъ Oenothera, сохраняя однако основныя ботаническія черты цвѣтовъ и плодовъ. Это — сравнительно нѣжное, очень вѣтвящееся растеніе, обильно и долго цвѣтущее мелкими розовыми цвѣтами съ нижней завязью, развивающеюся въ небольшой четырехъ-гранный плодъ съ очень мелкими сѣменами, легко разсыпающимися по сосѣднимъ сосудамъ въ „стакларѣ“. Размноженіе ея не представляетъ никакихъ трудностей, чего нельзя сказать объ остальныхъ видахъ Oenothera — въ нашихъ опытахъ.

Характеръ цвѣтенія у Oen. Lamarkiana и другихъ сходныхъ съ ней — по длинѣ столбика — видовъ имѣетъ біологическій интересъ, между прочимъ, и съ точки зрѣнія болѣе сильнаго давленія пыльцевыхъ трубочекъ, при прохожденіи ихъ по всей длинѣ столбика — въ процессѣ оплодотворенія, что и отмѣчается въ біологіи.

Въ плодахъ рода Oenothera точно также огромное разнообразіе, хотя всѣ они—типа четырехстворчатой коробочки. У видовъ Oen. acaulis и Oen. rhizocarpa плоды почти приземные, довольно сходные — крупные, у Oen. acaulis нѣсколько болѣе вытянутые, чѣмъ у Oen. rhizocarpa. У Oen. Lamarkiana и Oen. Drumondii — вытянутые, длинные, узкоцилиндрическіе. У Oen. coccinea — очень мелкіе, грушевидные. Сѣмя — у всѣхъ мелкое.

7. Къ біологіи риса.

Рисъ, какъ культурное растеніе, самъ по себѣ отличается крупнѣйшей біологической особенностью: онъ въ теченіи почти всей своей вегетаціи растетъ — до извѣстной высоты — подъ водой. На практикѣ эта вода часто бываетъ стоячая, что дѣлаетъ саму культуру риса въ гигіеническомъ отношеніи нездоровой, даже опасной. И такъ какъ міровая продукція риса огромна, по временамъ превышаетъ продукцію пшеницы, то водяная проблема въ культурѣ риса имѣетъ не только научно-біологическій, но и громадный практическій интересъ.

Правда, практика знаетъ и культуру суходольнаго—нагорнаго риса, обходящагося безъ постояннаго увлажненія земли и покрытія ея большимъ слоемъ воды. Но продуктивность „сухой“ культуры риса, конечно, меньше, чѣмъ обычной — „водяной“. Поэтому водяная проблема при культурѣ остается все же въ полной силѣ. А біологическія особенности риса стоятъ въ тѣсной связи съ вѣковымъ господствомъ „водяной“ культуры этого растенія. Изъ такихъ особенностей нужно отмѣтить прежде всего характерное явленіе при проростаніи риса. Между тѣмъ какъ всѣ другія культурныя хлѣбныя растенія при проростаніи сначала развиваютъ свои первичные корни и только потомъ уже стеблевую почку, у риса проростаніе совершается въ обратномъ порядкѣ: онъ сначала выпускаетъ стебелекъ, и только черезъ два—три дня появляется первичный корешокъ. Ясно, что эта біологическая особенность риса обусловлена вѣковымъ господствомъ водяной его культуры: проростающее зерно риса всегда вполнѣ обезпечено водой, этимъ важнѣйшимъ факторомъ проростанія и роста, между тѣмъ какъ другой столь же важный факторъ — воздухъ — при водяной культурѣ является не столь легко доступнымъ. Въ борьбѣ за жизнь другія хлѣбныя растенія — въ условіяхъ „сухой“ культуры — создаютъ другой порядокъ и своего перваго жизненнаго процесса — проростанія: такъ какъ проростающее растеніе прежде всего стремится обезпечить себя влагой, оно въ первую очередь развиваетъ свою корневую систему, выполняющую эту функцію. Картина развитія корневой системы — сравнительно съ развитіемъ надземныхъ органовъ — чрезвычайно характерна и доказательна для такого біологическаго утвержденія.

Другая интересная особенность риса — его транспираціонный коэфиціентъ. Казалось бы отъ такого растенія мы могли бы ожидать значительно болѣе высокаго транспираціоннаго коэфиціента, чѣмъ у другихъ хлѣбныхъ растеній, не располагающихъ при своей культурѣ такимъ изобиліемъ влаги. На дѣлѣ это оказывается далеко не такъ. Вегетаціонные опыты, произведенные ранѣе мною лично, а въ прошломъ году и абсольвентомъ Пољопривреднаго Факултета — г. Бабамовичемъ подъ моимъ руководствомъ,—дали для риса транспираціонный коэфиціентъ всего около 500—550, т. е. на созданіе единицы сухого вещества своего урожая рисъ расходуетъ столько единицъ воды въ процессѣ своей транспираціи въ условіяхъ сосудныхъ вегетаціонныхъ опытовъ. Между тѣмъ какъ въ моихъ опытахъ 1927 г. транспираціонный коэфиціентъ, напр., гречихи былъ 603,5; льна—690,8; сои—575,1; въ опытахъ 1929 г. средній транспираціонный коэф. овса былъ 411,4 и ячменя—386,2.

Правда, болѣе правильнымъ, хотя и болѣе узкимъ, было бы сравненіе риса только съ растеніями той же біологической группы, т. е. съ такъ наз. „просовидными“ хлѣбами.

Эта группа отличается весьма малымъ транспирацiоннымъ коэфицiентомъ. Такъ и въ моихъ опытахъ 1927 г. просо дало транс. коэф. только 253,6; могар — 277,7; а кукуруза лишь 179,0. Вообще — эта группа хлѣбовъ имѣетъ почти въ два раза меньшiй трансп. коэф., чѣмъ группа „настоящихъ" хлѣбовъ — пшеница, рожь, ячмень и овесъ. Конечно, рисъ, входящiй въ первую группу, все же имѣетъ трансп. коэф. даже превышающiй коэф. „настоящихъ" хлѣбовъ, но онъ меньше, чѣмъ трансп. коэф. другихъ культурныхъ полевыхъ растенiй. Этотъ интересный и важный — въ культурномъ отношенiи — фактъ показываетъ, что господствующiй способъ культуры риса — въ водѣ — во всякомъ случаѣ обусловливается не чрезвычайно высокимъ транспирацiоннымъ коэфицiентомъ. Т. е. характеръ транспирацiи риса, какъ его природная бiологическая особенность, нисколько не исключаетъ возможности культуры его и безъ обильнаго снабженiя его водой, доходящаго до его почти безпрерывнаго затапливанiя.

Рис. 2.

Это достаточно наглядно доказывается результатами вегетацiонныхъ опытовъ съ рисомъ, произведенныхъ въ минувшемъ году въ нашемъ Институтѣ. Какъ демонстрируемые образцы кустовъ риса изъ сосудовъ, такъ и точныя данныя приводимой здѣсь таблицы, достаточно убѣждаютъ насъ въ возможности выращиванія риса даже при обычной влажности почвы, а тѣмъ болѣе — при оптимальной и максимальной, какъ это было при опытахъ прошлаго года. Въ почвѣ Земунскаго Огледнаго Добра эта влажность для мѣстнаго чернозема была принята около 40% отъ вѣса сухой почвы. —

Данныя таблицы — таковы:

№ сосудовъ.	Число кустовъ.	Число стеблей.	Сух. вещ. въ грм.	Сух. вещ. въ граммахъ. Стебель.	Листья.	Мет.	Зерно (въ метел.)	Трансп. коэф.	Сортъ.
21	4	18	61,0	20,0	30,0	11,0	9,5	507	1) „Старо семе" (остист.)
22	4	22	63,0	13,0	28,0	22,0	20,5	574	
29	4	22	66,0	14,0	26,0	26,0	14,5	494	
30	4	21	65,0	12,0	24,5	28,5	26,0	534	
23	4	19	47,5	9,5	23,5	14,5	12,0	526	2) „Ново семе" (безост.)
24	4	23	46,0	9,5	19,5	17,0	15,0	573	
31	4	28	49,0	11,0	19,5	19,0	16,5	523	
25	4	26	52,0	9,5	25,0	17,5	16,0	496	3) „Масрка" (остис. позднее)
26	4	23	52,0	8,5	22,0	21,5	19,0	471	
33	4	25	49,0	7,0	21,5	20,5	19,0	574	
34	4	24	53,0	8,0	25,0	20,0	17,5	527	

Средніе результаты — отъ отдѣльныхъ сортовъ:

	Листья		Стебли		Метелки		Зерно		Мет. безъ зеренъ	
Сортъ	Грм.	%	Грм.	%	Грм.	%	Грм.	%	Грм.	%
1	27,1	42,7	16,8	23,2	21,2	34,4	17,6	28,0	1,5	3,5
2	20,0	43,6	19,6	20,5	17,0	33,3	14,5	30,3	2,5	4,9
3	23,4	44,8	7,6	16,2	19,8	38,0	18,0	34,0	2,0	5,0

Индивидуальныя колебанія въ количествѣ зерна для отдѣльныхъ сосудовъ, — конечно, и для отдѣльныхъ кустовъ въ каждомъ сосудѣ, — достаточно велики. Но, оперируя даже только со средними величинами, мы видимъ, что средній урожай риса на одинъ сосудъ равенъ 16,7 грамма. Площадь— поверхности — сосуда, при діаметрѣ 20 сант., равна 62,8 кв. сант. При пересчетѣ урожая съ этой площади на 1 гект. мы имѣемъ урожай 26,58 м. ц. — или 159 пуд., т. е. больше средняго. Конечно, ошибка при пересчетѣ съ малыхъ площадей, — всегда въ сторону преувеличенія. Но, какъ можно видѣть и по самымъ образцамъ, урожай зерна весьма близкій къ нормальному. Качество урожая характеризуется прежде всего „абсолютнымъ" вѣсомъ зерна, т. е. — 100 зеренъ.

Вѣсъ этотъ — въ сосудахъ колебался очень мало, всего — отъ 2,7 до 2,8 грамма. Зерно риса съ плантацій въ Кочане, гдѣ работалъ г. Бабамовичъ, имѣло абсолютный вѣсъ отъ 2,18 до 3,3 грамма. Т. е. лучшіе образцы растеній риса съ плантацій, постоянно затапливаемыхъ водой, все же были сильнѣе даже лучшихъ образцовъ въ сосудахъ.

Еще интереснѣе другая біологическая особенность — степень развитія остей (у остистыхъ формъ риса): на плантаціяхъ остистость колебалась въ предѣлахъ отъ 1,5 до 2,0% отъ вѣса зерна. Между тѣмъ какъ въ сосудахъ, гдѣ влажность была не столь обильна, остистость поднялась до 3,3%. Это говоритъ, конечно, о томъ, что растеніе даже при относительно меньшей влажности среды, въ которой оно вынуждено развиваться, усиливаетъ развитіе своихъ транспираціонныхъ органовъ, къ числу которыхъ относятся и остья. Усиленіе остистости — по закону корреляціи — идетъ за счетъ ослабленія самого зерна, какъ ни мала вообще — въ случаѣ риса — количественная роль остей.

Въ такомъ же направленіи идетъ и такую же роль играетъ и п л е н ч а т о с т ь зерна риса, какъ біологическая особенность, принимаемая во вниманіе при оцѣнкѣ качества зерна. И тутъ развитіе риса въ сосудахъ, по сравненію съ наводняемыми плантаціями, даетъ менѣе благопріятную картину. Пленчатость риса — въ % вѣса зерна — составляла на плантаціяхъ отъ 18,0 до 20,0%, тогда какъ въ сосудахъ она колебалась отъ 23,0 до 26,0%. Т. е. покрова зерна — пленки — сильнѣе развивались при менѣе благопріятныхъ условіяхъ роста въ сосудахъ, чѣмъ при обычныхъ условіяхъ— на заливныхъ плантаціяхъ.

Всѣ эти біологическія явленія, наблюдаемыя при различныхъ условіяхъ культуры риса, вполнѣ согласуются съ общими положеніями біологіи растеній, хорошо демонстрируемыми напр. при сравненіи дикихъ формъ съ культурными, — напр. Hordeum spontaneum и H. sativum; Avena fatua и Av. sativa, и т. д. Несомнѣнно, что и дикія формы риса, встрѣчаемыя напр. въ Индокитаѣ, отличаются отъ культурныхъ тѣми же корреляціями органовъ, особенно плоды, какія мы видимъ у ячменя, овса и др., или напр. у сорго, о чемъ сказано выше.

Но самымъ важнымъ изъ всего сказанаго здѣсь о біологическихъ особенностяхъ риса является то положеніе, что непремѣнное затапливаніе риса при его культурѣ едва-ли является — біологически — абсолютно необходимымъ.

Г. Н. Піо-Ульскій.

ЗАМѢТКА О КОЭФФИЦІЕНТѢ ПОЛЕЗНАГО ДѢЙСТВІЯ ГАЗОВЫХЪ МАШИНЪ.

При сравненіи тепловыхъ двигателей между собою прибѣгаютъ къ такъ называемымъ „идеальнымъ" или къ „образцовымъ" цикламъ. Идеальнымъ цикломъ въ этомъ случаѣ является циклъ Карно, составленный изъ двухъ изотермъ и двухъ адіабатъ и имѣющій наибольшее численное значеніе. Для всѣхъ двигателей, въ составъ цикла которыхъ входятъ изотермы верхней и нижней температуры, к. п. д. цикла Карно, выражающійся отношеніемъ $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, служитъ непосредственнымъ критеріумомъ для оцѣнки ихъ экономичности. Извѣстно, что практическое осуществленіе цикла Карно въ тепловыхъ двигателяхъ сопряжено съ конструктивными затрудненіями, а потому процессы дѣйствительныхъ тепловыхъ машинъ выполняютъ по другимъ схемамъ, отличнымъ отъ цикла Карно и тогда эти циклы оцѣниваютъ по такъ называемымъ „образцовымъ" цикламъ, к. п. д. которыхъ всегда будетъ меньше к. п. д. цикла Карно.

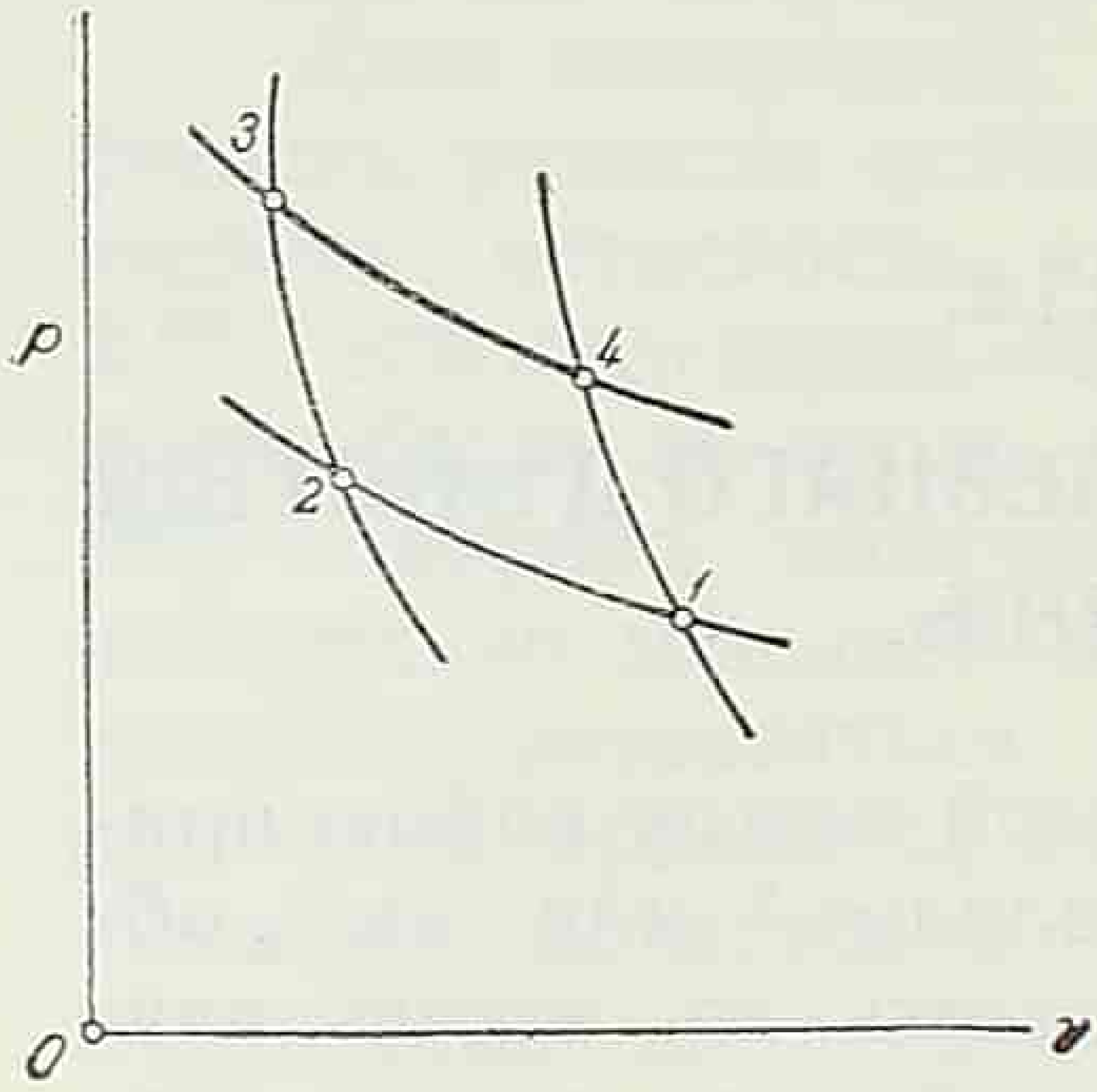
Образцовые циклы могутъ быть подраздѣлены на два типа: одни, въ составъ которыхъ входятъ изотермы верхняго и нижняго температурныхъ уровней, а другіе, которые составлены, кромѣ двухъ адіабатъ, изъ двухъ политропъ, двухъ изобаръ или двухъ изохоръ. Въ первомъ случаѣ въ выраженіи к. п. д. обязательно должно входить соотношеніе между верхнею и нижнею температурою и онъ можетъ быть непосредственно сравниваемъ съ к. п. д. цикла Карно.

Во второмъ случаѣ въ выраженіи к. п. д. можетъ не входить соотношеніе между крайними температурами, а вмѣсто этого входитъ отношеніе другихъ температуръ процесса, но которое является величиною зависящею отъ отношенія крайнихъ температуръ.

Напримѣръ, циклъ, составленный изъ двухъ политропъ и двухъ изобаръ, являющійся общимъ случаемъ цикловъ, составленныхъ изъ двухъ изохоръ или двухъ изобаръ и двухъ адiабатъ имѣетъ выраженiемъ к. п. д. соотношенiе

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}},$$

гдѣ T_1 и T_2 температуры, соотвѣтствующiя точкамъ процесса 1 и 2 (черт. 1), а ε — степень сжатiя.



Черт. 1.

Отношенiе $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}$ непосредственно зависитъ отъ отношенiя крайнихъ температуръ $\frac{T_1}{T_3}$, ибо чѣмъ выше степень сжатiя газа, тѣмъ выше отношенiе крайнихъ температуръ $\frac{T_3}{T_1}$.

Для двигателей внутренняго сгоранiя взрывного типа съ неполнымъ расширенiемъ принятъ циклъ, состоящiй изъ двухъ адiабатъ и двухъ изохоръ. Этотъ циклъ впервые былъ предложенъ инженеромъ Beau de Rochat и впослѣдствiи широко былъ использованъ Otto. Для того чтобы этотъ циклъ дѣйствительно былъ образцовымъ нужно прежде всего соблюсти постоянство состава рабочаго вещества. Такъ какъ въ двигателяхъ внутренняго сгоранiя при процессѣ превращенiя теплоты въ работу имѣется процессъ горѣнiя, то для выполненiя этого условiя необходимо было прибѣгнуть къ ассимиляцiи, т. е. къ воображаемой замѣнѣ перемѣннаго состава вещества идеальнымъ газомъ, каковымъ для настоящаго случая былъ избранъ воздухъ. Оправданiемъ этому могло служить то обстоятельство, что до горѣнiя рабочая смѣсь есть ничто иное, какъ горючее, растворенное въ большомъ количествѣ воздуха, а послѣ горѣнiя продукты сгоранiя представляютъ собою смѣсь воздуха и азота съ небольшимъ количествомъ углекислоты.

Такимъ образомъ въ образцовомъ циклѣ предполагаютъ, что рабочимъ веществомъ служитъ воздухъ, который, въ перiодъ процесса сгоранiя, какъ бы принимаетъ изъ теплаго источника количество тепла равное тому, которое получается при сгоранiи рабочей смѣси.

Кромѣ выбора для идеальнаго цикла рабочаго вещества, идеальный циклъ по опредѣленiю Комитета англiйскихъ гражданскихъ инженеровъ (Institution of Civil Engineers), который его назвалъ „Air Standart“, долженъ удовлетворить слѣдующимъ условiямъ:

1) Во время совершенiя цикла не должно быть никакого теплообмѣна между рабочимъ веществомъ и металломъ.

2) Горѣніе должно быть полнымъ и мгновеннымъ.

3) Теплоемкости должны разсматриваться какъ независимыя величины отъ давленія и температуры.

Послѣднее условіе является несовмѣстимымъ со свойствами воздуха, какъ рабочаго вещества, ибо извѣстно, что при высокихъ температурахъ теплоемкости воздуха въ значительной мѣрѣ увеличиваются. Отсюда ясно, что полезное дѣйствіе дѣйствительнаго процесса ни коимъ образомъ не можетъ приближаться къ созданному указаннымъ Комитетомъ критеріуму. При принятіи во вниманіе увеличенія теплоемкостей при высокихъ температурахъ, к. п. д. образцоваго цикла получается значительно меньшимъ, чѣмъ при неправильномъ предположеніи независимости этихъ теплоемкостей отъ температуры. Отсюда слѣдуетъ, что к. п. д. двигателей взрывнаго типа, выражающійся соотношеніемъ

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}$$

является лишь весьма приблизительнымъ и требующимъ исправленія, которое и должно выразиться въ принятіи перемѣнности теплоемкостей отъ температуры.

Зависимость теплоемкостей газовъ отъ температуры выражается слѣдующими уравненіями:

$$c_v = a + bT + cT^2$$

и

$$c_p = a' + bT + cT^2$$

Въ общемъ видѣ к. п. д. двигателей взрывного типа можно представить, какъ соотношеніе (см. черт. 2)

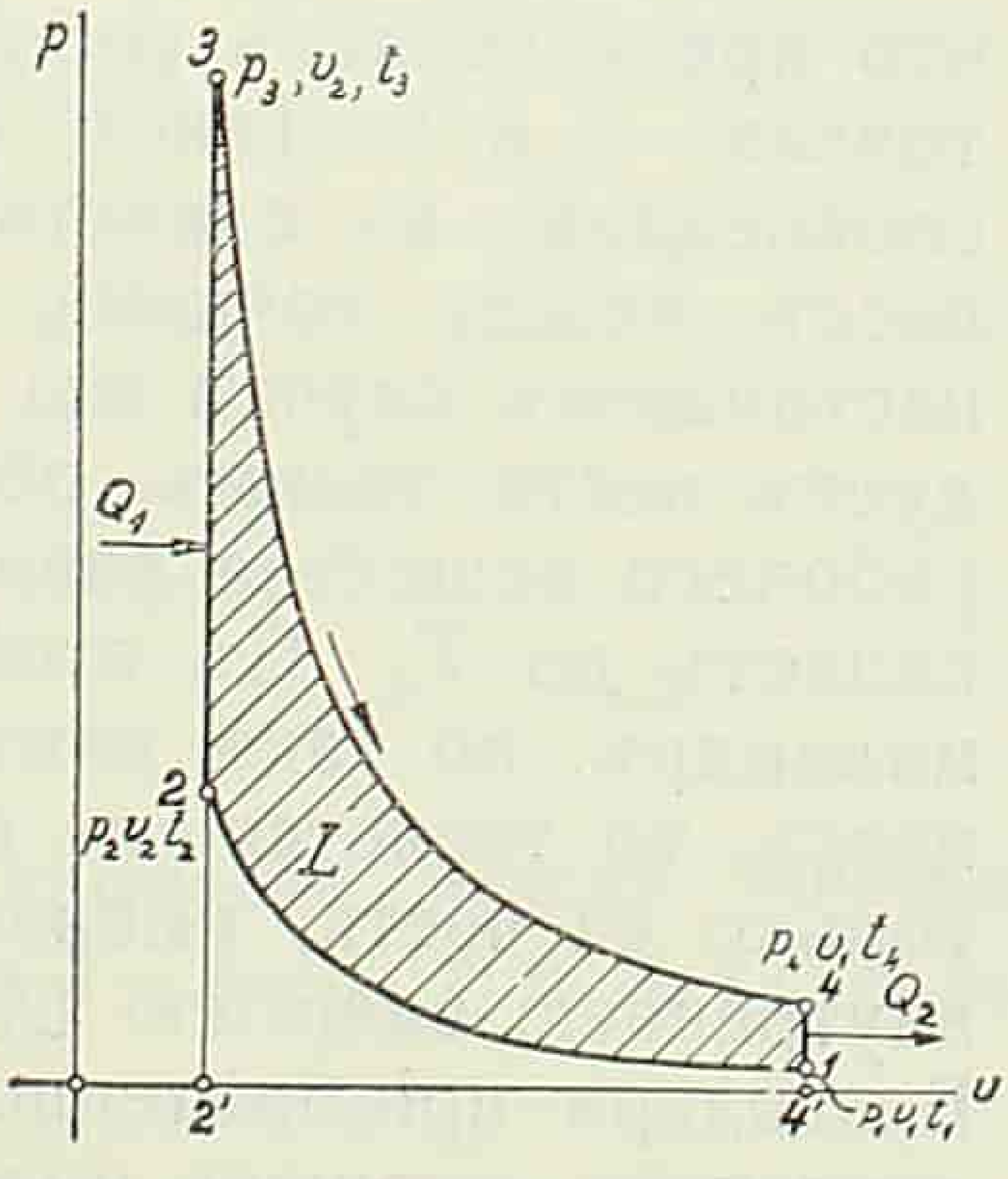
$$\eta_t = \frac{(U_3 - U_4) - (U_2 - U_1)}{U_3 - U_2} = \frac{c_v\,(T_3 - T_4) - c_v'\,(T_2 - T_1)}{c_v''\,(T_3 - T_2)}.$$

Для полученія численнаго значенія этого соотношенія необходимо знать температуры T_3, T_4 и T_2, температуру же T_1 считаемъ извѣстною и заданною.

Для полученія температуры T_4 и T_2 необходимо знать уравненіе адіабаты, которое для этого случая выразится чрезъ

$$T^a\, v^{a'-a}\, e^{bT + \frac{cT^2}{2}} = Const.$$

Примѣняя это уравненіе къ адіабатѣ 2—1, имѣемъ



Черт. 2.

$$T_2^{\ a} v_2^{\ a'-a} e^{bT_2 + \frac{cT_2}{2}} = T_1^{\ a} v_1^{\ a'-a} e^{bT_1 + \frac{cT_1^2}{2}},$$

откуда и можемъ опредѣлить температуру T_2.

Совершенно также можетъ быть составлено уравнен е ля адiабаты 3—4, изъ котораго опредѣляется температура T_4, если намъ извѣстна температура T_3. Температура же T_3 опредѣлится изъ:

$$Q = U_3 - U_2 = \int_{T_2}^{T_3} c_v dt = \left[aT + \frac{bT^2}{2} + \frac{cT^3}{3} \right]_{T_2}^{T_3}.$$

Зная, что

$$U = U_0 + c_v T$$

и, имѣя опредѣленными температуры T_3, T_4, T_2, мы найдемъ к. п. д.

Существуетъ попытка доказать, что к. п. д. цикла Отто можетъ быть представленъ, какъ произведенiе $1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}$ на к. п. д. цикла Карно.

Однако эта попытка базируется на неправильныхъ разсужденiяхъ.

К. п. д. цикла въ общемъ видѣ выражается чрезъ

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

При сдѣланныхъ допущенiяхъ постоянства теплоемкостей

$$Q_1 = c_v (T_3 - T_2),$$

между тѣмъ какъ въ упомянутой выше попыткѣ Q_1 принято равнымъ

$$Q_1 = c_v (T_3 - T_1),$$

что представляетъ собою разность внутреннихъ энергiй въ точкахъ 3 и 1. Такое выраженiе для Q_1 было бы вполнѣ справедливо въ единственномъ только случаѣ, если бы процессъ между точками 1 и 3 происходилъ по изохорѣ. Въ настоящемъ случаѣ мы этого не имѣемъ и разсужденiе слѣдуетъ вести такимъ образомъ. Послѣ взрыва температура рабочего вещества равна T_3, послѣ расширенiя температура падаетъ до T_4. Съ этой температурою вещество оставляетъ цилиндръ, но такъ какъ мы предполагаемъ циклическiй процессъ, то теряется не вся внутренняя энергiя $U_0 + c_v T_4$, а только ея часть, именно $c_v (T_4 - T_1)$. Рабочее вещество съ внутреннею энергiею $U_0 + c_v T_1$ снова начинаетъ свой циклъ. Благодаря прiобрѣтенной живой силы движущихся частей двигателя, поршень цилиндра адiабатически сжимаетъ рабочую смѣсь, происходитъ внутренняя работа и внутренняя энергія рабочей смѣси повышается до значенія $U_0 + c_v T_2$. Все это происходитъ за счетъ энергіи, сообщенной рабочему веществу во время взрыва рабочей смѣси. Такимъ образомъ теплу, выдѣлившемуся при слѣдующемъ взрывѣ необходимо повысить внутреннюю энергію отъ значенія $c_v T_2 + Const$ до значенія $c_v T_3 + Const$ и такимъ образомъ

$$Q_1 = c_v (T_3 - T_2).$$

Примѣняя къ части процесса между точками 1 и 3 первый законъ термодинамики, будемъ имѣть

$$Q_1 = U_3 - U_1 + AL.$$

Въ этомъ случаѣ работа AL происходитъ за счетъ измѣненія внутренней энергіи, а потому

$$AL = U_1 - U_2$$

и слѣдовательно,

$$Q = U_3 - U_1 + U_1 - U_2$$

или

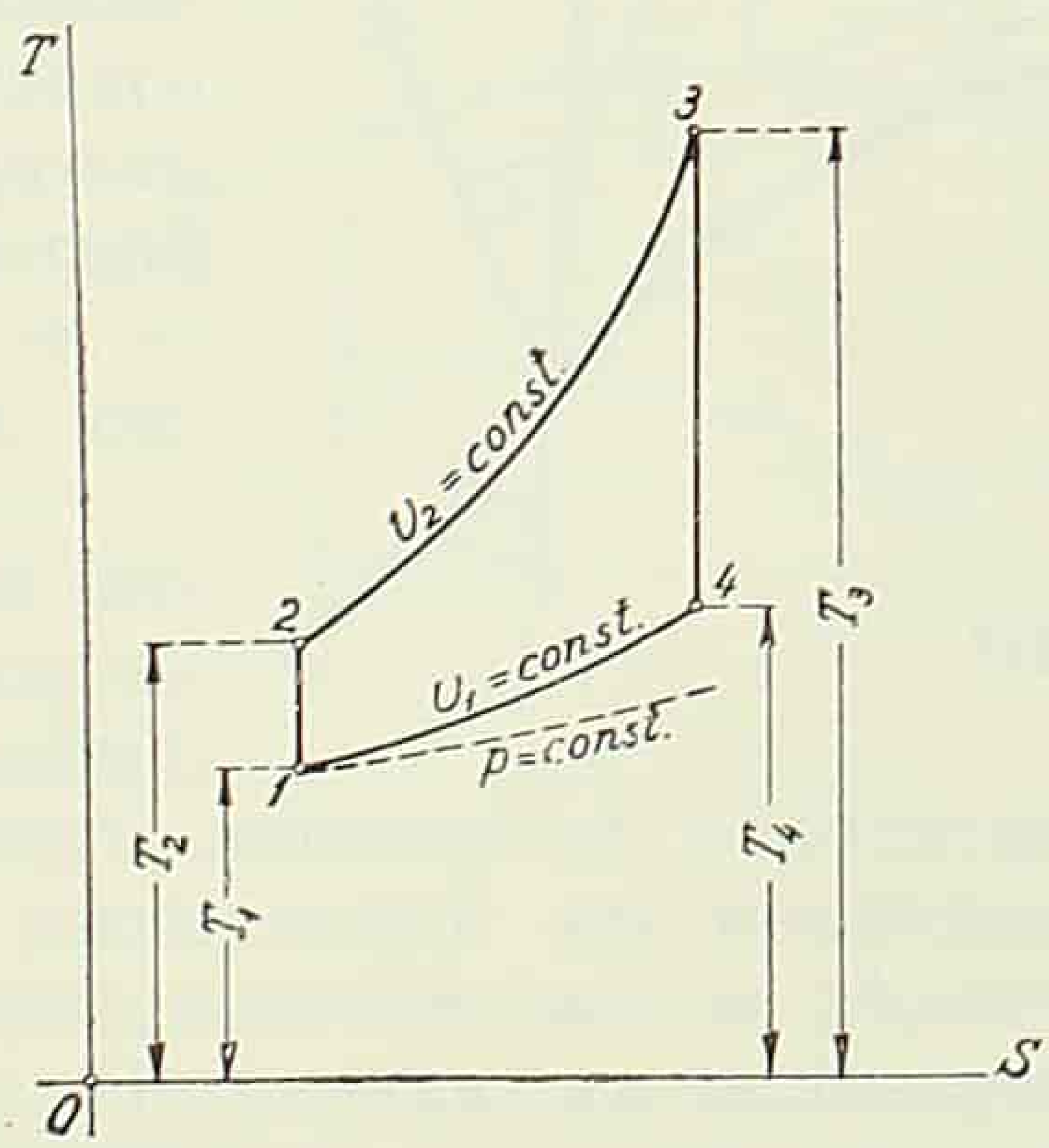
$$Q_1 = U_3 - U_2 = c_v (T_3 - T_2).$$

Такимъ образомъ предположеніе, что

$$Q_1 = c_v (T_3 - T_1)$$

является неправильнымъ.

Справедливость выраженія $Q_1 = c_v (T_3 - T_2)$ ясно выражается на діаграммѣ цикла въ координатахъ $T - S$ (черт. 3).



Черт. 3.

Количество тепла потребное для процесса между точками 1 и 3 равно площади подъ кривою 1—2—3, т. е. $c_v (T_3 - T_2)$.

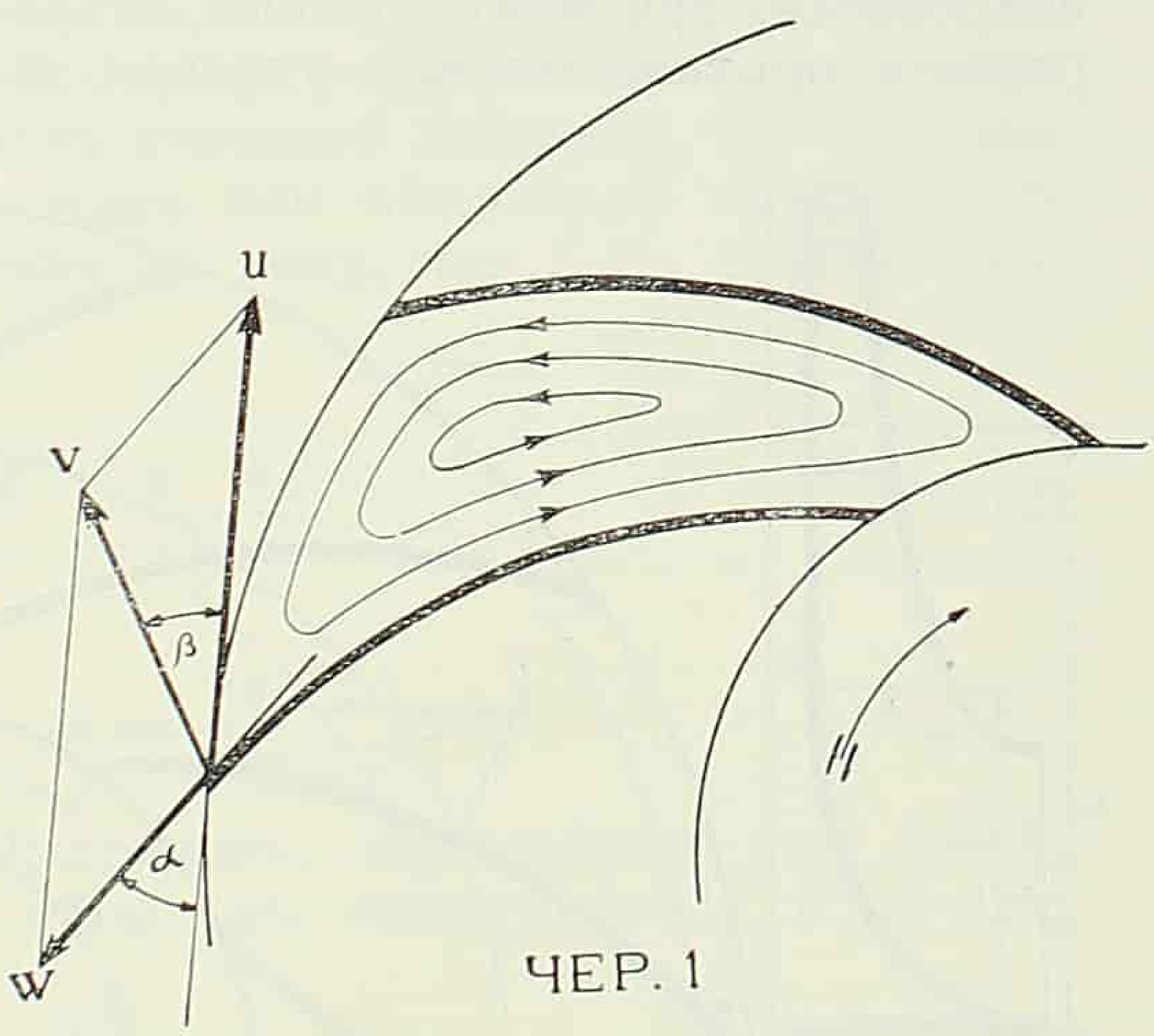
Проф. Д. Рузскій.

ИСПРАВЛЕНІЕ КЪ ТЕОРІИ ЦЕНТРОБѢЖНАГО НАСОСА.

Извѣстно, что обыкновенная элементарная теорія центробѣжнаго насоса приводитъ къ неточному выраженію для окружной скорости u (чер. 1)

$$u=\sqrt{\frac{gH}{\eta}(1+tg\beta\cdot ctg\alpha)}$$

гдѣ H — напоръ, который долженъ создать насосъ, η_1 — гидравлическій коэф. полезнаго дѣйствія, β — уголъ между u и абсолютной скоростью v и α — уголъ лопатки съ окружностью.



ЧЕР. 1

Причина этой неточности есть результатъ предположенія, что вода оставляетъ лопатку съ относительной скоростью, направленной по касательной къ послѣднему элементу лопатки. Въ дѣйствительности же w дѣлаетъ съ окружностью уголъ $\alpha' < \alpha$. Не вникая въ основную причину этого явленія, prof. Pfleiderer[1]) на основаніи многихъ предположеній вычислилъ приблизительно это отклоненіе струи и пришелъ къ заключенію, что основное ур-іе теоріи центробѣжнаго насоса

---

[1]) C. Pfleiderer: „Die Kreiselpumpen“ Berlin. 1924.

$$uv \cdot cos\beta = \frac{g \cdot H}{\eta_1}$$

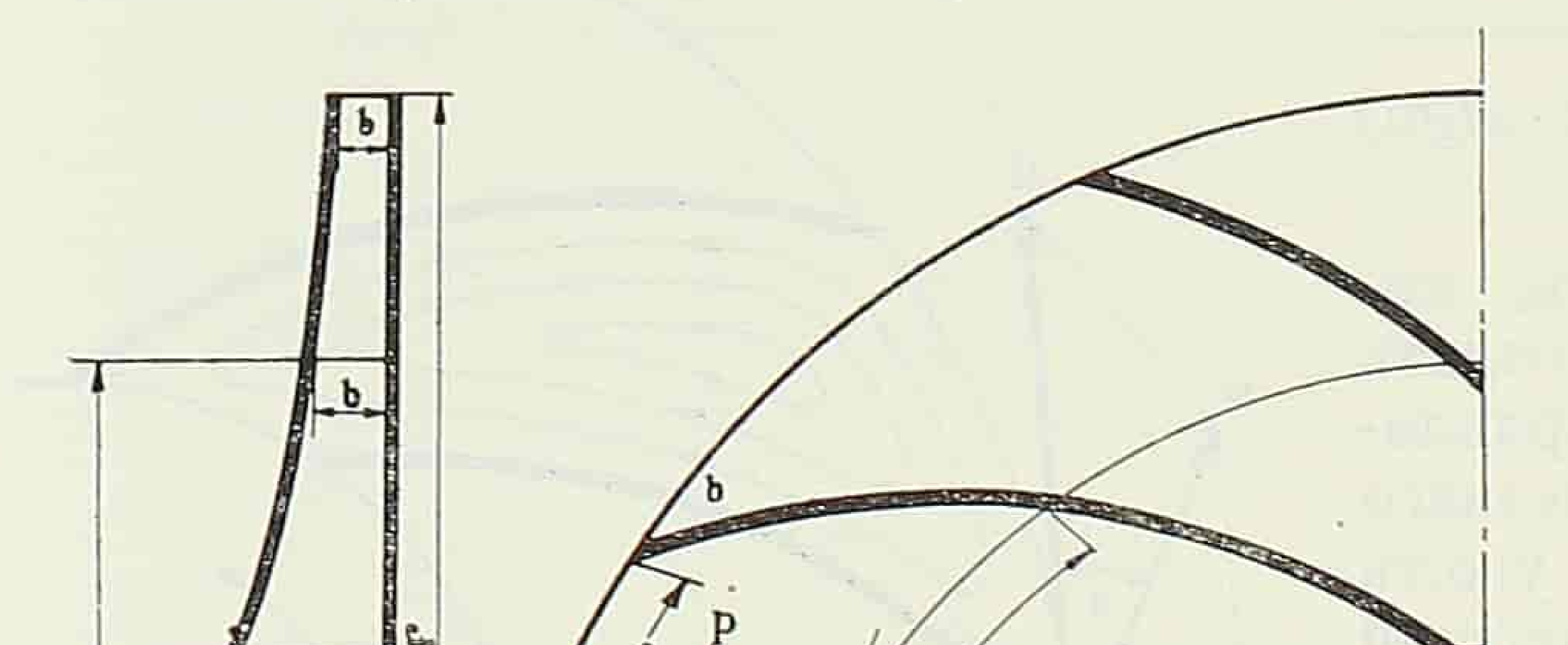
нужно исправить такъ

$$\frac{uv \cdot cos\beta}{1+m} = \frac{g \cdot H}{\eta_1},$$

гдѣ m — нѣкоторая постоянная величина для даннаго насоса, не превышающая для обыкновеннаго насоса съ лопатками, загнутыми въ сторону обратную вращенію, 0,1 — 0,15. Иными словами для полученія правильнаго результата данную величину напора надо увеличить на 10—15%.

Но задачу эту можно рѣшить совершенно иначе, чѣмъ рѣшилъ ее prof. Pfleiderer, исходя изъ существа явленія, которое заключается въ слѣдующемъ.

Вода притекаетъ къ насосу безъ вихря въ плоскости, перпендикулярной къ оси насоса, поэтому абсолютное движеніе воды между лопатками должно оставаться невихревымъ, а относительное движеніе должно быть наоборотъ вихревымъ, при чемъ угловая скорость вихря должна быть равна и противоположна угловой скорости вращенія насоса. Такимъ образомъ, вода между лопатками, имѣя общее среднее движеніе отъ центра къ периферіи, еще и циркулируетъ въ направленіи, указанномъ на чер. (2) стрѣлками, такъ что на рабочей сторонѣ лопатки относительная скорость воды равна $(w-c)$, гдѣ w — средняя относительная скорость и c скорость циркуляціи, а на задней на той же окружности — $(w+c)$. Это даетъ разность давленія съ двухъ сторонъ лопатки на единицу поверхности $p = \frac{2wc}{g}\Delta$, гдѣ Δ вѣсъ единицы объема воды.



ЧЕР. 2.

Зная p, можно вычислить работу насоса. Обозначая черезъ dl — элементъ длины лопатки, черезъ b — ширину лопатки (разстояніе между двумя ободами колеса), соотвѣтствующую данной окружности (чер. 2), черезъ z число лопатокъ и черезъ Q расходъ насоса, найдемъ, что работа элемента лопатки будетъ

$$dL = dM \cdot \omega = p \cdot b \cdot dl \cdot Sin\alpha \cdot r\omega = \frac{2wc\Delta}{g} b \cdot Sin\alpha \cdot dl \cdot r \cdot \omega.$$

и
$$L = \int_0^l \frac{2wc\Delta}{g} b \cdot Sin\alpha \cdot r \cdot \omega \cdot zdl.$$

Обозначая радіальную скорость черезъ v_r найдемъ

$$w \cdot Sin\alpha = v_r \text{ и } 2\pi r v_r b \cdot \rho = Q$$

гдѣ ρ коэф. суженія лопатками.

Такимъ образомъ

$$L = \int_0^l \frac{c\Delta}{g}, \frac{Q \cdot z \cdot \omega}{\pi \cdot \rho} dl \ . \ . \ . \qquad (1)$$

Чтобы совершить интеграцію, надо знать зависимость c отъ l, что весьма затруднительно опредѣлить теоретически, ибо въ данномъ случаѣ, благодаря уменьшенію b отъ центра къ периферіи, мы не имѣемъ плоскаго движенія. Но если мы будемъ считать c постояннымъ или нѣкоторой средней величиной, то получимъ, имѣя въ виду, что L съ другой стороны равно $\frac{H\Delta Q}{\eta_1}$,

$$c = \frac{H \cdot g}{\eta_1} \cdot \frac{\pi \cdot \rho}{z \cdot l \cdot \omega} \ . \ . \ . \ . \qquad (2)$$

Величина

$$m = \frac{\pi\rho}{zl\omega}$$

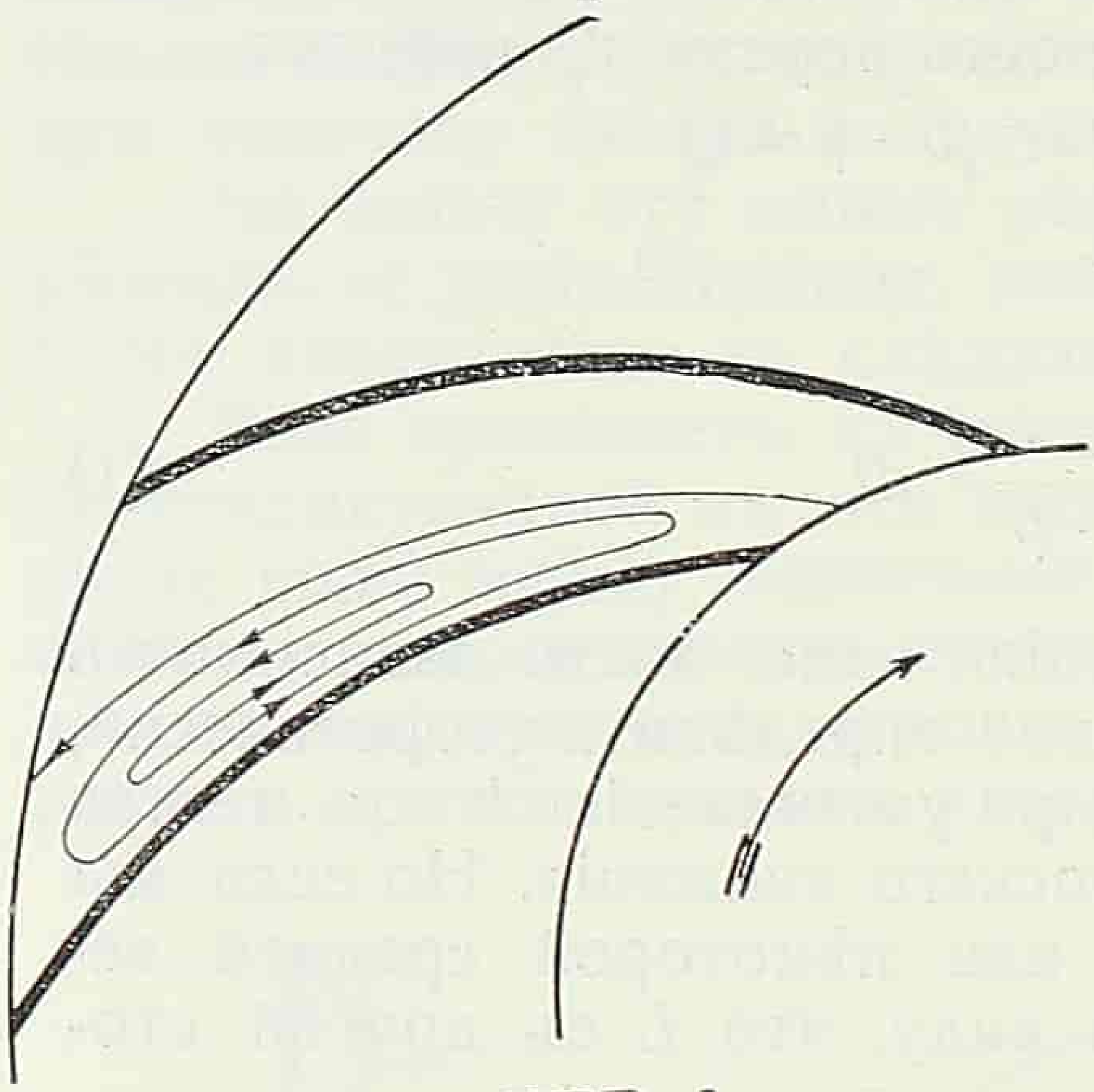
весьма незначительна. Положимъ, напримѣръ, что $z = 6$, $l = 0{,}2$ $mt.$, ω (при 1500 обор. въ минуту) $= 50\pi$ и $\rho = 0{,}9$; тогда найдемъ

$$m = \frac{2{,}8}{6 \cdot 0{,}2 \cdot 50\pi} = 0{,}015.$$

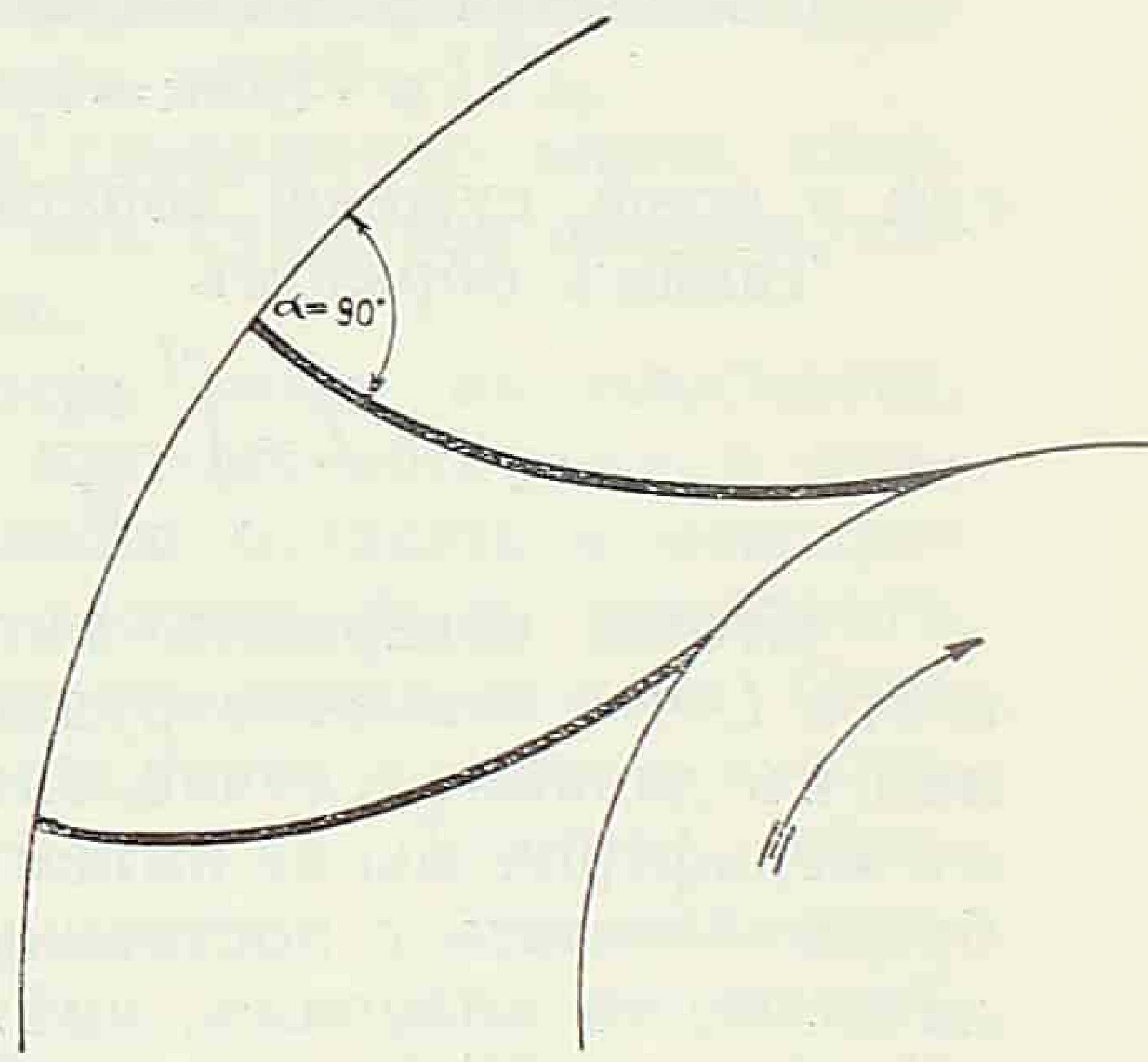
Если положимъ, что $\frac{Hg}{\eta_1} = 500$—это почти крайній случай для одного насоса, то

$$c = 500 \cdot 0{,}015 = 7{,}5 \ \frac{mtr.}{sek.}$$

При такихъ условіяхъ c можетъ оказаться $> w$ и тогда получится слѣдующая картина движенія между лопатками (чер. 3,а): вода будетъ совершать около рабочей стороны лопатка вращательное движеніе. Особенно легко такая картина можетъ получиться при лопаткахъ, загнутыхъ въ сторону движенія (чер. 3,b), ибо въ этомъ случаѣ при прочихъ равныхъ условіяхъ i и ω получаются меньше, а m и c больше. Вотъ почему въ настоящее время строятъ насосы только съ лопатками, загнутыми въ сторону обратную движенію, и по возможности съ малыми углами α. Кромѣ того лопатки съ угломъ $\alpha > 90^\circ$ вслѣдствіе рѣзкаго закругленія вызываютъ большія потери напора и уменьшеніе η_1, что также имѣетъ послѣдствіемъ увеличеніе c.



ЧЕР. 3a.

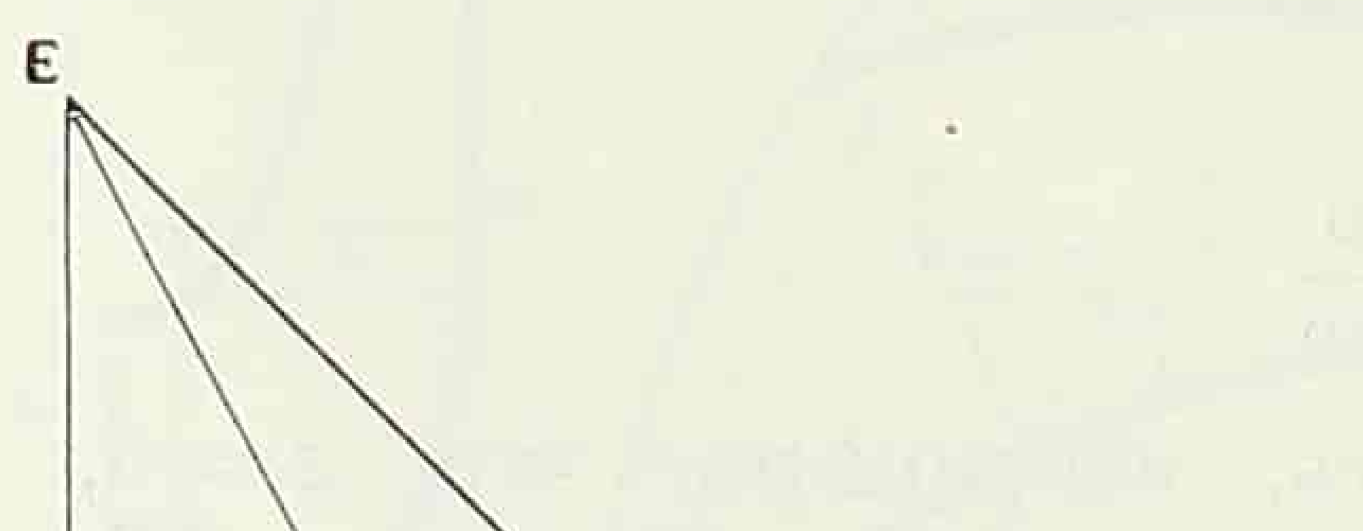


ЧЕР. 3b.

Намъ остается еще найти среднюю скорость λ циркуляціи воды вдоль дуги ab (чер. 2). Такъ какъ скорость эта несомнѣнно зависитъ отъ скорости c, то положимъ

$$c = n\lambda$$

и изобразимъ діаграмму скоростей при выходѣ изъ колеса насоса (чер. 4).



ЧЕР. 4.

Здѣсь $AB = u$, α — уголъ лопатки съ окружностью, w — относительая скорость въ направленіи касательной къ краю лопатки, w_1 — дѣйствительная относительная скорость и α_1 ея уголъ съокружностью, v_1 — дѣйствительная абсолютная скорость и v — абсолютная скорость, которую имѣла бы вода при отсутствіи циркуляціи.

На основаніи ур-ія (2) и имѣя въ виду основное ур-іе теоріи центроб. насоса, найдемъ

$$n\lambda = \frac{gH}{\eta_1} m = m \cdot u \cdot v_1 cos\beta_1 = mu(u - v_r ctg\alpha - \lambda)$$

откуда

$$\lambda = \frac{u - v_r ctg\alpha}{mn + n} mu.$$

Изъ этого выраженія видно, что λ зависитъ линейно отъ v_r, т. е. отъ Q. Если мы положимъ $Q=o$, то найдемъ

$$\lambda_0 = BS = \frac{mu^2}{mu+n}$$

или, имѣя въ въ виду, что $u=\omega r$ и $m=\frac{\pi\rho}{\omega zl}$

$$\lambda_0 = \frac{\pi r \cdot \rho}{\pi\rho r + nlz} = BS.$$

Если мы положимъ $\lambda=o$, то найдемъ

$$u = v_r ctg\alpha.$$

Изъ этого видно, что если мы продолжимъ w до пересѣченія въ точкѣ E съ перпендикуляромъ къ AB въ точкѣ A и затѣмъ соединимъ E и S прямою, то при различныхъ v_r горизонтальный отрѣзокъ между прямыми ES и EB дастъ намъ соотвѣтствующее значеніе для λ. Къ такому же результату приходитъ приблизительно и Pfleiderer, только онъ не даетъ надлежащаго толкованія тому, что представляетъ собою λ.

На основаніи подобія треугольниковъ (чер. 4) найдемъ

$$\frac{AB}{GD} = \frac{AE}{GE} = \frac{AS}{GC}$$

или

$$\frac{u}{vcos\beta} = \frac{u - \lambda_0}{v_1 cos\beta_1}$$

откуда

$$v_1 cos\beta_1 = vcos\beta\left(1 - \frac{\lambda_0}{u}\right) = \frac{nlz}{\pi\rho r + nlz} \cdot vcos\beta.$$

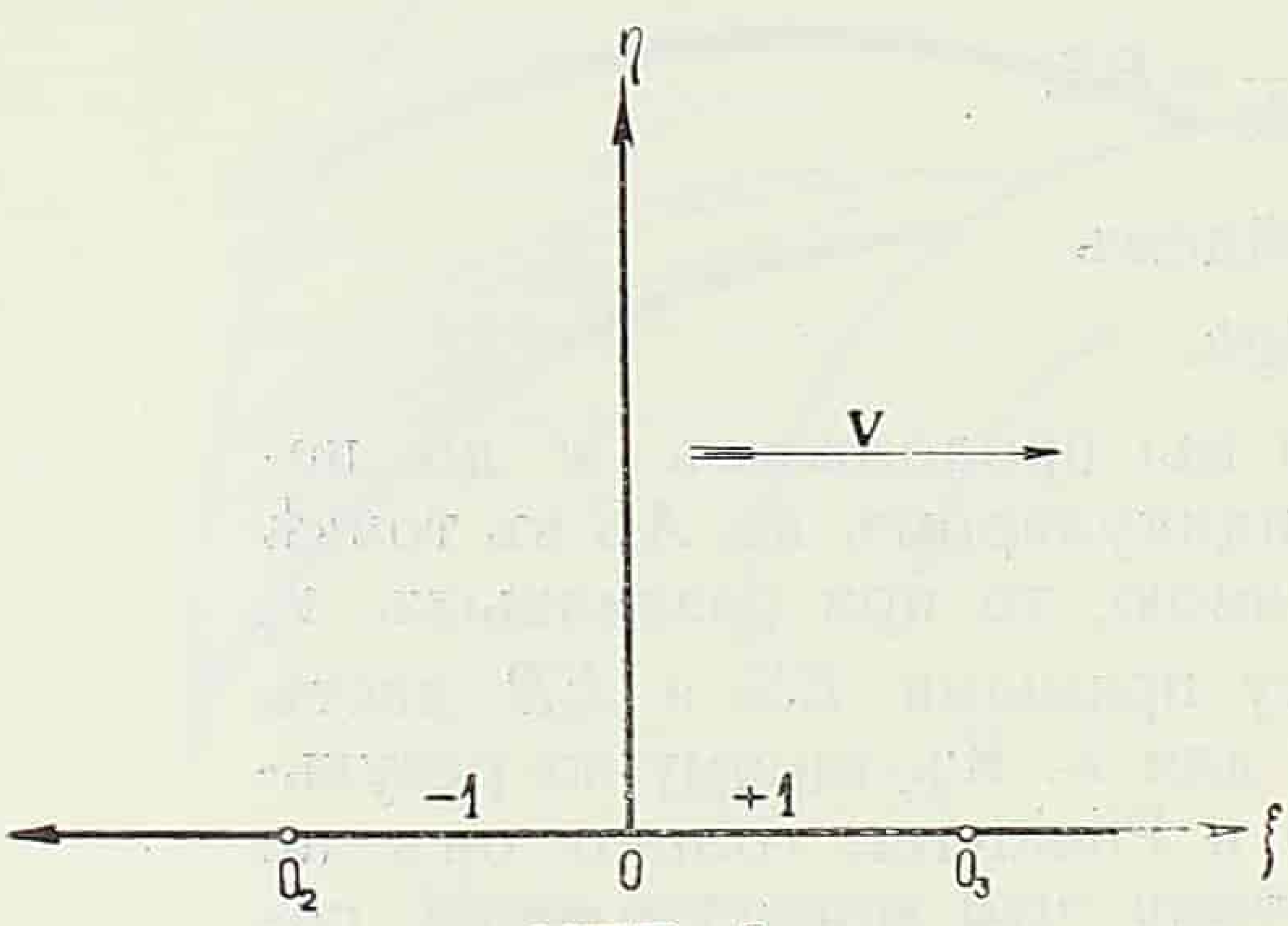
Иными словами, центробѣжный насосъ можно разсчитывать, не считаясь съ циркуляціей воды между лопатками, толькой основное ур—ніе надо написать въ такомъ видѣ

$$uvcos\beta = \frac{gH}{\eta_1} \cdot \frac{\pi\rho r + nlz}{nlz} \quad . \ . \ . \ . \qquad (3)$$

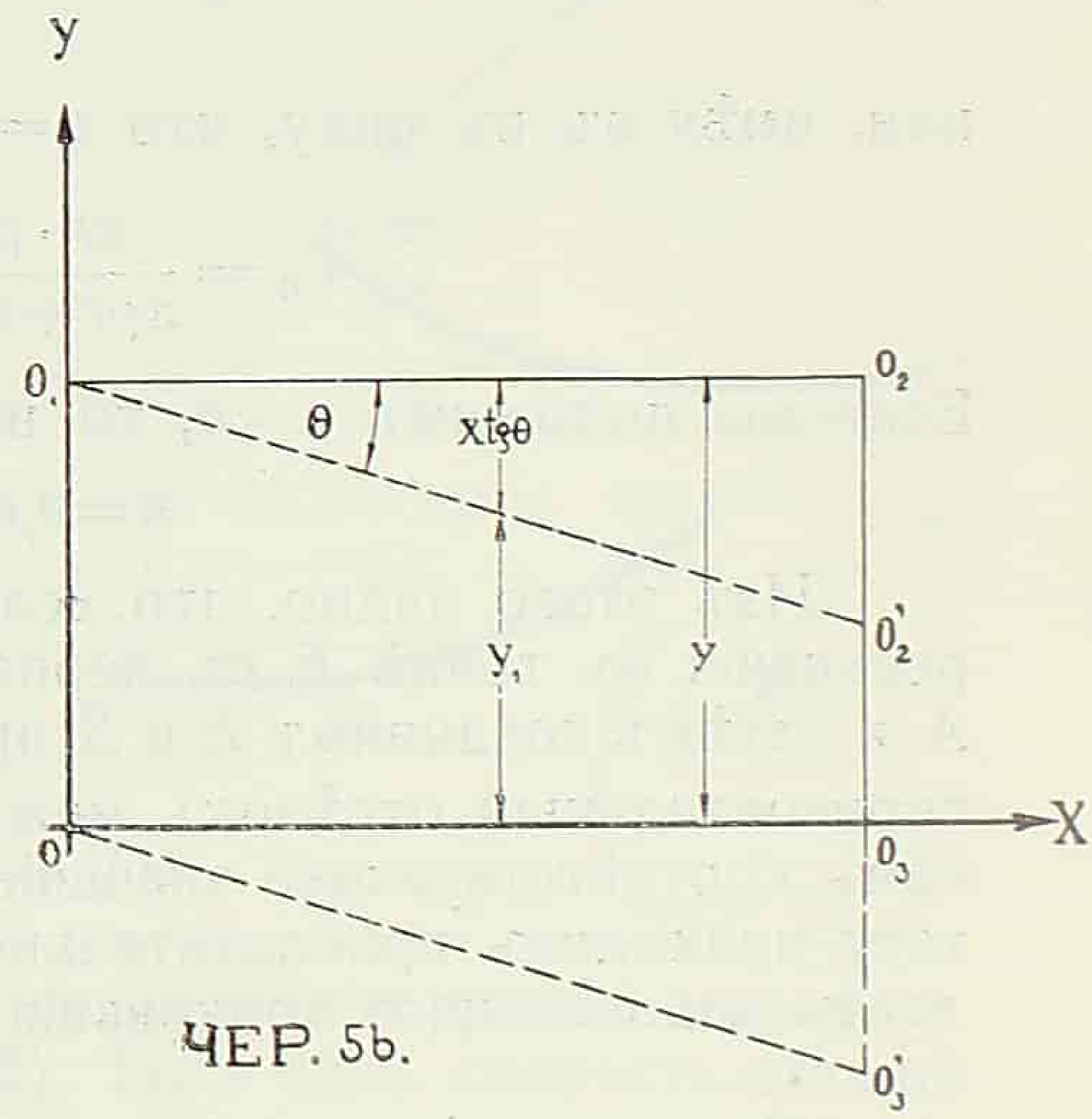
При $z=\infty$ множитель во второй части обращается въ единицу.

Намъ остается только опредѣлить величину n Для этого воспользуемся методомъ конформныхъ преобразованій и преобразуемъ полуплоскость $\varsigma=\xi+i\eta$ (чер. 5,а) въ полупрямоугольникъ въ плоскости $z=x+iy$ (чер. 5,b, считая для этого случая движеніе между лопатками колеса насоса плоскимъ.

Предположимъ, что въ полуплоскости ς мы имѣемъ равномѣрный потокъ параллельный оси ξ съ постоянной скоростью V и что периметръ прямоугольника разложенъ по оси ξ такъ, что вершинѣ o_2 соотвѣтствуетъ точка — 1, а вершинѣ o_3 — точка + 1.



ЧЕР. 5а.



ЧЕР. 5b.

Какъ извѣстно въ данномъ случаѣ преобразованіе производится при помощи формуры Шварца Кристофеля, которая для даннаго случая имѣетъ такой видъ

$$dz=\frac{c\,d\varsigma}{(\varsigma-\varsigma_1)^{1/2}(\varsigma-\varsigma_2)^{1/2}}\;.\;.\;.\;. \qquad (4)$$

гдѣ ς — текущая координата, ς_1 и ς_2 координаты вершинъ полупрямоугольника и c — постоянная величина.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $\varsigma_2>\varsigma_1$, и что точка ς движется по оси $o\xi$. Пока $\varsigma<\varsigma_1$, аргументы обоихъ векторовъ $(\varsigma-\varsigma_1)^{1/2}$ и $(\varsigma-\varsigma_2)^{1/2}$ будутъ оставаться равными $\frac{\pi}{2}$, а

ментъ ихъ произведенія равнымъ π, т. е. точка z будетъ двигаться по прямой. Если $\varsigma_1<\varsigma<\varsigma_2$, то аргументъ $(\varsigma-\varsigma_1)^{1/2}$ $(\varsigma-\varsigma_2)^{1/2}=\frac{\pi}{2}$ и опять z движется по прямой, и, наконецъ, если $\varsigma > \varsigma_2 > \varsigma_1$, то аргументъ вектора $(\varsigma-\varsigma_1)^{1/2}\,(\varsigma-\varsigma_2)^{1/2} = o$ и точка z движется по третьей прямой. Если $\varsigma=\varsigma_1$ и $\varsigma=\varsigma_2$ — точка z переходитъ черезъ вершины.

Преобразуемъ выраженіе (4), положивъ

$$\varsigma' = 2\frac{\varsigma-\varsigma_1}{\varsigma_2-\varsigma_1} - 1 \ldots \tag{5}$$

тогда при $\varsigma=\varsigma_1$, $\varsigma'=-1$, а при $\varsigma=\varsigma_2$, $\varsigma'=1$, такъ что угламъ o_2 и o_3 будутъ соотвѣтствовать въ плоскости ς' координаты -1 и $+1$.

Изъ (5) имѣемъ

$$d\varsigma = \frac{d\varsigma'}{2}(\varsigma_2-\varsigma_1)$$

$$\varsigma-\varsigma_1 = \frac{(\varsigma'+1)}{2}(\varsigma_2-\varsigma_1)$$

и $$\varsigma-\varsigma_2 = \frac{(\varsigma'+1)}{2}(\varsigma_2-\varsigma_1)+\varsigma_1-\varsigma_2 = \frac{(\varsigma'-1)}{2}(\varsigma_2-\varsigma_1)$$

Подставляя въ (4), найдемъ, написавъ для простоты вмѣсто ς' просто ς

$$dz = \frac{c\,d\varsigma}{\sqrt{\varsigma^2-1}}$$

Интегрируя, получимъ

$$z = c\lg\left(\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1}\right)+c_1$$

или

$$\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1} = e^{\frac{z-c_1}{c}} = e^{\frac{x+iy-c_1}{c}} \ldots.$$

Полагая $\varsigma=1$, найдемъ

$$x+iy-c_1=o.$$

Это соотношеніе можно удовлетворить положеніями

$$x=c_1=a \text{ и } y=o.$$

Эти координаты соотвѣтствуютъ углу o_3 (чер. 5 в.). Полагая $\varsigma=-1$, получимъ

$$e^{iy} = \left(\cos\frac{y}{c}+i\sin\frac{y}{c}\right) = -1$$

Откуда

$$\frac{y}{c}=\pi$$

Такъ что координаты угла o_2 будутъ, если для простоты мы положимъ $c=1$,

$$y=\pi \text{ и } x=a.$$

Изъ ур-ія (6) мы далѣе имѣемъ

$$\varsigma^2 - 1 = e^{2(z-a)} + \varsigma^2 - 2e^{z-a}\varsigma$$

или

$$2\varsigma = e^{z-a} + e^{-(z-a)}$$

т. е.

$$2(\varsigma + i\eta) = cosy\,(e^{a-x} + e^{-(a-x)}) -$$
$$- isiny\,(e^{a-x} - e^{-(a-x)}) \quad . \ . \ . \ . \qquad (7)$$

Ясно, что периметру полупрямоугольника соотвѣтствуютъ линіи тока $\eta = o$, поэтому ур—іе периметра будетъ

$$Siny\;(e^{a-x} - e^{(a-x)}) = o.$$

Это ур іе удовлетворяется при всѣхъ значеніяхъ x и при $y=o$ и при $y=\pi$, что соотвѣтствуетъ сторонамъ $o\,o_3$ и $o_1 o_2$. При $x=a$ ур-іе удовлетворяется при всѣхъ значеніяхъ y; это соотвѣтствуетъ сторонѣ $o_3 o_2$.

Потенціальная функція скорости потока въ плоскости ς очевидно есть

$$\varphi = V\xi$$

или, если для простоты положимъ $V=2$

$$\varphi = 2\xi.$$

Поэтому на основаніи ур-ія (7) для плоскости z

$$\varphi = cosy\,(e^{a-x} + e^{-(a-x)})$$

и слагающія скорости по осямъ x и y

$$u = cosy\;(-e^{a-x} + e^{-(a-x)})$$
$$v = -siny\;(e^{a-x} + e^{-(a-x)}).$$

Нами допущена одна неточность, именно, что между лопатками мы имѣемъ плоское движеніе. Придется сдѣлать еще одно допущеніе, что если мы дополнимъ полупрямоугольникъ вторымъ полупрямоугольникомъ, то и въ немъ получится движеніе подобное найденному.

Въ этомъ предположеніи вычислимъ среднія скорости по $o_1 o_2$ и $o_2 o_3$, которыя и будутъ соотвѣтствовать скоростямъ c и λ

$$c = \int_o^a \frac{udx}{a} = -\int_o^a (-e^{a-x} + e^{-(a-x)})\frac{dx}{a} = \frac{e^a + e^{-a} - 2}{a}$$

и

$$\lambda = \int_\pi^o \frac{vdy}{\pi} = \int_\pi^o \frac{2\,sinydv}{\pi} = -\frac{4}{\pi}.$$

Или по абсолютной величинѣ

$$\lambda=\frac{4}{\pi}.$$

На основанiи этого

$$n=\frac{c}{\lambda}=\frac{(e^a+e^{-a}-2)\pi}{4}=\frac{s\pi^2}{4}$$

если мы удовольствуемся въ разложенiи e^a и e^{-a} первыми четырьмя членами и означимъ отношенiе длинъ o_1o_2 и o_2o_3 черезъ s.

Полученное выраженiе для n соотвѣтствуетъ приблизительно лопаткѣ съ угломъ $\alpha=90°$.

Преобразуемъ теперь нашъ полупрямоугольникъ въ полупараллелограмъ (чер. 5, в.). Очевидно для этого надо положить

$$y=y_1+xtg\theta.$$

Этотъ случай соотвѣтствуетъ лопаткѣ, образующей съ окружностью уголъ $\alpha=90-\theta$.

Такимъ образомъ

$$\varphi=cos(y_1+xtg\theta)\ (e^{a-x}+e^{-(a-x)})$$

и

$$v=-sin(y_1+xtg\theta)\ (e^{a-x}+e^{-(a-x)}).$$

Чтобы опредѣлить скорость по какой-нибудь линiи, параллельной o_1o_2', надо замѣнить x черезъ $s\cdot cos\theta$ и взять производную по s, принявъ во вниманiе, что для всякой такой линiи $(y_1+xtg\theta)$ не зависитъ отъ s и остается постояннымъ. Въ частности для линiи o_1o_2' эта величина равна π, поэтому скорость по этой линiи

$$u_s=-cos\theta\ (-e^{a-Scos\theta}+e^{-(a-Scos)\theta})$$

Далѣе

$$\lambda=\frac{2}{\pi}\int_{\pi-atg\theta}^{-atg\theta} Sin\ (y_1+xtg\theta)\,dy=-\frac{4}{\pi}$$

$$c=-\frac{cos^2\theta}{a}\int_0^{\frac{cos^2\theta}{a}}(-e^{a-scos\theta)}+e^{-(a-Scos\theta)})\,ds=$$

$$=\frac{cos\theta}{a}(e^a+e^{-a}-2)$$

и

$$n=\frac{c}{\lambda}=\frac{cos\theta s\pi^2}{4}=\frac{sin\alpha s\pi^2}{4}$$

Понятно, что численныя значенія n будутъ только приблизительно соотвѣтствовать дѣйствительности. Но если мы примемъ во вниманіе самый характеръ соотношенія между λ и c, то придемъ къ слѣдующему выводу.

Возьмемъ ур-іе (3)

$$uv\cos\beta = \frac{gH}{\eta_1} \cdot \frac{\pi\rho r + nlz}{nlz}$$

и преобразуемъ коэф. во второй части, имѣя въ виду, что

$$n = \frac{s \cdot \pi^2 \sin\alpha}{4}, \quad z = \frac{2\,\pi r}{t} \quad \text{и} \quad \frac{l}{t} = 2s = q\,,$$

гдѣ t шагъ лопатокъ на внѣшней окружности, получимъ

$$uv\cos\beta = \frac{gH}{\eta_1}\left(1 + \frac{4\rho}{q^2\pi^2 \sin\alpha}\right).$$

Мы видимъ, что рѣшающимъ факторомъ на величину коэф. является q, т. е. отношеніе длины лопатки къ шагу. Надо думать, что при обыкновенныхъ конструктивныхъ условіяхъ произведеніе $q^2\sin\alpha$ увеличивается съ уменьшеніемъ угла α, поэтому насосы съ малыми углами α лучше соотвѣтствуютъ обыкновенной теоріи. Ясно, что выводъ этотъ слѣдовало бы провѣрить опытами, но, къ сожалѣнію, я не имѣю къ этому возможности.

Можно было бы преобразовать полуплоскость въ прямоугольникъ. Въ этомъ случаѣ ур-іе периметра прямоугольника было бы

$$\begin{aligned} \sin y\ \left(e^{a-x} - e^{-(a-x)}\right)\left(e^{x} - e^{-x}\right) &= \\ = 4\sin y\ [\cosh a - \cosh\,(a-2x)] &= o. \end{aligned}$$

Но гарантіи, что это привело бы къ болѣе точному рѣшенію абсолютно не имѣется, ибо движеніе во внѣшней части междулопаточнаго пространства ближе къ плоскому, чѣмъ во внутренней его части.

А. Копыловъ.

О МОНОТЕРМИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ МАШИНЪ.

I.

1.) При изученіи тепловыхъ машинъ-двигателей, какъ равнымъ образомъ и нѣкоторыхъ машинъ-орудій, представляющихъ собою обращеніе двигателей, напр. холодильныхъ машинъ, обыкновенно пользуются т. н. циклической теоріей.

Сущность этой теоріи заключается въ томъ, что дѣйствіе тепловой машины уподобляется дѣйствію машины особаго рода, а именно той машины, свойствами которой обыкновенно пользуются для формулировки второго начала термодинамики.

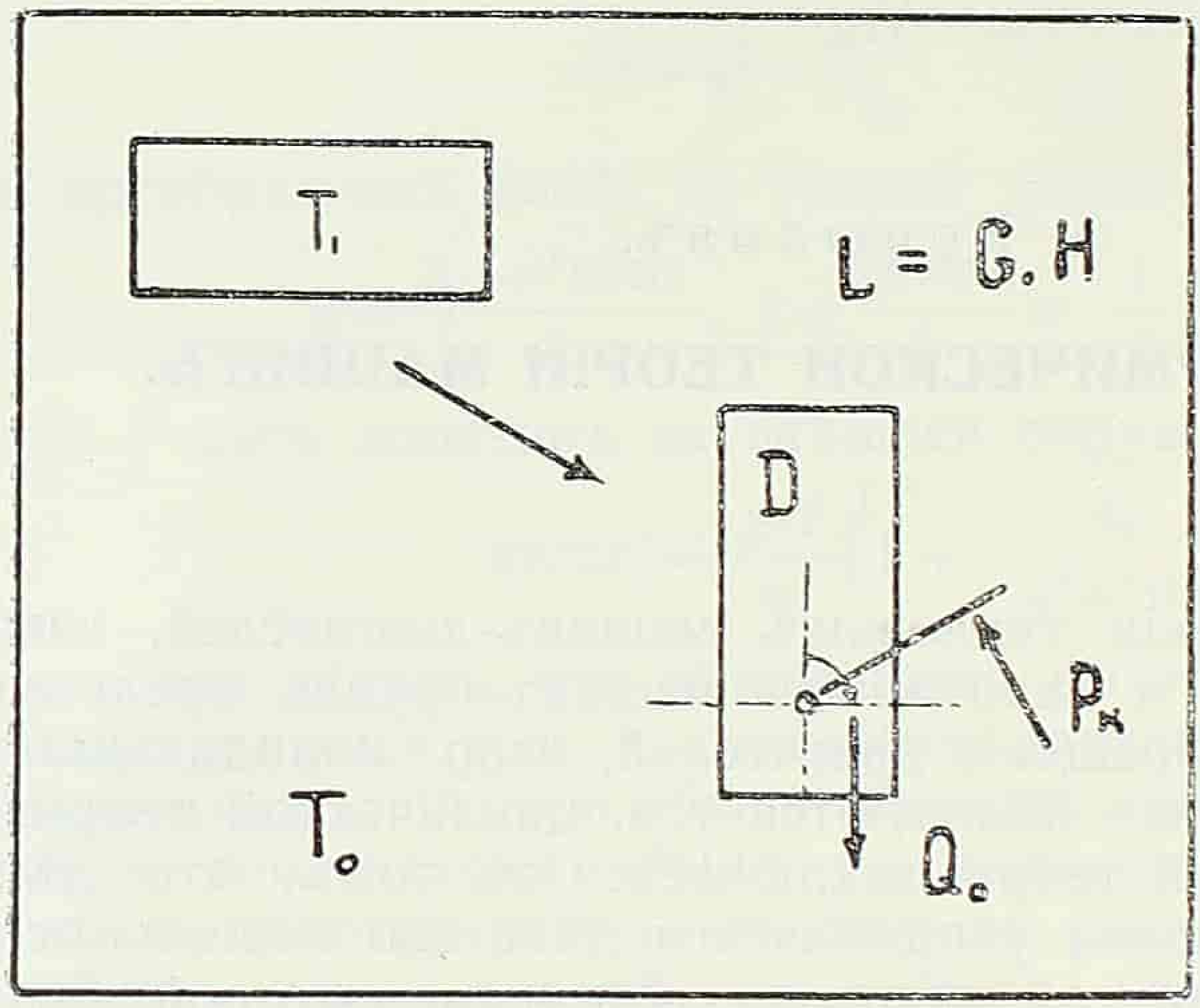
Проф. М. Planck въ своей книгѣ [1]) пользуется напр. слѣдующимъ основаннымъ на непосредственномъ опытѣ утвержденіемъ: „невозможно построить періодически дѣйствующую машину, которая бы не производила ничего другого, кромѣ подъема груза и охлажденія одного источника теплоты“. Подъ періодически дѣйствующей машиной Planck разумѣетъ [2]) при этомъ такую машину, работающее вещество которой, совершая тѣ или иные процессы, періодически возвращается въ свое первоначальное состояніе.

Если мы ознакомимся съ различными формулировками второго начала, то легко убѣдимся, что для вывода его всегда пользуются понятіемъ о такой машинѣ, въ которой происходятъ только круговые процессы, а съ внѣшней средой совершается только взаимный обмѣнъ теплотой и работой. Машина совершаетъ положительную или отрицательную работу и получаетъ изъ внѣшней среды теплоту или же ей таковую отдаетъ при посредствѣ т. н. источниковъ теплоты.

[1]) Dr. M. Planck. Vorlesungen über Thermodynamik, VII Auflage, стр. 87.
[2]) M. Planck. Vorlesungen, стр. 65.

Второе начало утверждаетъ, что такую машину можно осуществить только въ томъ случаѣ, если имѣется по крайней мѣрѣ два источника теплоты, при томъ различной температуры.

Если однимъ источникомъ, а именно тѣмъ изъ нихъ, который имѣетъ болѣе низкую температуру $T_0=273+t_0$, является среда сама, то дѣйствіе такой тепловой машины можно представить символически слѣдующимъ простымъ чертежомъ (фиг. 1).



Фиг. 1.

D есть машина, которая совершаетъ механическую работу L напр. такимъ образомъ, что поднимаетъ нѣкоторый грузъ G на высоту H, или же вращаетъ ось, на которую дѣйствуетъ внѣшняя сила Pk, образующая относительно оси вращенія моментъ M. Прямоугольникъ T_1 есть источникъ теплоты съ болѣе высокой температурой $T_1=273+t_1$, отъ котораго машина получаетъ теплоту Q_1, при томъ путемъ непосредственной теплопередачи, а T_0, т. е. большой прямоугольникъ — внѣшняя среда, въ которой находится двигатель и которая въ то же время служитъ другимъ источникомъ теплоты съ болѣе низкой температурой $T_0=213+t_0$, которому машина отдаетъ теплоту Q_0.

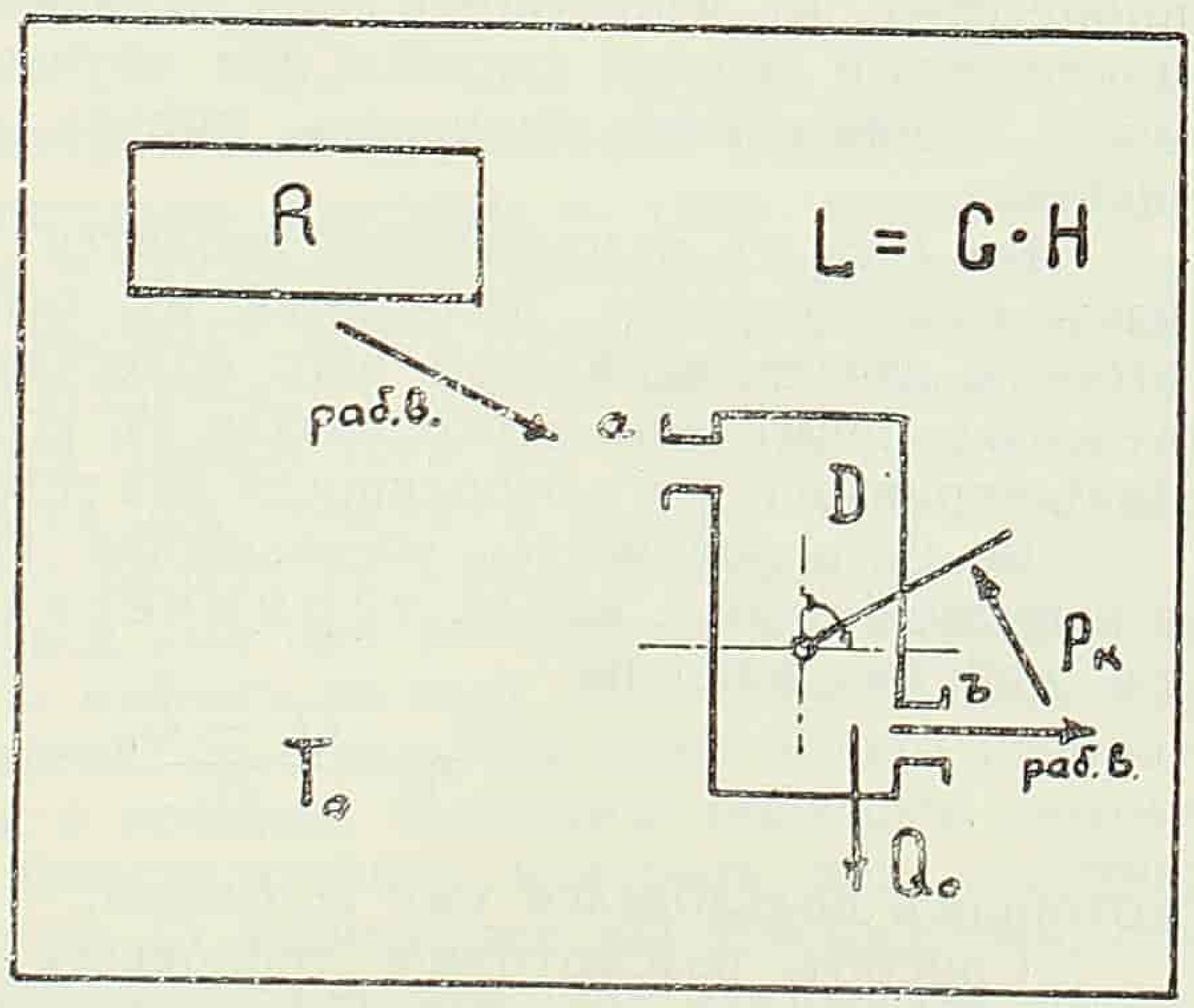
Работающее вещество, которое находится въ машинѣ и остается въ ней въ теченіе всего ея дѣйствія, совершаетъ круговые процессы или циклы, т. е. періодически возвращается въ свое первоначальное состояніе. Такую машину можно назвать циклической.

2.) Если мы всмотримся въ дѣйствіе дѣйствительной, т. е. примѣняемой на практикѣ, тепловой машины, то легко убѣдимся, что въ ней наряду съ круговыми процессами, безъ которыхъ нельзя обойтись, и наряду съ теплообмѣномъ съ внѣшней средой происходятъ еще и другіе процессы, а именно такіе, при которыхъ работающее вещество не возвращается періодически въ свое первоначальное состояніе, но непремѣнно переходитъ изъ одного состоянія въ другое и въ такомъ измѣненномъ состоянiи отводится въ окружающую среду, какъ отбросъ процесса. Въ связи съ этимъ изъ внѣшней среды въ машину по необходимости должны поступать все новыя и новыя количества работающаго вещества. Такимъ образомъ взаимоотношенiе между машиной и внѣшней средой не ограничивается только обмѣномъ теплоты, но дополняется еще и обмѣномъ вещества.

Въ бензиновомъ двигателѣ, напр., работающимъ веществомъ является смѣсь бензина и воздуха, которая вступаетъ въ цилиндръ двигателя, здѣсь зажигается, при чемъ увеличиваются давленiе и температура продуктовъ горѣнiя; эти послѣднiе затѣмъ расширяются и наконецъ выбрасываются въ атмосферу въ состоянiи, непригодномъ для дальнѣйшей работы въ двигателѣ.

Работающее вещество такой тепловой машины не совершаетъ круговыхъ процессовъ, но постоянно, какъ бы потокомъ, вступаетъ въ двигатель, въ немъ совершаетъ свою работу и затѣмъ также постоянно устраняется въ атмосферу. Круговые процессы тоже совершаются въ двигателѣ, но ихъ совершаетъ не работающее вещество, но части двигателя, поршень, шатунъ, ось и т. д., которые перiодически возвращаются въ свое первоначальное положенiе и къ своимъ первоначальнымъ скоростямъ. Никакой теплоты въ порядкѣ непосредственнаго теплообмѣна горючая смѣсь не получаетъ. Происходитъ лишь отдача теплоты во внѣшнюю среду.

Дѣйствiе дѣйствительной тепловой машины можно наглядно представить слѣдующимъ простымъ чертежомъ (фиг. 2).



Фиг. 2.

D есть машина, которая какъ прежде и такимъ же образомъ совершаетъ механическую работу *L*. Прямоугольникъ *R* есть резервуаръ (источникъ), изъ котораго машина постоянно получаетъ рабочую смѣсь черезъ входное отверстiе *a*. Изъ выходного отверстiя *b* работающее вещество въ измѣненномъ состоянiи устраняется въ окружающую среду. T_0 есть среда, окружающая машину, съ которой эта послѣдняя вступаетъ въ теплообмѣнъ путемъ непосредственной теплопередачи.

Какъ видимъ, процессы, происходящіе въ дѣйствительной тепловой машинѣ, существенно отличаются отъ тѣхъ, которые происходятъ въ машинѣ, полагаемой въ основу опредѣленія 2-го начала термодинамики, т. е. циклической.

Чтобы обойти это несоотвѣтствіе, циклическая теорія уподобляетъ дѣйствіе дѣйствительной машины дѣйствію циклической. Съ этой цѣлью она замѣняетъ процессы, въ дѣйствительности въ тепловой машинѣ происходящіе, процессами круговыми, но такими, при которыхъ отдаваемая во внѣшнюю среду механическая работа, положительная или отрицательная, равняется работѣ, совершаемой дѣйствительной машиной, процессы же вступленія работающаго вещества въ машину и его устраненія изъ машины, а также процессы горѣнія, замѣняетъ процессами теплопередачи, но такими, при которыхъ теплота, получаемая работающимъ веществомъ циклической машины, равняется теплотѣ горѣнія горючей смѣси или же теплотѣ, достаточной для приведенія работающаго вещества въ состояніе, въ которомъ оно въ дѣйствительности вступаетъ въ машину.

3.) Уподобленіе дѣйствительныхъ процессовъ другимъ процессамъ, въ извѣстномъ смыслѣ равноцѣннымъ, дѣлаемое циклической теоріей также и при изученіи другихъ тепловыхъ машинъ, напр. паровыхъ, имѣетъ слѣдующія преимущества.

Во 1-хъ въ разсмотрѣніе вводится процессъ, который, какъ сказано ранѣе, полагается въ основу формулировки второго начала, вслѣдствіе чего облегчается непосредственное примѣненіе этого начала въ его первоначальной и болѣе привычной, въ особенности для техника, формулировкѣ.

Во 2-хъ получается чрезвычайно простое опредѣленіе и выраженіе для т. назыв. термическаго коэффиціента дѣйствія машины

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1},$$

которымъ пользовался уже S. Carnot.

Способъ разсмотрѣнія тепловыхъ машинъ, принятый циклической теоріей, даетъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ прекрасные результаты. Однако въ корнѣ всегда остается сомнѣніе, зачѣмъ же замѣнять дѣйствительные процессы другими, а не попытаться подойти къ нимъ такъ, какъ они въ дѣйствительности происходятъ. Если къ этому нѣтъ возможности за недостаткомъ научныхъ данныхъ о теченіи процессовъ, тогда это можетъ быть оправдано. Однако же по мѣрѣ накопленія такихъ данныхъ представляется необходимымъ сдѣлать по крайней мѣрѣ попытку построить такую теорію тепловыхъ машинъ, въ основѣ которой бы лежало непосредственное разсмотрѣніе процессовъ, въ нихъ происходящихъ.

4.) Построить теорію тепловыхъ машинъ[1]), при которой бы отпала необходимость прибѣгать къ уподобленію ихъ машинамъ чисто циклическимъ, возможно. Для этого слѣдуетъ воспользоваться такой формулировкой 2-го начала термодинамики, которая можетъ быть примѣнена непосредственно къ любому процессу. Проф. M. Planck[2]) въ упомянутой уже книгѣ о термодинамикѣ путемъ блестящихъ по формѣ и глубоко убѣдительныхъ по содержанію разсужденій приходитъ къ нижеслѣдующей формулировкѣ. „Каждый происходящій въ природѣ физическій и химическій процессъ протекаетъ такимъ образомъ, что сумма энтропій всѣхъ тѣлъ, принимающихъ какое-либо участіе въ процессѣ, увеличивается. Въ предѣльномъ случаѣ, если процессы обратимы, эта сумма не измѣняется".

Въ это формулировкѣ словами „всѣхъ тѣлъ, принимающихъ какое-либо участіе въ процессѣ" дается понятіе о такъ. наз. „изолированной" системѣ. Символически второй законъ термодинамики въ самой его общей формѣ выражается такимъ образомъ неравенствомъ

$$dS_i \geqslant O \tag{1}$$

гдѣ S_i означаетъ энтропію изолированной системы.

Вмѣсто сравнительно простого и такъ сказать легко осязаемаго понятія о циклической тепловой машинѣ въ формулировку закона вводится новое понятіе объ энтропіи, пониманіе котораго наталкивается иногда на затрудненія.

Затрудненія эти однако того же порядка, какъ и тѣ, которыя встрѣчаются при пониманіи цѣлаго ряда общепринятыхъ понятій, что однако не мѣшаетъ намъ постоянно и успѣшно пользоваться ими при разсмотрѣніи и изученіи явленій природы. Мы имѣемъ въ виду такія понятія, какъ напр. температура или время. Въ привычку нашу вошло говорить и о температурѣ и о времени, главнымъ образомъ потому, что мы умѣемъ непосредственно измѣрить ихъ величину, точнѣе ихъ измѣненіе. О времени же мы утверждаемъ, притомъ съ полной увѣренностью, что оно измѣняется только въ одномъ направленіи, оно только увеличивается и никогда не уменьшается.

Понятіе объ энтропіи возникаетъ при разсмотрѣніи вто-

---

[1]) E. Jouguet. Théorie des moteurs thérmiques. Paris 1909.
[2]) M. Planck. Vorlesungen, стр. 102.

рого начала термодинамики. Если тѣло измѣняетъ свое состоянiе, или совершаетъ процессъ такъ, что его температура $T=273+t$ остается неизмѣнной и если при этомъ тѣлу сообщается извнѣ нѣкоторое количество теплоты Q, которое можетъ быть и положительно и отрицательно, то частное $\frac{Q}{T}$ представляетъ — тоже положительное или отрицательное — измѣненiе энтропiи, соотвѣтствующее вышеуказанному измѣненiю состоянiя тѣла. Если состоянiе тѣла измѣняется такъ, что измѣняется и его температура, то измѣненiе энтропiи равняется $\sum\limits_{T_1}^{T_2} \frac{\Delta Q}{T}$, гдѣ ΔQ означаетъ элементарное количество теплоты, извнѣ сообщаемое тѣлу во время элементарнаго измѣненiя его состоянiя, T_1 означаетъ начальную и T_2 конечную температуру тѣла.

Изъ 2-го закона термодинамики вытекаетъ, какъ слѣдствiе, что энтропiя тѣла, или же системы тѣлъ, имѣетъ вполнѣ опредѣленное численное значенiе по отношенiю къ другому состоянiю тѣла, принимаемому за нормальное или нулевое, т. е. за такое, при которомъ энтропiя условно равна нулю. Всякiй разъ, когда матерiальная система по совершенiи тѣхъ или иныхъ процессовъ подъ дѣйствiемъ внѣшнихъ воздѣйствiй возвращается въ свое первоначальное состоянiе, получаетъ прежнее и вполнѣ опредѣленное значенiе и его энтропiя. Энтропiя есть, какъ говорятъ, однозначная функцiя состоянiя тѣла или системы тѣлъ.

Если нулевое состоянiе системы выбрано, то можно говорить уже не объ измѣненiи энтропiи, но просто объ энтропiи тѣла

$$\sum_{0} \frac{\Delta Q}{T} \text{ или } \int_{0} \frac{dQ}{T}.$$

Если мы имѣемъ систему тѣлъ и энтропiи составныхъ частей системы равны S_1 $S_2 \ldots Sn$, то энтропiя системы равна суммѣ энтропiй ея составныхъ частей.

Въ вышеприведенной формулировкѣ 2-го закона важно обратить вниманiе на то, что она относится къ „изолированной" системѣ.

Не входя въ ближайшее разсмотрѣнiе понятiя объ изолированной системѣ [1]), замѣтимъ только, что тепловая машина сама по себѣ, т. е. независимо отъ окружающей ее среды, не можетъ быть разсматриваема, какъ изолированная система, т. к. она вступаетъ со средой и вообще съ тѣлами ее окружающими во многообразныя взаимоотношенiя.

---

[1]) См. Planck. Thermodynamik, стр. 45.

Но если включить въ разсмотрѣніе и окружающую среду и эти тѣла, то такую систему можно разсматривать, какъ изолированную и стало быть къ ней можно непосредственно примѣнить второе начало въ той его формулировкѣ, которая дана M. Planck'омъ.

Въ приведенной ранѣе схемѣ дѣйствія тепловыхъ машинъ изолированную систему ограничиваетъ большой прямоугольникъ.

Въ формулировкѣ 2-го начала говорится о предѣльномъ случаѣ, когда энтропія изолированной системы, совершающей тотъ или иной процессъ, не измѣняется, то есть когда $dS_i = O$. Это имѣло бы мѣсто, если бы въ изолированной системѣ совершались т. н. обратимые процессы. Такой случай является предѣльнымъ въ томъ смыслѣ, что всѣ процессы въ природѣ протекаютъ необратимымъ образомъ и могутъ лишь въ большей или меньшей степени приближаться къ процессамъ обратимымъ.

Не входя въ разсмотрѣніе обстоятельствъ, при которыхъ дѣйствительные процессы приближаются къ обратимымъ, замѣтимъ лишь, что второй законъ въ приведенной выше формулировкѣ является выраженіемъ того установленнаго опытомъ и наблюденіемъ факта, что всѣ процессы въ природѣ необратимы.

Символически это утвержденіе можетъ быть представлено также и равенствомъ

$$\Delta S_i = \Delta \Pi \qquad (1')$$

въ которомъ ΔS_i означаетъ элементарное приращеніе энтропіи изолированной системы, а $\Delta \Pi$ нѣкоторую величину, которая по существу своему положительна, т. е. не можетъ быть меньше нуля.

5.) При разсмотрѣніи процессовъ, происходящихъ въ машинахъ, мы должны разумѣется имѣть въ виду еще и другой столь же общій законъ, какъ и законъ увеличенія энтропіи, а именно законъ сохранія энергіи. Въ формулировкѣ проф. M. Planck'a[1]) этотъ законъ утверждаетъ, что „сумма механическихъ эквивалентовъ всѣхъ воздѣйствій, которыя производятся внѣ системы, когда она какимъ либо образомъ переходитъ изъ разсматриваемаго состоянія въ нормальное состояніе, не зависитъ отъ способа этого перехода. Система производитъ слѣдовательно при переходѣ въ свое нормальное состояніе вполнѣ опредѣленную сумму механически измѣренныхъ воздѣйствій и эта сумма и представляетъ собою энергію системы".

Изъ этой формулировки вытекаетъ, какъ слѣдствіе, по-

---

[1]) M. Planck. Thermodynamik, стр. 40.

нятіе объ энергіи матеріальной системы, называемой также внутренней энергіей, какъ о величинѣ, которая зависитъ только отъ мгновеннаго физическаго состоянія системы, понятіе о внутренней энергіи, какъ однозначной функціи состоянія системы.

Если внѣшнія воздѣйствія системы сводятся къ механическимъ и тепловымъ, то законъ сохраненія энергіи или первый законъ термодинамики можетъ быть символически представленъ, какъ уравненіе

$$U_1 - U_2 = Q + L \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

гдѣ U означаетъ внутреннюю энергію системы, $U_1 - U_2$ уменьшеніе ея при переходѣ изъ состоянія (1) въ состояніе (2), Q — теплоту, отдаваемую системой въ окружающую среду при этомъ измѣненіи состоянія, при томъ въ механическихъ единицахъ, и L совершаемую системой внѣшнюю работу.

Если означимъ черезъ ΔU элементарное приращеніе внутренней энергіи системы, то можно написать

$$-\Delta U = \Delta Q + \Delta L \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2')$$

Выраженіями (1) и (2 мы и воспользуемся для дальнѣйшихъ нашихъ выводовъ о механической работѣ, положительной или отрицательной, которую отдаетъ или расходуетъ машина.

При этомъ мы не ограничимся разсмотрѣніемъ только тепловыхъ машинъ, какъ это дѣлаетъ циклическая теорія, но будемъ имѣть въ виду всѣ машины вообще, за исключеніемъ развѣ только электрическихъ.

II.

1.) Въ опредѣленіи понятія о машинѣ нѣтъ единства. Разные авторы опредѣляли его различно. При нашихъ выводахъ подъ машиной мы будемъ разумѣть устройство, т. е. искусственное соединеніе тѣлъ, способныхъ сопротивляться внѣшнимъ силамъ, посредствомъ котораго производится преобразованіе энергіи, доставляемой машинѣ изъ окружающей среды, въ механическую работу или же въ техническую работу механическаго характера.

Машины обыкновенно раздѣляются на простыя (рычагъ, клинъ, винтъ и т. д.) и на сложныя, образуемыя изъ простыхъ машинъ, какъ изъ составныхъ элементовъ.

Сложныя машины раздѣляются въ свою очередь на три группы. Къ первой группѣ относятся машины, при посредствѣ которыхъ производится преобразованіе доставляемой извнѣ энергіи въ механическую работу. Это т. н. двигатели или моторы, напр. гидравлическіе, паровые и т. д. Ко второй группѣ относятся машины, которыя, получая извнѣ, напр. отъ двигателей, механическую работу, расходуютъ ее на совершеніе той или иной технической работы механическаго характера. Это т. н. машины орудія. Нѣкоторыя изъ нихъ, какъ напр. компрессоръ, насосъ и т. д. представляютъ собою обращеніе машинъ двигателей.

Въ третью группу относятся машины, которыя служатъ для перенесенія получаемой ими извнѣ энергіи на разстояніе, иногда довольно большое. Такія машины называются передачами или трансмиссіями, механическими, гидравлическими и т. п.

2) Обращаясь къ разсмотрѣнію машинъ первой группы, т. е. двигателей, замѣтимъ прежде всего, что всѣ онѣ имѣютъ нѣкоторыя совершенно общія черты.

A. Каждая машина двигатель, какого бы то ни было рода и устройства, должна быть питаема извнѣ тѣмъ или инымъ веществомъ, являющимся для нея носителемъ энергіи. Именно въ этомъ смыслѣ мы и говорили ранѣе объ энергіи, доставляемой машинѣ изъ окружающей среды. Носитель энергіи, измѣняя въ машинѣ свое состояніе, совершаетъ механическую работу и затѣмъ устраняется въ окружающую среду, какъ безполезный отбросъ. Такое вещество, которое отдаетъ такимъ образомъ въ машинѣ свою энергію, мы будемъ называть активнымъ веществомъ.

Примѣры: вода, падающая съ нѣкоторой высоты, и въ формѣ потока поступающая въ турбину, паръ въ паровой машинѣ, смѣсь бензина и воздуха въ бензиновомъ двигателѣ и т. д.

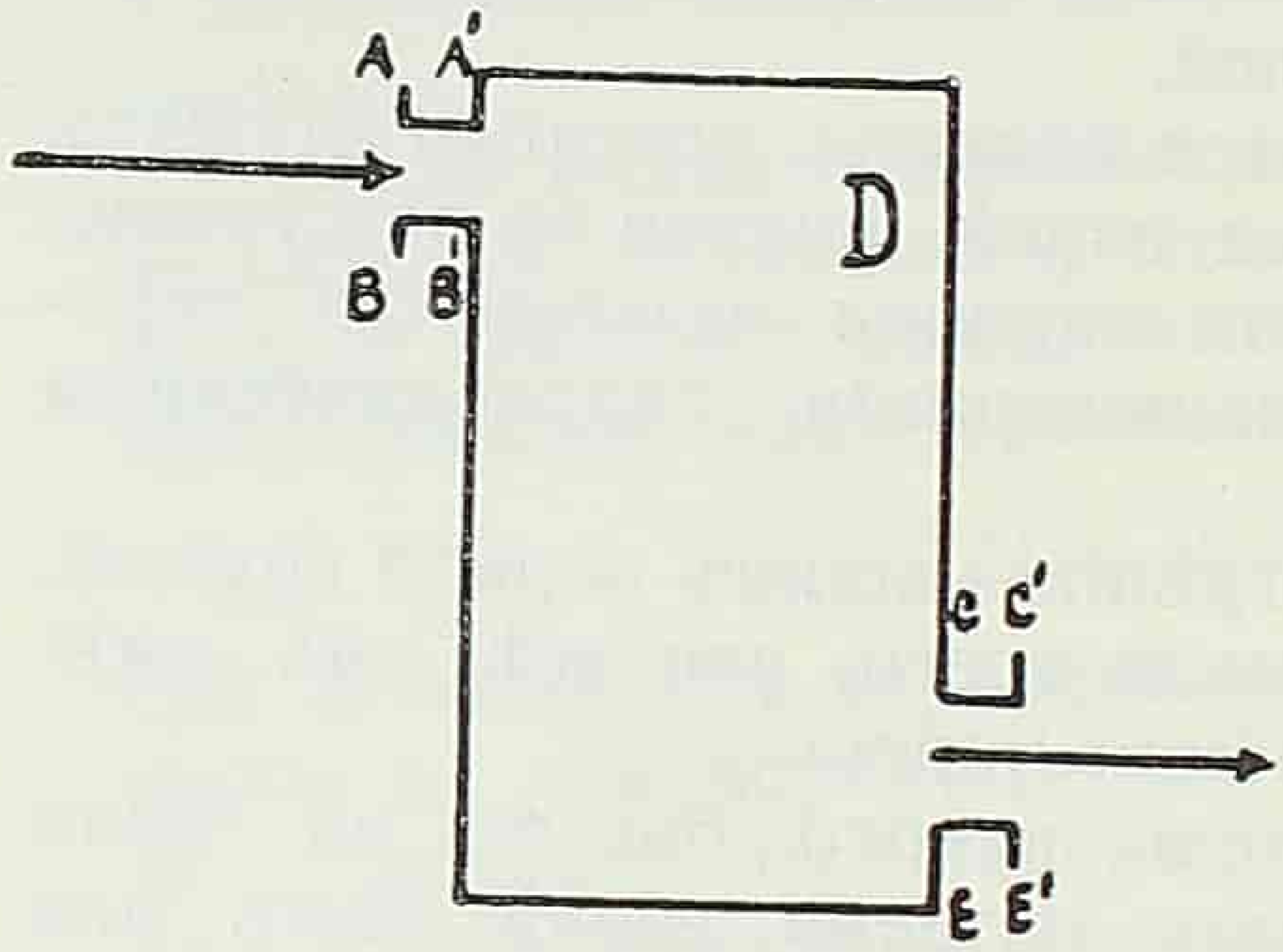
B. Каждый технически пригодный двигатель долженъ быть въ состояніи совершать механическую работу въ неограниченномъ количествѣ или во всякомъ случаѣ въ теченіе значительнаго промежутка времени. Вслѣдствіе этого дѣйствіе его по необходимости является періодическимъ. Части двигателя или вспомогательныя тѣла, принимающія участіе въ его работѣ, совершивъ тотъ или другой процессъ, возвращаются въ свое первоначальное состояніе, механическое или тепловое, т. е. совершаютъ круговые процессы.

Такія части двигателя и тѣла будемъ называть посредствующими тѣлами. Т. о. при двигателяхъ по необходимости приходится имѣть дѣло съ круговыми процессами, совершаемыми частями машинъ или посредствующими тѣлами.

Примѣры: кривошипная передача поршневой машины, лопатка паровой турбины, вода въ аггрегатѣ, состоящемъ изъ парового котла, собственно паровой машины и конденсатора и т. д.

Дѣйствіе двигателя нужно себѣ представить слѣдующимъ образомъ (фиг. 3).

D есть двигатель. Активное вещество приводится извнѣ, вступаетъ въ двигатель во входное отверстіе AB и покидаетъ двигатель черезъ выходное отверстіе CE. Въ началѣ каждаго періода дѣйствія двигателя матеріальная система, при посредствѣ которой совершается механическая работа, состоитъ изъ носителя энергіи находящагося въ $ABA'B'$ и двигателя D вмѣстѣ съ посредствующими тѣлами. Матеріальная система находится слѣдовательно между AB и CE въ своемъ начальномъ состояніи. Въ концѣ періода дѣйствія двигателя активное вещество поступаетъ къ выходному отверстію и занимаетъ пространство $CEC'E'$. Матеріальная система находится между $A'B'$· и $C'E'$, но въ нѣкоторомъ другомъ, а именно въ своемъ конечномъ состояніи. Въ этомъ состояніи активное вещество отводится прочь въ среду, окружающую двигатель. Масса этого вещества при поступленіи къ выходному отверстію остается та же, но только она находится въ другомъ состояніи. Двигатель же D со всѣми посредствующими тѣлами по совершеніи круговыхъ процессовъ возвращается въ свое первоначальное положеніе и состояніе. Вслѣдствіе измѣненія состоянія активнаго вещества въ теченіе періода дѣйствія двигателя совершается ·нѣкоторая механическая работа. Съ началомъ слѣдующаго періода въ двигатель поступаетъ новое количество активнаго вещества. Т. о. активное вещество подается въ двигатель непрерывнымъ потокомъ или же черезъ правильные промежутки времени, отвѣчащіе періоду дѣйствія двигателя, и затѣмъ такъ же правильно изъ двигателя устраняется.



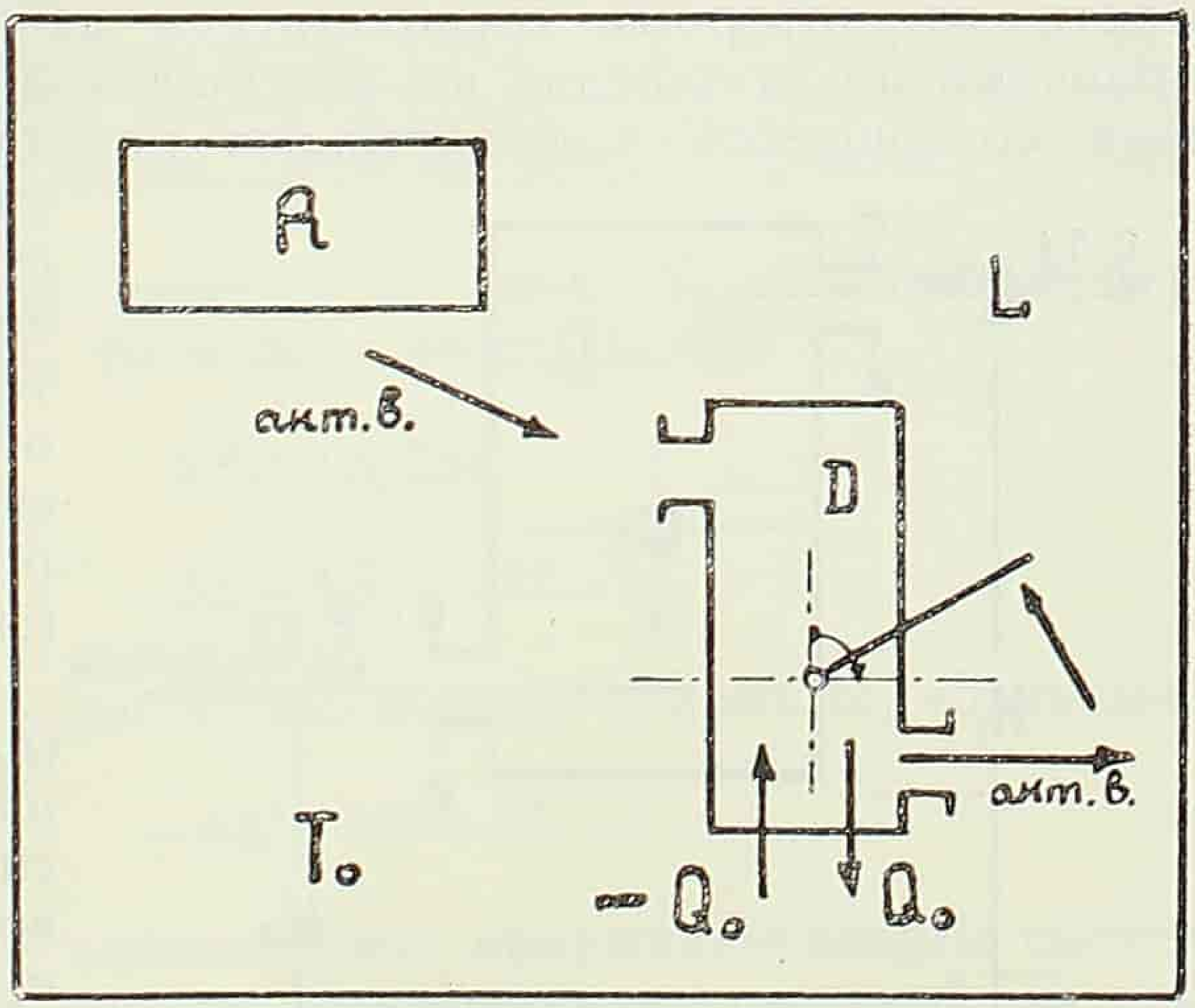
Фиг. 3.

C. Третья черта, общая для всѣхъ машинъ двигателей, заключается въ томъ, что дѣйствіе ихъ и стало быть всѣ процессы, въ нихъ совершающіеся, происходятъ на земной поверхности, т. е. въ пространствѣ или въ средѣ, температура которой постоянна или же такова, что ее можно считать постоянной. Сколько бы мы ни отнимали теплоты отъ среды, окружающей двигатель, или сколько бы ни сообщали ей теплоты, температура ея не измѣняется. Активное вещество, такъ равно и двигатель самъ, а также и посредствующія тѣла, могутъ вступать со средой въ то или иное тепловое взаимодѣйствіе, отдавать ей теплоту съ пониженіемъ собственной температуры или наоборотъ отнимать отъ нея теплоту. Однако температура среды при этомъ не претерпѣваетъ никакихъ измѣненій, какъ бы ни было велико такое тепловое взаимодѣйствіе.

Всматриваясь въ приведенную ранѣе схему дѣйствія двигателя легко убѣждаемся, что среда окружающая двигатель представляетъ для него источникъ теплоты постоянной температуры, при томъ источникъ для двигателя и веществъ въ немъ эволюціонирующихъ единственный.

Процессы, въ теченіе которыхъ матеріальная система, совершающая эти процессы, входитъ въ тепловое взаимодѣйствіе только съ однимъ внѣ системы находящимся источникомъ теплоты, могутъ быть названы монотермическими процессами.

Т. о. двигатель представляетъ собою устройство или машину періодическаго дѣйствія, имѣющее цѣлью непрерывно совершать механическую работу, для чего въ двигатель потокомъ извнѣ подается то или иное активное вещество, являющееся носителемъ механической энергіи, т. е. способное при прохожденіи черезъ двигатель измѣнять свое состояніе такъ, чтобы при этомъ совершалась механическая работа. Въ измѣненномъ состояніи активное вещество также потокомъ отводится затѣмъ въ атмосферу. Измѣненія состоянія или процессы, происходящіе въ двигателѣ, относятся при этомъ къ числу монотермическихъ. При періодическомъ дѣйствіи двигателя его части и посредствующія тѣла совершаютъ круговые процессы.



Фиг. 4.

Дѣйствіе двигателя, независимо отъ его рода и независимо отъ природы активнаго вещества, можетъ быть представлено слѣдующей схемой (ф. 4).

Эта схема отличается отъ приведенныхъ ранѣе тѣмъ, что въ ней прибавлена одна стрѣлка, изображающая теплообмѣнъ съ внѣшней средой, при томъ въ противоположномъ направленіи. Q_0 можетъ быть и отрицательно. Теплообмѣнъ можетъ происходить не только отъ машины въ окружающую среду, но и въ обратномъ направленіи. Q_0 можетъ быть также равно нулю.

Первый случай имѣетъ мѣсто въ двигателѣ, который относятъ обыкновенно къ собственно тепловымъ машинамъ. Разсмотрѣніемъ такого двигателя занимается циклическая теорія.

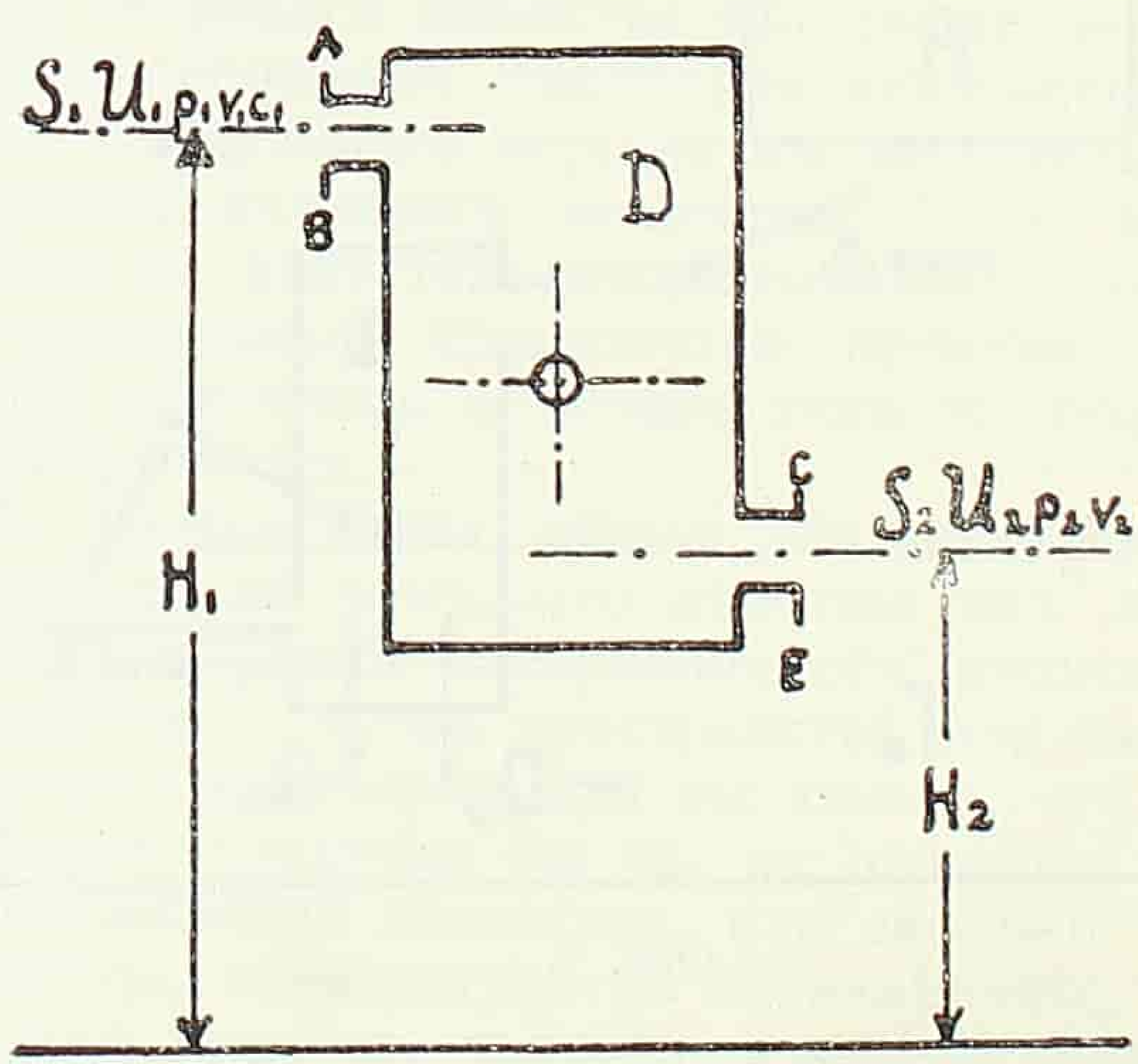
Другой случай имѣетъ мѣсто въ двигателѣ, который также долженъ быть отнесенъ къ числу тепловыхъ, какъ напр. пневматическій моторъ. Циклическая теорія однако обходитъ этотъ случай молчаніемъ.

Третій случай отвѣчаетъ дѣйствію чисто механическаго двигателя, какъ напр. гидравлическаго, который работаетъ безъ теплообмѣна съ окружающей средой.

3.) Разсматривая обстоятельства, при которыхъ активное вещество совершаетъ въ двигате ѣ механическую работу въ теченіе одного періода его дѣйствія, легко убѣждаемся, что весь процессъ совершенія работы можно раздѣлить на три части, а именно на процессъ вступленія активнаго вещества въ двигатель, на процессъ, въ теченіе котораго активное вещество измѣняетъ свое состояніе, механическое, физическое или химическое, и на процессъ устраненія активнаго вещества изъ двигателя.

Эти три части процесса могутъ быть выдѣлены въ дѣйствіи каждаго двигателя.

При вступленіи активнаго вещества черезъ входное отверстіе, въ которомъ господствуетъ давленіе p_1 клг./кв. м., внѣшними по отношенію къ матеріальной системѣ $ABCE$ силами совершается положительная работа $p_1 \cdot v_1$ клг. м. на каждый клг. вещества. При устраненіи вещества изъ двигателя подобнымъ же образомъ совершается отрицательная работа $p_2 \cdot v_2$ клг.^{2} м. (фиг. 5).



Фиг. 5.

Изъ работы $(p_1 \cdot v_1 - p_2 \cdot v_2)$, совершаемой внѣшними силами во время первой и третьей части процесса, часть работы теряется вслѣдствіе необратимости процессовъ такъ, что остается всего

$$(p_1 \cdot v_1 - p_2 \cdot v_2) - \text{потери работы} \;.\;.\;.\;. \qquad (a)$$

Во второй части процесса въ двигателѣ могутъ происходить измѣненія механическаго характера. Активное вещество или посредствующія тѣла могутъ измѣнять свое положеніе по высотѣ и измѣнять свою скорость. При такихъ измѣненіяхъ въ теченіе періода дѣйствія двигателя совершается работа

$$(H_1 - H_2) + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} - \text{потери работы} \;.\;.\;.\;. \qquad (b)$$

на каждый клг. активнаго вещества.

Въ этомъ выраженіи нѣтъ членовъ, которые выражали бы работу, совершаемую частями двигателя и посредствующими тѣлами, т. к. они совершаютъ круговые процессы и стало быть къ концу періода возвращаются въ свое первоначальное положеніе и къ первоначальнымъ скоростямъ.

Что касается механической работы, которая совершается въ двигателѣ вслѣдствіе измѣненій физическаго и химическаго характера, то она можетъ быть опредѣлена слѣдующимъ образомъ.

Раздѣлимъ изолированную систему, которую образуютъ двигатель D вмѣстѣ съ находящимися въ немъ активнымъ веществомъ и посредствующими тѣлами и окружающая двигатель среда, на двѣ части.

Въ первую часть отнесемъ двигатель D и во вторую часть окружающую двигатель среду T_0. Резервуаръ R въ теченіе другой части процесса совершенія работы въ двигателѣ запертъ и не оказываетъ на теченіе процесса никакого вліянія.

Если энтропія системы D равна S, а энтропія окружающей среды S_0, то можно написать, что

$$\Delta S + \Delta S_0 \geqslant O$$

или

$$\Delta S + \Delta S_0 = \Delta \Pi \;.\;.\;.\;. \qquad (3)$$

Примѣняя къ системѣ D первый законъ термодинамики, можемъ написать

$$-\Delta U = \Delta Q + \Delta L \;.\;.\;.\;. \qquad (4)$$

гдѣ означаютъ ΔU элементарное приращеніе энергіи системы, ΔL элементарную работу, совершаемую системой D и ΔQ элементарное количество теплоты, о т д а в а е м о е системой въ окружающую среду.

Изъ уравненія (4) слѣдуетъ, что

$$\Delta Q = -\Delta U - \Delta L$$

и что

$$\Delta S_0 = \frac{\Delta Q}{T_0} = \frac{-\Delta U - \Delta L}{T_0}.$$

Уравненіе (3) можетъ быть написано

$$\Delta S - \frac{\Delta L + \Delta U}{T_0} = \Delta \Pi \ . \ . \ . \ . \qquad (5)$$

Изъ этого выраженія слѣдуетъ, что элементарная работа ΔL, отдаваемая двигателемъ D въ окружающую среду,

$$\Delta L = -\Delta U + T_0 \cdot \Delta s - T_0 \cdot \Delta \Pi \ . \ . \ . \ . \qquad (6)$$

Если бы процессъ происходилъ обратимымъ образомъ, то въ этомъ предѣльномъ случаѣ было бы $T_0 \Delta \Pi = 0$. Изъ этого вытекаетъ, что выраженіе

$$-\Delta U + T_0 \cdot \Delta S$$

представляетъ наибольшее значеніе элементарной работы ΔL, а членъ $T_0 \cdot \Delta \Pi$ потери работы во время элементарнаго процесса.

Въ уравненіи (6) ΔU и ΔS относятся, какъ сказано, къ системѣ D, которая состоитъ изъ двигателя, изъ посредствующихъ тѣлъ и изъ активнаго вещества, находящагося въ двигателѣ во время другой части совершающагося въ немъ процесса.

Членъ же $T_0 \cdot \Delta \Pi$ относится ко всей изолированной системѣ, ограниченной на схемѣ большимъ прямоугольникомъ.

Переходя къ конечной величинѣ работы, отдаваемой двигателемъ, получимъ, что эта работа равна

$$-(U_2 - U_1) + (S_2 - S_1) \cdot T_0 - \int_1^2 T_0 \cdot \Delta \Pi \ . \ . \ . \ . \qquad (c)$$

т. к. величины U и S представляютъ однозначныя функціи состоянія системы.

Знакъ (2) отвѣчаетъ конечному состоянію, въ которомъ активное вещество отводится изъ двигателя, а знакъ (1) къ начальному состоянію, въ которомъ вещество вступаетъ въ двигатель.

Въ полученномъ конечномъ выраженіи работы численныя значенія U и S относятся только къ активному веществу, т. к. внутренняя энергія и энтропія частей двигателя и посредствующихъ тѣлъ къ концу періода дѣйствія двигателя возвращаются къ своимъ первоначальнымъ значеніямъ, которыя въ выраженіи (c) взаимно сокращаются.

Интегралъ же $\int_1^2 T_0 \cdot d\Pi$ относится ко всей изолированной системѣ, т. е. представляетъ потери работы, которыя происходятъ при процессахъ совершаемыхъ какъ активнымъ веществомъ такъ и всѣми другими тѣлами, участвующими въ работѣ двигателя.

Если бы процессъ происходилъ обратимымъ образомъ, то

$$\int_1^2 T_0 \cdot \Delta \Pi = 0.$$

Складывая (a), (b) и (c), получимъ значенiе работы, отдаваемой двигателемъ въ теченiе одного перiода его дѣйствiя. Эта работа

$$L = \left(p_1 \cdot v_1 + H_1 + \frac{c_1^2}{2g} + U_1 - T_0 \cdot S_1\right) -$$

$$-\left(p_2 \cdot v_2 + H_2 + \frac{c_2^2}{2g} + U_2 - T_0 S_2\right) - \text{потери работы} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Наибольшее же, предѣльное, значенiе работы равно

$$L_{\max} = \left(pv + U + \frac{c^2}{2g} + U - T_0 \, \mathrm{S}\right)\Bigg|_2^1 =$$

$$= \left(\Phi_1 - \Phi_2\right) = \left(\Phi_{\text{нач.}} - \Phi_{\text{кон.}}\right)$$

на каждый клг. активнаго вещества.

Полученное выраженiе показываетъ, что наибольшая возможная работа, которую можетъ совершить активное вещество, потокомъ вступающее въ двигатель, въ теченiе одного перiода его дѣйствiя, равняется измѣненiю нѣкоторой величины Φ, которая при данной температурѣ внѣшней среды T_0 зависитъ только отъ механическаго, физическаго или химическаго состоянiя активнаго вещества, т. е. представляетъ собою однозначную функцiю состоянiя этого вещества.

Величина

$$\Phi = pv + H + \frac{c^2}{2g} + U - T_0 S$$

можетъ быть названа работоспособностью носителя энергiи въ нѣкоторомъ сѣченiи его потока, при данной температурѣ окружающей среды T_0.

Выраженiе для наибольшей возможной работы

$$L_{\max} = \Phi_{\text{нач.}} - \Phi_{\text{кон.}}$$

не зависитъ ни отъ рода, ни отъ устройства двигателя и стало быть можетъ быть примѣнено къ каждому двигателю, если извѣстно начальное и конечное состоянiе его активнаго вещества. Если конечное состоянiе вещества таково, что, находясь въ условіяхъ внѣшней среды T_0, оно уже не въ состояніи болѣе совершать никакой механической работы, то въ такомъ случаѣ $\Phi_к = \Phi_0$ и $(\Phi_н - \Phi_0)$ представитъ собою наибольшую работу, которую вообще возможно получить изъ каждаго клг. активнаго вещества. Величину $(\Phi_н - \Phi_0)$ можно назвать располагаемой работой потока активнаго вещества.

Если извѣстны величина дѣйствительной работы L_{eff}, отдаваемой двигателемъ въ теченіе единицы времени, и расходъ активнаго вещества B въ теченіе того же времени, то отношеніе

$$\eta = \frac{L_{eff}}{B \cdot (\Phi_н - \Phi_к)} = \frac{\Phi_н - \Phi_к - \text{потери}}{\Phi_н - \Phi_к} = 1 - \frac{\text{потери}}{\Phi_н - \Phi_к}$$

представляетъ т. н. коэффиціентъ полезнаго дѣйствія двигателя или его отдачу.

Потери работы $(1 - \eta) \cdot (\Phi_н - \Phi_к)$ происходятъ вслѣдствіе необратимости всѣхъ процессовъ, совершающихся въ двигателѣ, т. е. какъ тѣхъ которыя совершаются активнымъ веществомъ, такъ и всѣхъ остальныхъ процессовъ въ двигателѣ.

Расчлененіе и анализъ этихъ потерь представляетъ важнѣйшій отдѣлъ теоріи двигателей. Такой анализъ однако не можетъ быть сдѣланъ въ общей формѣ. Потери должны быть опредѣляемы для каждаго двигателя или для каждаго его рода въ отдѣльности, т. к. онѣ существенно зависятъ отъ конкретныхъ условій, въ которыхъ происходятъ процессы, выбираемые для работы двигателя.

4.) При вычисленіи $(\Phi_н - \Phi_к)$ или $(\Phi_н - \Phi_0)$ могутъ иногда встрѣтиться затрудненія вслѣдствіе недостаточности нашихъ знаній о внутренней энергіи и объ энтропіи веществъ, примѣняемыхъ для приведенія двигателей въ дѣйствіе. Въ особенности это касается горючихъ смѣсей, примѣняемыхъ въ двигателяхъ внутренняго сгоранія.

Возникающее вслѣдствіе этого затрудненіе можетъ быть устранено на основаніи нижеслѣдующихъ соображеній.

При выводѣ выраженія $\Phi_н - \Phi_к$ не дѣлалось никакихъ ближайшихъ указаній о томъ, какой именно процессъ совершаетъ въ двигателѣ активное вещество. Было только указано, что процессъ этотъ состоитъ изъ трехъ частей и что онъ протекаетъ во всѣхъ своихъ частяхъ обратимымъ образомъ. Активное вещество можетъ, стало быть, совершать любой процессъ, лишь бы только онъ былъ обратимъ. Работа, совершаемая при всѣхъ такихъ обратимыхъ процессахъ будетъ одна и таже и равна $(\Phi_н - \Phi_к)$.

Если, слѣдовательно, мы выберемъ такой процессъ, при которомъ работа можетъ быть легко вычислена, то въ такомъ случаѣ нѣтъ надобности для вычисленія $\Phi_н - \Phi_к$ прибѣгать къ приведенной выше формулѣ, но достаточно вычислить работу при этомъ нами выбранномъ процессѣ, которая и равна $(\Phi_н - \Phi_к)$.

Наибольшая возможная или располагаемая работа, которую можно получить въ двигателѣ изъ потока носителя энергіи, можетъ быть слѣдовательно либо вычислена изъ формулы для $(\Phi_н - \Phi_0)$, либо опредѣлена какъ работа при нѣкоторомъ воображаемомъ и произвольно выбираемомъ обратимомъ процессѣ.

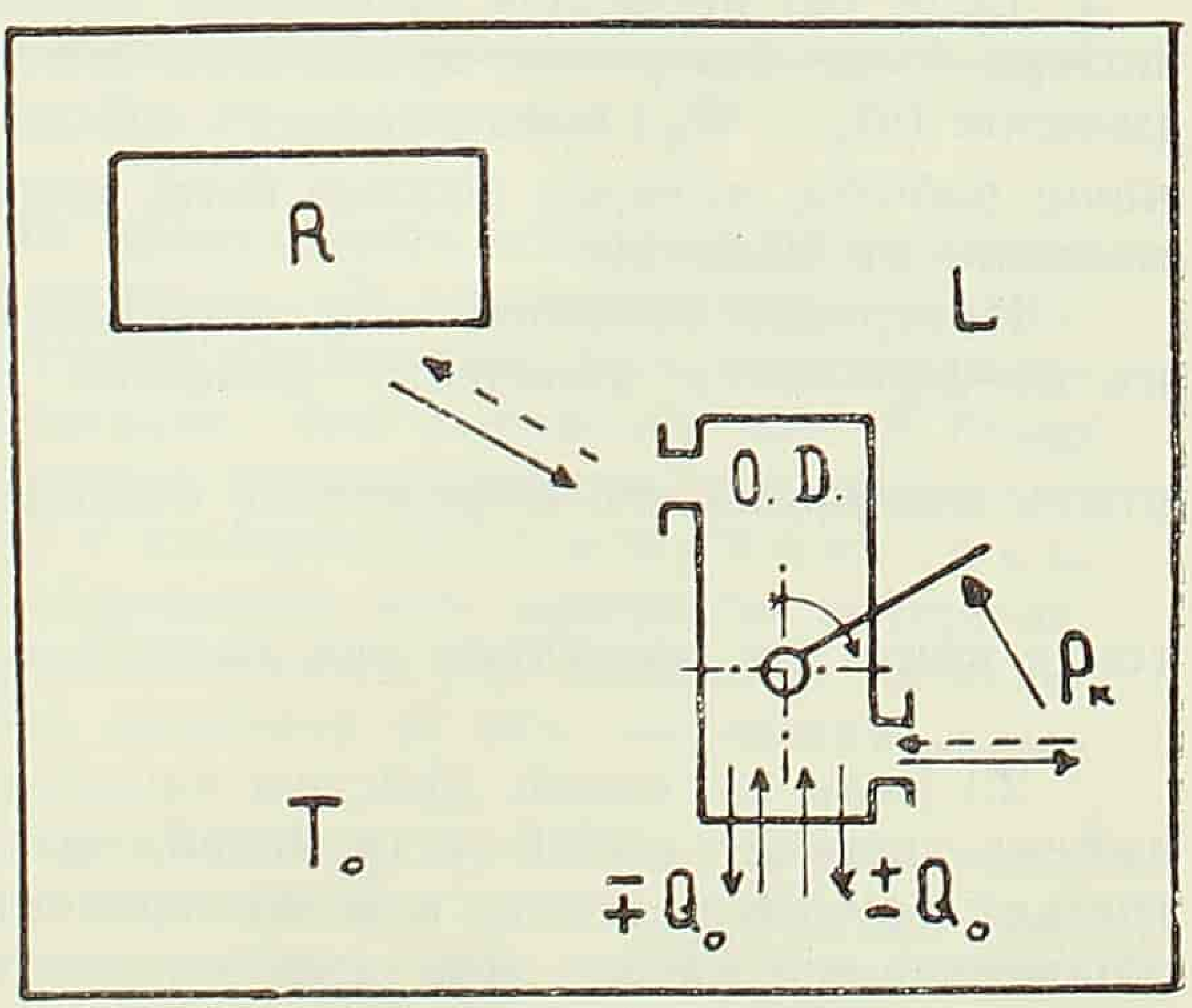
III.

1.) Приведенныя разсужденія, составляющія существенную часть теоріи, которую мы назвали монотермической, относились къ машинамъ первой группы упомянутой ранѣе классификаціи, а именно къ машинамъ двигателямъ.

Можно показать, что монотермическая теорія охватываетъ также дѣйствіе машинъ второй и третьей группы, т. е. всѣхъ машинъ вообще, за исключеніемъ развѣ только электрическихъ.

Есть основанія полагать, что монотермическая теорія, конечно надлежащимъ образомъ видоизмѣненная, можетъ быть примѣнена также и къ электрическимъ машинамъ, въ особенности, если принять во вниманіе то обстоятельство, что электричество разсматривается нынѣ какъ fluidum.

На слѣдующемъ чертежѣ дана схема дѣйствія машинъ второй группы, т. е. машинъ - орудій, представляющихъ собою обращеніе машинъ - двигателей (фиг. 6).



Фиг. 6.

Схема нарисована такъ, что дѣйствіе машинъ обѣихъ группъ можетъ быть сравниваемо.

Сплошныя линіи относятся къ машинѣ - двигателю, пунктирныя же къ машинѣ-орудію, не зависимо отъ рода и устройства ея (компрессоръ, насосъ и т. д.).

Машина орудіе представляетъ собою обращеніе машины двигателя въ томъ смыслѣ, что всѣ процессы въ ней протекаютъ въ обратномъ направленіи.

Если для двигателя работа L положительна, то для машины орудія она отрицательна, т. е. она должна быть извнѣ сообщаема машинѣ.

Если въ машинѣ-двигателѣ вещество активно, т. е. отдаетъ работу, то въ машинѣ-орудіи оно пассивно, т. е. воспринимаетъ работу, вслѣдствіе чего измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, свою скорость и свое состояніе.

То же имѣетъ мѣсто въ отношеніи теплообмѣна, направленія вращенія и т. д.

Все, что было сказано объ общихъ чертахъ двигателей, справедливо въ соотвѣтственно измѣненной формѣ и для машинъ орудій. Всѣ процессы, происходящіе въ машинахъ орудіяхъ такъ же, какъ и въ двигателяхъ, относятся къ числу монотермическихъ.

Путемъ подобныхъ же разсужденій, какъ и прежде, можно показать, что отрицательная работа, т. е. работа, которую нужно затратить для приведенія въ дѣйствіе машины орудія, равна

$$L_{eff}=(\Phi_{кон.}-\Phi_{нач.})+\text{потери работы.}$$

Въ этомъ выраженіи конечное значеніе величины Φ относится къ состоянію пассивнаго вещества, въ которомъ оно покидаетъ машину, а начальное значеніе къ состоянію вещества, въ которомъ оно вступаетъ въ машину.

Если бы процессы протекали обратимымъ образомъ, то потери были бы равны нулю. Изъ этого слѣдуетъ, что выраженіе $(\Phi_к-\Phi_н)$ представляетъ собою наименьшее значеніе работы, которая должна быть затрачена для приведенія машины въ дѣйствіе.

Интересно отмѣтить, что обращеніе относится также и къ коэффиціенту полезнаго дѣйствія. Для машины орудія этотъ коэффиціентъ выражается отношеніемъ $\eta_0=\frac{\Phi_к-\Phi_н}{L_{eff}}$, тогда какъ для двигателя онъ былъ $\eta=\frac{L_{eff}}{\Phi_н-\Phi_к}$.

2.) Если въ схемѣ дѣйствія машины работа $L=O$, то мы имѣемъ передъ собой устройство, которое относится къ третьей группѣ машинъ, т. е. къ трансмиссіямъ, какъ напр. обыкновенный каналъ или трубопроводъ, по которому переносится на разстояніе активное или же пассивное вещество.

Для такой машины имѣетъ мѣсто

$$O=(\Phi_{\text{н}}-\Phi_{\text{к}}) - \text{потери}$$

или

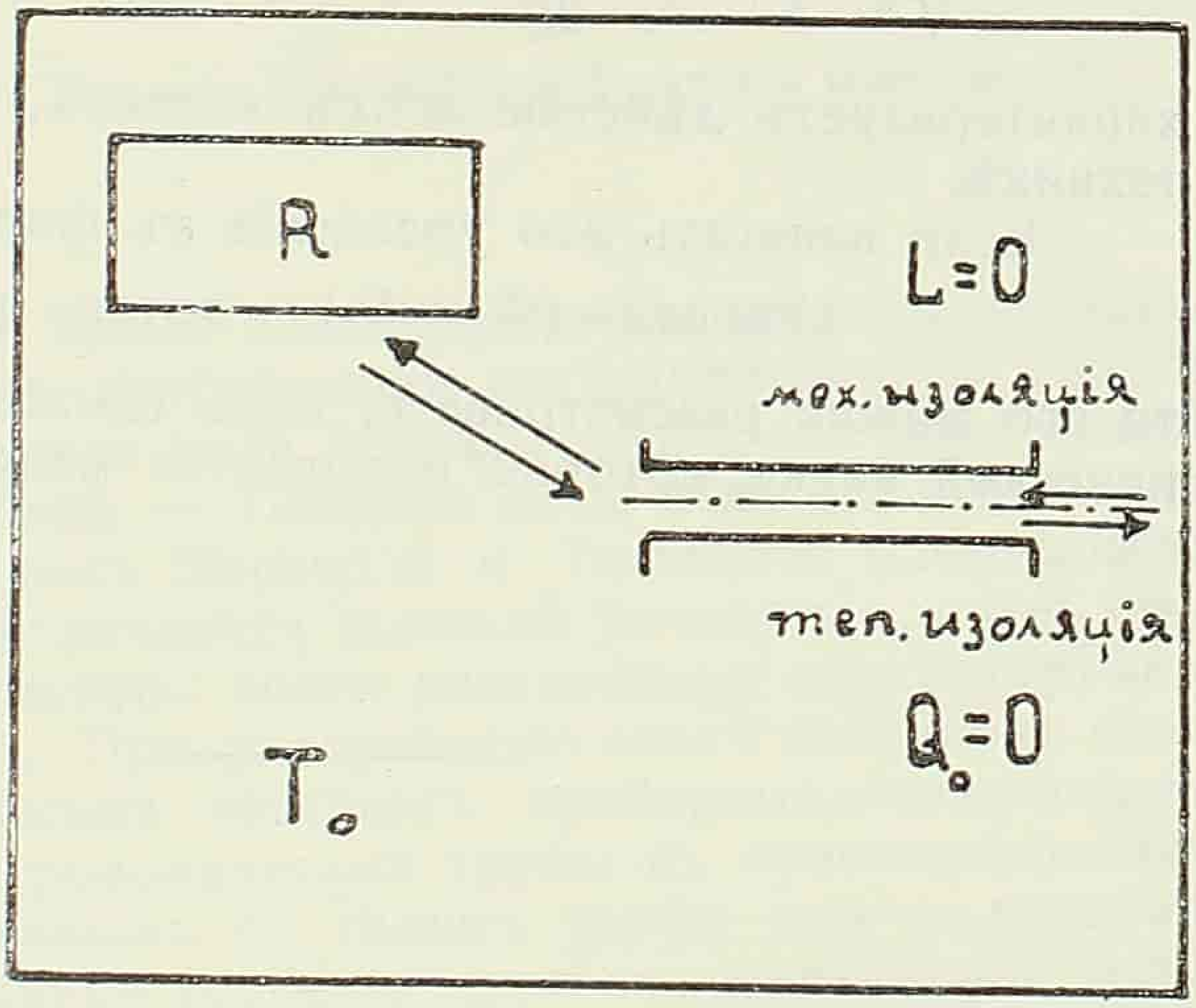
$$O=(\Phi_{\text{к}}-\Phi_{\text{н}}) + \text{потери}$$

смотря по тому съ какой стороны подходить къ предѣльному случаю, когда $L=O$.

Изъ написанныхъ выраженій вытекаетъ, что

$$\Phi_{\text{н}}-\Phi_{\text{к}} = \text{потери},$$

т. е. что паденіе величины Φ вдоль канала, по которому направляется потокъ активнаго или пассивнаго вещества, измѣряетъ собою работу, расходуемую на преодолѣніе возникающихъ при этомъ въ каналѣ вредныхъ сопротивленій.



Фиг. 7.

Т. к. вредныя сопротивленія представляютъ собою величину, которая по существу своему всегда положительна, т. е. не можетъ быть меньше нуля, то изъ приведенныхъ выше выраженій вытекаетъ, что теченіе вещества въ каналѣ происходитъ всегда въ направленіи отъ большихъ значеній величины Φ по направленію къ меньшимъ ея значеніямъ. Такое заключеніе есть естественное слѣдствіе того обстоятельства, что выраженіе для Φ было выведено изъ второго начала термодинамики, разсматриваемаго иногда какъ законъ о направленіи процессовъ.

Стѣнки канала, построенныя изъ прочнаго матеріала, представляютъ собою механическую изоляцію, назначеніе которой предохранять величину Φ отъ внѣшнихъ механическихъ вліяній.

Иногда требуется примѣнить и тепловую изоляцію, если желаютъ избѣгнуть теплообмѣна съ окружающей средой, который также вліяетъ на численное значеніе величины Φ въ потокѣ вещества.

Коеффиціентъ полезнаго дѣйствія трансмиссіи

$$\eta = \frac{\Phi_к}{\Phi_н}.$$

З а к л ю ч е н і е. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что монотермическая теорія представляетъ собою наиболѣе общую концепцію понятія о машинѣ и охватываетъ всѣ роды машинъ безъ исключенія.

Основное уравненіе этой теоріи, а именно

$$\text{Работа} = \left(p_1 \cdot v_1 + H_1 + \frac{c_1^2}{2g} + U_1 - S_1 \cdot T_0\right) -$$

$$- \left(p_2 \cdot v_2 + H_2 + \frac{c_2^2}{2g} + U_2 - S_1 \cdot T_0\right) - \text{потери работы},$$

характеризуетъ дѣйствіе всѣхъ машинъ, примѣняемыхъ въ техникѣ.

Если написать это уравненіе въ формѣ

$$\text{Работа} = (\Phi_1 - \Phi_2) - \text{потери работы},$$

то его можно разсматривать, какъ символъ того отдѣла технической науки, который называется машиновѣдѣніемъ.

Н. Абакумовъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ШИРОТЫ АСТРОНОМИЧЕСКИХЪ ПУНКТОВЪ.

Сравненіе методовъ Пѣвцова (Stechert'a) и Талькотта (Horrebow'a).

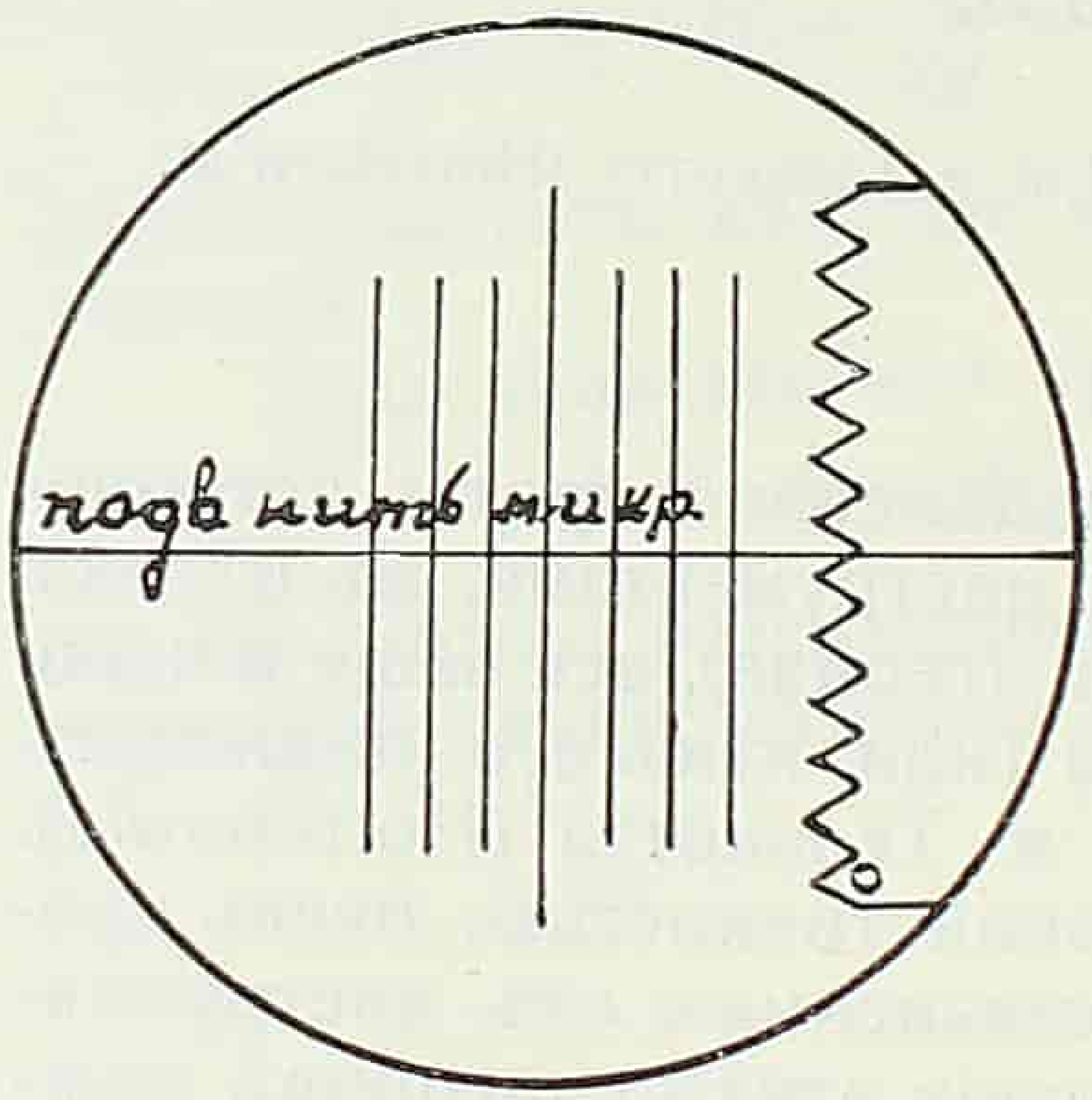
I.

Въ послѣднее время для опредѣленія широты астрономическихъ пунктовъ переносными инструментами, въ цѣляхъ изслѣдованія истиннаго вида земли (геоида), все чаще и чаще пользуются способами — Пѣвцова (или, какъ его называютъ въ Германіи, методомъ Stechert'a) и Талькотта (Horrebow'a). Оба эти способа отличаются высокой точностью, очень просты и даютъ результаты почти независимые отъ инструментальныхъ ошибокъ. При употребленіи этихъ способовъ можно пользоваться весьма простымъ приборомъ, состоящимъ изъ небольшой астрономической трубы съ чувствительнымъ уровнемъ, скрѣпленнымъ съ тѣломъ трубы или ея горизонтальной осью, и двухъ грубыхъ круговъ — искателей, горизонтальнаго и вертикальнаго. Такого рода приборъ получилъ названіе Зенитъ—Телескопъ.

Способъ Пѣвцова, принятый Югославянскимъ Военно-Географическимъ Институтомъ, детально изложенъ въ статьѣ начальника астроном. отд. В. Г. И. генерала М. Терзича (Годишњак астрономске опсерваторије универзитета у Београду за годину 1930); поэтому я не буду касаться деталей этого способа, хотя я не могу согласиться съ нѣкоторыми мѣстами этой статьи, посвященными толкованію причинъ ошибокъ широтъ, а также съ краткой критикой способа Талькотта (Horrebow'a).

II.

Способъ Талькотта — способъ не новый. Талькоттъ уже въ 1834 году предложилъ наблюдать двѣ звѣзды (южную и сѣверную) точно въ меридіанѣ, при чемъ зенитныя разстоянія этихъ звѣздъ должны отличаться другъ отъ друга настолько, чтобы ихъ можно было измѣрить микрометромъ, не измѣняя наклонности трубы, а прямыя восхожденія настолько, чтобы промежутокъ времени между прохожденіями звѣздъ черезъ меридіанъ былъ возможно малымъ (но не $<$ 2,5 минутъ). При этомъ способѣ мы будемъ имѣть дѣло только съ разностями зенитныхъ разстояній. Для этого способа легко можетъ быть приспособленъ каждый переносный универсальный или пассажный инструментъ; надо только придѣлать окулярный микрометръ съ горизонтальной подвижной нитью и уровень, скрѣпленный съ тѣломъ трубы или ея горизонтальной осью, за которымъ установилось названіе „Талькоттовскій (Harrebow'a) уровень".



Черт. 1.

Сѣтку нитей необходимо установить вертикально (черт. 1).

Для того, чтобы можно было быстро повернуть подвижную часть инструмента на 180 градусовъ, на нижней неподвижной части инструмента придѣлывается особый выступъ, допускающій поворотъ только на 180 градусовъ.

Талькоттовъ способъ требуетъ установки средней вертикальной нити точно въ меридіанѣ. Понятіе точности принимать надо, конечно, относительно. Эта точность будетъ зависѣть отъ точности, которую мы потребуемъ отъ широты.

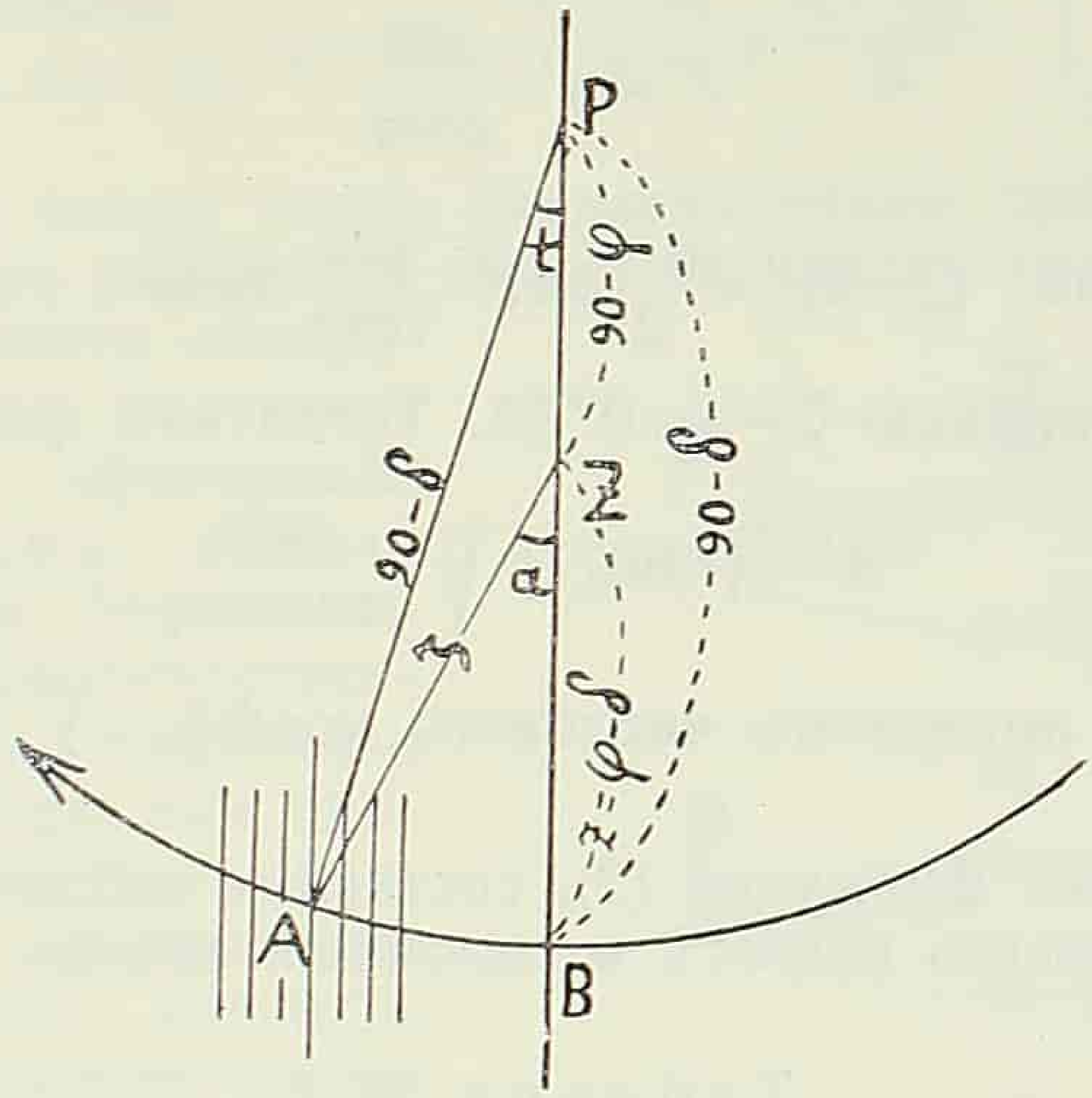
III.

Опредѣлимъ величину азимута, которую можно допускать при установкѣ инструмента въ меридіанѣ.

Положимъ, что средняя нить инструмента находится не въ плоскости меридіана, а въ плоскости вертикала съ азимутомъ a. На черт. 2 представлено такое положеніе средней нити на небесной сферѣ, на которой

P — точка полюса.
Z — „ зенита.
$z=\varphi-\delta$ — зенитное разстояніе данной звѣзды въ меридіанѣ.
A — точка пересѣченія параллели наблюдаемой звѣзды BA со средней нитью.
t — часовой уголъ точки A.

ζ — зенитное разстоянiе точки A.
a — азимутъ точки A.
φ — широта даннаго мѣста
δ — склоненiе звѣзды.



Черт. 2.

Намъ надо опредѣлить разность $\zeta - z$, на которую будетъ ошибочна широта. Изъ сф. Δ ZAP имѣемъ:

$$Cos\zeta = sn\delta sn\varphi + cos\delta cos\varphi cost$$

или $$Cos\zeta = sn\delta sn\varphi + cos\delta cos\varphi - 2sn^2 \frac{t}{2} cos\delta cos\varphi$$

$$Cos\zeta = cos(\varphi - \delta) - 2sn^2 \frac{t}{2} cos\delta cos\varphi = cosz - 2sn^2 \frac{t}{2} cos\delta cos\varphi$$

$$Cos\zeta - cosz = -2sn^2 \frac{t}{2} cos\delta cos\varphi$$

откуда $$sn\frac{\zeta - z}{2} = sn^2 \frac{t}{2} \frac{cos\delta cos\varphi}{sn\frac{\zeta + z}{2}}$$

Можно заранѣе сказать, что искомая разность $(\zeta - z)$ и часовой уголъ t будутъ очень малыми величинами, почему мы можемъ замѣнить $sn\frac{\zeta - z}{2} = \frac{(\zeta - z)''}{2} sn1''$; $sn^2\frac{t}{2} = \frac{t''^2}{4} sn^2 1''$; $sn\frac{\zeta + z}{2} = snz$. Послѣ замѣны получимъ

$$(\zeta - z)'' = \frac{t''^2}{2} sn1'' \frac{cos\delta cos\varphi}{snz}$$

Изъ того же сф. Δ ZAP имѣемъ $snt = sna \frac{sn\zeta}{cos\delta}$.

По малости величинъ t, a и $(\zeta - z)$ можемъ написать

$$t'' = a'' \frac{snz}{cos\delta}$$

Слѣдовательно $(\zeta - z)'' = \frac{a''^2}{2} sn1'' \frac{snz}{cos\delta} cos\varphi \ldots \quad (1)$

Зададимся ошибкою $\zeta - z = 0'',01$. Тогда изъ форм. (1)

получимъ $\quad a'' = [1,8077] \sqrt{\frac{cos\delta}{snzcos\varphi}}; \ldots \quad (2)$

гдѣ [1,8077] логариѳмъ числового коэфф. $\sqrt{\frac{0,02}{sn1''}}$.

Пользуясь формулой (2), составимъ табличку азимутовъ a для различныхъ широтъ и склоненій звѣздъ

Таблица № 1.

φ \ δ	89°	70°	60°	45°	30°	0°
0°	8″	39″	49″	64″	84″	∾
45°	12	69	106	∾	140	91
60°	17	127	∾	150	120	98

Слѣдователно даже для высокой точности въ $0'',01$ можно допускать относительно большія погрѣшности при установкѣ инструмента въ меридіанѣ. На самомъ дѣлѣ мы установимъ свой инструментъ въ меридіанѣ гораздо точнѣе, почему эта ошибка насъ совершенно не должна безпокоить.

IV.

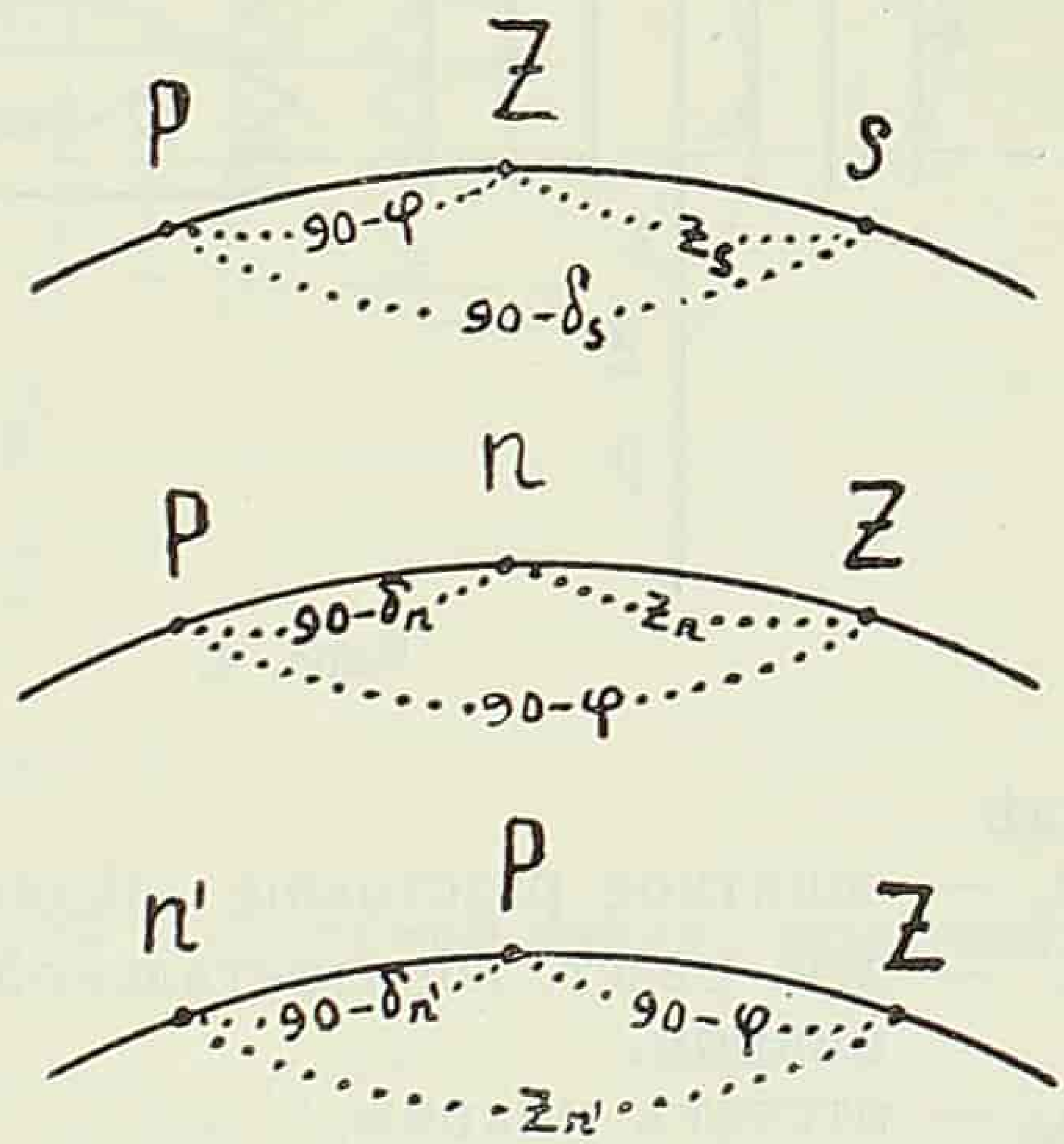
Если бы звѣзды съ допущенной точностью наблюдались въ меридіанѣ, то по ихъ зенитнымъ разстояніямъ и склоненіямъ широта φ опредѣлилась бы по извѣстнымъ формуламъ (черт. 3).

для южныхъ зв.	для сѣверныхъ зв.	для сѣв. $s. p.$ звѣздъ
$\varphi = \delta_s + z_s$	$\varphi = \delta_n - z_n$	$\varphi = 180 - \delta_n' - z_n'$

откуда

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Когда измѣрена южная и сѣв. зв.} & \varphi=\frac{\delta_s+\delta_n}{2}+\frac{z_s-z_n}{2} \\ \text{Когда измѣрена южная и сѣв. } s.p. \text{ зв.} & \varphi=90-\frac{\delta_n'-\delta_s}{2}+\frac{z_s-z_n'}{2}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

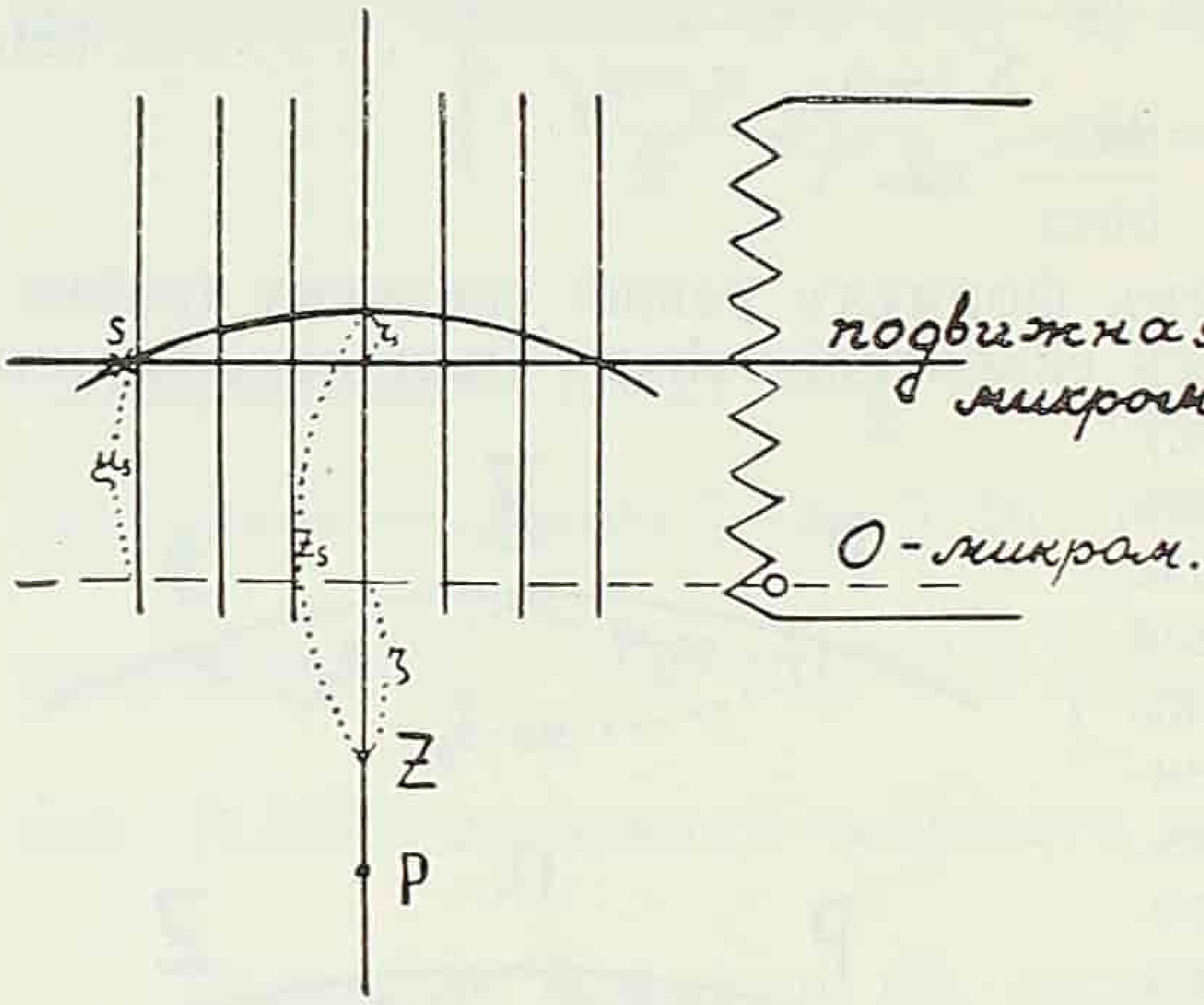
Первые члены этихъ формулъ равны среднему ариѳметическому изъ видимыхъ склоненій звѣздъ (или дополн. до 90° полуразности склон.) Склоненія эти получимъ изъ астрон. эфемеридъ. Второй членъ, равный полуразности зенитныхъ разстояній соотвѣтственныхъ звѣздъ, получимъ, измѣряя звѣзды при прохожденіи ихъ черезъ среднюю нить окулярнымъ микрометромъ; разность отсчетовъ микрометра будетъ равна разности зенитныхъ разстояній.



Черт. 3.

Для уточненія наблюденій, когда звѣзда проходитъ черезъ сѣтку нитей, необходимо производить нѣсколько отсчетовъ микрометра, но всякій разъ рядомъ съ нитью, замѣчая номеръ этой нити. Рядомъ потому, чтобы не сдѣлать ошибочнаго наведенія, когда звѣзда будетъ подъ нитью. Ниже мы выведемъ ошибку, происходящую отъ того, что наведеніе нитью микрометра будемъ дѣлать тогда, когда звѣзда будетъ находиться рядомъ съ нитью. Если разстоянія между нитями опредѣлены заранѣе, то моменты по хронометру записывать совершенно не надо; въ противномъ случаѣ необходимо записать и моменты.

Выведемъ формулы для приведенія отсчетовъ, сдѣланныхъ на боковыхъ нитяхъ, къ меридіанальнымъ отсчетамъ. При пропусканіи звѣздъ черезъ сѣтку нитей трубы мы имѣемъ дѣло съ проекціей звѣздной параллели и именно съ центральной проекціей. Параллели звѣздъ въ полѣ зрѣнія трубы, которое въ этомъ случаѣ будетъ служить картинной плоскостью, представятся намъ въ видѣ параболъ за исключеніемъ звѣздъ со склоненіемъ $\delta=o$, когда мы будемъ имѣть дѣло съ прямой линіей. При чемъ для звѣздъ, у которыхъ $\delta>o$ вогнутость параболы будетъ обращена къ сѣверному полюсу, а для звѣздъ, у которыхъ $\delta < o$, къ сѣверному полюсу будетъ обращена выпуклость. Принявъ во вниманіе, что астрономическія трубы перевертываютъ изображеніе, мы получимъ въ полѣ зрѣнія такую картину:



Черт. 4.

Для южной звѣзды (для которой точка зенита и точка полюса находятся на одной сторонѣ (сѣверной) отъ звѣзды) (черт. 4)

$$z_s = \zeta + \mu_s + r_s$$

гдѣ

z_s — зенитное разстояніе звѣзды въ меридіанѣ.

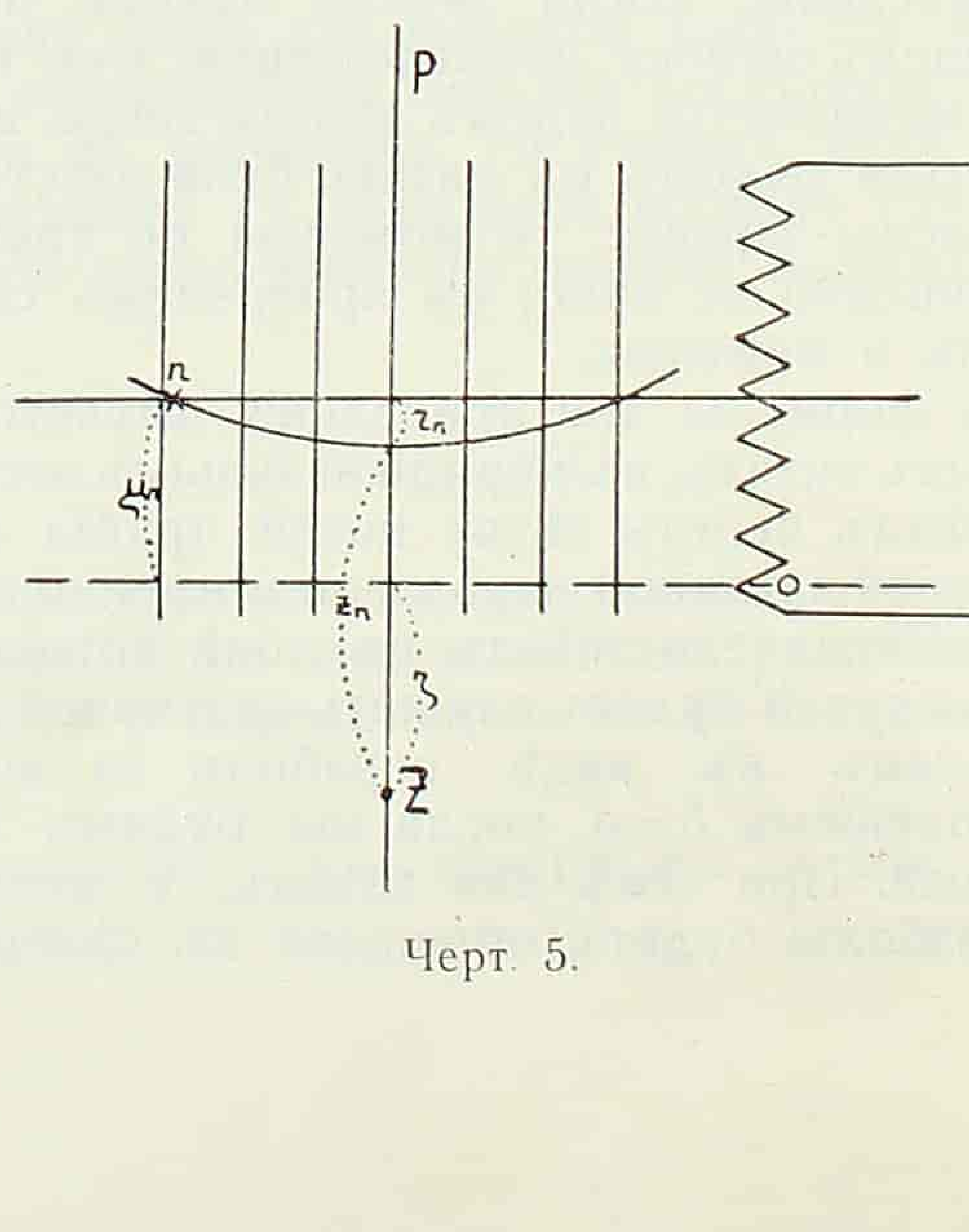
ζ — зен. разст. горизонтальной линіи проход. черезъ нульп. микром.

μ_s — отсчетъ микром.

r_s — приведеніе отсчета микр. къ меридіану.

Для сѣверной звѣзды (которая находится между полюсомъ и зенитомъ) (черт. 5).

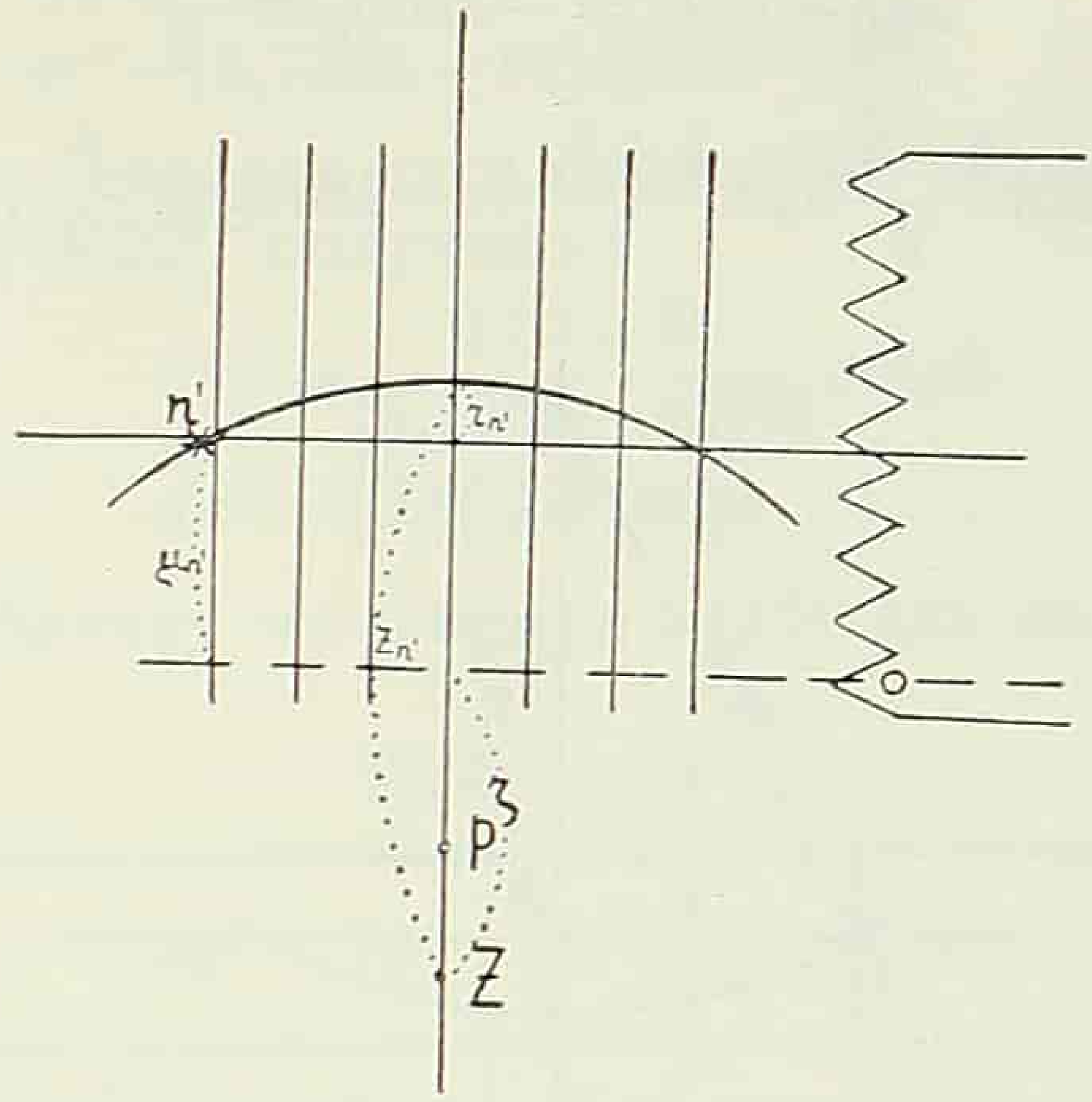
$$z_n = \zeta + \mu_n - r_n$$



Черт. 5.

Для сѣверной *s. p.* звѣзды (когда точка полюса находится между точкой зенита и звѣздой) (черт. 6).

$$z_{n'}=\zeta+\mu_{n}'+r_{n}'$$



Черт. 6.

Слѣдовательно для южной и сѣверной звѣздъ получимъ формулу:

$$\frac{z_s-z_n}{2}=\frac{\mu_s-\mu_n}{2}+\frac{r_s+r_n}{2}\quad,\ldots\ldots \qquad (4)$$

для южной и сѣверной *s. p.* звѣздъ —

$$\frac{z_s-z_n'}{2}=\frac{\mu_s-\mu_n'}{2}+\frac{r_s-r_n'}{2}\quad\ldots\ldots \qquad (5)$$

Нѣтъ надобности разбирать случай для южныхъ звѣздъ съ отрицательнымъ склоненіемъ, ибо нижевыведенная формула для поправки r сама опредѣлитъ знакъ этой поправки.

V.

Выводъ r.

Обозначимъ черезъ

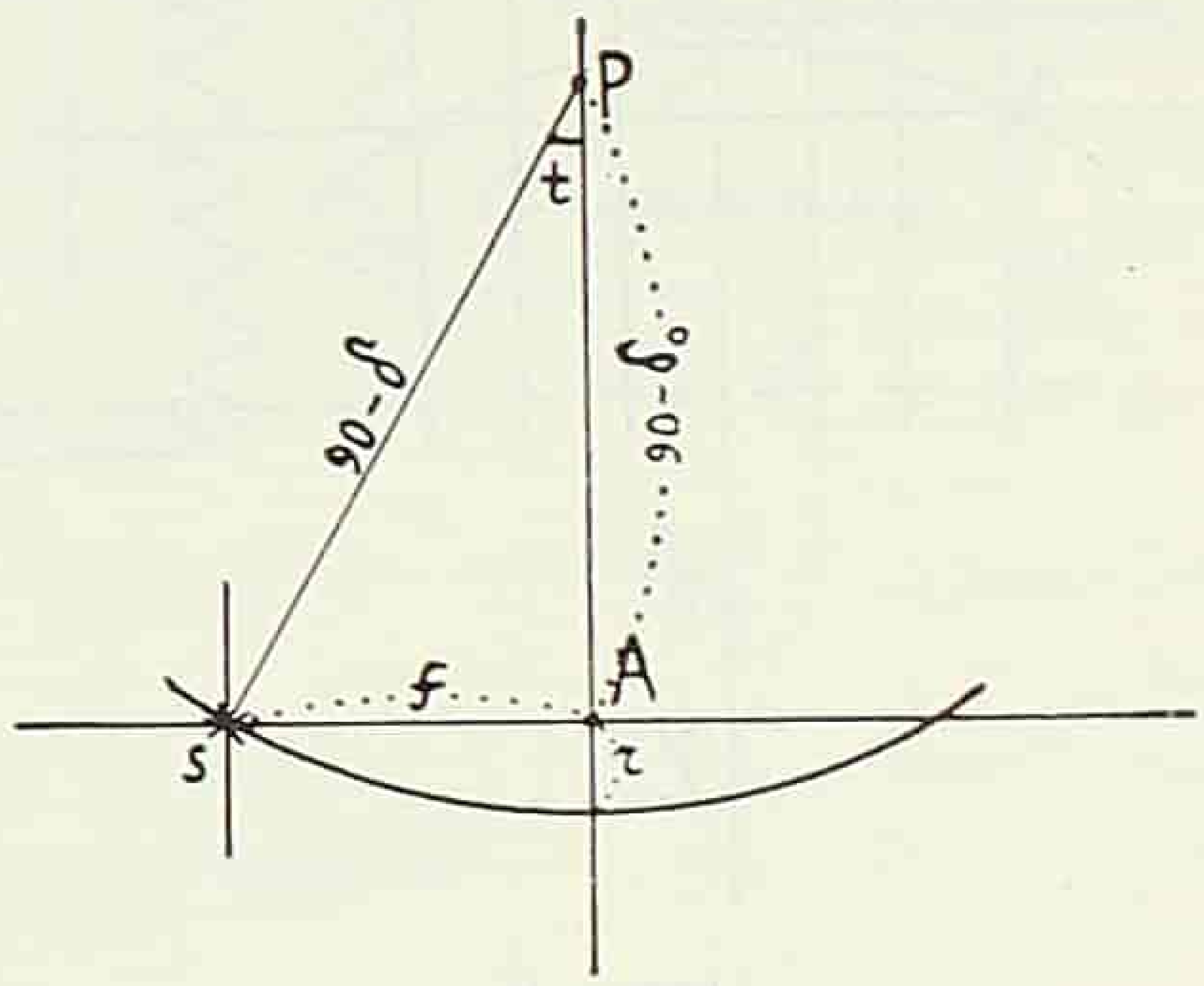
F — угловое разстояніе боковой нити отъ средней,
δ_0 — склоненіе точки A (пересѣченія подвижной нити микр. съ мерид. въ моментъ наведенія на звѣзду),
s — данную звѣзду,
t — часовой уголъ звѣзды,
δ — склоненіе звѣзды,
$r=\delta_0-\delta$ — искомое приведеніе.

Изъ прям. сферич. ΔPSA (черт. 7) имѣемъ

$$sn\delta = sn\delta_0 \cos F = sn\delta_0\left(1-2sn^2\frac{F}{2}\right)$$

$$sn\delta - sn\delta_0 = -2sn\delta_0 sn^2\frac{F}{2}$$

$$2sn\frac{\delta-\delta_0}{2}\cos\frac{\delta+\delta_0}{2} = -2sn\delta_0 sn^2\frac{F}{2}.$$



Черт. 7.

По малости угловъ $\frac{\delta-\delta_0}{2}$ и F можемъ считать

$$sn\frac{\delta-\delta_0}{2} = \frac{(\delta-\delta_0)''}{2}sn1'' \quad ; \quad \cos\frac{\delta+\delta_0}{2} = \cos\delta \quad ;$$

$$sn^2\frac{F}{2} = \frac{F''^2}{4}sn^2 1'' \quad ; \quad sn\delta_0 = sn\delta:$$

тогда

$$r'' = (\delta_0-\delta)'' = \frac{F''^2}{2}sn1'' tg\delta \; . \; . \; . \; . \qquad (6).$$

Если выразимъ F въ секундахъ времени, получимъ

$$r'' = \frac{F^{s2}}{2}15^2 sn1'' tg\delta$$

а такъ какъ

$$\log\frac{15^2}{2}sn1'' = [6{,}7368-10], \text{ то}$$

$$r'' = [6{,}7368-10]\, tg\delta\, F^{s^2} \; . \; . \; . \; . \qquad (7).$$

Если обозначимъ черезъ λ цѣну одного оборота окулярнаго микрометра въ секундахъ дуги и выразимъ приведеніе r въ такихъ оборотахъ, то получимъ формулу

$$r_{\text{об.}} = \frac{[6{,}7368-10]}{\lambda}tg\delta F^{s^2} \; . \; . \; . \; . \qquad (8).$$

Выведемъ ошибку приведенія r зависящую отъ того обстоятельства, что подвижная нить микрометра наводится не въ моментъ нахожденія звѣзды на нити. а рядомъ съ ней. Дифференцируемъ уравн. (7) по r и F

$$dr'' = [6{,}7368 - 10]\, tg\delta 2 F^s dF^s \quad \ldots, \qquad (9).$$

Выражая dF въ секундахъ дуги, задавшись точностью $dr = 0'',01$, и величиною $F = 20^s$, получимъ

$$dF'' = \frac{0{,}01 \times 15}{[6{,}7368 - 10] 40} cotg\delta$$

или

$$dF'' = [0{,}8372]\, cotg\delta \quad \ldots. \qquad (10).$$

Составимъ табличку по формулѣ (10) для различныхъ δ

Таблица 2.

δ	89°	70°	60°	45°	30°	0°
dF	0″,1	2″,5	4″,0	6″,9	11″,9	∞

Принимая во вниманіе то обстоятельство, что самыя тонкія паутины, изъ которыхъ составлена сѣтка нитей, имѣютъ толщину, выраженную въ угловыхъ мѣрахъ, равную 2″, изъ вычисленной таблички мы видимъ, что даже при принятой точности $dr = 0'',01$, мы смѣло можемъ измѣрять звѣзды со склоненіями доходящими до 70° рядомъ съ нитью. Что же касается циркумполярныхъ звѣздъ, двигающихся очень медленно, то ихъ и не придется наблюдать далеко отъ средней нити, чтобы не терять времени. Такія звѣзды вообще можно измѣрять не на нитяхъ, если таковыхъ не имѣется вблизи средней нити. Конечно, въ этомъ случаѣ необходимо отмѣтить по хронометру моменты измѣренія, а также моментъ прохожденія звѣзды черезъ среднюю нить, чтобы можно было вычислить часовые углы t, соотвѣтствующіе моментамъ измѣренія звѣздъ микрометромъ. Для этого случая формулу (8) необходимо преобразовать, замѣнивъ въ ней разстояніе F, час. угл. t.

Изъ прям. сф. ΔSAP (черт. 7) имѣемъ

$$F^s = t^s cos\delta$$

слѣдовательно

$$r^{об.} = \frac{[6{,}7368 - 10]}{\lambda} t^{s2} sn\delta cos\delta$$

или

$$r^{об.} = \frac{[6{,}4358 - 10]}{\lambda} t^{s2} sn2\delta \quad \ldots. \qquad (11).$$

Необходимо замѣтить, что для циркумполярныхъ звѣздъ часовой уголъ t можно знать очень грубо. Дѣйствительно, продифференцировавъ уравн. (11) (выразивъ предварительно r въ сек. дуги) по r и t, получимъ

$$dr'' = [6{,}44-10]2t^s dt sn 2\delta$$

$$dr'' = [6.74-10]t^s sn 2\delta dt \; . \; . \; . \; . \qquad (12).$$

Возьмемъ Полярную, у которой $\delta = 89^\circ$, на разстояніи отъ средней нити $F = 5^s$. Слѣдовательно $t^s = F sec\delta = 286^s$. Положимъ, что часовой уголъ опредѣленъ съ ошибкой въ 5^s. Тогда $\quad dr'' = [6{,}74-10]286^s sn 178^\circ \times 5^s = 0'',03$ т. е. величина незначительная.

VI.

Поправка за рефракцію.

Предполагая, что состояніе атмосферы за время наблюденія одной пары звѣздъ существенно не измѣнится, мы примемъ во вниманіе только нормальную рефракцію. Обозначимъ рефракцію южной звѣзды черезъ ρ_s, а сѣверной — ρ_n. Мы должны полуразность зенитныхъ разстояній наблюдаемой пары исправить за величину $\frac{\rho_s - \rho_n}{2}$. Величину эту получимъ очень просто. Выписавъ изъ „Connaissance des temps“ десятиминутныя перемѣны нормальной рефракціи для различныхъ зенитныхъ разстояній, получимъ такую табличку:

Таблица 3.

Z	0°	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\Delta\rho$ 10-ти мин. пер. Н. Р.	0'',18	0,18	0,18	0,19	0,20	0,21	0,23	0,26	0,30	0,35	0,43

Полуразность зенитныхъ разстояній данной пары равна полуразности отсчетовъ окулярнаго микрометра $\frac{\mu_s - \mu_n}{2}$, причемъ послѣдняя полуразность выражена въ оборотахъ микрометра. Цѣну оборота микр., выраженную въ сек. дуги, мы назвали λ, слѣдовательно полуразность соотвѣтственныхъ рефракцій, выраженную въ оборотахъ микрометра, получимъ по формулѣ

$$\left(\frac{\rho_s - \rho_n}{2}\right)^{об.} = \left(\frac{\mu_s - \mu_n}{2}\right)^{об.} \frac{\lambda''}{600} \frac{\Delta\rho''}{\lambda''}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\rho_s-\rho_n}{2}\right)^{\text{обор.}} = [7{,}222-10]\left(\frac{\mu_s-\mu_n}{2}\right)^{\text{об.}} \Delta\rho'' \\ &\text{или} \\ &\left(\frac{\rho_s-\rho_n}{2}\right)^{\text{обор.}} = 0{,}00167\left(\frac{\mu_s-\mu_n}{2}\right)^{\text{об.}} \Delta\rho'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13).$$

Величину $\Delta\rho$ получимъ изъ табл. 3 по среднему зенитному разстоянію данной пары. Рефракціонную поправку можно вычислить заранѣе при составленіи программы наблюденій.

При этомъ способѣ, какъ и вообще при всѣхъ способахъ соотвѣтственныхъ высотъ, мы принимаемъ, что рефракція въ сѣверномъ и южномъ направленіяхъ одинакова. Если желательно уточнить опредѣленіе широты, необходимо брать близзенитныя звѣзда.

VII.

Поправка за измѣненіе наклонности трубы.

Намъ осталось ввести еще только одну поправку за измѣненіе наклонности трубы, которую намъ дадутъ отсчеты тальчоттовскаго уровня. Условимся считать наклонность i положительною, когда объективъ опущенъ, При этомъ условіи, записывая уровень, мы должны знакъ плюсъ придавать концу пузырька уровня обращенному къ объективу и знакъ минусъ противоположному. Алгебраическая сумма отсчетовъ дастъ намъ непосредственно наклонность трубы, выраженную въ полудѣленіяхъ уровня. Обозначимъ наклонность трубы при наведеніи на южную звѣзду черезъ i_s, на сѣверную — i_n; при чемъ будемъ считать, что эта наклонность уже выражена въ секундахъ дуги. Кромѣ того пусть

z_s — фактическое зенитное разстояніе южной зв.

z_n — „ „ „ сѣверной зв.

z — Зенитное разстояніе соотвѣтствующее положенію трубы, при которомъ уровень показываетъ нулевую наклонность.

По нашему условію положительная наклонность будетъ при

$$z_s > z \quad \text{и} \quad z_n > z$$

слѣдовательно

$$z_s = z + i_s \quad ; \quad z_n = z + i_n$$

откуда

$$\frac{z_s - z_n}{2} = \frac{i_s - i_n}{2} \quad \ldots\ldots \quad (14).$$

VIII.

Формулы для вывода широты.

Мы теперь имѣемъ всѣ данныя для вывода широты φ. Если присоединимъ къ уравн. (3) всѣ поправки, то получимъ формулы:

Южн. и сѣв. звѣзды

$$\varphi=\frac{\delta_n+\delta_s}{2}+\lambda\left(\frac{\mu_s-\mu_n}{2}+\frac{r_s+r_n}{2}+\frac{\rho_s-\rho_n}{2}\right)+\frac{i_s-i_n}{2}$$

южн. и сѣв. s. p. звѣзды

$$\varphi=90-\frac{\delta_n'-\delta_s}{2}+\lambda\left(\frac{\mu_s-\mu_n'}{2}+\frac{r_s-r_n'}{2}+\frac{\rho_s-\rho_n'}{2}\right)+\frac{i_s-i_n'}{2} \qquad (15).$$

Въ этихъ формулахъ члены въ скобкахъ выражены въ оборотахъ окулярнаго микрометра. λ — цѣна одного оборота микрометра.

Если дѣлать наблюденія симметричныя по отношенію къ средней нити, то нѣтъ надобности опредѣлять величину r для каждой нити, рядомъ съ которой сдѣлано наведеніе микрометромъ. Вполнѣ достаточно взять среднее μ и въ форм. (8) подставить среднее F^2. Въ этомъ случаѣ для даннаго инструмента для вычисленія величины r можно составить очень простую табличку по аргументу δ.

Формулы для подбора звѣздныхъ паръ получимъ изъ уравн. (3)

$$\left.\begin{array}{l}\delta_s+\delta_n=2\varphi\\ \delta_n'-\delta_s=180-2\varphi\end{array}\right\}\ \ldots\ . \qquad (16)$$

Эти равенства могутъ быть нарушены на величину, которую мы въ состояніи измѣрить окулярнымъ микрометромъ.

IX.

Для иллюстраціи приведемъ численный примѣръ опредѣленія широты по Тальк. способу сдѣланный мною въ пулковской обсерваторіи переноснымъ зенитъ-телескопомъ Фрейберга. Этотъ зен. тел. имѣетъ поле зрѣнія 54′. Окулярный микрометръ имѣетъ 20 оборотовъ, при чемъ цѣна одного оборота

$$\lambda=107'',65,$$

барабанъ раздѣленъ на 100 частей. Слѣдовательно при подборѣ паръ для этого инструмента можно допускать разности зенитныхъ разстояній доходящія до 35′. Инструментъ имѣетъ 8 нитей. Разстояніе боковыхъ нитей отъ средней выражается слѣдующей табличкой:

Кругъ лѣво.

Нити	1	2	3	4 средняя	5	6	7
F	$21^s,92$	$14^s,97$	$7^s,53$	—	$6^s,64$	$13^s,81$	$20^s,65$
F^2	480,5	224,1	56,7	—	44,1	190,7	426,4

Наблюденія дѣлались на нитяхъ 1,3,5 и 7, слѣдовательно

$$\text{среднее} \quad F^2 = \frac{480{,}5+56{,}7+44{,}1+426{,}4}{4} = 251{,}925 \ldots . \; 2{,}4013$$

Съ этими данными формула (8) приметъ очень простой видъ

$$\left.\begin{aligned} r_{\text{обор.}} &= [7{,}1061-10]\; tg\delta \\ r_{\text{обор.}} &= 0{,}001277\; tg\delta \end{aligned}\right\} \ldots . \qquad (17)$$

Цѣна полудѣленія уровня$=1'',05$. Наблюденіе одной пары выразилось слѣдующей записью:

1914 апрѣля 30.

Пулково: морская башня; зенитъ телеск. Фрейберга; Кр. лѣво.

$Z=18°28'$

	южная зв.		сѣверная зв.
	ν' Bootis (4,8)		ζ Ursae min. (4,3)
	уровень $-12{,}0+12{,}7$		$-12{,}2+13{,}0$
нити	μ (отсч. микр.)		
1	$15^{\text{об.}}, 088$	7	$2^{\text{об.}}, 698$
3	097	5	700
5	082	3	709
7	090	1	747
	уровень $-12{,}0+12{,}4$		$-12{,}2+13{,}0$

Вычисленіе широты φ

Данныя изъ Berl. Jarb. — Изъ наблюденій

$\delta_s=41°7'13'',6 \qquad tg\delta_s=0{,}873 \qquad \mu_s=15^{\text{об.}},0893$

$\delta_n=78\;3\;16{,}5 \qquad tg\delta_n=4{,}427 \qquad \mu_n=2,\;7135$

$$\frac{\delta_s+\delta_n}{2}=59°35'15'',05 \qquad \frac{\mu_s-\mu_n}{2}=6,\;1879$$

Вычисленіе r (форм. 17).

$$r_s=0{,}001277\times0{,}873=0^{\text{об.}},\;0011_1$$

$$r_n=0{,}001277\times4{,}727=0,\;0060_3$$

$$\frac{r_s+r_n}{2}=0^{\text{об.}},\;0036$$

Вычисленіе рефракц. попр.

Изъ табл. 1 по зенитн. разст. 18°28′ получимъ $\Delta\rho = 0'',20$

По форм. (13) $\frac{\rho_s - \rho_n}{2} = 0{,}00167 \times 6{,}1879 \times 0'',20 = 0^{\text{об.}}, 0021$

Вычисленіе попр. за наклонность.

$$i_s = \frac{0{,}7 + 0{,}4}{2} \times 1{,}05 = 0'',58$$

$$i_n = \frac{0{,}8 + 0{,}8}{2} \times 1{,}05 = 0{,}84$$

$$\frac{i_s - i_n}{2} = -0'',13$$

Превратимъ члены, выраженные въ оборотахъ окул. микр., въ секунды

$$\left(\frac{\mu_s - \mu_n}{2} + \frac{r_s + r_n}{2} + \frac{\rho_s - \rho_n}{2}\right)\lambda = 6{,}1936 \times 107{,}65 = 666'',74$$

искомая широта равна

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_s + \delta_n}{2} &= 59^\circ\ 35'\ 15''.05 \\
\left(\frac{\mu_s - \mu_n}{2} + \frac{r_s + r_n}{2} + \frac{\rho_s - \rho_n}{2}\right)'' &= 11\ \ \ 6{,}74 \\
\frac{i_s - i_n}{2} &= -0{,}13 \\
\varphi &= 59^\circ\ 46'\ 21'',66
\end{aligned}$$

Изъ приведеннаго примѣра видно, какъ просто вычисленіе широты изъ наблюденій по способу Талькотта. Каждая пара отниметъ всего нѣсколько минутъ. При чемъ вычисленіе можно вести безъ всякихъ пособій. Натуральные тангенсы склоненій можно выписать при составленіи программы.

X.

Ошибка широты опредѣленной по способу Талькотта.

Ошибка широты опредѣленной по способу Талькотта зависитъ отъ ошибокъ величинъ входящихъ въ формулу

$$\varphi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \left(\frac{\mu_s - \mu_n}{2} + \frac{r_s + r_n}{2} + \frac{\rho_s - \rho_n}{2}\right)\lambda + \frac{i_s - i_n}{2}$$

Возьмемъ частныя производныя этой формулы по δ, μ, ρ, λ

и i. Величины приведеній r, какъ мы видѣли выше, можно считать безошибочными.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta_s}=\frac{1}{2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mu''_s}\lambda=\frac{\lambda}{2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\rho''_s}\lambda=\frac{\lambda}{2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{\mu_s-\mu_n}{2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial i_s}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta_n}=\frac{1}{2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mu''_n}\lambda=-\frac{\lambda}{2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\rho''_n}\lambda=-\frac{\lambda}{2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial i_s}=\frac{1}{2};$$

Вліяніе членовъ $\frac{r_s+r_n}{2}\partial\lambda$ и $\frac{\rho_s-\rho_n}{2}\partial\lambda$ будетъ ничтожно.

Переходя къ средней квадратической ошибкѣ, получимъ

$$\Delta\varphi=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\Delta\delta^2_s+\Delta\delta^2_n+\Delta\mu^2_s+\Delta\mu^2_n+\Delta\rho^2_s+\Delta\rho^2_n+ +(\mu_s-\mu_n)^2\Delta\lambda^2+\Delta i^2_s+\Delta i_n^2}$$

Считая $\Delta\delta_s=\Delta\delta_n$; $\Delta\mu_s=\Delta\mu_n$; $\Delta\rho_s=\Delta\rho_n$; $\Delta i_s=\Delta i_n$, получимъ

$$\Delta\varphi=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\Delta\delta^2+2\Delta\mu^2+2\Delta\rho^2+2\Delta i^2+(\mu_s-\mu_n)^2\Delta\lambda^2}\,.\;.\;.\qquad(18).$$

Средняя ошибка склоненій фундаментальныхъ звѣздъ (т. е. звѣздъ отъ 1 до 4 вел.) равна $\pm 0'',3$. Для другихъ звѣздъ входящихъ въ эфемериды она будетъ нѣсколько больше. Будемъ считать въ среднемъ $\Delta\delta=\pm 0'',4$. Ошибка въ наведеніи подвижной нити окулярнаго микрометра на звѣзду зависитъ отъ увеличенія трубы и отъ опытности наблюдателя. Теоретическая средняя ошибка наведенія на неподвижный предметъ равна $\pm\frac{30''}{W}$, гдѣ W увеличеніе трубы, а $30''$ — предѣльный уголъ для невооруженнаго глаза, при которомъ двѣ точки сольются въ одну. Если возьмемъ увеличеніе $W=60$. получимъ ошибку наведенія на неподвижный предметъ $\pm 0'',5$. Но такъ какъ намъ приходится наводить на двигающуюся звѣзду, подверженную колебаніямъ вслѣдствіе неспокойнаго состоянія атмосферы, правильнѣе будетъ считать эту ошибку $\Delta\mu=\pm 0'',7$. По Бесселю ошибки рефракціи достигаютъ замѣтной величины, начиная съ зенитныхъ разстояній въ 45°. Онъ показалъ, что при $z=45°$ средняя ошибка рефракціи $=\pm 0'',4$. Для звѣздъ находящихся ближе къ зениту эта ошибка вообще будетъ ничтожна. Ошибка въ отсчетѣ уровня $\Delta i^{\text{полуд.}}=\pm 0,1\sqrt{2}$; при цѣнѣ одного полудѣленія въ $1''$,$\Delta i''=\pm 0'',14$. Но эта величина ошибки чисто теоретическая. Уровень очень чувствительный инструментъ. Онъ отвѣчаетъ на всякую перемѣну температуры. На практикѣ это обстоятельство замѣчено и зенитъ-телескопы въ настоящее время снабжаются двумя талькоттовскими уровнями для повышенія точности. Мы мало ошибемся, если будемъ считать $\Delta i'' = \pm 0'',5$. Послѣдняя ошибка зависитъ отъ неточнаго знанія цѣны оборота окулярнаго микрометра. Она пропорціональна числу оборотовъ, на которое различаются зенитныя разстоянія данной пары. Цѣну оборота всегда можно опредѣлить съ такою точностью, что при максимальной величинѣ $(\mu_s - \mu_n)$, ошибка $(\mu_s - \mu_n)\Delta\lambda$ не будетъ превосходить $\pm 0'',1$, а вообще она будетъ ничтожной величиной.

Предвычислимъ ошибку широты, опредѣленной зенитъ тел. съ увеличеніемъ въ 60 разъ, изъ пары звѣздъ съ зенитнымъ разстояніемъ $= 45^\circ$ и съ максим. величиной $\mu_s - \mu_n$. При чемъ допустимъ, что каждая звѣзда наблюдалась на 4 нитяхъ. При этихъ условіяхъ получимъ по форм. (18) такую ошибку широты:

$$\Delta\varphi = \pm\frac{1}{4}\sqrt{2\times 0'',16 + 2\times 0'',49 + 2\times 0'',16 + 2\times 0'',25 + 0'',01}$$

$$\Delta\varphi = \pm\frac{1}{4}\sqrt{2'',13} = \pm 0'',36$$

Съ такою точностью мы получимъ широту изъ наблюденія одной пары. Слѣдовательно достаточно четырехъ паръ, чтобы получить широту съ относительно высокой точностью $\pm 0'',2$. Такая точность вполнѣ оправдалась во всѣхъ практическихъ опредѣленіяхъ широты этимъ способомъ.

XI.

Ошибка широты опредѣленной по способу Пѣвцова.

Формула опредѣляющая широту по способу Пѣвцова гласитъ:

$$tg\varphi = \frac{cos\delta_s cost_s - cos\delta_n cost_n}{sn\delta_n - sn\delta_s} + \frac{(i_s - i_n)'' sn1'' snz}{cos\varphi(sn\delta_n - sn\delta_s)} \quad . \; . \; . \quad (19)$$

гдѣ часовые углы

$$t_s = T_s + u - \alpha_s; \quad t_n = T_n + u - \alpha_n$$

T — моментъ прохожденія звѣзды черезъ горизонтальную нить;

u — поправка хронометра;

α — прямое восхожд. звѣзды;

δ — склоненіе звѣзды;

i — наклонность.

Переходя къ ошибкамъ всѣхъ этихъ величинъ, необходимо замѣтить, что только ошибка поправки хронометра Δu будетъ играть роль систематической ошибки, входя съ однимъ и тѣмъ же знакомъ въ часовые углы сѣверной и южной звѣздъ; всѣ же остальныя ошибки случайны. Частныя производныя уравн. (19) выразятся, послѣ небольшихъ преобразованій, такими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\cos\varphi\cot g\frac{A_n+A_s}{2}=\cos\varphi\frac{snA_n-snA_s}{\cos A_s-\cos A_n}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial T_s}=-\cos\varphi\frac{snA_s}{\cos A_s-\cos A_n}\;;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial T_n}=\cos\varphi\frac{snA}{\cos A_s-\cos A_n}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_s}=\cos\varphi\frac{snA_s}{\cos A_s-\cos A_n}\;;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}=-\cos\varphi\frac{snA_n}{\cos A_s-\cos A_n}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\delta_s}=\frac{\cos q_s}{\cos A_s-\cos A_n}\;;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_n}=-\frac{\cos q_n}{\cos A_s-\cos A_n}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial i_s}=\frac{1}{\cos A_s-\cos A_n}\;;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial i_n}=-\frac{1}{\cos A_s-\cos A_n}
\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

гдѣ A — азимутъ звѣзды; q — паралакт. уголъ.

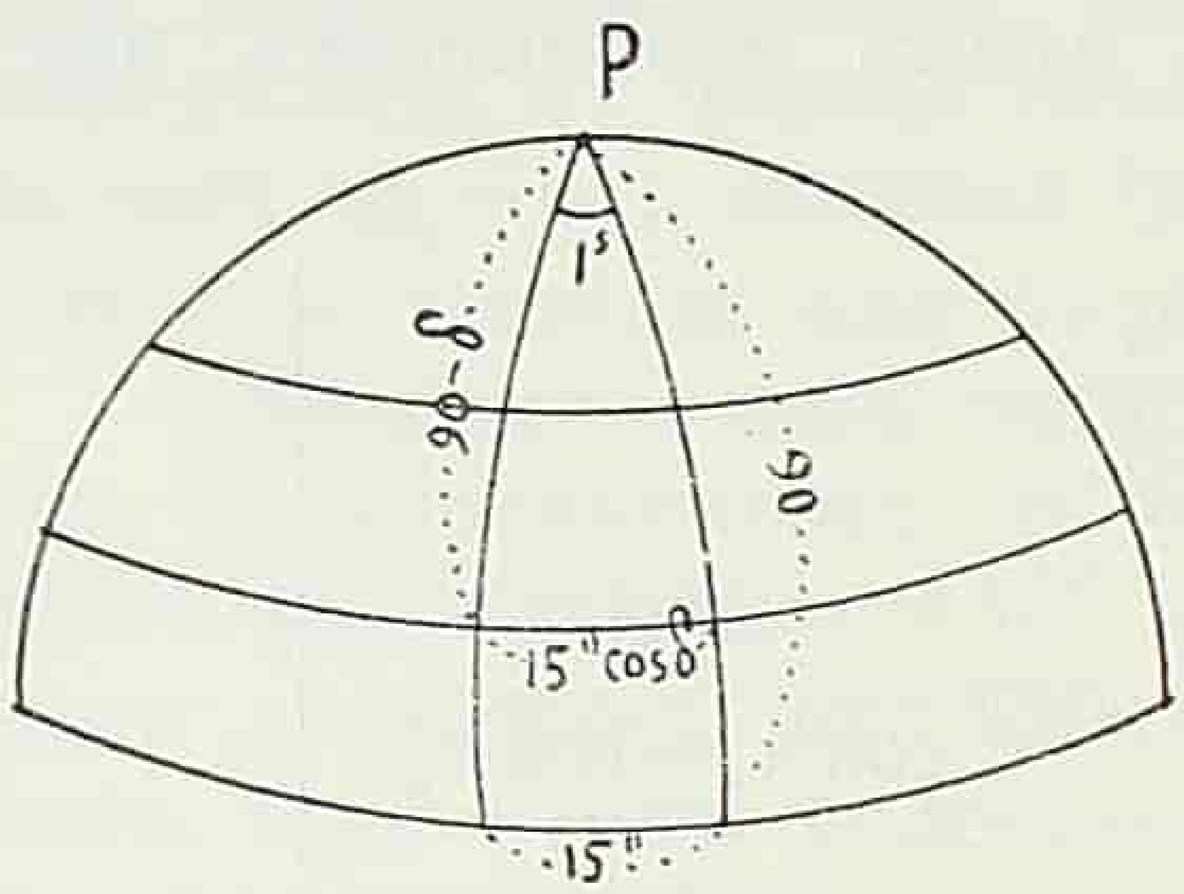
Въ формулу (19) не входитъ рефракціонный членъ, такъ какъ звѣзды наблюдаются на одной и той же высотѣ, но это не значитъ, что непостоянство въ состояніи атмосферы не отразится на широтѣ. Ошибка рефракціи войдетъ съ тѣмъ же коэффиціентомъ, съ которымъ входитъ и ошибка въ отсчетѣ уровня, слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_s}=\frac{1}{\cos A_s-\cos A_n}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_n}=-\frac{1}{\cos A_s-\cos A_n}
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\qquad(21)$$

гдѣ $\partial\rho$ — рефракціонная ошибка.

Намъ теперь необходимо выяснить, что собою представляетъ ошибка ∂T. Въ своемъ движеніи по параллелямъ звѣзды проходятъ по полю зрѣнія трубы въ 1 сек. времени нѣкоторое разстояніе, которое мы можемъ выразить въ угловыхъ единицахъ, принявъ за единицу разстояніе соотвѣтствующее 1″ экваторіальной звѣзды. Тогда экваторіальная звѣзда пройдетъ въ $1^s-15''$, прочія звѣзды въ $1^s-15''\cos\delta$ (черт. 8). Напримѣръ Polaris ($\delta=89°$) пройдетъ въ 1^s всего $15''\times0{,}017=0'',26$.

Мы уже говорили о томъ, что для невооруженнаго глаза точки видимыя подъ угломъ 30″ сливаются въ одну. Слѣдовательно экваторіальная звѣзда въ теченіе $\frac{30}{15}=2$ сек. покажется намъ неподвижною, а полярная покажется неподвижною въ теченіе $\frac{30}{0{,}26}=115{,}4$ сек. Если мы движеніе звѣздъ будемъ разсматривать вооруженнымъ глазомъ, напримѣръ, черезъ оккуляръ трубы съ увеличеніемъ $W=60$ разъ, то пропорціонально увеличатся и звѣздные пути. Тогда экваторіальная звѣзда пройдетъ въ 1^s времени $15''\times 60=900''$ и покажется намъ неподвижной только въ теченіе $\frac{30}{900}=0{,}03$ сек.



Черт. 8.

Полярная звѣзда пройдетъ въ секунду $0'',26\times 60=15'',6$ и покажется неподвижною въ теченіе $\frac{30}{15{,}6}=1^s{,}9$. Составимъ таблицу для различныхъ склоненій звѣздъ по формулѣ

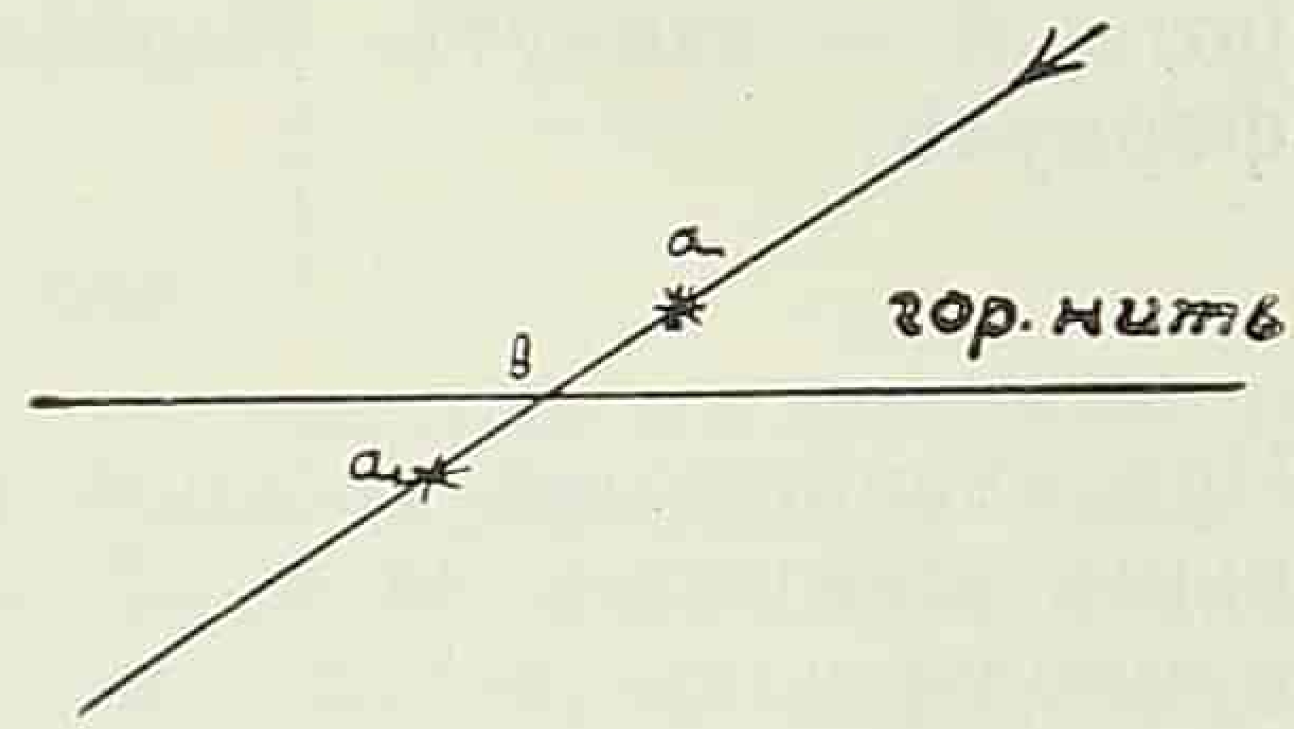
$$\frac{30}{15\cos\delta\times 60}=\eta\ \ldots\ldots \tag{22}$$

гдѣ η промежутокъ времени, въ который намъ звѣзда кажется неподвижной.

Таблица 4.

δ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	89
η	$0^s,03$	$0^s,03$	$0^s,04$	$0^s,04$	$0^s,04$	$0^s,05$	$0^s,07$	$0^s,10$	$0^s,19$	$1^s,91$

При опредѣленіи широты Пѣвцовскимъ способомъ мы должны опредѣлить моментъ прохожденія звѣзды черезъ горизонтальную нить. Какъ извѣстно для этого существуетъ два способа. Способъ Брадлея, при которомъ наблюдатель, слушая удары хронометра, старается точнѣе оцѣнить соотвѣтствующее двумъ сосѣднимъ ударамъ положеніе звѣзды относительно нити; и хронографическій способъ, при которомъ наблюдатель, при помощи имѣющагося въ его рукахъ электрическаго замыкателя, отмѣчаетъ на хронографѣ моментъ прохожденія звѣзды черезъ нить. Какимъ бы способомъ ни опредѣлялся моментъ T прохожденія звѣзды черезъ нить, онъ всегда будетъ подверженъ нѣкоторой случайной ошибкѣ $\pm \Delta T$. Для Брадлеевскаго способа эта ошибка будетъ, конечно, больше, чѣмъ для хронографическаго, такъ какъ глазъ человѣка можетъ оцѣнить положеніе точки b (черт. 9) по отношенію къ другимъ точкамъ a, a_1 только съ точностью $\pm 0{,}1$ промежутка aa_1. Если точки a и a_1 соотвѣтсвуютъ положеніямъ звѣзды въ сосѣдніе секундые удары хронометра, то слѣдовательно моментъ прохожденія звѣздъ черезъ нить можно оцѣнить съ точностью $\pm 0{,}1$ секунды врем. Какъ показалъ опытъ хронографическій способъ будетъ почти вдвое точнѣе Брадлеевскаго, т. е. мы можемъ замѣтить моментъ нахожденія звѣзды на нити съ точностью $\pm 0{,}05$ сек. времени.



Черт. 9.

Какъ видно изъ табл. 4, точность опредѣленія момента прохожденія звѣзды черезъ нить будетъ еще зависѣть отъ скорости звѣзды. Чѣмъ звѣзда движется медленнѣе, тѣмъ грубѣе мы опредѣлимъ этотъ моментъ. Для увеличенія трубы въ 60 разъ можно вычислить ошибку ΔT по форм.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Для Брадл. сп. } \Delta T = \pm\sqrt{(0^s{,}1)^2 + \eta^2} \\ &\text{Для хроногр. сп. } \Delta T = \pm\sqrt{(0^s{,}05)^2 + \eta^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

гдѣ η — величина взятая изъ таб. 4. По этимъ формуламъ для различныхъ склоненій вычислимъ такія ошибки ΔT

Таблица 5.

δ	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	89
ΔT Брадл	$0^s{,}10$	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,14	0,22	1,71
ΔT хрон.	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,09	0,11	0,20	1,70

Изъ этой табл. видно, что хронограф. способъ имѣетъ преимущество только для склоненій меньшихъ 75°, для большихъ склоненій оба способа даютъ почти одну и ту же точность. При опредѣленіи широты пѣвцовскимъ способомъ намъ не важна сама ошибка ΔT, а важна ошибка въ зенитномъ разстояніи Δz, которую вызываетъ ошибка ΔT. Эти двѣ ошибки связаны между собою уравненіемъ

$$\Delta z'' = 15 cos\delta snq \Delta T^s = 15 cos\varphi snA \Delta T^s, \; . \; . \; . \; . \qquad (24)$$

гдѣ q — паралакт. уголъ; δ — склоненіе звѣзды; φ — широта; A — азимутъ. Паралактическій уголъ q получимъ по формулѣ:

$$snq = \frac{cos\varphi snA}{cos\delta}$$

При пѣвцовскомъ способѣ наблюдаются звѣзды подъ острымъ азимутомъ не $< 10°$ и $> 30°$, слѣдовательно изъ циркумполярныхъ звѣздъ мы можемъ наблюдать только тѣ, склоненіе которыхъ удовлетворяетъ условія $cos\delta \geqslant sn\, 10° cos\varphi$; напримѣръ, для широты 45°

$$cos\delta \geqslant 0{,}1736 \times 0{,}7071 \geqslant 0{,}1228$$
$$\delta \leqslant 82°56',5$$

Если мы возьмемъ вторую допускаемую границу азимута 30°, получимъ

$$cos\delta \geqslant 0{,}5 \times 0{,}7071 \geqslant 0{,}3536$$
$$\delta \leqslant 69°17',5.$$

Вычислимъ по формулѣ (24) таблицу ошибокъ Δz для $\varphi = 45°$, $A = 10°$ и $A = 30°$ для различныхъ склоненій.

Таблица 6.

$\varphi = 45°$; $A = 10°$

δ	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	82°,9
Δz Брадл.	0″,18	0,18	0,20	0,20	0,20	0,20	0,22	0,26	0,41	0,53
Δz хрон.	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,13	0,17	0,20	0,37	0,50

$\varphi = 45°$; $A = 30°$

δ	0°	10	20	30	40	50	60	69,3
Δz Брадл.	0″,53	0,53	0,58	0,58	0,58	0,58	0,64	0,69
Δz хрон.	0,32	0,32	0,32	0 32	0,32	0,37	0,48	0,53

Мы теперь имѣемъ понятіе о величинѣ ошибки Δz (для увел. тр. въ 60 р.). Замѣнимъ въ уравн. (20) ошибку ∂T ошибкою ∂z, воспользовавшись формулой $dT = \frac{dz}{cos\varphi snA}$, получимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial z_s} &= \frac{1}{cosA_s - cosA_n} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_n} &= -\frac{1}{cosA_s - cosA_n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \tag{25}$$

Формулы (25) опредѣляютъ ошибку широты въ зависимости отъ случайныхъ ошибокъ моментовъ прохожденія звѣздъ черезъ нить. Кромѣ этихъ случайныхъ ошибокъ моментовъ, наблюденія прохожденій звѣздъ черезъ нити подвержены еще личнымъ ошибкамъ, которыя весьма различны у разныхъ наблюдателей. Опытъ показалъ, что личныя ошибки въ опредѣленіи момента прохожденія по Брадлееву способу вообще бываютъ отрицательны, въ наблюденіяхъ же хронографическимъ способомъ положительны. При наблюденіяхъ по первому способу личныя ошибки часто доходятъ до $-0^s,3$; $-0^s,4$; у нѣкоторыхъ же наблюдателей ошибки доходятъ до -1^s (у Бесселя).

Личныя ошибки въ наблюденіяхъ хронографическимъ способомъ рѣдко превышаютъ $+0^s,25$, но иногда доходятъ и до $+0^s,5$.

Личныя ошибки различны у разныхъ лицъ и довольно перемѣнчивы даже у одного и того же лица; но во всякомъ случаѣ, за время наблюденій одной пары, съ полной увѣренностью можно ожидать, что личная ошибка останется постоянной величиной. По этому на широту она подѣйствуетъ въ томъ же смыслѣ, въ какомъ дѣйствуетъ и ошибка въ поправкѣ хронометра, т. е. съ коэффиціентомъ.

$$cos\varphi cotg\,\frac{A_n + A_s}{2} = cos\varphi\,\frac{snA_n - snA_s}{cosA_s - cosA_n}$$

Въ дальнѣйшихъ нашихъ разсужденіяхъ мы эту ошибку присоединимъ къ ошибкѣ Δu. Переходя къ средней квадратической ошибкѣ получимъ

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \pm\frac{1}{N}\Big\{ & cos^2\varphi\,(snA_n - snA_s)^2\Delta u^2 + \Delta Z_s^{\,2} + \Delta Z_n^{\,2} + \\ & + cos^2\varphi sn^2A_s\Delta\alpha_s^{\,2} + cos^2\varphi sn^2A_n\Delta\alpha_n^{\,2} + cos^2q_s\Delta\delta_s^{\,2} + \\ & + cos^2q_n\Delta\delta_n^{\,2} + \Delta i_s^{\,2} + \Delta i_n^{\,2} + \Delta\rho_s^{\,2} + \Delta\rho_n^{\,2}\Big\}^{1/2} \quad \ldots . \end{aligned} \tag{26}$$

гдѣ $N = cosA_s - cosA_n$.

Средняя ошибка прямыхъ восхожденій выражается формулой $\Delta\alpha = \pm \frac{\Delta\delta}{cos\delta}$. Для $\Delta\delta$ мы приняли ошибку $\pm 0'',4$, слѣдовательно $\Delta\alpha = \pm \frac{0,4}{cos\delta}$. Предвычислимъ ошибку широты определенной по способу Пѣвцова для тѣхъ же условій, которыя мы приняли для Талькоттовскаго способа, т. е. Инстр. Зенитъ Тел. съ увеличеніемъ въ 60 разъ; $\varphi = 45°$; $Z = 45°$. Пусть будетъ соблюдено условіе $A_s + A_n = 180$, при чемъ $A_s = 30°$; $A_n = 150°$. Способъ опредѣленія моментовъ прохожденія возьмемъ Брадл. При этихъ условіяхъ ошибка въ поправкѣ хроном., а слѣдовательно и личная ошибка наблюдателя не будетъ вліять на широту, такъ какъ

$$cos^2\varphi\,(snA_n - snA_s)^2 a^2 u^2 = 0.$$

При принятыхъ условіяхъ склоненія пары звѣздъ должны быть слѣдующія

$$\delta_s = 3°,9;\ cos\delta_s = 0,998$$

$$\delta_n = 69,0,\ cos\delta_n = 0,358$$

Паралактическіе углы

$$q_s = 20°,8;\ cosq_s = 0,935$$

$$q_n = 80,7;\ cosq_n = 0,162$$

Коэфф. $N = cosA_s - cosA_n = 1,732$

$$\frac{1}{N} = 0,577$$

$$cos^2\varphi sn^2 A_s = cos^2\varphi sn^2 A_n = 0,125$$

Слѣдовательно квадраты ошибокъ выразятся такими числами.

$$cos^2\varphi\,(snA_n - snA_s)^2 du^2 = 0; \qquad cos^2 q_s \Delta\delta_s^2 = 0'',15;$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta Z_s^2 &= 0'',25\\ \Delta Z_n^2 &= 0'',49\end{aligned}\right\}\ (\text{табл. } 6)\ ;\ ; \qquad \begin{aligned} cos^2 q_n \Delta\delta_n^2 &= 0'',03;\\ \Delta i_s &= 0'',25;\end{aligned}$$

$$cos^2\varphi sn^2 A_s \Delta\alpha_s^2 = 0'',02; \qquad \Delta i_n = 0'',25;$$

$$cos^2\varphi sn^2 A_n \Delta\alpha_n^2 = 0'',15; \qquad \Delta\rho_s^2 = 0'',16;$$

$$\Delta\rho_n^2 = 0''.16$$

$$\text{Сумма} = 1'',91$$

Ошибка широты изъ наблюденій на 4 нитяхъ будетъ равна

$$\Delta\varphi = \pm \frac{0,58}{2}\sqrt{1,91} = \pm 0'',40.$$

XII.

Мы видимъ, что точность Пѣвцовскаго способа при принятыхъ условіяхъ только немногимъ уступаетъ точности Тальк. способа. Между тѣмъ, опредѣляя широту способомъ Талькотта, можно достигнуть высокой точности, если наблюдать исключительно близзенитныя звѣзды, такъ какъ въ этомъ случаѣ рефракціонная ошибка отпадаетъ. Именно этотъ способъ, какъ самый точный, былъ принятъ на седьмой Конференціи Европейскаго градуснаго мѣренія, въ октябрѣ 1883 г. въ Римѣ, для интернаціональной службы широтъ, и онъ вполнѣ оправдалъ себя. Способомъ Пѣвцова такой точности достигнуть невозможно. Благодаря тому, что зенитныя звѣзды очень быстро измѣняютъ свой азимутъ, приходится отказаться отъ самыхъ выгодныхъ звѣздъ до $Z = 12^\circ$. То же самое необходимо сказать и про звѣзды наблюдаемыя подъ острыми азимутами; ихъ азимуты мѣняются также очень быстро. И въ томъ и въ другомъ случаѣ приходится все время исправлять инструментъ по азимуту, благодаря чему отчеты сдѣланные по Тальк. уровню не являются особенно надежными, такъ какъ приходится отсчитывать уровень тогда, когда онъ не успѣлъ еще успокоиться. Это обстоятельство заставило покойнаго проф. Ф. Ф. Витрама, при подборѣ новыхъ паръ для Пѣвцовскаго способа увеличить крайній острый азимутъ до 40°. Этимъ именно спискомъ пользовался Ген. Терзичъ при опредѣленіи широты Шлиссельбурга, что видно изъ приведеннаго имъ на стр. 243 списка и на стр. 244 численнаго примѣра. Такое увеличеніе азимута влечетъ за собою, конечно, и увеличеніе ошибки.

Т а к и м ъ о б р а з о м ъ с а м ы я в ы г о д н ы я з в ѣ з д ы с п о с о б о м ъ П ѣ в ц о в а н а б л ю д а т ь н е л ь з я, п о ч е м у п о т о ч н о с т и о н ъ м н о г о д о л ж е н ъ у с т у п а т ь т а л ь к о т т о в с к о м у с п о с о б у.

Главнымъ недостаткомъ Тальк. способа обычно считаютъ относительно малое число подходящихъ звѣздныхъ паръ. Но это мнѣніе совершенно предвзятое. Недостатокъ паръ почувствуется только въ томъ случаѣ, если отъ этого способа будемъ требовать высокой точности. Если же удовлетворится тою точностью, которая предъявляется способу Пѣвцова, т. е. если мы будемъ брать звѣздныя пары съ зенитными разстояніями допускаемыми для Пѣвцовскаго способа, число звѣздныхъ паръ будетъ вполнѣ достаточно; при чемъ подборъ паръ не представитъ никакихъ затрудненій. Такой подборъ можетъ быть сдѣланъ въ день самаго наблюденія. Условія приведенныя Ген. Терзичемъ на стр. 216 для Тальк. сп. не отвѣчаютъ дѣйствительности. Прямыя восхожденія звѣздъ, составляющихъ одну пару, могутъ различаться mіnimum на $2^m,5$ (или, если сѣверная звѣзда наблюдается въ нижн. кульм., на $12^h \pm 2^m,5$), ибо перестановка инструмента для наблюденія второй звѣзды, благодаря указанному выше приспособленію, совершается настолько быстро, что времени всегда хватаетъ. Что же касается максим. разницы въ прямыхъ восхожденіяхъ, сошлюсь на опредѣленіе широты Военнаго Географ. Института въ Вѣнѣ произведенное методомъ Horrebow-Talkott подполковникомъ Robert'омъ v. Sterneck'омъ и капитаномъ Křifka въ 1892—1893 годахъ[1]). При этомъ опредѣленіи максимальное расхожденіе прямыхъ восхожденій было равно 50 минутамъ. Однако это обстоятельство не помѣшало опредѣлить широту съ высокой точностью. По одной парѣ широта опредѣлялась со средней ошибкой $\pm 0'',31$. При чемъ эта ошибка была опредѣлена очень надежно изъ наблюденія 1639 звѣздныхъ паръ. Чтобы было возможно вернуть пузырекъ уровня въ положеніе, при которомъ можно было бы читать оба его конца въ томъ случаѣ, если бы одинъ конецъ ушелъ за оправу въ промежутокъ между наблюденіями двухъ звѣздъ, инструментъ былъ поставленъ такъ, что два его подножныхъ винта находились на линіи Востокъ—Западъ, а слѣдовательно третій въ меридіанѣ. Поворотомъ третьяго винта пузырекъ уровня всегда можно было вернуть къ срединѣ. Максимальная разность зенитныхъ разстояній звѣздной пары зависитъ отъ числа оборотовъ окулярнаго микрометра. Универс. инстр. Starke & Kammerer (приспособленный для Талькоттовскаго способа), которымъ производились наблюденія въ Вѣнскомъ В. Г. Инст., допускалъ разности въ зенитныхъ разстояніяхъ до 27′. Переносный Пулковскій зенитъ телескопъ Фрейберга допускалъ разности зен. разст. до 35′. Относительно допускаемыхъ зенитныхъ разст. мы уже говорили. Разъ мы допускаемъ для пѣвцовскихъ паръ зен. р. до 70°, то, если мы удовлетворимся получаемой при этомъ точностью, мы можемъ такія же зенитныя разстоянія допускать и для Талькоттовскаго способа. Требованіе, чтобы звѣзды, принадлежащія одной парѣ, были приблизительно одинаковой величины, можно предъявить только для особо точныхъ наблюденій; при чемъ это требованіе касается вообще всѣхъ наблюденій соотвѣтственныхъ высотъ звѣздъ.

Если всѣ эти обстоятельства принять во вниманіе, то подборъ паръ, какъ мы уже упомянули объ этомъ, не вызоветъ никакихъ затрудненій. Вѣнскій В. Г. Инст., пользуясь только однимъ Berl. Jarb., для указанныхъ выше наблюденій, подобралъ для своей широты 32 пары. При чемъ максималь-

---

[1]) Mittheilungen des Kaiserl. und Königl. Militär-Geographischen Institutes. XIII Band 1893. Die Polhöhe und ihre Schwankungen. str. 74.

ное зен. разст. было допущено $38^\circ 39'$; макс. разность зен. разст. 26.

Ниже приводится списокъ 29 паръ звѣздъ для широты Загреба ($\varphi = 45^\circ 49'$) эпохи 1936 года. Пары подобраны изъ двухъ эфемеридъ Berl. Jarb. и Conn. des temps (см. стр. 190 и 191).

Максимальное зенитное разстоянiе допущено $43^\circ 3'$, максимальная разность зенитныхъ разстоянiй $22'$. Разность прямыхъ восхожденiй колеблется отъ $2^m,7$ до $19^m,8$. Если бы хотѣли для этой широты подобрать пѣвцовскiя пары, но съ тѣмъ, чтобы онѣ дали одинаковую точность съ талькоттовскими, мы бы нашли очень мало паръ, такъ какъ въ нашемъ распоряженiи были бы зенитныя разстоянiя въ границахъ $43^\circ - 12^\circ$. Наоборотъ, если бы мы для талькот. паръ допустили зенитныя разстоянiя до 70°, то число этихъ паръ увеличилось бы еще болѣе. Необходимо также обратить вниманiе на то обстоятельство, что въ настоящее время имѣются уже точные звѣздные каталоги для огромнаго количества звѣздъ.

Финскiй геодезическiй институтъ въ 1922—23 год.[1]) для опредѣленiя широтъ по способу Horrebow-Talkott пользовался слѣдующими каталогами:

24	звѣзды	взяты	изъ	Berliner Astronomischen Jahrbuche.
19	„	„	„	Pulkowaer Kataloge.
61	„	„	„	Boss'schen Kataloge.
4	„	„	„	Boss. und Waschingtoner Katal. gemein.
1	„	„	„	A. g. Kataloge.

Но зато были поставлены сравнительно строгiя условiя

разность прям. восх. $2^m,5 - 17^m$,
среднiя зен. разст. $< 25^\circ$
разность зен. разст. $< 26'$

Средняя ошибка опредѣленiя широты изъ одной пары получилась равной $\pm 0'',42$.

Необходимо обратить также вниманiе на разницу въ вычислительномъ трудѣ для окончательнаго вывода широтъ для одного и другого способовъ. Правда, я не могу согласиться съ заключенiемъ Г. Терзича, что при пѣвцовскомъ способѣ выгоднѣе вычислять широту для каждой нити по главной формулѣ съ семьюзначными логариѳмами, а не одну только среднюю нить. Опасенiя Г. Терзича не основательны. Грубая ошибка въ записи момента прохожденiя звѣзды черезъ среднюю нить немедленно будетъ открыта при составленiи разностей:

---

[1]) Veröffentlichungen des Finnischen Geodätischen Institutes. № 3 1924.

№№ паръ	Порядковые №№ эфемеридъ B. J.	Порядковые №№ эфемеридъ C. d. t.	Названіе звѣздъ	велич	α	δ	среднее z	$\Delta\alpha$	Δz
1	7 8	21 —	γ Pegasi [Br. 6]	2,87 6,23	0ʰ 9ᵐ,9 0 12,6	14° 50′ 76 36	30° 53′	2ᵐ,7	12′
2	16 19	57 —	[ι Cassiop.] [ξ Androm.]	4,24 4,52	0 29,3 0 35,2	62 35 28 58	16 49	5,9	5
2′	17 33	66 —	ζ Cassiopeiae μ Androm.	3,72 3,94	0 33,4 0 53,2	53 33 38 9	7 42	19,8	4
3	Nb 65	188 —	α Ursae min. ξ Piscium	2,12 4,84	1 40,2 1 50,2	88 58 2 52	43 3	10,0	12
4	70 —	— 265	50 Cassiopeiae 15 Arietis	4,06 5,92	1 57,9 2 7,1	72 7 19 12	26 28	9,2	19
5	122 132	417 453	2 H. Camelop. [0 Persei]	4,42 3,96	3 23,9 3 40,3	59 43 32 5	13 49	16,4	10
6	201 —	672 705	γ Orionis 944 Groomb.	1,70 6,41	5 21,7 5 41,2	6 18 85 10	39 26	19,5	10
7	234 241	— 793	22 H. Camelop. μ Geminor.	4,73 3,19	6 11,8 6 19,1	69 21 22 33	23 24	7,3	16
8	— 310	992 1031	i Cancri Br. 1147 (g Camel.)	5,96 5,73	7 53,4 8 11,5	15 58 75 57	30 0	18,1	17
9	335 346	1124 —	i Ursae maj [36 Lyncis]	3,12 5,30	8 54,8 9 9.6	48 18 43 29	2 25	14,8	9
9′	340 349	— 1170	[Grb. 1501] [38 Lyncis]	5,68 3,82	8 59,3 9 14,9	54 32 37 4	8 44	15,6	2
10	— 365	1190 1221	1 H. Draconis 0 Leonis	4,58 3,76	9 28,1 9 37,8	81 37 10 11	35 43	9,7	10
11	398 412	— —	[37 Ursae maj] [46 Leonis min.]	5,16 3,92	10 31,1 10 49,7	57 25 34 35	11 25	18,6	22

12	432 441	— —	[58 Ursae maj.] χ Ursae maj.	5,88 3,85	11 27,1 11 42,7	43 31 48 8	2 19	15,6	1
13	466 472	— —	20 Comae κ Draconis	5,72 3,83	12 26,5 12 30,8	21 15 70 8	24 27	4,3	15
14	— —	1605 1619	d_2 Virginis 32_2 H. Camel.	5,24 5,28	12 42,4 12 48,6	8 1 83 46	37 53	6,2	9
15	— 497	1644 1679	14 Canum Ven. ζ Urs. maj. pr.	5,11 2,40	13 2,8 13 21,4	36 8 55 16	9 34	18,6	14
15′	497 —	1679 1706	ζ Urs. maj. pr. 25 Canum. Ven.	2,40 4,99	13 21,4 13 34,6	55 16 36 37	9 20	13,2	15
16	591 606	1999 —	γ Serpentis 19 Ursae min.	3,86 5,51	15 53,5 16 12,5	15 52 76 2	30 5	19,0	16
16′	601 608	2030 —	φ Herculis τ Herculis	4,26 3,91	16 6,8 16 17,8	45 6 46 28	0 41	11,0	4
17	613 623	— —	[υ Herculis] [Grb. 2373]	4,53 6,39	16 22,5 16 33,4	14 11 77 35	31 42	10,9	8
18	665 —	2237 2281	β Ophiuchi 24 Ursae min.	2,94 5,86	17 40,3 17 54,4	4 36 87 0	41 12	14,1	2
19	703 714	2366 —	110 Herculis [ν Draconis]	4,26 4,91	18 42,9 18 55,2	20 20 71 13	25 22	12,3	4
19′	707 713	— 2396	0 Draconis γ Lyrae	4,78 3,30	18 50,2 18 56,5	50 19 32 36	13 22	6,3	17
20	— 734	2450 —	b Aquilae [Grb. 2900]	5,23 6,00	19 21,9 19 25,6	11 48 79 29	33 51	3,7	21
21	807 —	— 2737	[g Cygni] ρ Cygni	5,34 4,22	21 27,1 21 31,6	46 15 45 18	0 29	4,5	5
22	834 —	2819 2851	ϑ Pegasi 2993 Bradlei	3,70 5,38	22 7,0 22 18,7	5 53 85 47	39 57	11,7	2
23	848 858	— —	7 Lacertae [13 Lacertae]	3,85 5,24	22 28,7 22 41,2	49 57 41 29	4 14	12,5	12

Первая нить — средняя
вторая „ — средняя
и т. д.,

такъ какъ нити всегда натягиваются симметрично. Для иллюстраціи возьму примѣръ приведенный г. Терзичемъ.

	ΔT_s	ΔT_n
I нить	$-1^m\ 31^s,1$	$-1^m\ 33^s,1$
II „	$-1\ \ 0,5$	$-1\ \ 2,6$
III „	$-0\ \ 30,5$	$-0\ \ 30,7$
V „	$+0\ \ 30,5$	$+0\ \ 30,2$
VI „	$+1\ \ 0,0$	$+1\ \ 1,4$
VII „	$+1\ \ 30,0$	$+1\ \ 32,4$

Вычисленіе такимъ способомъ широты безъ всякой пользы усложняетъ работу и не помогаетъ открывать случайныя ошибки въ вычисленіи, а наоборотъ, какъ всякое сложное вычисленіе, служитъ источникомъ ошибокъ Какъ будто нарочно Г. Терзичъ своимъ примѣромъ доказалъ это положеніе. Нѣкоторые логариѳмы косинусовъ часовыхъ угловъ сѣверной звѣзды взяты у него ошибочно, однако это обстоятельство открыто имъ не было. Но и упрощенный способъ вычисленія является все таки слишкомъ сложнымъ по сравненію съ простыми вычисленіями Талькоттовскаго способа.

Итакъ, принявъ во вниманіе все вышеуказанное, мы должны притти къ заключенію, что способъ Horrebowa—Talkott'a во всѣхъ отношеніяхъ превосходитъ способъ Пѣвцова. Первый способъ и точнѣе и проще для наблюденій и вычисленій.

Д. В. Фростъ.

ПРИМѢНЕНІЕ РАЗЛИЧНЫХЪ ПРОЭКЦІЙ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНІЯ ТОПОГРАФИЧЕСКИХЪ И МАРКШЕЙДЕРСКИХЪ ПЛАНОВЪ.

Для изображенія различныхъ плановъ почти исключительно примѣняется ортогональная проэкція, т. к. она даетъ правильныя горизонтальныя разстоянія. Для изображенія вертикальныхъ разстояній въ топографіи пользуются изогипсами, гашюрами и т. п. Такой способъ изображенія не представляетъ особой наглядности, въ особенности при маркшейдерскихъ планахъ, гдѣ разность высотъ отдѣльныхъ горизонтовъ бываетъ весьма значительной.

Въ виду этого для изображенія маркшейдерскихъ плановъ уже давно предлагались другія проэкціи. Для рѣшенія различныхъ задачъ въ этомъ случаѣ весьма полезна котирная проэкція, но она также не даетъ наглядности.

Профессоръ Е. С. Федоровъ предлагалъ такъ называемую векторіальную проэкцію, которая въ извѣстныхъ случаяхъ даетъ наглядность и облегчаетъ рѣшеніе различныхъ маркшейдерскихъ задачъ, однако врядъ ли она примѣнима для изображенія сложныхъ маркшейдерскихъ плановъ.

Другіе авторы, на примѣръ профессоръ Леонтовскій, Dr. Ing. Th. Kappes (O. Z. f. Vermessungswesen № 5 1931.), предлагаютъ аксанометрическую проэкцію, которая при сохраненіи масштаба въ данномъ направленіи даетъ значительную ясность и кромѣ того позволяетъ примѣнять механическія приспособленія для изображенія плановъ, что значительно облегчаетъ задачу.

Dr. P. Th. Dufour въ своей диссертаціи „Nouveau procédé permettant d'obtenir les perspectives-reliefs des formes géographiques représentées sur les cartes hypsométriques", Paris 1915, съ успѣхомъ показалъ примѣненіе аксанометрической проэкціи для нагляднаго пространственнаго изображенія географическихъ картъ.

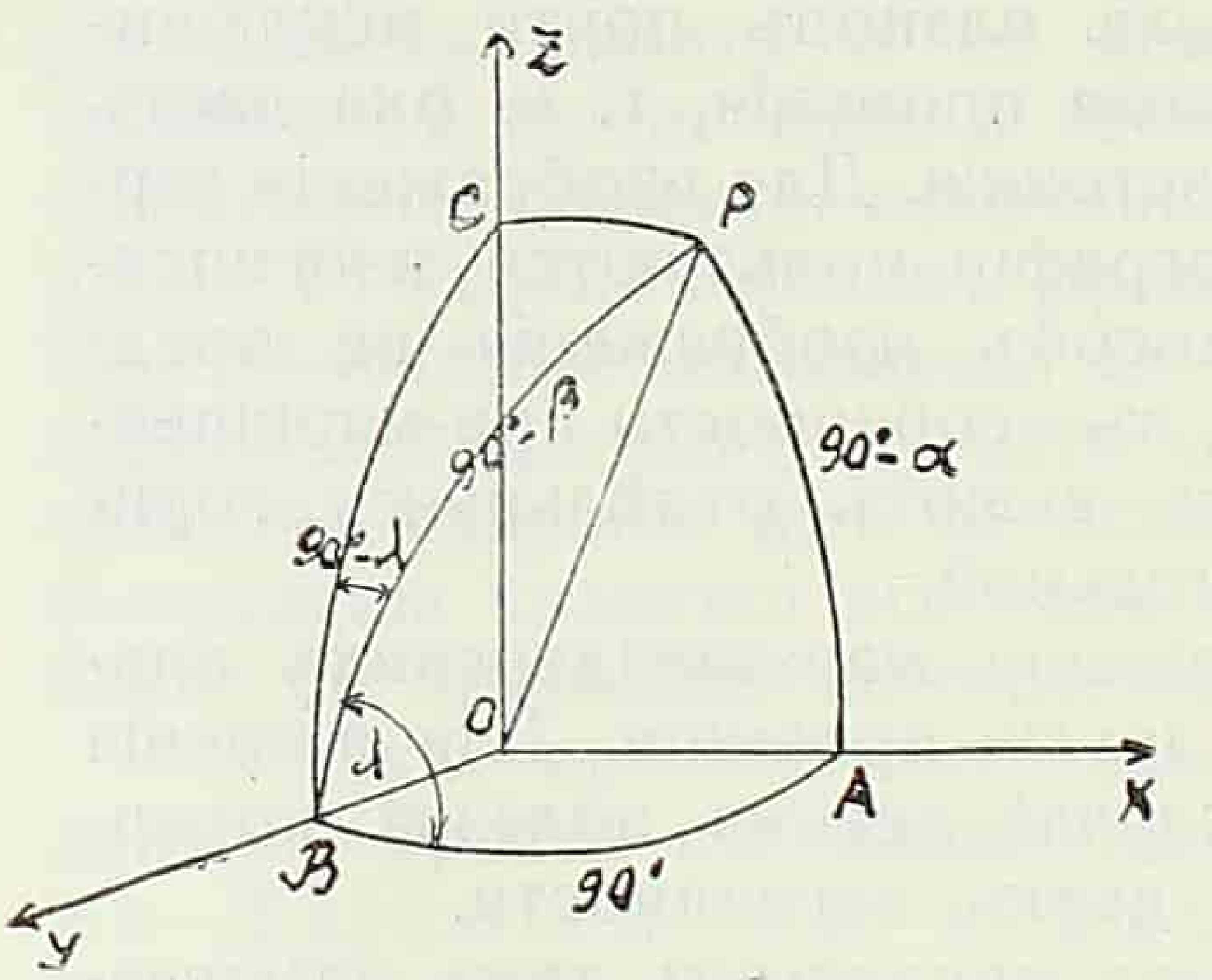
Тѣмъ съ большимъ успѣхомъ аксанометрическая проэкція можетъ служить для пространственнаго изображенія топографическихъ и маркшейдерскихъ плановъ.

Въ зависимости отъ положенія плоскости проэкцій по отношенію къ имѣющимся пространственнымъ прямоугольнымъ координатамъ получаемъ три вида аксанометрическихъ проэкцій: 1) изометрическую 2) диметрическую и 3) триметрическую.

При изометрической плоскость проэкціи симетрична ко всѣмъ тремъ координатамъ, при диметрической только къ двумъ, а при триметрической плоскость проэкціи не симетрична къ осямъ координатъ.

Разсмотримъ послѣдній случай какъ болѣе общій.

Предположимъ, что плоскость проэкціи составляетъ съ осями координатъ углы α, β, γ, а слѣдовательно перпендикуляръ OP къ этой плоскости изъ начала координатъ составляетъ съ послѣдними углы $90° - \alpha$, $90° - \beta$, $90° - \gamma$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Если мы изъ начала координатъ опишемъ сферу, то отъ пересѣченія послѣдней съ осями координатъ и съ перпендикуляромъ къ плоскости проэкціи получимъ сферическіе треугольники.

Изъ треугольника PAB имѣемъ:

$$\sin\alpha = \cos\beta \cos\lambda \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Изъ треугольника PBC

$$\sin\gamma = \cos\beta \sin\lambda \quad . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Откуда получаемъ:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\gamma = \cos^2\beta$$

или

$$1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\gamma = \cos^2\beta$$

и окончательно

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2 \quad . \ . \ . \ . \quad (3)$$

т. е. получаемъ извѣстную въ математикѣ формулу, которую мы сочли не лишнимъ доказать здѣсь болѣе простымъ, чѣмъ обычно, способомъ.

Возьмемъ на осяхъ координатъ отрѣзокъ l и спроэктируемъ его на плоскость проэкціи, составляющую съ осями координатъ углы α, β, γ (фиг. 2).

Получимъ проэкціи l_1, l_2, l_3.

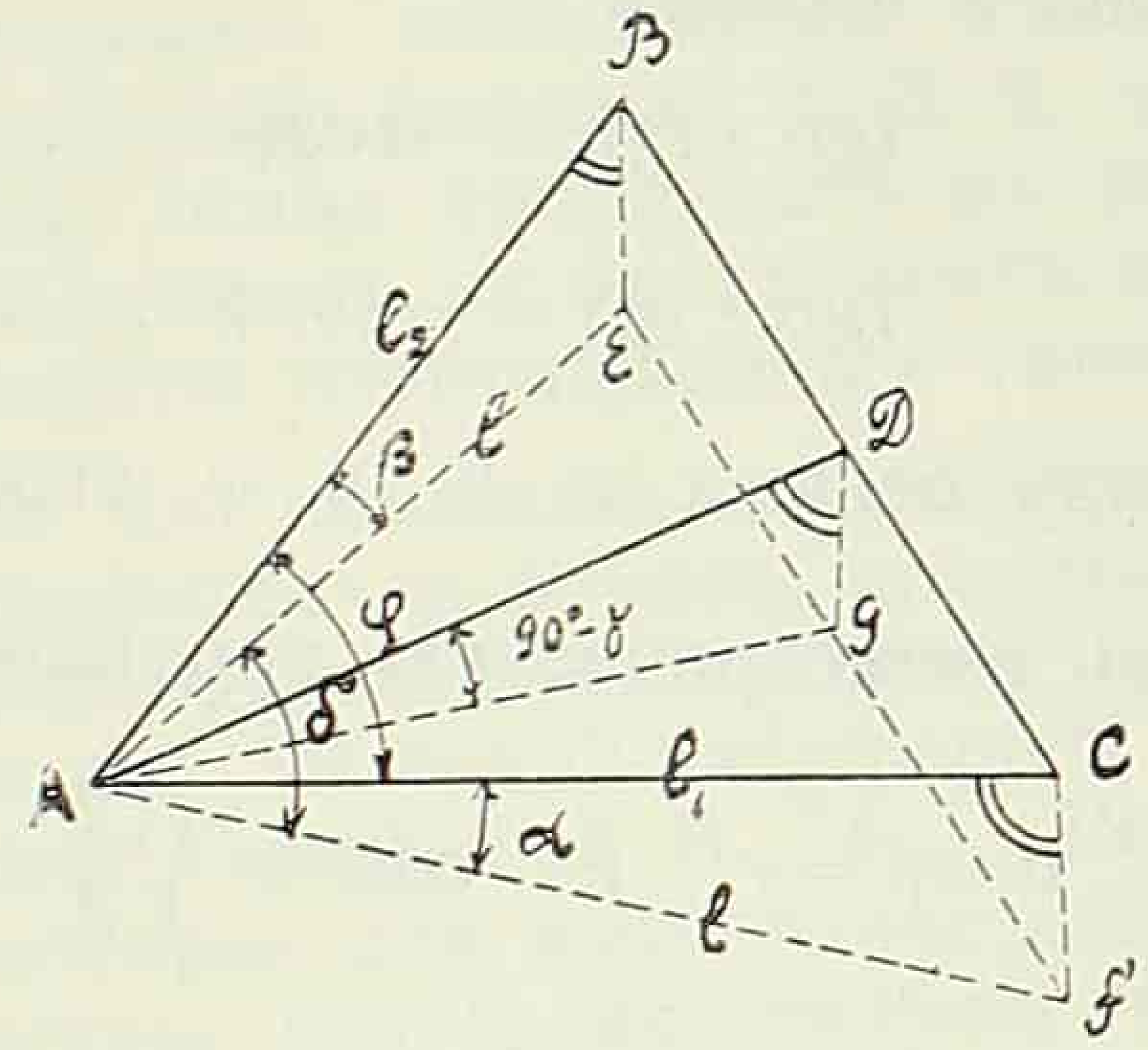
Изъ фигуры 2 видимъ, что

$$l = \frac{l_1}{\cos\alpha} = \frac{l_2}{\cos\beta} = \frac{l_3}{\cos\gamma}$$

или

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = l_1 : l_2 : l_3 \ . \ . \ . \ . \qquad (4)$$

Съ помощью формулъ 3 и 4 мы можемъ опредѣлить



Фиг. 2.

масштабъ въ направленіи осей координатъ для различныхъ аксанометрическихъ проэкцій.

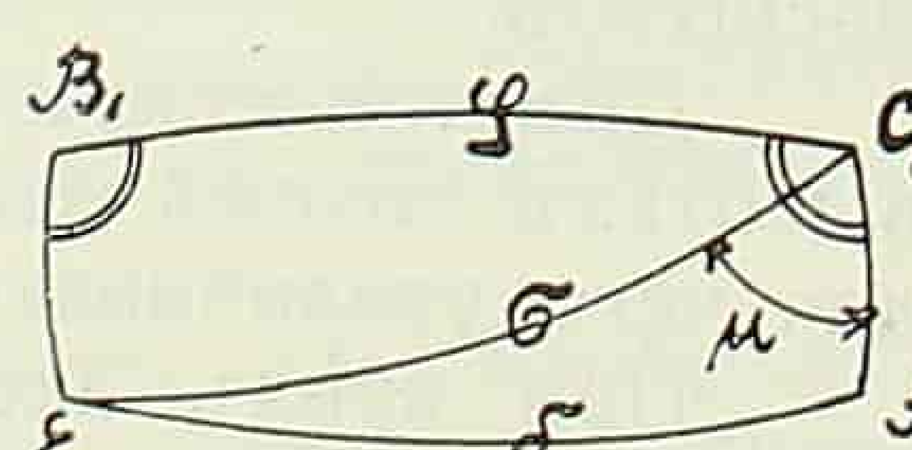
Въ случаѣ изометрической проэкціи $\alpha = \beta = \gamma$ и тогда изъ формулы 3 имѣемъ

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{или} \quad \cos\alpha = 0{,}8165$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0{,}8165\, l$$

Масштабъ по всѣмъ осямъ координатъ одинаковъ.

Если мы опишемъ изъ точки A (фиг. 2) сферу, то получимъ четырехугольникъ $B_1C_1F_1E_1$ (фиг. 3), который большою дугою σ раздѣлимъ на два сферическихъ треугольника: $E_1C_1F_1$ и $E_1B_1C_1$, который прямоуголенъ при точкѣ B_1.



Фиг. 3.

Изъ треугольника $E_1C_1F_1$ получаемъ:

$$\cos\delta = \cos\sigma \cos\alpha + \sin\sigma \sin\alpha \cos\mu \ . \ . \ . \ . \qquad (5)$$

но изъ треугольника $E_1B_1C_1$ имѣемъ

$$\cos\sigma = \cos\beta \cos\varphi \ . \ . \ . \ . \qquad (6)$$

$$\sin\beta = \sin\sigma \cos\mu \ . \ . \ . \ . \qquad (7)$$

Пользуясь выраженіями (6, 7), приводимъ формулу 5 въ слѣдующій видъ:

$$\cos\delta=\cos\beta\,\cos\varphi\,\cos\alpha+\sin\beta\,\sin\alpha\;.\;.\;.\;. \qquad (8)$$

Такъ какъ уголъ между осями координатъ x и y

$$\delta=90^\circ$$

Изъ формулы 8 имѣемъ

$$tg\alpha\cdot tg\beta=-\cos\varphi\;.\;.\;.\;. \qquad (9)$$

и аналогично

$$tg\alpha\cdot tg\gamma=-\cos\psi\;.\;.\;.\;. \qquad (10)$$

гдѣ φ уголъ между осью x и y, а ψ уголъ между осью x и z.

Если имѣемъ изометрическую проэкцію, то

$$\alpha=\beta=\gamma \quad \text{и} \quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

а потому

$$tg\alpha\cdot tg\beta=tg^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{2}=-\cos\varphi=-\cos\psi$$

слѣдовательно

$$\varphi=\psi=120^\circ$$

Изъ различныхъ видовъ аксанометрической проэкціи для пространственнаго изображенія плановъ являются наиболѣе подходящими изометрическая и диметрическая, т. к. при нихъ масштабъ въ направленіи осей x и y является одинаковымъ, въ силу чего облегчается построеніе аксанометрической проэкціи по данной ортогональной. Для этого необходимо лишь опредѣлить углы между новыми осями φ и ψ и отложить новыя координаты точекъ въ опредѣленномъ масштабѣ.

Диметрическую проэкцію удобно примѣнять, когда при высотахъ точекъ желательно увеличить наглядность рельефа, для чего увеличиваютъ масштабъ по оси z.

При всѣхъ аксанометрическихъ проэкціяхъ ихъ масштабъ отличается отъ масштаба первоначальной ортогональной проэкціи, но онъ сохраняется въ направленіи, паралельномъ плоскости аксанометрической проэкціи.

При изо- и диметрической проэкціяхъ это направленіе совпадаетъ съ діагональю ромба, образованнаго двумя осями координатъ.

Этимъ обстоятельствомъ, какъ мы увидимъ далѣе, пользуются для механическаго черченія даннаго плана въ аксанометрической проэкціи.

Для выполненія плана важно не только сохраненіе правильности масштаба, но и быстрое и возможно механическое нанесеніе изображаемой мѣстности.

При аксанометрической проэкціи можемъ примѣнять различные способы пространственнаго изображенія плановъ.

I. Нанесеніе по координатамъ.

Если у насъ имѣются прямоугольныя координаты отдѣльныхъ точекъ, то выбравъ желаемую аксанометрическую проэкцію по даннымъ масштабамъ въ направленіи осей l_1, l_2, l_3 и съ помощью формулъ 4, 3, 9, и 10 вычисляемъ углы φ и ψ между осями координатъ въ аксанометрической проэкціи и откладываемъ на этихъ осяхъ въ опредѣленномъ масштабѣ координаты изображаемыхъ точекъ.

II. Нанесеніе съ помощью спеціальной миллиметровой кальки. Стереографическая бумага, предложенная Ing. Erich Stach'омъ (Die Stereographische Darstellung tektonischen Formen im Würfeldiagram auf Stereomillimeterpapier" въ Z. der Deutschen Geologischen Gesellschaft B. 74 J. 1922) представляетъ собою кальку, которая для изометрической проэкціи раздѣлена на миллиметры голубыми линіями въ направленіяхъ подъ угломъ 60° другъ къ другу. На такой калькѣ легко отложить координаты отдѣльныхъ точекъ въ опредѣленномъ одномъ и томъ же масштабѣ, напримѣръ равномъ масштабу ортогональной проэкціи.

Такъ какъ голубыя линіи при свѣтовомъ копированіи не выходятъ, то аксанометрическіе планы можемъ легко размножать.

III. Примѣненіе стереотранспортира:

Для нанесенія плана по полярнымъ координатамъ, а также для опредѣленія разстояній въ направленіяхъ, не совпадающихъ съ осями координатъ, и правильныхъ угловъ наклона служитъ также предложенный Stach'омъ целлулоидный транспортиръ, края котораго представляютъ ромбъ подъ угломъ въ 120°. Такой транспортиръ можетъ примѣняться или самостоятельно или въ соединеніи съ стереографической калькой.

Очень удобенъ такой транспортиръ для изображенія тектонограммъ, напримѣръ различныхъ сбросовъ, синклиналей и антиклиналей и вообще геологическихъ профилей, гдѣ требуется наглядность и не обязательна особая точность.

IV. Примѣненіе особыхъ чертежныхъ аппаратовъ.

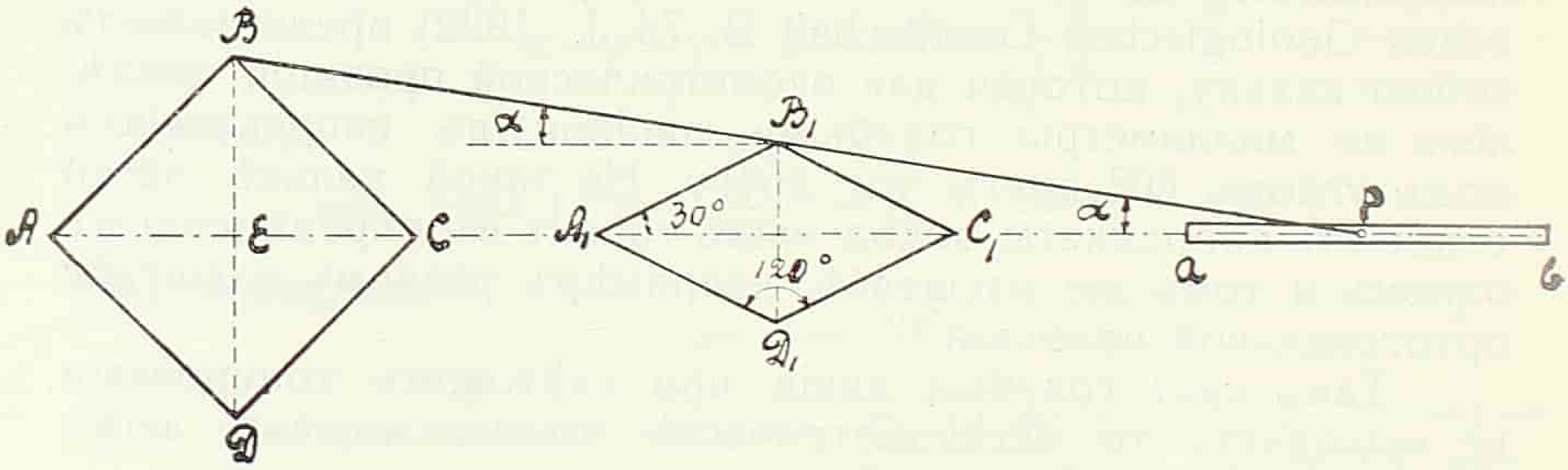
Dr. P. Th. Dufour въ цитированной уже нами его диссертаціи предлагаетъ три типа приспособленій для графическаго нанесенія изометрической проэкціи, изъ которыхъ первые два не даютъ вполнѣ точнаго изображенія, тогда какъ третій теоретически даетъ вполнѣ правильное изображеніе изометрической проэкціи.

Самъ Dufour не анализируетъ точности, достижимой при первыхъ двухъ приспособленіяхъ и не даетъ теоріи третьяго приспособленія.

То и другое мы находимъ въ цитированной нами статьѣ Dr. Ing. Th. Kappes'a.

Мы считаемъ полезнымъ дать другой болѣе правильный выводъ, позволяющій къ тому же не только вычислить возможное искаженіе изометрической проэкціи, но и анализировать получаемую формулу погрѣшности и такимъ образомъ установить, при какихъ условіяхъ эта ошибка будетъ минимальной.

I. Приспособленіе въ видѣ линейки, скользящей своей кулиссой P по прямолинейной направляющей ab. (фиг. 4).



Фиг. 4.

Въ точкѣ B находится обводящій штифтъ, а въ точкѣ B_2 карандашъ, рисующій изометрическую проэкцію.

Какъ мы показали ранѣе, при изо- и диметрической проэкціяхъ уголъ между осями координатъ 120° и діагональ ромба, образованнаго осями координатъ, сохраняетъ свою величину, а потому на фиг. 4 уголъ $A_1D_1C_1 = 120°$, а слѣдовательно уголъ $B_1A_1E_1 = 30°$ и длина $AE = A_1E_1 = BE = h$, а потому

$$\frac{B_1E_1}{A_1E_1} = \frac{B_1E_1}{AE} = \frac{B_1E_1}{h} = \frac{E_1P_1}{EP_e} = \frac{\lambda}{l} = tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}7321}$$

гдѣ l длина всей линейки, а λ длина ея отъ кулиссы до рисующаго карандаша. Такая линейка будетъ рисовать аксанометрическую проэкцію, но не вполнѣ точно, а именно на фиг. 4 точка B изобразится гдѣ-то въ точкѣ B_2, т. е. получимъ ошибку $B_1B_2 = \Delta$. Обозначимъ длину линейки отъ штифта до карандаша $BB_2 = EE_1 = m = l - \lambda$. Тогда получимъ

$$\Delta = B_1B_2 = BB_1 - BB_2 = \frac{EE_1}{cos\alpha} - BB_2 = \frac{m}{cos\alpha} - m = m\left[\frac{1}{cos\alpha} - 1\right] =$$

$$= m\left[\frac{BP}{BE} - 1\right] = m\left[\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}} - 1\right] = m\left[\sqrt{1+\frac{h^2}{l^2}} - 1\right] =$$

$$\Delta = m\left[\sqrt{1+\frac{h^2}{l^2}+\frac{h^4}{4l^4}} - 1\right] = \frac{mh^2}{2l^2} \quad . \ . \ . \ . \quad (11)$$

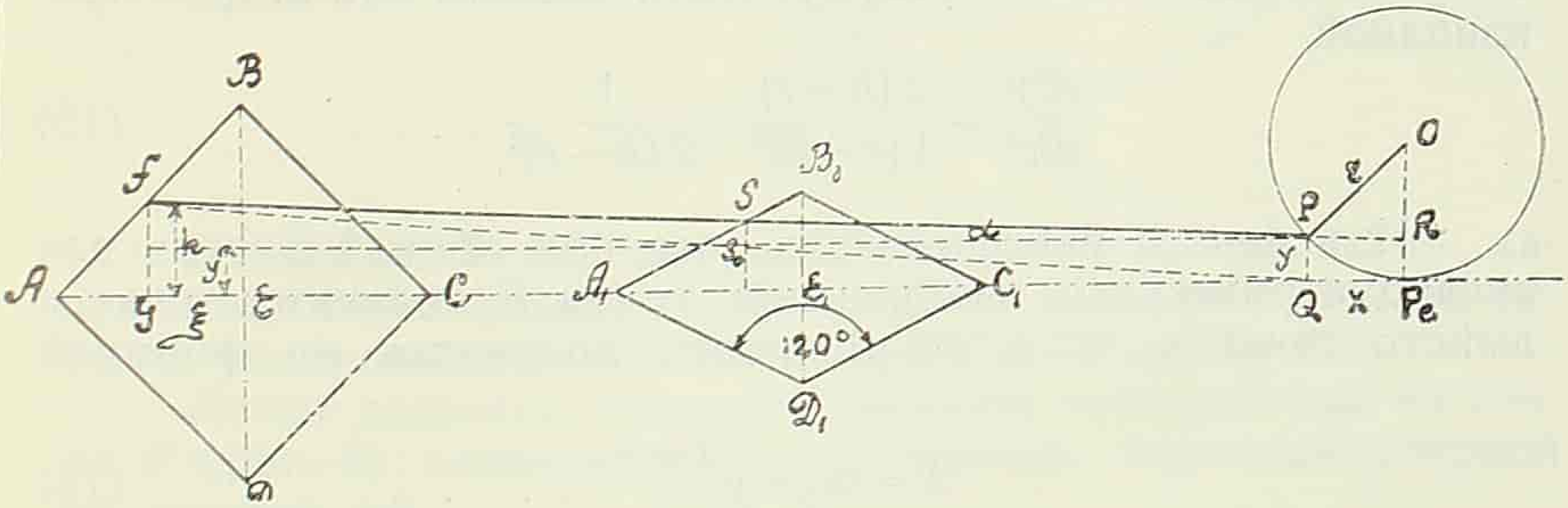
Отсюда мы видимъ, что искаженіе будетъ пропорціонально:

a) длинѣ линейки между штифтомъ и карандашемъ,

b) квадрату разстоянія точки отъ направленія кулисы и обратно пропо ціонально квадрату длины всей линейки.

Такъ какъ при выбранной проэкціи m не мѣняется, то для уменьшенія искаженія необходимо брать небольшіе участки плана и возможно длинную линейку.

2) Приспособленіе въ видѣ линейки PF, подвѣшенной къ штангѣ OP, вращающейся около опредѣленнаго центра O. (фиг. 5.).



Фиг. 5.

Изъ чертежа 5 видимъ, что

$$r^2 = x^2 + (r-y)^2 \quad \text{и} \quad l^2 = (h-y)^2 + (l+\xi-x)^2$$

гдѣ

$OP = r \qquad PR = x \qquad PQ = y \qquad FG = h \qquad GE = \xi \qquad EP_e = FP = l$

или

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0$$

$$x^2 + y^2 + h^2 + \xi^2 - 2hy + 2l\xi - 2lx - 2x\xi = 0$$

Вычитая изъ второго уравненія первое, получаемъ

$$h^2 - \xi^2 - 2hy + 2ry + 2l\xi - 2lx = 0$$

Т. к. ξ мало отличается отъ x, то получаемъ

$$y = \frac{\xi^2 - h^2}{2(r-h)} \quad . \; . \; . \; . \qquad (12)$$

Изъ формулы 12 видимъ, что отклоненіе линейки при обводѣ фигуры *ABCD* отъ средняго положенія будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше r и чѣмъ меньше ξ.

Разсмотримъ измѣненіе y въ зависимости отъ измѣненія h и найдемъ условія максимума и минимума.

Дифференцируя формулу 12, имѣемъ

$$\frac{dy}{dh} = -\frac{4h(r-h) - 2(\xi^2 - h^2)}{4(r-h)^2} = \frac{h^2 - 2hr + \xi^2}{2(r-h)^2} \quad . \; . \; . \; . \qquad (13)$$

Максимумъ и минимумъ y опредѣлятся изъ уравненія

$$h^2 - 2hr + \xi^2 = 0$$

или

$$h = r \pm \sqrt{r^2 - \xi^2} \quad . \; . \; . \; . \qquad (14)$$

Формула 14 показываетъ, что имѣемъ два экстремныхъ значенія y и при томъ знакъ $+$ въ формулѣ отвѣчаетъ максимуму, а знакъ $-$ минимуму, какъ видимъ изъ второй производной

$$\frac{d^2y}{dh^2} = \frac{2(h-r)}{4(r-h)^4} = \frac{1}{2(h-r)^3} \quad . \; . \; . \; . \qquad (15)$$

Изъ фиг. 5 мы замѣчаемъ, что при обводѣ фигуры для аксанометрическаго изображенія точки F получимъ точку s вмѣсто точки s_0, т. е. погрѣшность получится по формулѣ

$$\Delta = ss_0 = y\frac{l-\lambda}{l} \quad . \; . \; . \; . \qquad (16)$$

гдѣ l длина всей линейки, а λ часть ея до карандаша, т. е. *PS*.

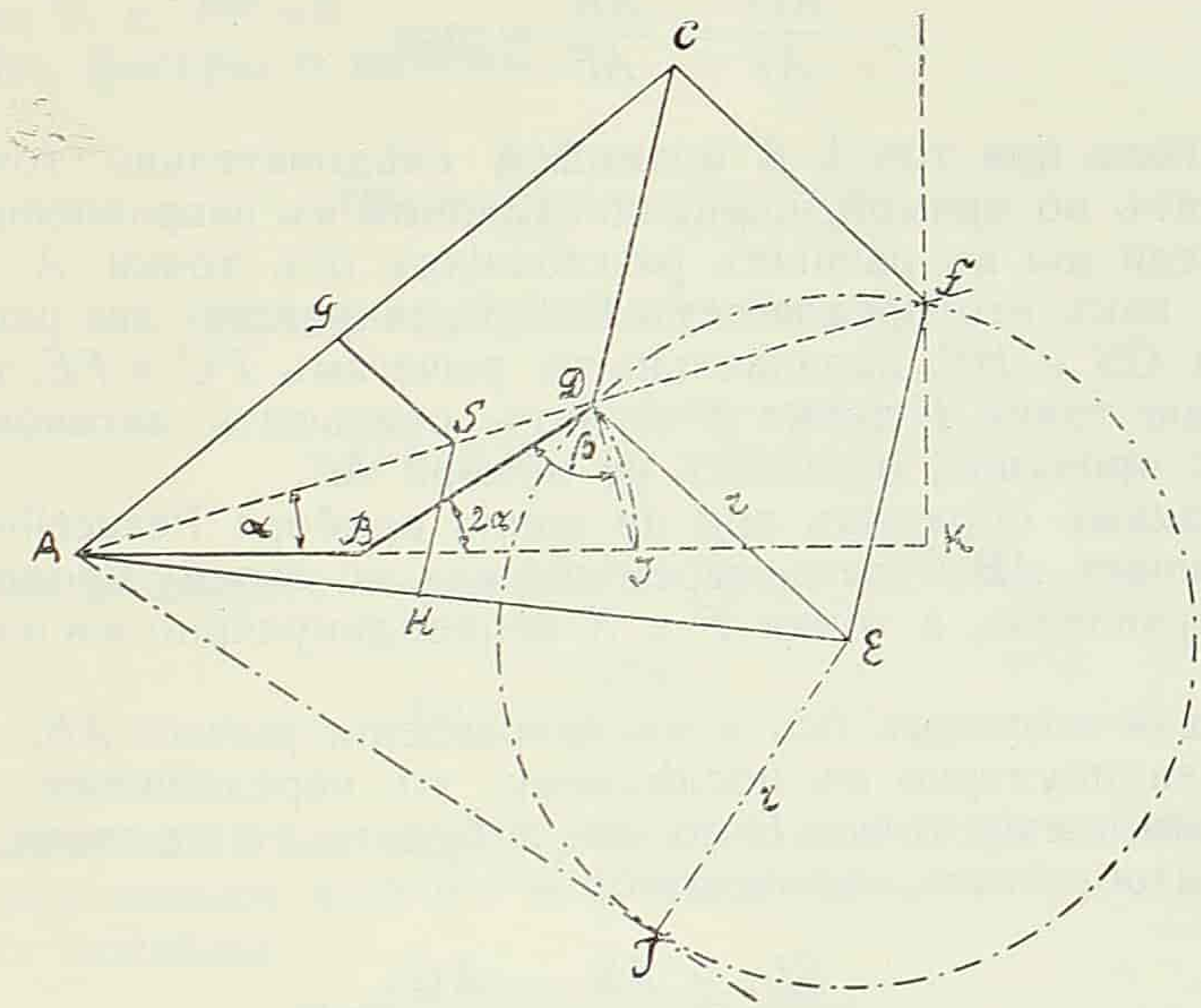
Формулы 12 и 16 показываютъ, что при второмъ приспособленіи для аксанометрическаго изображенія сравнительно съ первымъ прибавляется еще новый источникъ ошибокъ, такъ что вообще говоря аксанометрическая линейка, качающаяся на рычагѣ, даетъ менѣе точное изображеніе, чѣмъ линейка, скользящая въ продольномъ направленіи, особенно, если при первой рычагъ короткій.

Преимущество линейки съ рычагомъ заключается лишь въ меньшемъ треніи.

3) Приборъ для точнаго изображенія аксанометрической проэкціи.

Приспособленіе для точнаго изображенія аксанометрической проэкціи, основанное на приборѣ Peaucellieur, предложено также Dufour'омъ, нѣсколько дополнившимъ этотъ приборъ.

Сущность прибора Peaucellieur состоитъ въ слѣдующемъ (фиг. 6):



Фиг. 6.

Съ линейкой AB, могущей передвигаться лишь въ направленіи своей длины, съ помощью шарнировъ связана система рычаговъ $AC = AE$ $BD = AB$ $DC = DE = CF = FE$.

Легко доказать, что при движеніи всей системы ея точка F (фиг. 6) передвигается по прямой, перпендикулярной къ прямой AB.

Если опишемъ радіусомъ $BD = AB$ изъ точки B кругъ, то на продолженіи AB получимъ точку I. Изъ треугольника BDI видимъ, что уголъ $BDI =$ углу $BID = \angle\beta = 90^\circ - \alpha$, а потому уголъ $ADI = \alpha + \beta = 90^\circ$, т. е. треугольникъ ADI прямоугольный при точкѣ D.

Такъ какъ уголъ $ADC =$ углу ADE и уголъ $CDF =$ углу EDF, то точка F лежитъ на продолженіи точекъ A и D. Если опишемъ изъ точки E радіусомъ ED окружность, то имѣемъ

$$AT^2 = AF \cdot AD = const = t \quad . \ . \ . \ . \qquad (17)$$

Если точка D придетъ въ точку I на продолженіи прямой AB, то точка F придетъ въ точку K той же прямой и по прежнему получимъ

$$AK \cdot AI = cost = t \quad . \ . \ . \ . \qquad (17\text{-a})$$

Изъ уравненія 17 и 17-а видимъ, что

$$AF \cdot AD = AK \cdot AJ$$

или

$$\frac{AD}{AJ} = \frac{AK}{AF} = cos\alpha$$

т. е. уголъ при точкѣ K прямой и слѣдовательно точка F скользитъ по прямой, перпендикулярной къ направленію AB.

Если мы въ равныхъ разстояніяхъ отъ точки A помѣстимъ, какъ это предлагаетъ Dufour, шарнирно два равныхъ рычага GS и HS, параллельныхъ рычагамъ FC и FE, то при движеніи точки F точка S будетъ описывать аксанометрическую проэкцію, оставаясь на прямой AF.

Такимъ образомъ при дв женіи прибора Peaucellier-Dufour рычагъ AB будетъ перемѣщаться по своему продольному направленію, а точки F и S перпендикулярно къ послѣднему.

Если возьмемъ ось x въ направленіи рычага AB, а ось y перпендикулярно къ послѣднему, то передвиженіе точки S въ отношеніи точки F по оси x будетъ то же самое, а по оси y изобразится въ масштабѣ

$$\frac{SL}{FK} = \frac{AS}{AF} = \frac{AG}{AC} = m \quad . . . . \tag{18}$$

Такимъ образомъ точка S при обводѣ точкой F какой-либо фигуры будетъ давать точную ея изометрическую или диметрическую проэкцію въ зависимости отъ выбраннаго масштаба (18).

Приборъ Peaucellier-Dufour имѣетъ передъ двумя первыми то огромное преимущество, что даетъ теоретически точную проэкцію.

Недостаткомъ его является то, что при обводѣ фигуры штифтомъ F получается большое треніе въ продольномъ движеніи стержня AB, что практически ведетъ къ искаженію проэкціи.

Это обстоятельство, повидимому, и служило причиной того, что Dufour построилъ лишь модель такого прибора изъ пластинокъ извѣстной игры Мекано и до сихъ поръ не было сконструировано прибора, основаннаго на этомъ принципѣ.

Изслѣдуемъ условія, при которыхъ возможно бы было уменьшить треніе въ данномъ приборѣ настолько, чтобы не не получать замѣтнаго искаженія.

Очевидно треніе будетъ тѣмъ больше, чѣмъ подъ большимъ угломъ α будемъ перемѣщать стержень въ его продольномъ направленіи, двигая штифтъ.

Опредѣлимъ этотъ уголъ въ функціи размѣровъ нашего прибора и величины обводимой фигуры.

Обозначимъ длину рычаговъ $AB=a$, $AC=b$, $DC=r$, касательную къ кругу $AT=t$, половину ширины обводимой фигуры, т. е. $FK=h$

Изъ фигуры 6 имѣемъ

$$tg\alpha=\frac{PK}{AK}=\frac{h}{AI+IK} \quad . \ . \ . \ . \qquad (19\text{-a})$$

но

$$AI \cdot AK=AI\ (AI+IK)=t^2=b^2-r^2$$

или

$$AI+IK=\frac{b^2-r^2}{AI}=\frac{b^2-r^2}{2a}$$

Вставляя послѣднее выраженіе въ формулу 19-а, получаемъ

$$tg\alpha=\frac{2ah}{b^2-r^2} \quad . \ . \ . \ . \qquad (19)$$

изъ формулы 19 мы видимъ, что $tg\alpha$ и α будутъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше a, h и r и ξ чѣмъ больше b, но для r имѣемъ предѣлы:

$$b+2a>r>b-2a \quad . \ . \ . \ . \qquad (20)$$

Изъ сказаннаго ясно, что при конструкціи прибора необходимо:

1) Стержень $AB=a$ брать возможно малымъ.
2) Стержень $AC=b$ возможно большимъ.
3) Стержень r беремъ въ предѣлахъ формулы 20.
4) Стержень $AB=a$ долженъ передвигаться вдоль своей оси по направляющимъ для уменьшенія тренія при помощи шариковъ или колесиковъ.

В. Х. Даватцъ.

КЪ ВОПРОСУ О ТЕОРІИ СОВЕРШЕННЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

I. Классическая проблема.

1. Подъ проблемой совершенныхъ чиселъ классическая теорія чиселъ понимаетъ вопросъ объ отысканіи числа, равнаго суммѣ всѣхъ его правильныхъ дѣлителей.

Совершенными числами являются напр.:

6; сумма правильныхъ дѣлителей $1+2+3=6$

28; „ „ „ $1+2+4+7+14=28$

496; „ „ „ $\begin{cases} 1+2+4+8+16+ \\ +31+62+124+ \\ +248=496 \end{cases}$

8128; „ „ „ $\begin{cases} 1+2+4+8+16+ \\ +32+64+127+ \\ +254+508+1016+ \\ +2082+4064=8128. \end{cases}$

2. Если черезъ $s(n)$ обозначимъ сумму всѣхъ дѣлителей числа n, то $s(n)-n$ будетъ очевидно суммой всѣхъ правильныхъ дѣлителей. По опредѣленію совершеннаго числа,

$$s(n)-n=n\ ,$$

или

$$s(n)=2n\ \ .\ .\ .\ . \qquad (1)$$

Если представимъ число n въ каноническомъ разложеніи

$$n=p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\ .\ .\ .\ .\ p_r^{\alpha_r}\ , \qquad (2)$$

то сумма всѣхъ дѣлителей выражается формулой

$$s(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{v_2-1}\ .\ .\ .\ .\ \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}\ ;$$

такъ какъ

$$s\left(p_i^{\alpha_i}\right) = 1 + p_i + \ldots + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i + 1} - 1}{p_i - 1} \qquad (i = 1, 2 \ldots r)$$

то

$$s\left(n\right) = s\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot s\left(p_2^{\alpha_2}\right) \ldots s\left(p_r^{\alpha_r}\right).$$

Отсюда условіе (1) можетъ быть написано въ видѣ:

$$s\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot s\left(p_2^{\alpha_2}\right) \ldots s\left(p_r^{\alpha_r}\right) = 2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \tag{3}$$

Раздѣливъ обѣ части на $2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, можемъ написать условіе для совершеннаго числа n въ формѣ:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s\left(p_1^{\alpha_1}\right)}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{s\left(p_2^{\alpha_2}\right)}{p_2^{\alpha_2}} \ldots \frac{s\left(p_r^{\alpha_r}\right)}{p_r^{\alpha_r}} = 1 \tag{4}$$

Число, имѣющее разложеніе (2), будемъ называть r — членнымъ числомъ.

3. Euler и Gauss дали необходимыя и достаточныя условія для того, чтобы четное число n было совершеннымъ.

Выводъ необходимаго условія основанъ на замѣчаніи, что если число вида $2^n - 1$ есть число первоначальное, то и число n есть число первоначальное. Дѣйствительно, если-бы

$$n = uv$$

гдѣ

$$1 < u \leqslant v < n,$$

то мы имѣли-бы:

$$2^n - 1 = 2^{uv} - 1 = (2^u)^v - 1 = (2^u - 1)\left\{(2^u)^{v-1} + (2^u)^{v-2} + \ldots + 1\right\} = MN$$

гдѣ

$$M = 2^u - 1$$
$$N = (2^u)^{v-1} + (2^u)^{v-2} + \ldots + 1.$$

Но

$$2 - 1 < 2^u - 1 < 2^{uv} - 1$$

т. е.

$$1 < M < 2^n - 1$$

Число $2^n - 1$ имѣло-бы множителя, большаго единицы и меньшаго самого числа $2^n - 1$; число это не могло-бы быть первоначальнымъ.

Принимая это во вниманіе, положимъ, что имѣемъ четное число n, которое является совершеннымъ. Пусть n имѣетъ разложеніе

$$n = 2^{\lambda - 1} u,$$

гдѣ u произведеніе степеней всѣхъ нечетныхъ первоначальныхъ чиселъ, входящихъ въ n. Условіе (1) даетъ намъ:

$$s(2^{\lambda - 1} u) = 2^{\lambda} u$$

или

$$s(2^{\lambda - 1}) \cdot s(u) = 2^{\lambda} u.$$

Но

$$s(2^{\lambda - 1}) = \frac{2^{\lambda} - 1}{2 - 1} = 2^{\lambda} - 1,$$

а потому

$$(2^{\lambda} - 1)\, s(u) = 2^{\lambda} u.$$

Значеніе функціи $s(u)$, какъ суммы всѣхъ дѣлителей числа u, естественно больше u; положимъ

$$s(u) = u + v.$$

Тогда

$$(2^{\lambda} - 1)(u + v) = 2^{\lambda} u,$$

что послѣ сокращеній дастъ намъ

$$v(2^{\lambda} - 1) = u.$$

Число v является дѣлителемъ числа u; число u является также дѣлителемъ u. Т. к. сумма $u + v$ должна быть суммой всѣхъ дѣлителей u, и т. к. 1 находится среди этихъ дѣлителей, то заключаемъ, что $v = 1$ и что всѣ дѣлители u суть 1 и u. т. е. u — число первоначальное.

Полагая въ предыдущемъ равенствѣ $v = 1$ и обозначая первоначальное число u черезъ P, найдемъ

$$2^{\lambda} - 1 = P.$$

Но тогда, по сдѣланному выше замѣчанію, λ есть тоже первоначальное число; пусть $\lambda = p$. Тогда:

$$\begin{cases} n = 2^{p-1} P \\ P = 2^{p} - 1 \end{cases}$$

Условіе это достаточно. Дѣйствительно, если число n имѣетъ указанную форму, то

$$s(n) = s(2^{p-1}) s(P) = \frac{2^p - 1}{2 - 1} \cdot (1 + P) =$$
$$= (2^p - 1)(1 + P) = 2^p (2^p - 1) = 2n,$$

что и требовалось доказать.

4. Число четныхъ совершенныхъ чиселъ зависитъ такимъ образомъ отъ числа первоначальныхъ чиселъ вида $2^p - 1$.

Для значенiй p соотвѣтственно 2, 3, 5, 7 мы получаемъ соотвѣтствующiя совершенныя числа:

$p = 2$ $2^p = 4$ $P = 2^p - 1 = 3$ $n = 2^{p-1} P = 2 \cdot 3 = 6$
$p = 3$ $2^p = 8$ $P = 2^p - 1 = 7$ $n = 2^{p-1} P = 4 \cdot 7 = 28$
$p = 5$ $2^p = 32$ $P = 2^p - 1 = 31$ $n = 2^{p-1} P = 16 \cdot 31 = 496$
$p = 7$ $2^p = 128$ $P = 2^p - 1 = 127$ $n = 2^{p-1} P = 64 \cdot 127 = 8128$

Но при $p = 11$, мы получаемъ $2^p = 2048$, а потому
$$P = 2047.$$

Число это не первоначальное, ибо
$$2047 = 23 \cdot 89,$$
а потому числу $p = 11$ не соотвѣтствуетъ совершеннаго числа.

Такъ какъ вопросъ о числѣ первоначальныхъ чиселъ вида $2^p - 1$ совершенно неизслѣдованъ, то остается открытымъ и вопросъ о числѣ четныхъ совершенныхъ чиселъ.

Доказано только:

1. Что четныя совершенныя числа существуютъ[1]);

2. что четныя совершенныя числа могутъ быть только двучленныя опредѣленнаго состава.

5. Совершенно невыясненнымъ является вопросъ о существованiи нечетныхъ совершенныхъ чиселъ. До сихъ поръ не дано ни одного примѣра, доказывающаго ихъ существованiе[2]). Изслѣдованiе этого вопроса представляетъ неопреодолимыя трудности.

---

[1]) Въ настоящее время доказано, что число вида
$$2^p - 1$$
будетъ первоначальнымъ для значенiй p:
2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127.
Въ соотвѣтствiи со сказаннымъ выше, извѣстны двѣнадцать четныхъ совершенныхъ чиселъ. (См. M. Kraïtchik. „Récréations Mathématiques“, Bruxelles).

[2] „Giebt es unendlich viele ungerade vollkommene Zahlen? Jch weiss nicht einmal, ob es auch nur eine einzige giebt“.
(Landau, Vorles. über Zahlentheorie, Bd. I, 19, Leipzig, 1927).

Цѣль настоящей работы — освѣтить нѣкоторыя детали этой проблемы, а именно, показать:

1. Что нечетныя совершенныя числа, если они существуютъ, имѣютъ опредѣленную форму;

2. Что не существуетъ одночленныхъ, двучленныхъ и трехчленныхъ совершенныхъ чиселъ.

II. Общая форма нечетнаго совершеннаго числа.

Въ дальнѣйшемъ подъ $p_1, p_2 \ldots p_r$ мы будемъ подразумѣвать нечетныя первоначальныя числа.

Теорема 1. Если существуетъ нечетое совершенное число, то оно можетъ быть только вида

$$n = p^{4\mu+1} \nu^2$$

гдѣ ν — нечетное число, а p — первоначальное число, удовлетворяющее сравненію:

$$p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Пусть

$$n = p^{\alpha} p_1^{\beta_1} \ldots . p_r^{\beta_r} \tag{5}$$

Условіе (3) для числа n напишется въ видѣ:

$$s(p^{\alpha}) s(p_1^{\beta_1}) \ldots . s(p_r^{\beta_r}) = 2 p^{\alpha} p_1^{\beta_1} \ldots . p_r^{\beta_r}$$

Множитель 2, входящій въ правую часть, долженъ входить и въ лѣвую; безъ ограниченія общности вопроса, мы можемъ допустить, что

$$s(p^{\alpha}) \equiv 0 \pmod{2}; \tag{6}$$

Но въ $s(p^{\alpha})$ уже не можетъ входить множитель 4, т. е.

$$s(p^{\alpha}) \not\equiv 0 \pmod{4} \tag{7}$$

При этихъ предположеніяхъ, всѣ значенія $s(p_i^{\beta_i})$ должны быть нечетными, т. е.

$$s(p_i^{\beta_i}) \equiv 1 \pmod{2} \quad i = 1, 2 \ldots r. \tag{8}$$

По условію:

$$\left.\begin{array}{l} p \equiv 1 \\ p_i \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{2}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} s(p^\alpha) &= 1+p+\ldots+p^\alpha \equiv \alpha+1 \\ s(p_i^{\beta_i}) &= 1+p_i+\ldots+p_i^{\beta_i} \equiv \beta_i+1 \end{aligned}\right\} \pmod{2}. \tag{9}$$

Первое изъ сравненій (9) въ соединеніи со сравненіемъ (6) дастъ

$$\alpha+1 \equiv 0 \pmod{2} \ldots. \tag{10}$$

Остальныя изъ сравненій (9) въ соединеніи со сравненіемъ (8) дадутъ

$$\beta_i+1 \equiv 1 \pmod{2}. \tag{11}$$

Изъ сравненій (10) и (11) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2\lambda+1 \\ \beta_i &= 2\gamma_i \end{aligned}\right\} \ldots. \tag{12}$$

Число p нечетное; поэтому оно можетъ принадлежать къ двумъ классамъ по мод. 4:

$$p \equiv 1 \pmod{4} \text{ и } p \equiv -1 \pmod{4}.$$

Если $p \equiv -1 \pmod{4}$, то мы имѣли бы сравненіе:

$$s(p^\alpha) = s(p^{2\lambda+1}) = 1+p+\ldots+p^{2\lambda+1} \equiv$$
$$\equiv 1-1+1-1+\ldots+1-1 \equiv 0 \pmod{4},$$

что противорѣчило бы условію (7).
Поэтому

$$p \equiv 1 \pmod{4}. \tag{13}$$

Что касается p_i, то пусть

$$\left.\begin{aligned} p_1 &\equiv p_2 \equiv \ldots \equiv p_k \equiv 1 \\ p_{k+1} &\equiv p_{k+2} \equiv \ldots \equiv p_r \equiv -1 \end{aligned}\right\} \pmod{4}. \tag{14}$$

Тогда для первой группы:

$$s(p_i^{\beta_i}) = s(p_i^{2\gamma_i}) = 1+p_i+\ldots+p_i^{2\gamma_i} \equiv 2\gamma_i+1 \pmod{4} \quad \underset{i=1,2\ldots k}{} \tag{15}$$

и для второй

$$s(p_j^{\beta_j}) = s(p_j^{2\gamma_j}) = 1+p_j+\ldots+p_j^{2\gamma_j} \equiv 1-1+\ldots+$$
$$+1-1+1 \equiv 1 \pmod{4} \ldots. \quad \underset{j=k+1,\ldots r}{} \tag{16}$$

Что касается значенія $s(p^{\alpha})$, то вслѣдствіе сравненія (13)

$$s(p^{\alpha}) = s(p^{2\lambda+1}) = \\ = 1 + p + \ldots + p^{2\lambda+1} \equiv 2\lambda + 2 \pmod{4} \qquad (17)$$

Разсмотримъ теперь равенство (6), какъ сравненіе по модулю 4; принимая во вниманіе сравненія (15), (16) и (17), найдемъ:

$$(2\lambda + 2)(2\gamma_1 + 1)\ldots(2\gamma_k + 1) \equiv 2 \pmod{4}$$

или, сокращая на 2 обѣ части сравненія,

$$(\lambda + 1)(2\gamma_1 + 1)\ldots(2\gamma_k + 1) \equiv 1 \pmod{2} \qquad (18)$$

Число λ поэтому не можетъ быть нечетнымъ. Полагая

$$\lambda = 2\mu \qquad (19)$$

и вставляя это значеніе въ равенство (12), найдемъ:

$$\alpha = 4\mu + 1 \qquad (20)$$

Обозначимъ

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r} = p_1^{2\gamma_1} p_2^{2\gamma_2} \ldots p_r^{2\gamma_r} = \\ = \left(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_r^{\gamma_r}\right)^2 = \nu^2. \qquad (21)$$

Тогда число n получаетъ форму

$$n = p^{4\mu+1}\nu^2, \qquad (22)$$

что, при существованіи сравненія (13), доказываетъ предложеніе.

III. Невозможность одночленныхъ и двучленныхъ нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.

Теорема 2. Не существуетъ одночленныхъ совершенныхъ чиселъ.

Пусть одночленное число

$$n = p^{\alpha}$$

будетъ совершеннымъ. Тогда по условію (3)

$$s(p^{\alpha}) = 2p^{\alpha},$$

или

$$1 + p + \ldots + p^{\alpha-1} + p = 2p^{\alpha}$$

т. е.

$$1 + p + \ldots + p^{\alpha-1} = p^{\alpha} \qquad (23)$$

Разсмотримъ равенство (23), какъ сравненіе по модулю p. Мы получимъ

$$1 \equiv 0 \pmod{p} \tag{24}$$

что невозможно.

Наше предложеніе доказано.

Теорема 3. Не существуетъ двучленныхъ нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.

Пусть имѣетъ двучленное нечетное совершенное число

$$n = p^a q^b,$$

гдѣ

$$3 \leqslant p < q;$$

такъ какъ число n совершенное, условіе (4) для него напишется въ видѣ:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} = 1 \tag{25}$$

Невозможность существованія такого числа докажемъ, показавъ невозможность равенства (25).

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{s(p^a)}{p^a} = \frac{1+p+\ldots+p^a}{p^a} = 1 + \frac{1}{p} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{p^a} < 1 + \frac{1}{p} + \ldots = \frac{p}{p-1}.$$

Аналогично,

$$\frac{s(q^b)}{q^b} < \frac{q}{q-1}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} < \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \tag{26}$$

Функція вида $\dfrac{p}{p-1}$ есть функція убывающая, такъ какъ

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)' = \frac{p-1-p}{(p-1)^2} = -\frac{1}{(p-1)^2} < 0$$

для всѣхъ значеній $p > 1$; поэтому неравенство (26) еще усилится, если мы замѣнимъ p и q величинами, не превосходящими этихъ чиселъ. Очевидно,

$$3 \leqslant p$$
$$5 \leqslant q$$

а потому

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{16}$$

Поэтому изъ неравенства (26) вытекаетъ слѣдующее:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} < \frac{15}{16},$$

и тѣмъ болѣе

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} < 1 \qquad (27).$$

Такимъ образомъ, равенство (25) невозможно при какихъ угодно нечетныхъ первоначальныхъ числахъ p и q.

IV. Нѣсколько общихъ положенiй.

1. Неравенство (27) можетъ быть написано въ видѣ:

$$s(p^a)\, s(q^b) < 2 p^a q^b,$$

т. е. для двучленнаго нечетнаго числа всегда имѣетъ мѣсто неравенство

$$s(p^a)\, s(q^b) - 2 p^a q^b < 0.$$

Совершенно иная картина наблюдается для числа, число членовъ котораго больше двухъ.

Пусть имѣетъ трехчленное число

$$n = p^a q^b r^c,$$

гдѣ

$$3 \leqslant p < q < r$$

Примѣняя къ нему разсужденiя теоремы 3, найдемъ:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} \cdot \frac{s(r^c)}{r^c} < \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \cdot \frac{r}{r-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{35}{32}.$$

Такъ какъ каждый изъ множителей $\frac{s(p^a)}{p^a}$ больше единицы, то лѣвая часть равенства (4) заключается въ предѣлахъ:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} \cdot \frac{s(r^c)}{r^c} < \frac{35}{32}.$$

Неравенства эти не исключаютъ такимъ образомъ возможности равенства (4). Вмѣстѣ съ тѣмъ, для различныхъ значенiй p, q, r, a, b, c наряду съ неравенствами

$$s(p^a)s(q^b)s(r^c)-2p^aq^br^c<0$$

возможны и неравенства

$$s(p^a)s(q^b)s(r^c)-2p^aq^br^c>0.$$

Поэтому не исключена принципiальная возможность такихъ значенiй перемѣнныхъ, при которыхъ

$$s(p^a)s(q^b)s(r^c)-2p^aq^br^c=0,$$

т. е. для которыхъ n является совершеннымъ числомъ.

Чѣмъ больше различныхъ первоначальныхъ чиселъ будетъ содержать число n, тѣмъ въ болѣе широкихъ предѣлахъ можетъ колебаться значенiе величины

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{s(p_r^{\alpha_r})}{p_r^{\alpha_r}};$$

отсюда видимъ, что примѣненный нами методъ не годится для случая, когда $r\geqslant 3$.

2. Докажемъ рядъ общихъ теоремъ, справедливыхъ для r— членнаго числа n. Для удобства написанiя, мы докажемъ ихъ для $r=3$; совершенно очевидно, что предложенiя эти распространяются для любого числа r.

Теорема 4. Функцiя

$$U=\frac{1}{2}\cdot\frac{s(p^a)}{p^a}\cdot\frac{s(q^b)}{q^b}\cdot\frac{s(r^c)}{r^c}$$

возрастаетъ съ возрастанiемъ показателей и убываетъ съ возрастанiемъ основанiй.

Для этого достаточно доказать, что для всѣхъ значенiй перемѣнныхъ, измѣняющихся въ области, опредѣляемой данными условiями,

$$\frac{\partial U}{\partial a}>0;\quad \frac{\partial U}{\partial p}<0.$$

Дѣйствительно, если представимъ U въ видѣ

$$U=A\frac{s(p^a)}{p^a}$$

гдѣ

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{s(q^b)}{q^b}\cdot\frac{s(r^c)}{r^c},$$

то мы можемъ изобразить функцiю U въ видѣ:

$$U = A\,\frac{p^{a+1}-1}{p^{a+1}-p^{a}}\;.\;.\;.\;. \qquad (28)$$

Представимъ себѣ U, какъ непрерывную функцію a; тогда

$$\frac{\partial U}{\partial a}\quad\frac{A lgp}{p^a\,(p-1)}\,.$$

Такъ какъ $A > 0$ и $p \geqslant 3$, то очевидно, что

$$\frac{\partial U}{\partial a} > 0\,.$$

Представимъ себѣ U, какъ непрерывную функцію p; тогда

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \frac{Ap^{a-1}}{(p^{a+1}-p^a)^2}\;\{-p^{a+1}+(a+1)\,p-a\}$$

Знакъ $\dfrac{\partial U}{\partial p}$ опредѣлится знакомъ выраженія

$$\omega = -p^{a+1} + (a+1)\,p - a\,.$$

Функція ω убываетъ и при возрастаніи a, и при возрастаніи p. Дѣйствительно,

$$\frac{\partial \omega}{\partial a} = -p^{a+1}lgp + p - 1\,.$$

Такъ какъ $p > e$, то $lgp > 1$, $p^{a+1}lgp > p^{a+1} > p$, а потому

$$-p^{a+1}lgp < -p\,,$$

$$-p^{a+1}lgp + p - 1 < -p + p - 1 < -1, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial a} < 0\,;$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = (a+1)\,(1-p^a) < 0.$$

Такъ какъ $p \geqslant 3$, $a \geqslant 1$, то

$$-p^{a+1} + (a+1)\,p - a \leqslant -3^2 + 2\cdot 3 - 1 = -4 < 0.$$

Но, если $\omega < 0$, то

$$\frac{\partial U}{\partial p} < 0.$$

3. Пусть при данныхъ первоначальныхъ числахъ p, q, r, число a_0 (и соотвѣтственно b_0 и c_0) есть наименьшій показатель у p, при которомъ число

$$n = p^{a} q^{b} r^{c}$$

является совершеннымъ.

Числа a, b и c удовлетворяютъ согласно теоремѣ 1-ой: одно — сравненію

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

два остальныхъ — сравненію

$$x \equiv 0 \pmod{2}.$$

Сравненія эти назовемъ опредѣляющими сравненіями.

Назовемъ нижней границей показателя a такой положительный корень λ соотвѣтственнаго опредѣляющаго сравненія, для котораго

$$\lambda \leqslant a_0.$$

Согласно теоремѣ 1-ой, за нижнія границы показателей λ, μ, ν можно принять — для одного изъ чиселъ 1 и для двухъ другихъ 2.

Но такъ какъ теорема 1-ая даетъ только необходимыя условія, то можетъ случиться, что добавочныя условія позволятъ повысить нижніе предѣлы показателей.

Теорема 5. Если $n = p^{a} q^{b} r^{c}$ есть совершенное число, то для значеній нижнихъ предѣловъ показателей

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^{\lambda})}{p^{\lambda}} \cdot \frac{s(p^{\mu})}{q^{\mu}} \cdot \frac{s(r^{\nu})}{r^{\nu}} \leqslant 1 \tag{34}$$

Пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ a, b, c, число n будетъ совершеннымъ. Согласно теоремѣ 4,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^{a})}{p^{a}} \cdot \frac{s(b^{b})}{q^{b}} \cdot \frac{s(r^{c})}{r^{c}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^{a_0})}{p^{a_0}} \cdot \frac{s(q^{b_0})}{q^{b_0}} \cdot \frac{s(r^{c_0})}{r^{c_0}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^{\lambda})}{p^{\lambda}} \cdot \frac{s(q^{\mu})}{q^{\mu}} \cdot \frac{s(r^{\nu})}{r^{\nu}}.$$

Но если число n совершенное, то

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(p^a)}{p^a}\cdot\frac{s(q^b)}{q^b}\cdot\frac{s(r^c)}{r^c}=1,$$

а потому

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(p^\lambda)}{p^\lambda}\cdot\frac{s(q^\mu)}{q^\mu}\cdot\frac{s(r^\nu)}{r^\nu}\leqslant 1$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6.[1]) (Теорема о повышенiи нижняго предѣла). Если для какого-нибудь положительнаго корня α опредѣляющаго сравненiя

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(p^\alpha)}{p^\alpha}qr-(q-1)(r-1)<0, \tag{35}$$

то для нижняго предѣла показателя λ имѣетъ мѣсто неравенство

$$\lambda>\alpha.$$

Условiе (35) можетъ быть написано въ видѣ:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(p^\alpha)}{p^\alpha}\cdot\frac{q}{q-1}\cdot\frac{r}{r-1}-1<0. \tag{36}$$

Но какъ извѣстно,

$$\frac{s(q^b)}{q^b}<\frac{q}{q-1}$$

$$\frac{s(r^c)}{r^c}<\frac{r}{r-1}$$

---

[1]) Аналогично путемъ круговой перестановки получимъ условiя:

Если

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(q^\beta)}{q^\beta}rp-(r-1)(p-1)<0$$

то

$$\mu>\beta$$

Если

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(r^\gamma)}{r^\gamma}pq-(p-1)(q-1)<0$$

то

$$\nu>\gamma$$

при любыхъ показателяхъ b и c, а потому неравенство (36) еще усилится, если мы вставимъ въ него лѣвыя части послѣднихъ неравенствъ, и при любыхъ b и c будетъ справедливо неравенство;

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(p^{\alpha})}{p^{\alpha}}\cdot\frac{s(q^{b})}{q^{b}}\cdot\frac{s(r^{c})}{r^{c}}<1. \tag{37}$$

Но если существуетъ совершенное число, то существуютъ такія a, b и c при которыхъ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(p^{a})}{p^{a}}\cdot\frac{s(q^{b})}{q^{b}}\cdot\frac{s(r^{c})}{r^{c}}=1 \tag{38}$$

Принимая во вниманіе теорему 4, заключаемъ, что

$$\alpha<a$$

гдѣ a всякій показатель у p, при которомъ возможно существованіе совершеннаго числа. Отсюда

$$\alpha<a_0$$

а потому нижняя граница λ по крайней мѣрѣ является слѣдующимъ по величинѣ положительнымъ корнемъ опредѣляющаго сравненія [1]).

Теорема 7. [2]) Пусть

$$n=p^{a}q^{b}r^{c}$$

есть нечетное совершенное число и

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{s(q^{b})}{q^{b}}\cdot\frac{s(r^{c})}{r^{c}}.$$

---

[1]) Такъ называемая нижняя граница опредѣляется условіемъ

$$\lambda\leqslant a_0.$$

[2]) Путемъ круговой перестановки получаемъ неравенства:

$$Bq-(q-1)>0$$
$$Cr-(r-1)>0$$

и

$$q^{b}\leqslant\frac{\sigma}{\sigma q-(q-1)}$$

$$r^{c}\leqslant\frac{\tau}{\tau r-(r-1)}$$

Тогда

$$Ap-(p-1)>0 \tag{39}$$

Кромѣ того, если существуетъ число ρ, заключенинное въ предѣлахъ

$$\frac{p-1}{p}<\rho\leqslant A,$$

то

$$p^a\leqslant\frac{\rho}{\rho p-(p-1)}. \tag{40}$$

Дѣйствительно, по условію

$$A\frac{s(p^a)}{p^a}=1;$$

Написавъ это равенство въ видѣ:

$$A\frac{p^{a+1}-1}{p^{a+1}-p^a}=1,$$

рѣшаемъ относительно p^a:

$$Ap\cdot p^a-A=p\cdot p^a-p^a;$$

$$p^a\{Ap-(p-1)\}=A$$

$$p^a=\frac{A}{Ap-(p-1)} \tag{41}$$

Такъ какъ $p^a>0$ и $A>0$, то очевидно,

$$Ap-(p-1)>0.$$

Кромѣ того, функція

$$\varphi(A)=\frac{A}{Ap-(p-1)}$$

есть функція убывающая при измѣненіи

$$\frac{p-1}{p}<A<\infty;$$

поэтому, если имѣется значеніе ρ, для котораго

$$\frac{p-1}{p}<\rho\leqslant A,$$

то

$$\frac{\rho}{\rho p-(p-1)}\geqslant\frac{A}{Ap-(p-1)}.$$

Изъ этого неравенства и равенства (41) слѣдуетъ, что для всякаго ρ, опредѣленнаго въ этихъ предѣлахъ,

$$p^a \leqslant \frac{\rho}{\rho p-(p-1)},$$

что и требовалось доказать.

V. Классы трехчленныхъ совершенныхъ чиселъ.

1. Допустимъ, что существуетъ трехчленное совершенное число

$$n = p^a q^b r^c,$$

гдѣ

$$3 \leqslant p < q < r.$$

Тогда, по условію (4)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} \cdot \frac{s(r^c)}{r^c} = 1 \tag{42}$$

Назовемъ

$$A = \frac{1}{2}\frac{s(q^b)}{q^b} \cdot \frac{s(r^c)}{r^c}$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{s(r^c)}{r^c} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a}$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b}.$$

Согласно неравенству (26)

$$\left.\begin{aligned} A &< \frac{1}{2}\frac{q}{q-1} \cdot \frac{r}{r-1} \\ B &< \frac{1}{2}\frac{r}{r-1} \cdot \frac{p}{p-1} \\ C &< \frac{1}{2}\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \end{aligned}\right| \tag{43}$$

Такъ какъ функціи вида $\frac{p}{p-1}$, $\frac{q}{q-1}$, $\frac{r}{r-1}$ убываютъ съ увеличеніемъ p, q, и r, то неравенства (43 остаются справедливыми и еще усилятся, если вмѣсто p, q и r поставить числа, завѣдомо ихъ не превышающія, а можетъ быть меньшія. Такъ какъ

$$p \geqslant 3$$
$$q \geqslant 5$$
$$r \geqslant 7$$

то изъ неравенствъ (43) мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A &< \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6} = \frac{35}{48} \\ B &< \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{2} = \frac{7}{8} \\ C &< \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{16} \end{aligned}\right| \qquad (44)$$

Поэтому изъ равенства (42), при посредствѣ неравенствъ (44), заключаемъ:

$$1 = \frac{s(p^a)}{p^a}\, A < \frac{35}{48}\cdot\frac{s(p^a)}{p^a}$$

$$1 = \frac{s(q^b)}{q^b}\, B < \frac{7}{8}\cdot\frac{s(q^b)}{q^b}$$

$$1 = \frac{s(r^c)}{r^c}\, C < \frac{15}{16}\cdot\frac{s(r^c)}{r^c},$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{s(p^a)}{p^a} &> \frac{48}{35} \\ \frac{s(q^b)}{q^b} &> \frac{8}{7} \\ \frac{s(r^c)}{r^c} &> \frac{16}{15} \end{aligned}\right| \qquad (45)$$

Неравенства (45) усилятся, если $\frac{s(p^a)}{p^a}$, $\frac{s(q^b)}{q^b}$, $\frac{s(r^c)}{r^c}$ замѣнить большими значеніями $\frac{p}{p-1}$, $\frac{q}{q-1}$; $\frac{r}{r-1}$; поэтому

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{p-1} &> \frac{48}{35} \\ \frac{q}{q-1} &> \frac{8}{7} \\ \frac{r}{r-1} &> \frac{16}{15} \end{aligned}\right| \qquad (46)$$

Рѣшая эти неравенства, получимъ:

$$p < \frac{48}{13} = 3^9/_{13}$$

$$q < 8$$

$$r < 16$$

Сопоставляя съ нижней границей для чиселъ p, q, r, находимъ, что они заключаются въ предѣлахъ:

$$3 \leqslant p < 3^9/_{13}$$

$$5 \leqslant q < 8$$

$$7 \leqslant r < 16\,.$$

Принимая во вниманіе, что числа p, q, и r — первоначальныя, найдемъ для нихъ слѣдующія возможныя значенія:

$$p = 3$$

$$q = 5,\ 7$$

$$r = 7,\ 11,\ 13$$

Отсюда заключаемъ, что трехчленное совершенное число можетъ принадлежать только къ одному изъ нижеслѣдующихъ классовъ ($p < q < r$):

1) $3^a\ 5^b\ 7^c$
2) $3^a\ 5^b\ 11^c$
3) $3^a\ 5^b\ 13^c$
4) $3^a\ 7^b\ 11^c$
5) $3^a\ 7^b\ 13^c$

2. Дальнѣйшее редуцированіе числа возможныхъ классовъ.

Пусть имѣемъ число класса $3^a\,5^b\,7^c$. Такъ какъ $3 \equiv 7 \equiv -1 \pmod 4$ а $5 \equiv 1 \pmod 4$, то по теоремѣ 1-ой, необходимо

$$a \equiv 0 \pmod 2$$

$$b \equiv 1 \pmod 4$$

$$c \equiv 0 \pmod 2$$

и за нижніе пробѣлы показателей можемъ взять:

$$\lambda_0 = 2\,, \quad \mu_0 = 1\,, \quad \nu_0 = 2\,.$$

Для этихъ показателей

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s\,(3^2)}{3^2} \cdot \frac{s\,(5)}{5} \cdot \frac{s\,(7^2)}{7^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{9} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{57}{49} = \frac{2223}{2205} > 1\,.$$

Поэтому, на основанiи теоремы 5, существованiе совершеннаго числа этого класса невозможно.

Пусть имѣемъ число класса $3^a 7^b 11^c$. Въ множителяхъ этого класса нѣтъ ни одного первоначальнаго числа, удовлетворяющаго сравненiю $p \equiv 1 \pmod 4$, что противорѣчитъ теоремѣ 1-ой, а потому существованiе совершеннаго числа этого класса невозможно [1]).

Пусть имѣемъ число класса $3^a 7^b 13^c$. Для чиселъ этого класса

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(3^a)}{3^a} \cdot \frac{s(7^b)}{7^b} \cdot \frac{s(13^c)}{13^c} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} = \frac{91}{96} < 1,$$

а потому существованiе совершеннаго числа этого класса невозможно.

3. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенiю:

Теорема 8. Если существуетъ трехчленное совершенное число, то оно можетъ быть только одного изъ двухъ классовъ:

$$3^a\ 5^b\ 11^c$$
$$3^a\ 5^b\ 13^c\ .$$

VI. Сведенiе къ типамъ и ихъ редуцированiе.

1. Два класса чиселъ, установленныхъ теоремой 8, могутъ быть сведены къ тремъ типамъ.

Въ числахъ перваго класса только одинъ множитель $5 \equiv 1 \pmod 4$, а потому, на основанiи теоремы 1 числа этого класса сведутся къ одному типу:

$$n_1 = 3^{2\alpha}\ 5^{4\beta+1}\ 11^{2\gamma}$$

Что же касается чиселъ второго класса, то въ нихъ участвуетъ два множителя типа $5 \equiv 13 \equiv 1 \pmod 4$; а потому, на основанiи той же теоремы 1 они могутъ быть двухъ типовъ:

$$n_2 = 3^{2\alpha}\ 5^{4\beta+1}\ 13^{2\gamma}$$
$$n_3 = 3^{2\alpha}\ 5^{2\beta}\ 13^{4\gamma+1}$$

---

[1]) Можно было-бы показать невозможность существованiя совершенныхъ чиселъ этого класса при помощи неравенства:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(3^a)}{3^a} \cdot \frac{s(7^b)}{7^b} \cdot \frac{s(11^c)}{11^c} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} = \frac{77}{80} < 1\ .$$

2. Невозможность типовъ n_1 и n_2.

Пусть
$$n_1 = 3^{2\alpha}\,5^{4\beta+1}\,11^{2\gamma}$$
$$n_2 = 3^{2\alpha}\,5^{4\beta+1}\,13^{2\gamma}$$

Нижнiе предѣлы показателей на основанiи теоремы 1-ой будутъ въ обоихъ случаяхъ:
$$\lambda = 2 \qquad \mu = 1 \qquad \nu = 2.$$

Примѣняемъ къ нимъ критерiй теоремы 6 (о повышенiи нижняго предѣла). Показатель ν не можетъ быть повышенъ этимъ прiемомъ; но что касается показателей λ и μ, то мы получимъ:
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(3^2)}{3^2}\cdot 5\cdot 11 - 4\cdot 10 = -\frac{5}{18} < 0$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(3^2)}{3^2}\cdot 5\cdot 13 - 4\cdot 12 = -\frac{19}{18} < 0$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(5)}{5}\cdot 3\cdot 11 - 2\cdot 10 = -\frac{1}{5} < 0$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s(5)}{5}\cdot 3\cdot 13 - 2\cdot 12 = -\frac{3}{5} < 0$$

Поэтому нижнiе предѣлы показателей у 3 и 5 соотвѣтственно больше 2 и 1; такъ какъ нижнiе предѣлы эти принадлежатъ соотвѣтственно къ опредѣляющимъ сравненiямъ
$$x \equiv 0 \pmod{2} \qquad x \equiv 1 \pmod{4}$$
то за нижнiе предѣлы показателей въ обоихъ случаяхъ мы можемъ принять:
$$\lambda' = 4 \qquad \mu' = 5 \qquad \nu' = 2.$$

Примѣняя теорему 5, найдемъ:
$$U_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{s(3^4)}{3^4}\cdot\frac{s(5^5)}{5^5}\cdot\frac{s(11^2)}{11^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{121}{18}\cdot\frac{3906}{3125}\cdot\frac{133}{121} = \frac{259749}{253125} > 1$$
$$U_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{s(3^4)}{3^4}\cdot\frac{s(5^5)}{5^5}\cdot\frac{s(13^2)}{13^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{121}{81}\cdot\frac{3906}{3125}\cdot\frac{183}{169} = \frac{86490558}{85556250} > 1$$

Отсюда выводимъ заключеніе о невозможности совершенныхъ чиселъ типа n_1 и n_2. Вмѣстѣ съ тѣмъ доказываемъ предложеніе:

Теорема 9. Если существуетъ нечетное трехчленное совершенное число, то оно можетъ быть только типа

$$N = 3^{2\alpha}\, 5^{2\beta}\, 13^{4\gamma+1}$$

VII. Невозможность трехчленнаго совершеннаго числа.

Теорема 10. [1]) Не существуетъ трехчленнаго совершеннаго числа.

Допустимъ, что такое число существуетъ; по теоремѣ 9 оно должно быть типа

$$N = 3^{2\alpha}\, 5^{2\beta}\, 13^{4\gamma+1}$$

и на основаніи теоремы 1 мы можемъ положить за нижніе предѣлы показателей

$$\lambda = 2 \qquad \mu = 2 \qquad \nu = 1$$

Примѣнивъ критерій теоремы 6 (о повышеніи нижняго предѣла), мы можемъ повысить только нижній предѣлъ показателя у 3. Дѣйствительно, какъ мы уже видѣли,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(3^2)}{3^2} \cdot 5 \cdot 13 - 4 \cdot 12 = -\frac{19}{18} < 0.$$

Поэтому за нижніе предѣлы показателей мы можемъ взять:

$$\lambda' = 4 \qquad \mu' = 2 \qquad \nu' = 1$$

Примѣненіе критерія теоремы 5 не даетъ въ этомъ случаѣ нужнаго результата, ибо

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{s(3^4)}{3^4} \cdot \frac{s(5^2)}{5^2} \cdot \frac{s(13)}{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{121}{81} \cdot \frac{31}{25} \cdot \frac{14}{13} =$$

$$= \frac{52514}{52650} < 1. \tag{47}$$

Поэтому примѣняемъ теорему 7, замѣтивъ предварительно, что если число этого типа N совершенно и имѣетъ форму

$$N = 3^a\, 5^b\, 13^c$$

---

[1]) Указаніе на то, что это число нечетное, несущественно, ибо какъ извѣстно не можетъ быть трехчленныхъ четныхъ совершенныхъ чиселъ.

то

$$\left.\begin{array}{l} a \geqslant 4 \\ b \geqslant 2 \\ c \geqslant 1 \end{array}\right\} \qquad (48)$$

Вслѣдствіе неравенствъ (48) и на основаніи теоремы 4, мы получаемъ, что при любыхъ a, b, c, удовлетворяющихъ этимъ неравенствамъ,

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} \cdot \frac{s(r^c)}{r^c} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{s(5^2)}{5^2} \cdot \frac{s(13)}{13} = \frac{434}{650} \\ B = \frac{1}{2} \cdot \frac{s(r^c)}{r^c} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{s(13)}{13} \cdot \frac{s(3^4)}{3^4} = \frac{1694}{2106} \\ C = \frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^a)}{p^a} \cdot \frac{s(q^b)}{q^b} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{s(3^4)}{3^4} \cdot \frac{s(5^2)}{5^2} = \frac{3751}{4050} \end{array}\right| \qquad (49)$$

Числа въ правой части неравенствъ удовлетворяютъ условію:

$$\frac{p-1}{p} = \frac{2}{3} < \frac{434}{650} \leqslant A$$

$$\frac{q-1}{q} = \frac{4}{5} < \frac{1694}{2106} \leqslant B$$

$$\frac{r-1}{r} = \frac{12}{13} < \frac{3751}{4050} \leqslant C$$

Поэтому теорема 7 можетъ быть примѣнена и мы получимъ:

$$3^a \leqslant \frac{\frac{434}{650}}{\frac{434}{650} \cdot 3 - 2} = 217$$

$$5^b \leqslant \frac{\frac{1694}{2106}}{\frac{1694}{2106} \cdot 5 - 4} = 36^{38}/_{46}$$

$$13^c \leqslant \frac{\frac{3751}{4050}}{\frac{3751}{4050} \cdot 13 - 12} = 23^{2}/_{163}$$

а потому a, b и c удовлетворяютъ условіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant 4 \\ b \leqslant 2 \\ c \leqslant 1 \end{array}\right\} \qquad (50)$$

Сопоставляя неравенства (48) и (50), находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{array}\right\} \qquad (51)$$

а потому единственное трехчленное совершенное число должно быть:

$$N = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13.$$

Но если это число совершенное,

$$\frac{1}{2}\ \frac{s(3^4)}{3^4} \cdot \frac{s(5^2)}{5^2} \cdot \frac{s(13)}{13} = 1. \qquad (52)$$

Равенство (52) противорѣчитъ неравенству (47), что доказываетъ предложеніе.

Изданія Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ:

Труды IV-го съѣзда русскихъ академическихъ организацій за границей. 1929. Часть 1. (Науки гуманитарныя) **и 2** (Науки матем., ест.-ист. и техн.). — Цѣна 160 динаровъ или 80 динаровъ каждая часть отдѣльно.

Матеріалы для библіографіи русскихъ научныхъ трудовъ за рубежомъ. Выпускъ 1. 1931. — Цѣна 55 динаръ (1 долларъ)

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 1. 1930. — Цѣна 55 динаровъ.

А. Л. Погодинъ. Замѣтки объ изученіи былинъ.—И. И. Лаппо. Уравненіе правъ В. К. Литовскаго и Короны Польской въ 1697 году. — Ѳ. В. Тарановскій. Предметъ и задача т. н. внѣшней исторіи права.— О. О. Марковъ. Статутъ города Котора. — В. В. Розенбергъ. Защита чистаго и прикладного искусства. — А. Н. Макаровъ Вопросы кодификаціи основныхъ законовъ въ трудахъ комиссій XVIII вѣка. — Е. В. Аничковъ. Герценъ и Чернышевскій. — М. В. Шахматовъ. Государственно-національныя идеи „Чиновныхъ книгъ“. — Е. Ф. Шмурло. С. М. Соловьевъ — С. Л. Франкъ. Онтологическое доказательство бытія Бога.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 2. 1930. — Цѣна 30 динаровъ.

А. А. Брандтъ. Объ аксіоматикѣ теоремы Карно и второго закона термодинамики. — В. Х. Даватцъ. Объ одномъ свойствѣ окружностей. — А. И. Косицкій. Объясненіе измѣненія расхода двигателя внутренняго сгоранія. — Н. А. Пушинъ и М. Г. Каухчевъ. Электролит. гипохлоритная станція Петроград. водопроводовъ. — В. Э. Мартино. Замѣтки по экологіи млекопитающихъ Югославіи. — Н. В. Краинскій. Геометрич. и физич. основы морфологіи. — Г. Н. Піо-Ульскій. Исторія и соврем. направленіе прогресса паровой техники. — В. В. Фармаковскій. Тяговая характеристика турбо-паровозовъ и тепловозовъ. — Ан. Д. Билимовичъ. Объ уравненіи механики по отношенію къ главнымъ осямъ. — Г. Г. Злоковичъ Принципы почвообразов. въ работахъ А. И. Набокихъ.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 3. 1931. — Цѣна 55 динаровъ

Е. Шмурло. Русскіе католики конца XVII вѣка (съ факсимиле). — А. Л. Погодинъ. А. И. Соболевскій. — Н. Лосскій. Русская философія въ XX вѣкѣ. — Ал. Маклецовъ. Проблема преступленія въ русской художественной литературѣ. — Е. В. Аничковъ. Къ религіознымъ воззрѣніямъ нашихъ шестидесятниковъ. — В. В. Шахматовъ. Купчія грамоты Московской Руси. — В. В. Розенбергъ. Правовыя и экономическія идеи до и послѣ войны. — Е. В. Спекторскій. Бенжаменъ Констанъ и Фюстель де Куланжъ. — А. А. Кизеветтеръ. Первый курсъ В. О. Ключевскаго 1873—74 г. — Р. К. Дрейлингъ. Воинскій Уставъ Петра Великаго и Суворовъ. — П. А. Остроуховъ. Объ источникахъ и методахъ изученія торговли на Нижегородской ярмаркѣ въ XIX вѣкѣ до эпохи великихъ реформъ.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 4 1931. — Цѣна 55 динаровъ.

Г. Г. Злоковичъ. Н. И. Васильевъ (некрологъ). — В. В. Фармаковскій. К. Д. Серебряковъ (некрологъ). — В. Х. Даватцъ. Къ вопросу объ огибающихъ семейства плоскихъ кривыхъ, зависящихъ отъ одного параметра. — Н. Н. Салтыковъ. Интегрированіе уравненій съ частными производными по способу измѣненій произвольныхъ постоянныхъ. — В. Жардецкій. О перманентномъ вращеніи изолированной жидкой массы. — Д. П. Рузскій. Работа центробѣжнаго насоса при перемѣнныхъ условіяхъ. — Г. Н. Піо-Ульскій. О раціональномъ опредѣленіи коэффиціента полезнаго дѣйствія паровыхъ турбинъ. — А. Фанъ-деръ-Флитъ. Статически неопредѣлимый стержневой четырехугольникъ съ двумя проволочными діагоналями и съ шарнирами въ углахъ. — В. В. Фармаковскій. О выборѣ наивыгоднѣйшаго подъема при проектированіи желѣзнодорожныхъ линій. — Н. П. Абакумовъ. Относительная поправка на деформацію цѣпной линіи при измѣреніи базиса инварными проволоками. — А. А. Нилусъ. Наука и ея примѣненія въ военномъ дѣлѣ. — Л. В. Черносвитовъ. Резорбція мужскихъ половыхъ продуктовъ и ея значеніе для организма. — В. Мартино. Объ измѣненіи окраски мѣха у млекопитающихъ Югославіи. — Н. В. Краинскій. Электростатическія изслѣдованія и ихъ примѣненіе къ біологіи. — М. Н. Лапинскій. Активаторы психическихъ функцій. — Г. Г. Злоковичъ. Нѣкоторыя данныя по морфологіи почвъ Ананьевскаго уѣзда. — Я. Хлытчіевъ. О гипотезѣ Журавскаго.— И. С. Свищевъ Контроли правильности составленія условныхъ и нормальныхъ уравненій при уравненіи нивеллирныхъ сѣтей способомъ наименьшихъ квадратовъ. — А. А. Брандтъ. Очеркъ исторіи примѣненія паровыхъ двигателей въ Россіи со времени ихъ появленія до 1875 года.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 5. 1931.— Цѣна 55 динаровъ.

Л. М. Сухотинъ. Къ пересмотру вопроса объ опричнинѣ. — Н. Н. Афанасьевъ. Провинціальныя собранія Римской Имперіи и Вселенскіе Соборы. — К. І. Зайцевъ Крѣпостной земельный строй Россіи XVI—XVIII вв. и отраженіе его въ сочиненіяхъ Посошкова. — И. И. Лапшинъ О схематизмѣ творческаго воображенія въ наукѣ. — Н. Лосскій. Интуитивизмъ и ученіе о транссубъективности чувственныхъ качествъ. — И. В Пузино. Религіозно-философскія воззрѣнія Джіованни Пико делла Мирандола. — А. Л. Погодинъ. Наблюденія надъ техникой народной лирики.— А. М. Петрункевичъ. Фюстель де Куланжъ. — С. В. Троицкій. Нелегальное кровное родство какъ препятствіе къ браку. — Г. А. Острогорскій. Аѳонскіе исихасты и ихъ противники. — С Л. Волкобрунъ. Къ вопросу о процессуальной право и дѣеспособности въ чешскомъ земскомъ правѣ. — М. А. Иностранцевъ. Вооруженныя силы, планы сторонъ и стратегическое развертываніе на русскомъ фронтѣ въ Міровую Войну.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ Выпускъ 6. 1932 — Цѣна 35 динаровъ.

Н. Н. Салтыковъ. Способы Монжа-Ампера и Дарбу интегр. ур. съ частн. производн. второго порядка и ихъ обобщеніе. — О. Л Струве. Ѳ. А. Бредихинъ. — В. Жардецкій. Нѣкот. замѣчанія объ ур. движенія неоднородной непрерывной среды. — В. В. Фармаковскій. О выборѣ наивыгоднѣйшаго подъема при проектированіи желѣзнодорожныхъ линій.— Д. В. Фростъ Къ теоріи магнитометрической развѣдки —Т. В. Локоть. Идеи Менделя въ современномъ менделизмѣ. — М. Н. Лапинскій. Боль и ея сосудный механизмъ. — Н. Е. Акацатовъ. Туберкулезная и чахоточныя проблемы — Ю. Н. Вагнеръ. Замѣтка о интерсегментальныхъ лопастяхъ измѣненныхъ сегментовъ у самцовъ блохъ — Н Н. Салтыковъ. Жизнь и ученые труды Д. Ф. Селиванова.— Ан. Д. Билимовичъ. О вращеніи произвольной матеріальной системы какъ цѣлаго.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 7. 1932. — Цѣна 55 динаровъ.

Е. Ф. Шмурло. Посольство Чемоданова и Римская Курія. — А. Н. Фатѣевъ. Сводъ законовъ и его творецъ. (Къ столѣтію перваго изданія 1832 года). — А. Л. Погодинъ. Варяги и Русь. — А. В. Соловьевъ. Исторія русскаго монашества на Аѳонѣ. — М. А. Георгіевскій. Еврейская община Новаго Завѣта въ г. Дамаскѣ. — В. В. Розенбергъ Коммерціализація и концентрація современной періодической печати. — Ал. Д. Билимовичъ. Вопросъ о предсказаніи урожая. — Е. В. Спекторскій. Мѣсто Гегеля въ исторіи философіи. — Н. В. Краинскій. Логическія ошибки и заблужденія въ научномъ творчествѣ — А. В. Соловьевъ. Кара за убійство въ византійскомъ и славянскомъ правѣ. — П. Б. Струве. К А. Неволинъ и А А. Куникъ. Эпизодъ изъ исторіи русской науки.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 8. 1933 Цѣна 35 динаровъ.

Г. Н. Піо-Ульскій. Памяти проф. А. А. Брандта (съ портр.). — Н. Абакумовъ. Вліяніе тренія въ блокахъ базиснаго прибора Едерина на измѣряемое разстояніе. — В. Жардецкій. Трансформація Клебша и малыя колебанія жидкости. — Я. Хлытчіевъ. Перемѣщеніе точекъ деформированнаго тѣла (памяти И. Г. Бубнова). — В. Н. Болдыревъ. Сахарная болѣзнь и простуда. — Н. В. Краинскій. Механизмъ нервной дѣятельности и роль вегетативной нервной системы (съ 1 табл.). — В. В. Фармаковскій. Наивыгоднѣйшая скорость и наивыгоднѣйшій вѣсъ товарныхъ поѣздовъ. — А. И. Косицкій. Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія процесса двигателей внутренняго сгоранія. — Т. В. Локоть. Изъ біологіи культурныхъ растеній. — Г. Н. Піо-Ульскій. Замѣтка о коэффиціентѣ полезнаго дѣйствія газовыхъ машинъ.

Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 9. 1933. — Цѣна 55 динаровъ.

Е. Максимовичъ. Церковно-земскій соборъ 1549-го года. — С. Г. Пушкаревъ. Цѣловальники въ судѣ и управленіи Московской Руси. — П. А Остроуховъ. Торговля чаемъ на нижегородской ярмаркѣ въ XIX столѣтіи до эпохи великихъ реформъ. — А А. Олесницкій. Первыя боевыя встрѣчи въ XV вѣкѣ турокъ-османовъ съ Русью. — А. Л. Погодинъ. „Иванъ Выжигинъ“, романъ Фаддея Булгарина. — Л. Тауберъ. Лига Націй и юридическій статутъ русскихъ бѣженцевъ. — А. В. Маклецовъ. Мѣры защиты въ югославянскомъ уголовномъ правѣ. — В. В. Розенбергъ. Научная собственность. — Н. Лосскій. Гегель какъ интуитивистъ. — В. В. Зѣньковскій. Русская педагогика въ XX столѣтіи.

Складъ изданій: 1) Руски Научни Институт, Београд, Краљице Наталије ул., (Руски Дом Цара Николе II.) — Institut Russe, Beograd (Jugoslavija), Kraljice Natalije ul., 33 (Ruski dom cara Nikole II). — 2) Књижара „Возрожденије“, Београд, Добрињска ул., 12. — Knjižara „Vozroždenije“ Beograd. Dobrinjska ul., 12.